

Exo 1:

$$1) \sum \vec{F}_{\text{ext}} = m \vec{a}$$

- théorème du moment cinétique

$$\frac{d}{dt} [L_0(\text{solide})] = \sum_i \mathcal{M}_O(\vec{F}_i) = \vec{J}_O \ddot{\theta}$$

$$\text{donc } \sum_i \mathcal{M}_O(\vec{F}_i) = \vec{J}_O \ddot{\theta}$$

$L_0(\text{solide})$ moment cinétique du solide / O

$\mathcal{M}_O(\vec{F}_i)$: moment de $\vec{F}_i$ / O

$\vec{J}_O$: moment d'inertie du solide / O

$\ddot{\theta}$: accélération angulaire / O

$$2) \vec{J}_O = \int r^2 dm$$

Ex: masse ponctuelle:

$$\vec{J}_O = \int r^2 dm = 0$$

un cercle:

$$\vec{J}_O = \int r^2 dm = \int r^2 (\lambda dl) = \int_0^{2\pi} r^2 \lambda r d\theta$$

$$\Rightarrow \vec{J}_O = r^3 \lambda 2\pi = r^2 (2\pi \lambda r) = r^2 M$$

$$\Rightarrow \vec{J}_O = M r^2$$

• forme cylindrique:

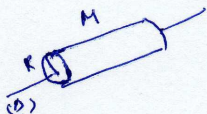
cylindre en anneau

$$\sigma = \frac{dm}{dS}$$

$$\vec{J}_O = \int R dm = \int \int R \sigma dS$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^R R \sigma r dr d\theta = R \sigma \int_0^{2\pi} R d\theta = R^2 \sigma 2\pi$$

$$\vec{J}_O = M R^2$$



M: masse du cylindre

R: rayon

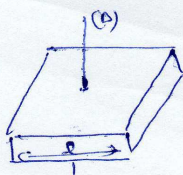
* Cylindre plein en disque:

$$\rho = \frac{dm}{dV} \Rightarrow dm = \rho dV$$

$$\vec{J}_O = \frac{1}{2} M R^2$$

parallélépipède:

$$\vec{J}_O = \frac{M l^2}{12}$$



3) Théorème de Huygens:

$$\vec{J}_A = \vec{J}_G + m a^2$$

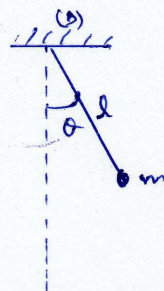
(G): axe passant par le centre de gravité du solide.

(A) axe // (G)

a: distance entre (A) et G

M: Masse du solide.

ex:



$$\vec{J}_O = \vec{J}_G + m a^2 \Rightarrow \vec{J}_O = m l^2$$

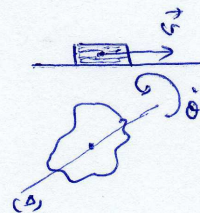
un cercle:

$$\vec{J}_A = \vec{J}_O + m a^2 = m r^2 + m r^2 = 2 m r^2$$

4)

$$E_{\text{cin}} = \frac{1}{2} m v^2$$

$$E_{\text{cin}} = \frac{1}{2} \vec{J}_O \dot{\theta}^2$$



Exo 2 :

La série de Taylor d'une fonction $f(x)$

au point x_0 est de la forme :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0).$$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \dots$$

$$\sin(x) = \sin(x_0) + \frac{x-x_0}{1!} \cos(x_0) - \frac{(x-x_0)^2}{2!} \sin(x_0) + \dots$$

$$x_0 = 0 \Rightarrow \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

$$\Rightarrow \sin x = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}$$

$$\cos x = \cos x_0 - \frac{x-x_0}{1!} \sin x_0 + \frac{(x-x_0)^2}{2!} \cos x_0 - \dots$$

$$x_0 = 0$$

$$\Rightarrow \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$\Rightarrow \cos x = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!}$$

$$* e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{autour } x_0 = 0$$

L'identité d'Euler pour $x_0 = 0$

$$e^{jx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(jx)^n}{n!} = 1 + jx + \frac{x^2}{2!} + j\frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\Rightarrow e^{jx} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \dots\right) + j\left(x - \frac{x^3}{3!} + \dots\right)$$

