

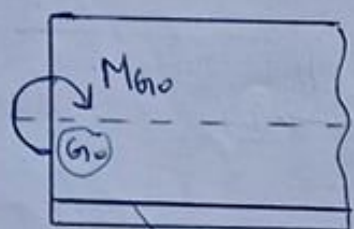
CH2: Flexion composée

1. Généralités:

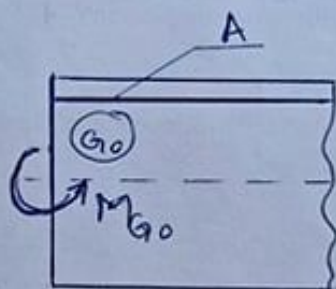
- 1.1. Définition: Une section est soumise à la flexion composée lorsqu'elle reprend:
- Soit un effort normal N_u ~~est~~ un moment fléchissant M_{uG_0} appliqués au centre de gravité du béton seul G_0 .
 - Soit un effort normal N_u excentré de $e_0 = M_{uG_0}/N$ par rapport au centre de gravité du béton seul G_0 . Le point d'application de N_u est appelé le centre de pression.
 - M_{G_0} le moment de flexion (ultime ou de service) par rapport au centre de gravité de la section de béton seul (de signe quelconque)
 - N l'effort normal (ultime ou de service):
par convention: - Positif pour une compression
- Négatif pour une traction
- Le système (M_{G_0}, N) est équivalent à une force unique équivalente à N ~~et~~ appliquée en un point C (centre de pression) contenu dans le plan moyen.

la distance G_0C est appelée excentricité de la force extérieure (équivalente à l'effort normal N et passant par C) par rapport à G_0 .

En flexion composée la première chose à faire est de rechercher la position du centre de pression en calculant $e_0 = \frac{M_{G_0}}{N}$.
Le signe de M_{G_0} fournit la position des aciers tendus :



$M_{G_0} > 0$



$M_{G_0} < 0$

1.2 Prise en compte forfaitaire des effets du second ordre en flexion-compression d'l'E.L.U

l_f : longueur de flambement de la pièce (c.s.)
 h : hauteur de la section droite dans le plan de flexion.

l : longueur libre de la pièce.

$$e_a = M_{asc} \begin{cases} 2 \text{ cm} \\ l/250 \end{cases}$$

excentricité additionnelle

$$e_1 = \frac{\sum \gamma_i M_{iG_0}}{\sum \gamma_i N_i} + e_a \text{ excentricité de 1^{er} ordre à l'E.L.U}$$

1.2.1) cas où $\frac{l_f}{h} > \max[15; 20e_1/h]$

Vérifier la pièce à l'état limite ultime de stabilité de forme. (flambement)

1.2.2) Cas où $\frac{l_f}{h} \leq \max[15; 20e_1/h]$:

Faire le calcul en flexion composée pour les sollicitations ultimes :

$$\begin{cases} N_u = \sum \gamma_i N_i \\ M_{uG_0} = N_u(e_1 + e_2) = N_u e_0 \end{cases}$$

avec: $e_2 = \frac{3 \cdot l_f^2}{10^4 h} [2 + \alpha \varphi]$

où: $\begin{cases} \varphi = 2 \text{ (rapport de la déformation due au fluage sur la déformation instantanée)} \\ \alpha = \frac{M_1^L (G + \sum_{i \geq 1} \psi_{2i} Q_i)}{M_1 (G + Q_1 + \sum_{i \geq 2} \psi_{0i} Q_i)} = \frac{M_G}{M_G + M_\varphi} \end{cases}$

M_1 et M_1^L étant évalués sans les coefficients γ (ce sont des moments de service)
 e_a : n'intervient pas.

