



CHAPITRE IV

Ligne d'influence (Systèmes isostatiques)





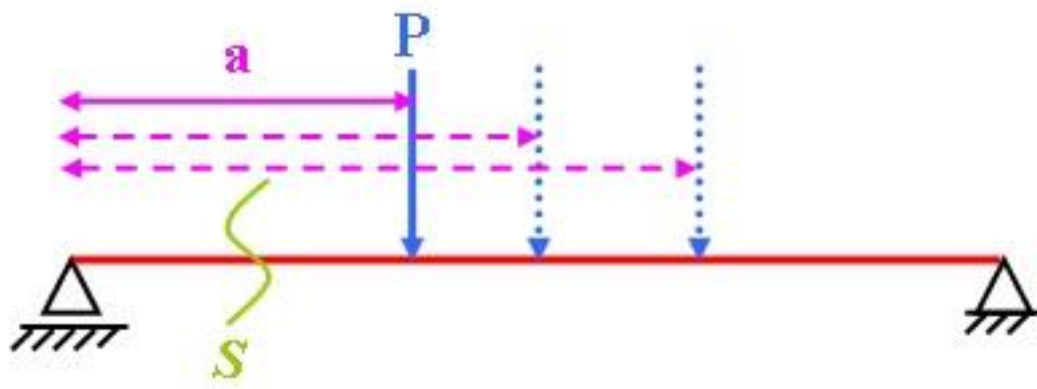
1- Introduction

Jusqu'à présent nous avons étudié des structures soumises à des charges immobiles. Mais il existe de nombreux cas où les constructions supportent des charges mobiles. L'exemple le plus commun est celui des ponts. Le chargement mobile étant dans ce cas représenté par l'action de la circulation des véhicules et des trains.

Afin de dimensionner correctement la structure, il est indispensable de trouver les positions de ces charges mobiles qui vont produire le maximum et le minimum d'un effet déterminé dans une section donnée d'un élément de la structure.

2- Généralités

Une ligne d'influence est la représentation graphique de l'évolution de la valeur d'un effort (moment de flexion, effort tranchant ou réaction d'appui, etc.), à un emplacement donné, due à une force unitaire mobile parcourant la structure.



3- Ligne d'influence des poutres isostatiques

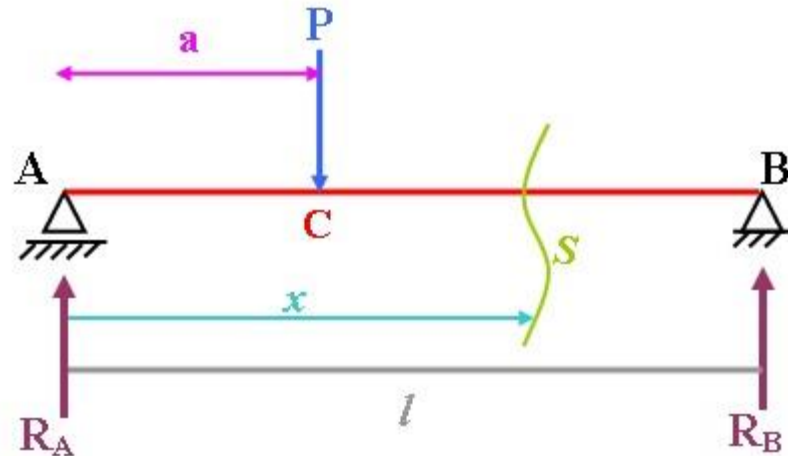
3-1-Effet d'une charge concentrée

Dans le cas où la charge « P » est fixe (la distance « a » est constante) et la section se déplace (« x » varie de 0 à l).

$$R_A = P \left(1 - \frac{a}{l} \right); \quad R_B = P \frac{a}{l}$$

$$T(x) = \begin{cases} P \left(1 - \frac{a}{l} \right) & \text{si } x < a \\ -P \frac{a}{l} & \text{si } x > a \end{cases}$$

$$M(x) = \begin{cases} Px \left(\frac{l-a}{l} \right) & \text{si } x < a \\ Pa \left(\frac{l-x}{l} \right) & \text{si } x > a \end{cases}$$