$$\text{si } n = 2p+1 \Rightarrow j^{2p+1} = (-1)^p j$$

$$\text{si } n = 2p \Rightarrow j^{2p} = (-1)^p$$

alors :

$$e^{jx} = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + j \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}$$

$$\Rightarrow e^{jx} = \cos x + j \sin x$$

Exo 3

$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$x_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

par la méthode des nombres complexes

on trouve la somme $x = x_1 + x_2$

x_1 est la partie réelle de $\bar{x}_1$

$$\bar{x}_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + j A_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$$

$$= A_1 (\cos(\omega t + \varphi_1) + j \sin(\omega t + \varphi_1))$$

on utilise le formalisme d'Euler.

$$e^{jx} = \cos x + j \sin x$$

$$\Rightarrow \bar{x}_1 = A_1 e^{j(\omega t + \varphi_1)} = A_1 e^{j\omega t} \cdot e^{j\varphi_1}$$

$$\text{on considère } \bar{A}_1 = A_1 e^{j\varphi_1}$$

$$\text{donc } \bar{x}_1 = \bar{A}_1 e^{j\omega t}$$

de même :

$$x_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \rightarrow \bar{x}_2(t) = \bar{A}_2 e^{j\omega t}$$

$$\text{alors } x = x_1 + x_2 \rightarrow \bar{x}_1 + \bar{x}_2 = \bar{x}$$

$$\bar{x} = \bar{A} e^{j\omega t} \quad x = A e^{j\omega t}$$

$$\bar{x} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 = (\bar{A}_1 + \bar{A}_2) e^{j\omega t} = \bar{A} e^{j\omega t}$$

$$A = |\bar{A}| = |\bar{A}_1 + \bar{A}_2|$$

$$= |A_1 \cos \varphi_1 + j A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2 + j A_2 \sin \varphi_2|$$

$$= |A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2 + j(A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2)|$$

$$A = \sqrt{(A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2)^2 + (A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2)^2}$$

$$= \sqrt{A_1^2 \cos^2 \varphi_1 + A_2^2 \cos^2 \varphi_2 + 2 A_1 A_2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + A_1^2 \sin^2 \varphi_1 + A_2^2 \sin^2 \varphi_2 + 2 A_1 A_2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2}$$

$$= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 A_2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2)}$$

$$= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

$$\varphi = \arg(\bar{A}) = \arctg \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}$$

$$\varphi = \arctg \frac{\text{Im}(\bar{A}_1 + \bar{A}_2)}{\text{Re}(\bar{A}_1 + \bar{A}_2)} \Rightarrow$$

$$\text{AN: } x_1 = 3 \cos t \Rightarrow A_1 = 3 \text{ et } \varphi_1 = 0, \omega = 1$$

$$x_2 = 4 \sin t = 4 \cos(t - \pi/2) \Rightarrow A_2 = 4, \varphi_2 = -\pi/2$$

$$x_1 + x_2 = 3 \cos t + 4 \cos(t - \pi/2)$$

$$\Rightarrow A = \sqrt{3^2 + 4^2 + 2 \times 3 \times 4 \cos(0 - (-\pi/2))} = 5$$

$$\tan \varphi = \frac{3 \sin(0) + 4 \sin(-\pi/2)}{3 \cos 0 + 4 \cos(-\pi/2)} = -4/3$$

$$\varphi = \arctg(-4/3) =$$

Exo 4:

$$f(t) = \begin{cases} +1 & -\pi < t \leq 0 \\ \frac{1}{\pi}t + 1 & 0 \leq t < \pi \end{cases}$$

Serie de Fourier:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt$$

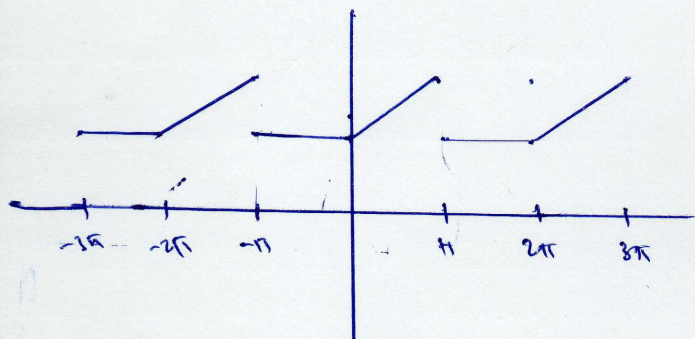
$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega t) dt$$