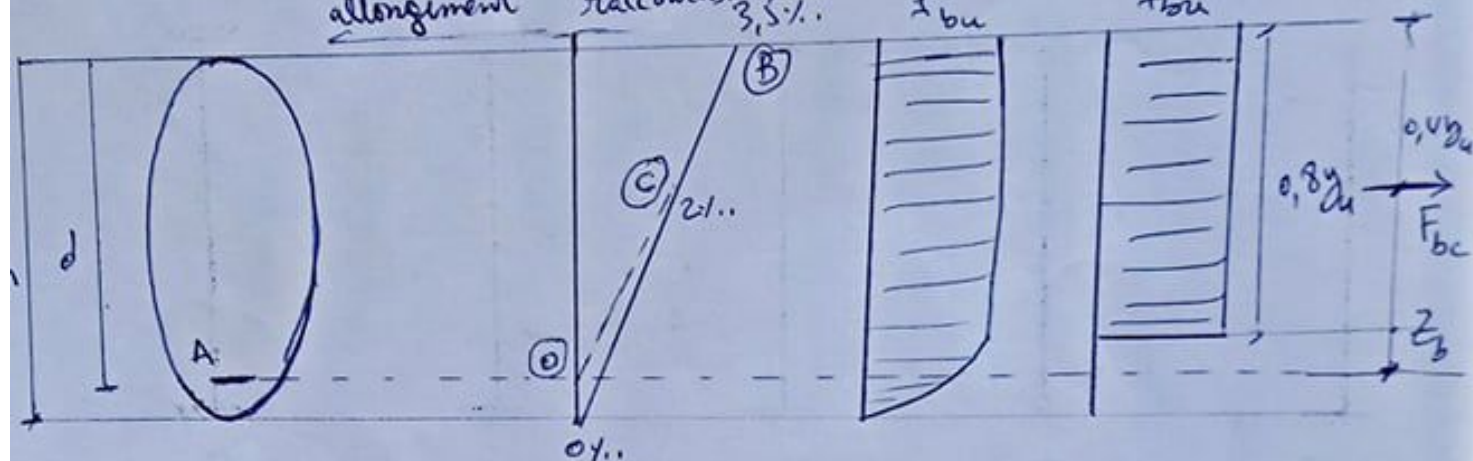
Sections partiellement tendues:

la section est partiellement tendue si:

a) N_u étant une compression (dans ce cas:

$$N_u > 0 \text{ et } e_0 = e_1 + e_2 \neq e_{0, \text{ser}} \text{ avec } y_u \leq h$$

allongement
raccourcissement
 f_{bu}
 f_{bu}



Pour une section rectangulaire

$$\text{si } y_u = h : \begin{cases} F_{bc} = 0,8 b_0 h f_{bu} \\ z = d - 0,4 h \\ M_{Bc} = F_{bc} \cdot z \end{cases}$$

soit, en considérant les moments par rapport aux aciers tendus :

$$M_{Bc} = 0,8 \frac{h}{d} (1 - 0,4 \frac{h}{d}) b_0 d^2 f_{bu}$$

$$\text{d'où : } \mu_{Bc} = \frac{M_{Bc}}{b_0 d^2 f_{bu}} \leq \mu_{Bc} = 0,8 \frac{h}{d} (1 - 0,4 \frac{h}{d})$$

et la section est partiellement tendue tant que

$y_u \leq h$ c.à.d. tant que :

$$\mu_{bu} = \frac{M_{bu}}{b_0 d^2 f_{bu}} \leq \mu_{Bc} = 0,8 \frac{h}{d} (1 - 0,4 \frac{h}{d})$$

avec :