3- Ligne d'influence des poutres isostatiques

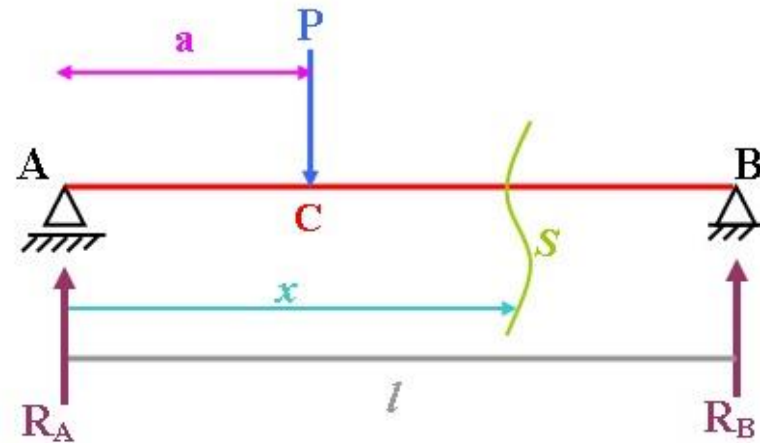
3-1-Effet d'une charge concentrée

Inversant la situation, la charge « P » se déplace (la distance « a » varie de 0 à l) et la section est fixe (« x » est constant). Avec les mêmes équations précédents.

$$R_A(a) = P \left(1 - \frac{a}{l} \right) \begin{cases} a = 0 \Rightarrow R_A = P \\ a = l \Rightarrow R_A = 0 \end{cases}$$

$$T(a) = \begin{cases} -P \frac{a}{l} & \text{si } a < x \\ P \left(1 - \frac{a}{l} \right) & \text{si } a > x \end{cases}$$

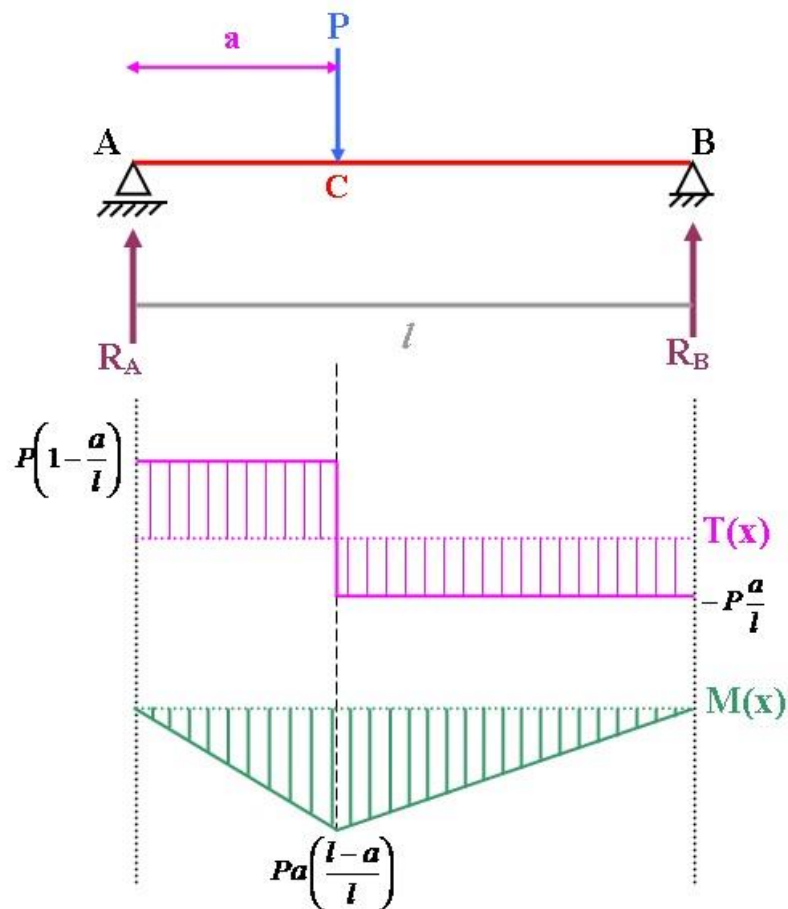
$$M(a) = \begin{cases} Pa \left(\frac{l-x}{l} \right) & \text{si } a < x \\ Px \left(\frac{l-a}{l} \right) & \text{si } a > x \end{cases}$$