Si $f(t)$ pair $\Rightarrow b_n = 0$, $f(t)$ impair $\Rightarrow a_n = 0$
 $a_0 = 0$

$f(t)$ n'est ni pair ni impair $\Rightarrow$

il faut calculer a_0, a_n, b_n .



$$T = 2\pi \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = 1 \text{ alors:}$$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 f(t) dt + \int_0^{\pi} f(t) dt \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 1 dt + \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{\pi}t + 1 \right) dt \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[(0 + \pi) + \left[\frac{1}{2\pi}t^2 + t \right]_0^{\pi} \right] = \frac{1}{\pi} \left(\pi + \pi + \pi \right) \\ &= \frac{3\pi}{\pi} = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 \cos nt dt + \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{\pi}t + 1 \right) \cos nt dt \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\left[\frac{1}{n} \sin nt \right]_{-\pi}^0 + I \right] = \frac{1}{\pi} \left(0 - \frac{1}{n} \sin(-n\pi) + I \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{n} \sin n\pi + I \right) \end{aligned}$$

$$I = \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{\pi}t + 1 \right) \cos nt dt$$

$$(AB)' = A'B + AB' \Rightarrow \int (AB)' = \int A'B + \int AB'$$

$$\Rightarrow I = \left[\left(\frac{1}{\pi}t + 1 \right) \left(\frac{1}{n} \sin nt \right) \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{n} \sin nt dt$$

$$\Rightarrow I = \left(\frac{2}{n} \sin n\pi - 0 \right) + \frac{1}{n^2\pi} \cos nt \Big|_0^{\pi}$$

$$\Rightarrow I = \frac{2}{n} \sin n\pi + \frac{1}{n^2\pi} \cos n\pi - \frac{1}{n^2\pi}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{n} \sin n\pi + \frac{2}{n} \sin n\pi + \frac{1}{n^2\pi} \cos n\pi - \frac{1}{n^2\pi} \right)$$

$$\sin \text{ impair} \Rightarrow a_n = \frac{1}{\pi} \left(0 + \frac{2}{n^2\pi} \right) = \frac{2}{n^2\pi^2}$$

$$\sin \text{ pair} \Rightarrow a_n = \frac{1}{\pi} (0 + 0) = 0$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{2}{n^2\pi^2} \text{ impair}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 \sin nt dt + \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{\pi}t + 1 \right) \sin nt dt \right)$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\left[-\frac{1}{n} \cos nt \right]_{-\pi}^0 + I' \right)$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(-\frac{1}{n} + \frac{1}{n} \cos(-n\pi) + I' \right)$$

$$I' = \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{\pi}t + 1 \right) \sin nt dt$$

$$\Rightarrow I' = \left[\left(\frac{1}{\pi}t + 1 \right) \left(-\frac{1}{n} \cos nt \right) \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{1}{\pi} \cdot \left(-\frac{1}{n} \cos nt \right) dt$$

$$I' = \left(-2 \cdot \frac{1}{n} \cos n\pi + \frac{1}{n} \right) + \frac{1}{n^2\pi} \sin nt \Big|_0^{\pi}$$

$$I' = \left(-\frac{2}{n} \cos n\pi + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2\pi} \sin n\pi \right)$$

$\Rightarrow$ ~~Si~~ $\sin$ pair

$$\Rightarrow b_n = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{n} \sin n\pi + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2\pi} \sin n\pi - \frac{2}{n} \cos n\pi \right)$$