M_{uA} : Moment fléchissant ultime par rapport aux aciers tendus (même signe que M_{uG0})

en remarquons que l'on a au moins une nappe d'aciers tendus si $y_u \leq d \Rightarrow$

$$\mu_{bu} \leq \mu_{Bc} = 0,8(1-0,4) = 0,480$$

b). N_u étant une traction ($N_u < 0$) $\Rightarrow$ C est

a l'extérieur des traces des armatures :

$$e_o = \frac{\sum \delta_i M_{iG0}}{\sum \delta_i N_i} \neq e_{oser}$$

$$e_{oser} = \frac{M_{serG0}}{N_{ser}}$$

a). N_{ser} étant une compression ($N_{ser} > 0$) $\Rightarrow$

Pour une section rectangulaire $y_1 \leq h$

$$d'où : M_{serA} \leq M_{serlin} = \frac{1}{2} \bar{\sigma}_{bc} b_o h (d - \frac{h}{3})$$

$$= \frac{1}{2} \frac{h}{d} (1 - \frac{1}{3} \frac{h}{d}) b_o d^2 \bar{\sigma}_{bc}$$

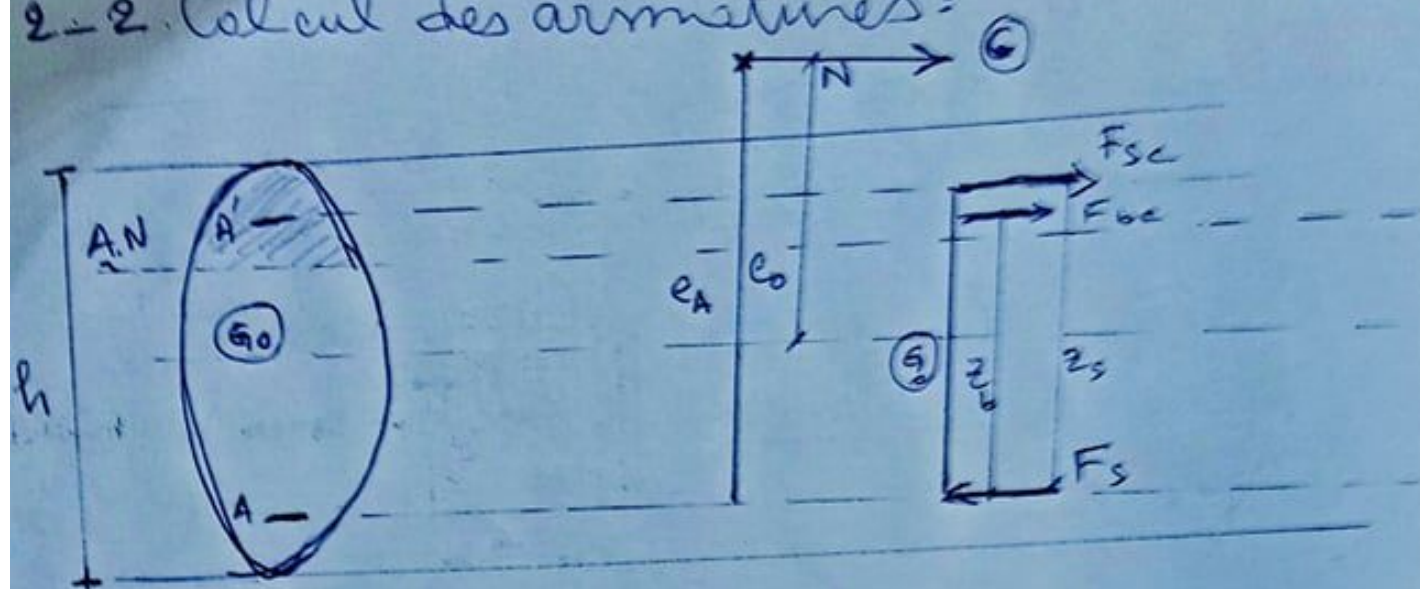
avec au moins une nappe d'aciers tendus

($y_1 \leq d$) si :

$$M_{serA} \leq \frac{1}{2} (1 - \frac{1}{3}) b_o d^2 \bar{\sigma}_{bc} = 0,333 b_o d^2 \bar{\sigma}_{bc}$$

b). N_{ser} est une traction ($N_{ser} < 0$) $\Rightarrow$ C d l'extérieur des traces des armatures

2-2. Calcul des armatures:



En prenant les moments par rapport aux axes tendus, les équations d'équilibre s'écrivent:

$$\begin{cases} M_A = N e_A = F_{sc} \cdot z_s + F_{bc} \cdot z_b \\ N = F_{bc} + F_{sc} - F_s \end{cases}$$

Soit en tenant compte des sections A et A' d'armatures:

$$\begin{cases} M_A = N \cdot e_A = A' \sigma_{sc} \cdot z_s + F_{bc} \cdot z_b \\ N = F_{bc} + A' \sigma_{sc} - A \sigma_s \Leftrightarrow F_{bc} + A' \sigma_{sc} - \left(A + \frac{N}{\sigma_s} \right) \sigma_s = 0 \end{cases}$$

des équations d'équilibre de la même section soumise en flexion simple au moment M_A ~~et~~ s'écrivent

$$\begin{cases} M_A = A' \sigma_{sc} \cdot z_s + F_{bc} \cdot z_b \\ 0 = F_{bc} + A' \sigma_{sc} - A \sigma_s \end{cases}$$

d'où par identification il vient:

$$\begin{cases} A' = A' \\ A = A - \frac{N}{\sigma_s} \end{cases}$$

Recapitulation (technique de calcul):

- Calculer le moment M_A (M_{uA} ou M_{sA}) par rapport aux aciers tendus.

⇒ déduire par le calcul en flexion simple les aciers A et A' des armatures.

⇒ revenir à la flexion composée avec les sections d'aciers:
$$\begin{cases} A' = A' \\ A = A - \frac{N}{\sigma_s} \end{cases}$$

où: N (N_u ou N_{sA}) en valeur algébrique, σ_s à l'état limite de terminant pour le calcul de A

- N est une compression ($N > 0$) $\Rightarrow$ diminution de la section d'aciers trouvée en flexion simple
- N est une traction ($N < 0$) $\Rightarrow$ augmentation de cette section.

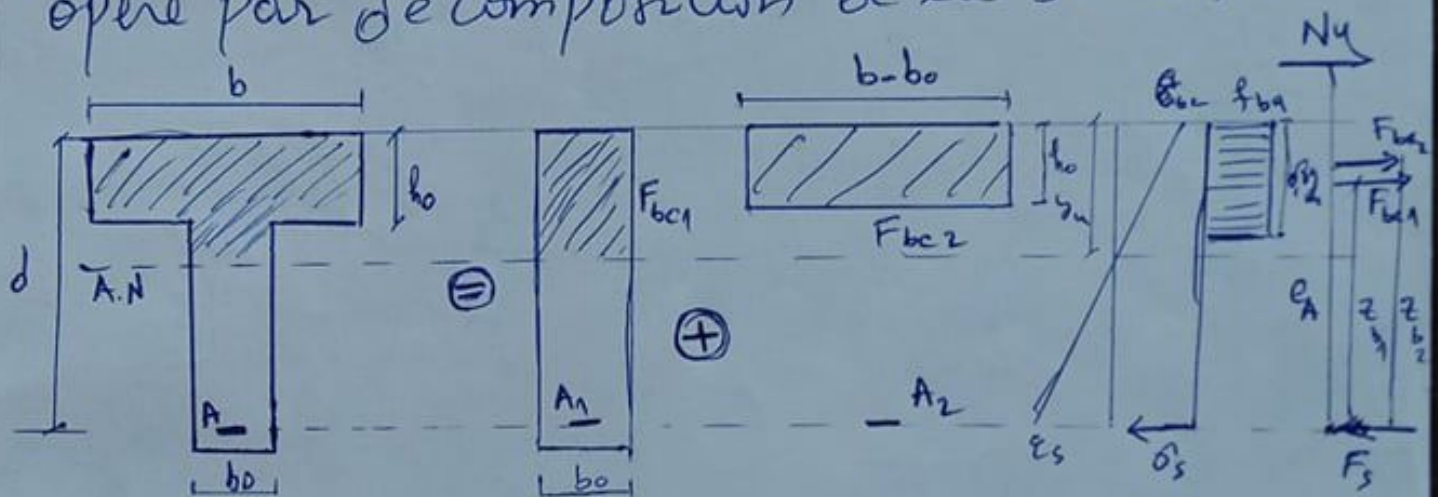
Section en T d l'ELU :

