TD(GW) Series №1

Mathematical and physical background (remind)

Exercise №1:

Develop in Taylor series the functions: $sinx, cosx \ and \ e^x$ at the neighborhood of x_0. Verify Euler's identity for $x_0 = 0$ i.e.:

$$e^{jx} = cosx + isinx \qquad with \qquad i = \sqrt{-1} \text{ (Euler's relation)}$$

التمرين الأول:

أنشر الدوال : $e^x, cosx, sinx$ حسب منشور تايلور في جوار x_0 . تحقق من علاقة أولر من أجل $x_0 = 0$ أي:

$j = \sqrt{-1}$ ، $e^{jx} = cosx + isinx$ (علاقة أولر)

Exercise №2:

We consider the following two sinusoidal functions (simple harmonic oscillation):

$$x_1(t) = A_1 cos(\omega t + \varphi_1)$$
$$x_2(t) = A_2 cos(\omega t + \varphi_2)$$

Prove by the complex number method that $x = x_1 + x_2$ is also a sinusoidal function of pulsation (ω). Deduce the amplitude (A) and the initial phase (φ).

N.A: - $x_1(t) = 3cos(t)$ and $x_2(t) = 4sin(t)$

* - $x_1(t) = 2cos(t)$ and $x_2(t) = 3sin(t)$

*Find the sum of n simple harmonic oscillations (sho) having the same pulsation (ω), the same modulus (a) and a constant phase shift δ between two successive sho i.e.:

$$A\cos(\omega t + \varphi) = a\cos(\omega t) + a\cos(\omega t + \delta) + a\cos(\omega t + 2\delta) + \cdots\cdots\cdots\cdots + a\cos(\omega t + (n-1)\delta)$$

التمرين الثاني:

لدينا الدالتين الجيبيتين (إهتزاز توافقي بسيط) التاليتين:

$$x_1(t) = A_1\cos(\omega t + \varphi_1)$$
$$x_2(t) = A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$$

بين بطريقة الأعداد المركبة أن المجموع $x = x_1 + x_2$ دالة جيبية أيضا لها نفس النبض ω . أستنتج الطويلة والصفحة الابتدائية A و φ على التوالي لـ x .

ت.ع: - $x_1(t) = 3cos(t)$ و $x_2(t) = 4sin(t)$

* - $x_1(t) = 2cos(t)$ و $x_2(t) = 3sin(t)$

* جد مجموع n إهتزاز توافقي بسيط لها نفس النبض ω ونفس الطويلة a وفرق في الطور δ ثابت بين إهتزازين توفقيين متتاليين أي :

$$A\cos(\omega t + \varphi) = a\cos(\omega t) + a\cos(\omega t + \delta) + a\cos(\omega t + 2\delta) + \cdots\cdots\cdots\cdots + a\cos(\omega t + (n-1)\delta)$$

Exercise №3 :

1- Develop in Fourier series the following periodic function:

$$f(t) = \begin{cases} +1, & -\pi < t \le 0 \\ \frac{1}{\pi}t + 1, & 0 \le t \le \pi \end{cases}$$

2- *Is the equality always verified ?*

التمرين الثالث:

1- أنشر على شكل سلسلة فورييه الدالة الدورية التالية:

$$f(t) = \begin{cases} +1, & -\pi < t \le 0 \\ \frac{1}{\pi}t + 1, & 0 \le t \le \pi \end{cases}$$

2- هل المساواة محققة دوما؟

*** Exercise №4:**

Same questions for:

$$f(t)=\begin{cases}-\dfrac{2c}{\pi}t-c, & -\pi<t\le 0\\ \dfrac{2c}{\pi}t-c, & 0\le t\le\pi\end{cases}$$

$$f(t)\ =\ -t^2\ +\ \pi 2 \qquad -\pi\ \le\ t\ \le\ \pi$$

*** التمرين الرابع:**

نفس الأسئلة بالنسبة لـ:

$$f(t)=\begin{cases}+1, & -\pi<t\le 0\\ (1/\pi)\mathrm{t}\ +\ 1, & 0\le t\le\pi\end{cases}$$

$$f(t)\ =\ -t^2\ +\ \pi^2 \qquad -\pi\ \le\ t\ \le\ \pi$$

Exercise №5 :

Solve the following differential equation:

$$\ddot{y}+5\dot{y}+4y=f(t)\ \ with\ y(0)=1\ and\ \dot{y}(0)=0$$

and $$f(t)=\begin{cases}-1, & -\pi<t\le 0\\ +1, & 0\le t\le\pi\end{cases}$$

Remark: Only the first two terms of the Fourier series are considered.

التمرين الخامس:

حل المعادلة التفاضلية التالية:

$$\ddot{y}+5\dot{y}+4y=f(t) \qquad y(0)=1\ \text{و}\ \dot{y}(0)=0$$

$$f(t)=\begin{cases}-1, & -\pi<t\le 0\\ +1, & 0\le t\le\pi\end{cases}$$

ملاحظة: لا نأخذ بعين الاعتبار إلا الحدين الأولين في سلسلة فورييه لـ $f(t)$.

Exercise №6 :

- Give the expression of the fundamental law of dynamics. The theorem of the angular momentum of a solid in rotation around an axis Δ and define each term appearing there.
- Give the moment of inertia noted I with respect to the axis of symmetry Δ of a cylindrical and parallelepipedal shape of a solid.
- Give the Huygens theorem.
- Give the kinetic energy of a solid in translational motion, in rotational motion.

التمرين السادس:

- أعط عبارة قانون التحريك الأساسي. العزم الحركي لجسم صلب في حالة دوران حول محور Δ وعرف كل حد في العبارة
- أعط عبارة عزم العطالة لجسم صلب على شكل أسطواني ، متوازي المستطيلات بالنسبة لمحور تناظره.
- أعط نص نظرية هيوجنس
- أعط عبارة الطاقة الحركية لجسم صلب في حالة حركة انسحابية، حركة دورا نية

Exercise №7 :

Prove that the simple pendulum is a system with one degree of freedom. Make the appropriate choice of the generalized coordinate (denoted θ). Show that the system admits two equilibrium positions, one stable and the other unstable, and specify the value of θ for each case. If we admit that the system performs movements of small amplitudes around the position of stable equilibrium, give then the quadratic form of the potential as a function of θ. Then write the Lagrangian of the system.

How many degrees of freedom does a pendulum with a spring (rather than the inextensible wire) and a point mass have? Choose the generalized coordinates, then write the corresponding Lagrange equations without derivation.

التمرين السابع:

بين أن النواس البسيط جملة ذات درجة واحدة من الحرية. اختر الإحداثي المعمم الملائم لهذا النظام والذي نرمز له بـ θ. بين أن النظام يقبل وضعين للتوازن أحدها مستقر والآخر حرج مع تحديد قيمة θ لكل حالة. نقبل أن النظام يؤدي حركة ذات سعات صغيرة حول وضع التوازن المستقر ، جد إذن الشكل التربيعي للطاقة الكامنة بدلالة θ ثم أكتب دالة لاغرونج للنظام.

ما هو عدد درجات حرية النواس الذي يتركب من نابض عوضا عن السلك غير القابل للإمتطاط وكتلة نقطية تتصل بنهايته الطليقة. إختر الإحداثيات المعممة المناسبة ثم اكتب معادلات لاغرونج لهذا النظام دون إجراء الاشتقاقات.