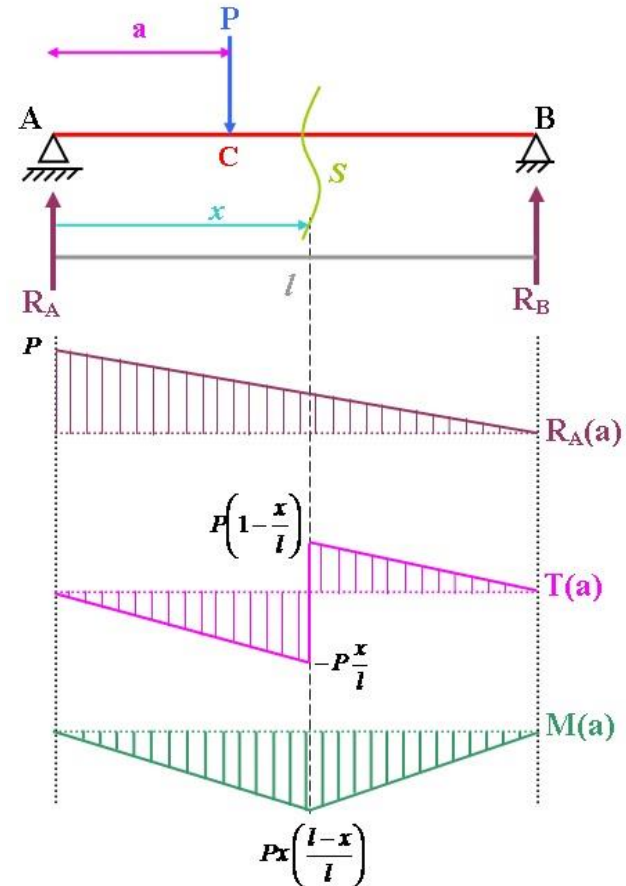
3- Ligne d'influence des poutres isostatiques

3-1-Effet d'une charge concentrée

« P » fixe, « S » mobile



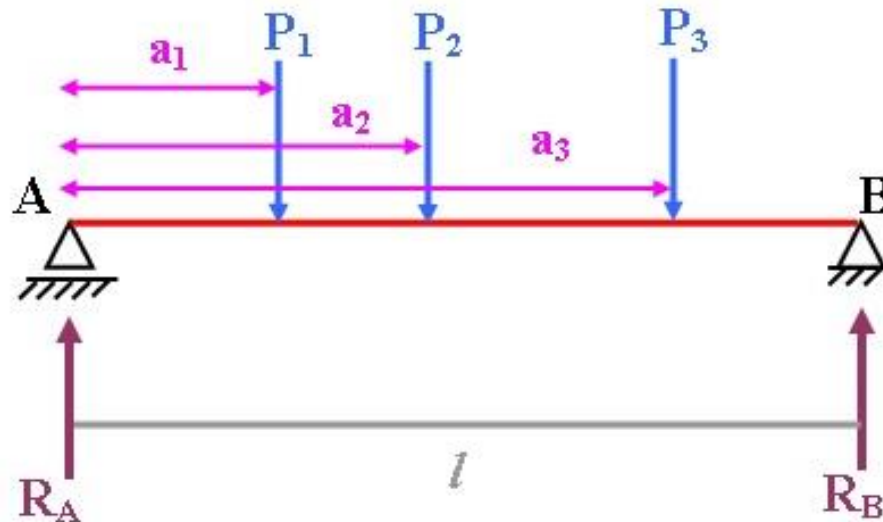
« S » fixe, « P » mobile



3- Ligne d'influence des poutres isostatiques

3-2-Effet d'un système de charges concentrées

Suivant le « principe de superposition des états d'équilibre », si une force extérieure « P_1 » produit une réaction « R_1 », un moment « M_1 » et un effort tranchant « T_1 » et une autre force extérieure « P_2 » produit « R_2 », « M_2 » et « T_2 », le système de forces « $P_1 + P_2$ » produira une réaction « $R_1 + R_2$ », un moment « $M_1 + M_2$ » et un effort tranchant « $T_1 + T_2$ ».



3- Ligne d'influence des poutres isostatiques

3-2-Effet d'un système de charges concentrées

Suivant le « principe de superposition des états d'équilibre » et le premier cas « effet d'une charge concentrée », on peut écrire:

$$R_A = \frac{[P_1(l - a_1) + P_2(l - a_2) + P_3(l - a_3)]}{l}$$

L'effort tranchant devient:

$$T = T_0 = R_A \quad \text{à L'abscisse " 0 "}$$

$$T = T_1 = T_0 - P_1 \quad \text{à L'abscisse " } a_1 \text{ "}$$

$$T = T_2 = T_1 - P_2 \quad \text{à L'abscisse " } a_2 \text{ "}$$

$$T = T_3 = T_2 - P_3 \quad \text{à L'abscisse " } a_3 \text{ "}$$

$$T = T_l = T_3 \quad \text{à L'abscisse " } l \text{ "}$$

Le moment fléchissant est :

$$M = M_0 = 0 \quad \text{à L'abscisse " 0 "}$$

$$M = M_1 = M_0 + T_0 a_1 \quad \text{à L'abscisse " } a_1 \text{ "}$$

$$M = M_2 = M_1 + T_1(a_2 - a_1) \quad \text{à L'abscisse " } a_2 \text{ "}$$

$$M = M_3 = M_2 + T_2(a_3 - a_2) \quad \text{à L'abscisse " } a_3 \text{ "}$$

$$M = M_l = M_3 + T_3(l - a_3) \quad \text{à L'abscisse " } l \text{ "}$$

4- Ligne d'influence des systèmes en treillis

Exercice: On veut tracer la ligne d'influence de l'effort normal dans une des barres (la barre «4-3» par exemple). Sachant que le treillis est sollicité par une charge « P » qui se déplace au niveau de la barre « 3-1 ».