a) - Cas ou $M_{uA} \leq M_{Tu}$

Table surabondante pour équilibrer M_{uA} , la zone comprimée a une forme rectangulaire. Donc calcul en section rectangulaire de largeur b soumise à (M_{uA}, N_u)

b) - Cas ou $M_{uA} > M_{Tu}$

la zone comprimée a une forme de T, on opère par décomposition de la section :



des équations d'équilibre s'écrivent :

$$\begin{cases} M_{uA} = F_{bc1} \cdot z_{b1} + F_{bc2} \cdot z_{b2} \\ N_u = F_{bc1} + F_{bc2} - F_s \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_{bc1} = 0,8 b_0 y_u f_{bu} \text{ et } z_{b1} = d - 0,4 y_u \\ F_{bc2} = (b - b_0) h_0 f_{bu} \text{ et } z_{b2} = d - \frac{h_0}{2} \\ F_s = A \sigma_s \end{cases}$$

Donc:
$$\begin{cases} M_{uA} = 0,8 b_0 y_u f_{bu} (d - 0,4 y_u) + (b - b_0) h_0 f_{bu} (d - \frac{h_0}{2}) \\ N_u = 0,8 b_0 y_u f_{bu} + (b - b_0) h_0 f_{bu} - A \sigma_s \end{cases}$$

et en posant:
$$\begin{cases} M_{uR} = M_{uA} - (b - b_0) h_0 f_{bu} (d - \frac{h_0}{2}) \\ N_{uR} = N_u - (b - b_0) h_0 f_{bu} \end{cases}$$

il vient:
$$\begin{cases} M_{uR} = 0,8 b_0 y_u f_{bu} (d - 0,4 y_u) \\ N_{uR} = 0,8 b_0 y_u f_{bu} - A \sigma_s \end{cases}$$

sont les équations d'équilibre d'une section rectangulaire $b_0 d$ soumise à M_{uR} et N_{uR}

donc calcul en section rectangulaire $b_0 d$

soumise à:
$$\begin{cases} M_{uR} = M_{uA} - (b - b_0) h_0 f_{bu} (d - \frac{h_0}{2}) \\ N_{uR} = N_u - (b - b_0) h_0 f_{bu} \end{cases}$$

il ne faut pas oublier de retrancher $\frac{N_{uR}}{\sigma_s}$ de A (N_{uR} en valeur algébrique).

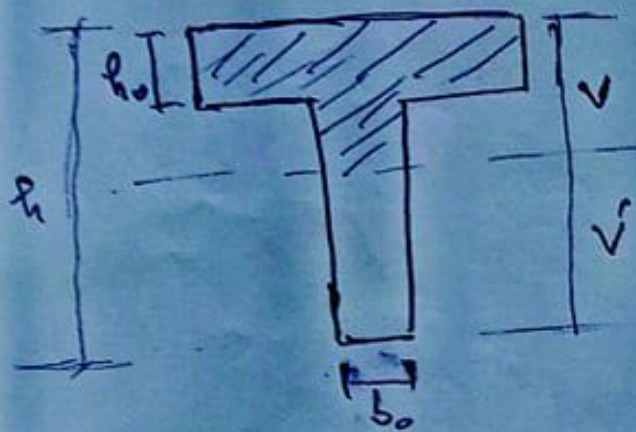
Section minimale d'armatures:

la sollicitation provoquant la fissuration du béton ($\sigma_t = f_{tj}$) de la section supposée non armée et non fissurée doit entraîner

dans les aciers tendus de la section réelle
 une contrainte au plus égale à f_e .
 le diagramme des contraintes est supposé
 linéaire.