$\sin$ pair $\Rightarrow$

$$\Rightarrow b_n = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n} \right) = -\frac{1}{n\pi}$$

$$\sin \text{ impair} \Rightarrow b_n = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} \right) = \frac{3}{n\pi}$$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{3}{4} + \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{-2}{(2p+1)^2\pi^2} \cos((2p+1)t) + \sum_{p=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2p\pi} \right) \sin((2p+1)t) + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{3}{(2p+1)\pi^2} \sin((2p+1)t) \right)$$

pts de discontinuite $d = (2p+1)\pi$

$$\text{alors } s(d) = \frac{f(d^+) + f(d^-)}{2} = \frac{3}{2}$$

Exo 6

$$\ddot{y} + 5\dot{y} + 4y = f(t)$$

$f(t)$ est une fonction carré

$$f(t) = \begin{cases} -1 & -\pi < t \leq 0 \\ +1 & 0 \leq t < \pi \end{cases}$$

$f(t)$ périodique $\rightarrow$ la série de Fourier

$$\text{est: } f(t) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{4}{(2p+1)\pi} \sin((2p+1)t)$$

les deux premiers termes sont

$$S(t) \approx \frac{4}{\pi} \left(\sin t + \frac{1}{3} \sin 3t \right)$$

$$\text{alors: } \ddot{y} + 5\dot{y} + 4y = \frac{4}{\pi} \left(\sin t + \frac{1}{3} \sin 3t \right)$$

$$\Rightarrow \ddot{y} + 5\dot{y} + 4y = \frac{4}{\pi} \left(\cos(t - \pi/2) + \frac{1}{3} \cos(3t - \pi/2) \right)$$

La solution est la somme de la solution homogène + solution particulière.

$$y(t) = y_h + y_p$$

y_h est la solution de l'équation:

$$\ddot{y} + 5\dot{y} + 4y = 0 \rightarrow r^2 + 5r + 4 = 0$$

$$\Delta = (5)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 25 - 16 = 9$$

$$r_1 = \frac{-5 + \sqrt{9}}{2} = -1, r_2 = \frac{-5 - \sqrt{9}}{2} = -4$$

$$\Rightarrow y_h(t) = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-4t}$$

$$y_p(t) = y_1 + y_2 \quad \text{avec}$$

y_1, y_2 sont les solutions particulières de

$$\ddot{y}_1 + 5\dot{y}_1 + 4y_1 = \frac{4}{\pi} \cos(t - \pi/2)$$

$$\ddot{y}_2 + 5\dot{y}_2 + 4y_2 = \frac{4}{3\pi} \cos(3t - \pi/2)$$

on utilise la méthode des nombres complexes

$$y_1(t) \rightarrow \overline{y}_1(t) = \overline{B} e^{jt} / \overline{B} = B e^{j\varphi_1}$$

$$y_2(t) \rightarrow \overline{y}_2(t) = \overline{D} e^{j3t} / \overline{D} = D e^{j\varphi_2}$$

$$\frac{4}{\pi} \cos(t - \pi/2) \rightarrow \frac{4}{\pi} e^{-j\pi/2} e^{jt}$$

$$\frac{4}{3\pi} \cos(3t - \pi/2) \rightarrow \frac{4}{3\pi} e^{-j\pi/2} e^{j3t}$$

$$\text{alors: } \ddot{y} + 5\dot{y} + 4y = \frac{4}{\pi} e^{jt - j\pi/2}$$

$$\Rightarrow \overline{y}_1 = \overline{B} e^{jt} \rightarrow \ddot{\overline{y}}_1 = j^2 \overline{B} e^{jt} \rightarrow \ddot{\overline{y}}_1 = -\overline{B} e^{jt}$$

$$\Rightarrow -\overline{B} e^{jt} + 5j \overline{B} e^{jt} + 4 \overline{B} e^{jt} = \frac{4}{\pi} e^{jt - j\pi/2}$$

$$\Rightarrow \overline{B} (3 + 5j) = \frac{4}{\pi} e^{-j\pi/2}$$

$$\Rightarrow \overline{B} = \frac{4/\pi e^{-j\pi/2}}{3 + 5j} \quad B = |\overline{B}| = \frac{4/\pi}{\sqrt{34}}$$

$$\varphi_1 = \arg(\overline{B}) = \arg\left(\frac{4}{\pi} e^{-j\pi/2}\right) - \arg(3 + 5j)$$