Solution:

1- Les réactions d'appuis

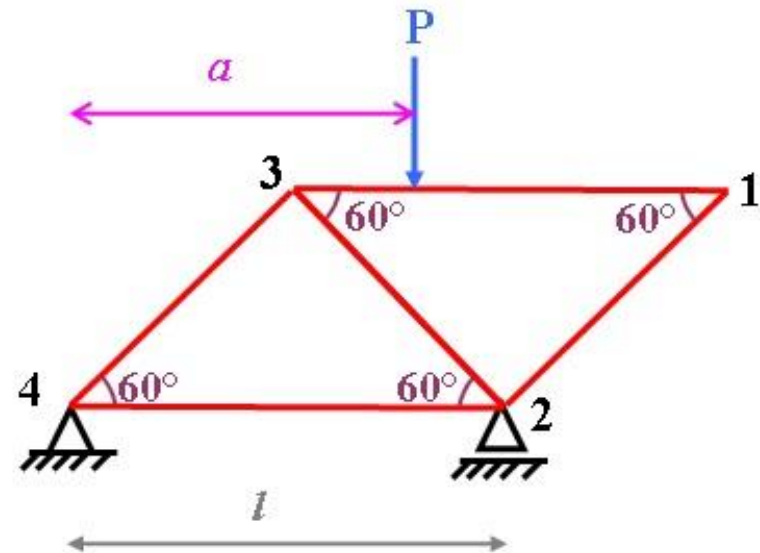
$$\sum \vec{F}_x = 0 \Rightarrow H_4 = 0$$

$$\sum \vec{F}_y = 0 \Rightarrow V_4 + V_2 = P$$

$$\sum M_{/2} = 0 \Rightarrow lV_4 - (l-a)P = 0$$

$$\Rightarrow V_4 = P \left(\frac{l-a}{l} \right)$$

$$\Rightarrow V_2 = P \frac{a}{l}$$



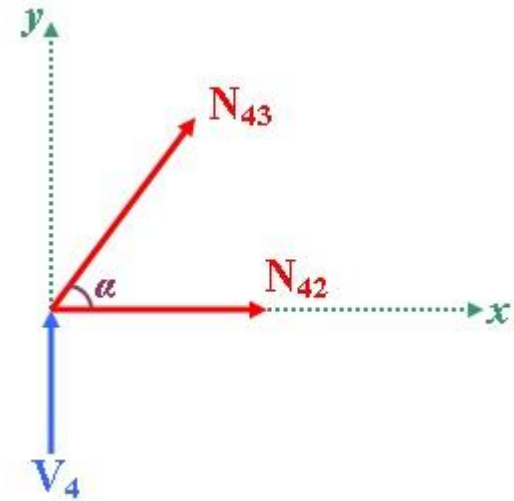
4- Ligne d'influence des systèmes en treillis

2- Au nœud « 4 », on constate

$$\sum \vec{F}_y = 0 \Rightarrow V_4 + N_{4-3} \sin \alpha = 0$$

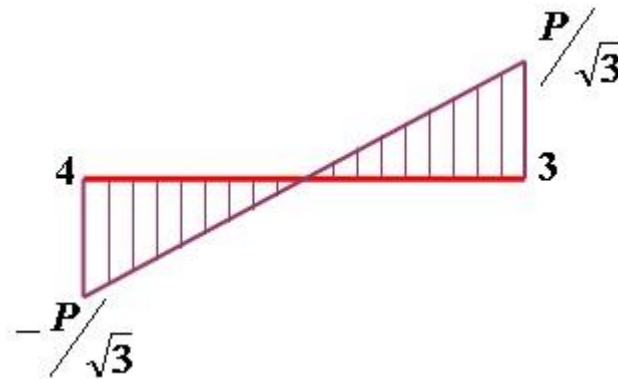
$$\Rightarrow N_{4-3} = \frac{-V_4}{\sin \alpha} = \frac{2P}{\sqrt{3}} \left(\frac{a-l}{l} \right)$$

La charge « P » se déplace de « $l/2$ » à « $3l/2$ » (sur la barre 3-1).



$$a = \frac{l}{2} \Rightarrow N_{4-3} = -\frac{P}{\sqrt{3}}$$

$$a = \frac{3l}{2} \Rightarrow N_{4-3} = \frac{P}{\sqrt{3}}$$



Merci