1) Cas des sections en T:

caractéristiques géométriques de la section
 non fissurée et non armée:



$$B = b_0 h + (b - b_0) h_0$$

$$V = \frac{b_0 h^2 + (b - b_0) h_0^2}{2B}$$

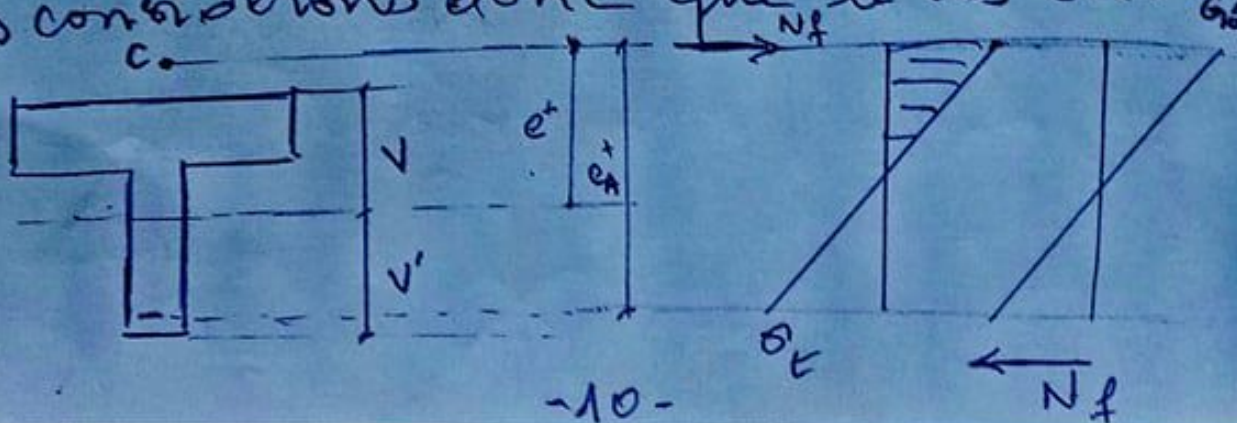
$$V' = h - v$$

$$I = \frac{b_0 h^3}{3} + \frac{(b - b_0) h_0^3}{3} - B V^2$$

N_f : effort de flexion.

sous moment négatif la section en T se comporte
 comme une section rectangulaire.

nous considérons donc que le cas où: $M_g > 0$



cas où $N_f > 0$

$$\sigma_t = \frac{N_f}{B} - \frac{N_f e_0 v}{I}$$

avec $N_f > 0$

$e_0 > 0$ (même signe que N_{ser})

$$\left. \begin{aligned} \text{d'où } \sigma_b &= \frac{N_f}{B} - \frac{N_f e v'}{I} \\ e &= \frac{|M_{ser} G_0|_{\max}}{N_{ser}} \end{aligned} \right\}$$

$$N_f = \frac{B I f_{t28}}{B e v' - I}$$

$$\sigma_t = -f_{t28}$$

cas où $N_f < 0$

$$\sigma_t = \frac{N_f}{B} - \frac{N_f e_0 v}{I}$$

avec $N_f < 0$

$e_0 < 0$ (même signe que N_{ser})

Pourcentage minimal d'armatures:

$$A_{\min} = \frac{N_f \cdot e_A}{z_b f_e} - \frac{N_f}{f_e}$$

$$z_b = d - \frac{h_0}{3} \approx 0,9d$$

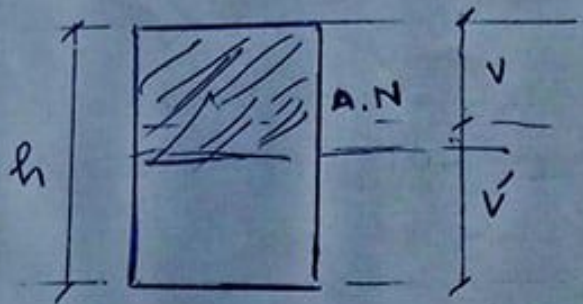
$$e_A = e_0 + (d - v')$$

$$A_{\min} = \frac{N_f}{f_e} \left[\frac{e_A}{z_b} - 1 \right] = \frac{N_f}{f_e} \cdot \frac{e_0 - v' + 0,1d}{0,9d}$$

$$A_{\min} = B \cdot \frac{f_{t28}}{f_e} \cdot \frac{I}{d \cdot \frac{h}{3}} \cdot \frac{e - v + \frac{h_0}{3}}{B e v' - I}$$