$$= -\pi/2 - \arg(3 + 5j)$$

$$= -\pi/2 - \arctan(5/3) = -\pi/2 - \pi/3 = -5\pi/6$$

$$\Rightarrow y_1(t) = \frac{4}{\pi\sqrt{34}} \cos(t - 5\pi/6)$$

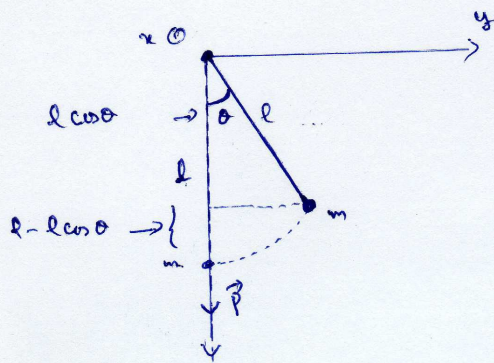
* de même on trouve $y_2(t) = \frac{2}{75} \cos(3t - 4,4)$

Finalement on trouve :

$$y(t) = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-4t} + \frac{4}{\pi\sqrt{34}} \cos(t - \frac{5\pi}{6}) + \frac{2}{75} \cos(3t - 4,4)$$

$$* \text{ pour } A_1 \text{ et } A_2 \rightarrow \text{C.S.} = \begin{cases} y(0) = 1 \\ \dot{y}(0) = 0 \end{cases}$$

Exo 7:



$$N_d = S = 3N_p - N_c$$

Les liens appliqués au pendule simple

$$\text{sont } \begin{cases} x=0 \\ y^2 + z^2 = l^2 \end{cases}$$

et puisque la masse m est ponctuelle

→ nécessite 3 cord donc : $N_d = S = 3 \times 1 - 2 = 1$

→ 1 degré de liberté.

Le pendule décrit un cercle de centre O .

⇒ on localise m par l'angle que fait par le pendule avec qu'on note θ .

⇒ la coordonnée généralisée θ

• On cherche U le potentiel gravitationnelle de m .

U ne dépend que de z alors :

$$\vec{P} = -\vec{\text{grad}} U \Rightarrow mg = -\frac{dU}{dz}$$

$$\Rightarrow U(z) = -mgz + U(l)$$

en fonction de θ :

$$U(\theta) = mgl(1 - \cos\theta) + U(0)$$

Si on choisit $\theta=0$ comme origine.

$$\Rightarrow U(\theta) = mgl(1 - \cos\theta)$$

Le système sera en équilibre si :

$$\frac{dU}{d\theta} = 0 \Rightarrow mgl \sin\theta = 0$$

$$\Rightarrow \theta = 0 \text{ ou } \theta = \pi$$

Le système est instable si

$$\frac{d^2U}{d\theta^2} < 0 \Rightarrow mgl \cos\theta < 0 \Rightarrow \theta = \pi$$

Le système est instable si

$$\frac{d^2U}{d\theta^2} > 0 \Rightarrow mgl \cos\theta > 0 \Rightarrow \theta = 0$$

le système effectue des mvt de petite amplitudes autour de $\theta = 0$

On développe $U(\theta)$ au voisinage de $\theta = 0$

on aura :

$$U(\theta) = mgl \left[1 - \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\theta^{2p}}{(2p)!} \right]$$

si $\theta \ll$ alors :

$$U(\theta) = mgl \left(1 - \left(1 - \frac{\theta^2}{2} \right) \right)$$

$$\Rightarrow U(\theta) = \frac{1}{2} mgl \theta^2$$

C'est la forme quadratique de $U(\theta)$

le lagrangien :

$$L = T - U = E_c - E_p = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} mgl \theta^2$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

• le pendule constitué d'un ressort et d'une masse ponctuelle est un système à 2 degrés de liberté mvt le long du ressort + mvt autour de O → 2 coordonnées

généralisées $q_1(t), q_2(t)$.

en coordonnée polaires nous aurons :

$$q_1(t) = r = l, \quad q_2(t) = \theta$$

la fonction de Lagrange sera $L(l, \theta)$

et les deux équations de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$