2) cas des sections rectangulaires:

caractéristiques géométriques de la section
non fissurée et non armée:



$$B = b h$$

$$v = v' = \frac{h}{2}$$

$$I = \frac{b_0 h^3}{12}$$

$$z_b = 0,9 d$$

$$A_{min} = 0,23 \frac{f_{ct23}}{f_e} b_0 d \frac{e_0 - 0,45 d}{e_0 - 0,185 d}$$

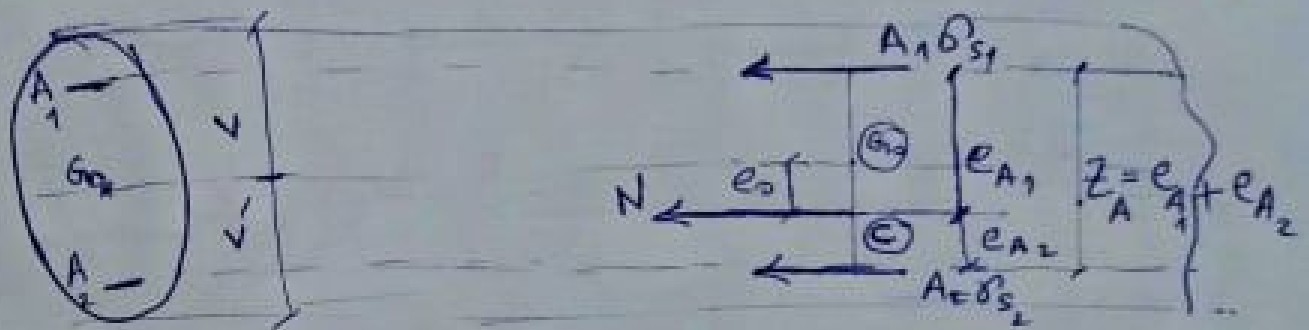
avec e_0 de même signe que N ou

Remarque: dans le cas de la flexion simple
si e tend $\rightarrow \infty$ $A_{mi} \rightarrow 0,23 \frac{f_{ct23}}{f_e} b_0 d$

3. Sections entièrement tendues :
 A l'E.L.U comme à l'E.L.S la section est
 entièrement tendue si :

$\left\{ \begin{array}{l} N \text{ est une traction } (N < 0) \\ c \text{ tombe entre les armatures} \end{array} \right.$

Calcul des armatures :



l'équilibre des moments par rapports
 aux armatures donne :

$$A_1 = \frac{N e_{A2}}{(e_{A1} + e_{A2}) \sigma_{s1}}$$

$$A_2 = \frac{N e_{A1}}{(e_{A1} + e_{A2}) \sigma_{s2}}$$

Solution économique avoir le centre de gravité
 des armatures en C d'où :

l'E.L.U : Pivote A $\sigma_{s1} = \sigma_{s2} = \sigma_s = \frac{f_c}{\gamma_s}$

l'E.L.S : $\sigma_{s1} = \sigma_{s2} = \sigma_s$
 section minimale : $A_1 + A_2 = A \geq A_{min} = \frac{B f_{ctd}}{f_c}$

section minimale :

$$A_1 \geq A_{\min 1} = \frac{N_f e_{A2}}{(e_{A1} + e_{A2}) f_e}$$

$$A_2 \geq A_{\min 2} = \frac{N_f e_{A1}}{(e_{A1} + e_{A2}) f_e}$$

dans le cas de traction simple

$$e_0 \rightarrow 0, N_f \rightarrow B f_{cj} \text{ et } A_{\min 1} + A_{\min 2} \rightarrow \frac{B f_{cj}}{f_e}$$

section entièrement comprimées :

la section est entièrement comprimée si :

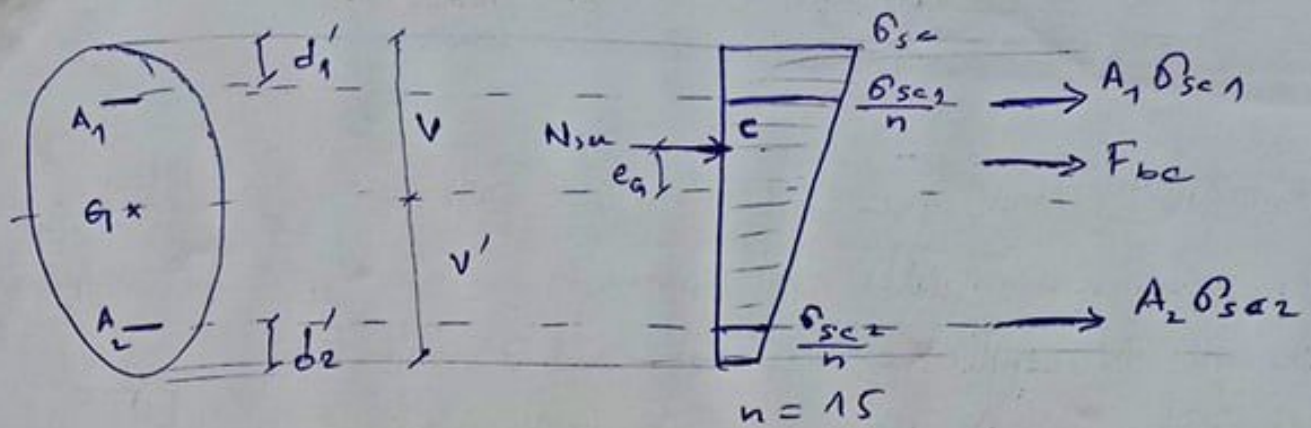
$$\text{E.L.S. : } \begin{cases} N_{su} \text{ est une compression} \\ M_{suA} \leq \frac{h}{2d} \left(1 - \frac{h}{3d}\right) b_0 d^2 \bar{\sigma}_{bc} \end{cases}$$

$$\text{E.L.U. } \begin{cases} N_u \text{ est une compression} \\ c \text{ reste à l'intérieur du noyau central} \end{cases}$$

Calcul des armatures :

calcul manuel au pivot c compliqué, on utilise des abaques (diagrammes d'interactions)

à l'E.L.S :



On désigne par :

$M_{su, G} = N_{su} e_g$: Moment au centre de gravité' de la section homogène.

A_1 et A_2 : Sections d'aciers comprimés (fixés en satisfaisant le pourcentage minimal en compression simple)

Les caractéristiques géométriques de la section homogène sont :

$$B_o = B + 15(A_1 + A_2)$$

I_o = moment d'inertie de la section B_o par rapport à G

On obtient la contrainte pour le béton

$$(\sigma_{bc})_{max} = \frac{N_{su}}{B_o} + \frac{M_{su, G} \cdot V}{I_o} \leq \bar{\sigma}_{bc}$$

Pour le dimensionnement, il faut se fixer a priori A_1 et A_2 et chercher par tâtonnements :

1) d'ce que c reste dans le noyau central

2) d'ce que $(\sigma_{bc})_{max} \leq \bar{\sigma}_{bc} = 0,6 f_{c28}$

Section minimale :

$$A_{\min} = M_{\max} \left\{ \begin{array}{l} 4 \text{ cm}^2/\text{m de périmètre} \\ 0,2 \frac{B}{100} \end{array} \right.$$

B : aire de section de béton seul .