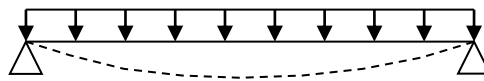
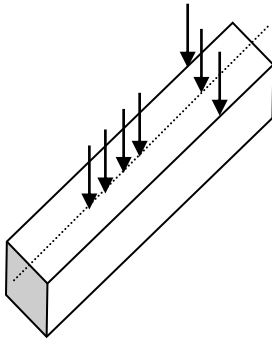


Chapitre I : La flexion simple

1-Définition

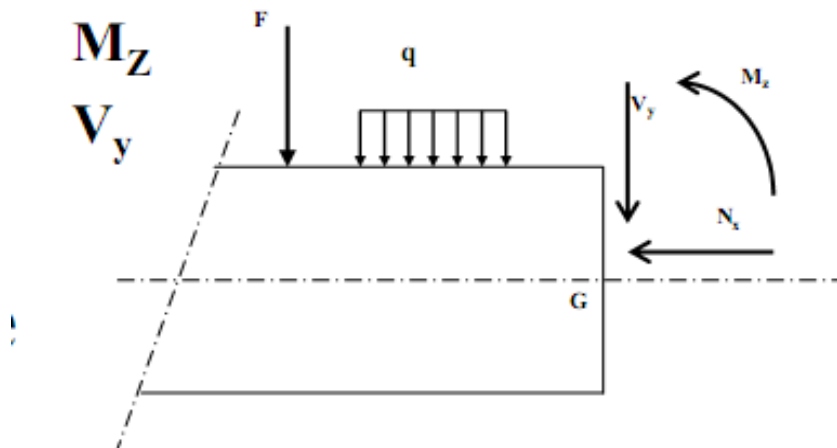
Une poutre à plan moyen est soumise à la flexion simple si :

Elle soumise à l'action de force disposée symétriquement par rapport au plan moyen.



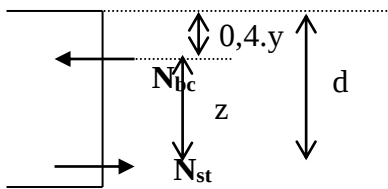
Les sollicitations se réduisent à : Un moment fléchissant : M_z

Et un effort tranchant : V_y



2-Section rectangulaire :

2-1 sections sans armatures comprimées (E.L.U):



L'équilibre des efforts :

$$N_{st} = N_{bc}$$

$$A_{st} \cdot \sigma_{st} = 0,8 \cdot y \cdot b \cdot \sigma_{bc}$$

L'équilibre des moments :

$$M_u = M_{bc} \cdot z$$

Avec

$$z = d - 0,4 \cdot y \text{ et } y = \alpha \cdot d$$

$$\Rightarrow z = d \cdot (1 - 0,4 \cdot \alpha)$$

$$\Rightarrow M_u = 0,8 \cdot \alpha \cdot d \cdot b \cdot \sigma_{bc} \cdot d \cdot (1 - 0,4 \cdot \alpha)$$

$$= 0,8 \cdot \alpha \cdot d^2 \cdot b \cdot \sigma_{bc} \cdot (1 - 0,4 \cdot \alpha)$$

$$\Rightarrow M_u = N_{st} \cdot z = A_{st} \cdot d \cdot (1 - 0,4 \cdot \alpha)$$

- Le moment réduit " μ_u " : $M_u = 0,8 \cdot \alpha \cdot d^2 \cdot b \cdot \sigma_{bc} \cdot (1 - 0,4 \cdot \alpha)$

$$\frac{M_u}{b \cdot d^2 \cdot \sigma_{bc}} = 0,8 \cdot \alpha \cdot (1 - 0,4 \alpha)$$

On appellera cette quantité le moment réduit $\mu_\mu = \frac{M_u}{b \cdot d^2 \cdot \sigma_{bc}} = 0,8 \cdot \alpha \cdot (1 - 0,4 \alpha)$

$$\text{Donc } \mu_\mu = 0,8 \cdot \alpha \cdot (1 - 0,4 \alpha)$$

$$\text{D'où : } \alpha = 1,25 \left(1 - \sqrt{1 - 2\mu_\mu} \right)$$

La valeur de α calculer à partir de cette équation permet de connaître le pivot :

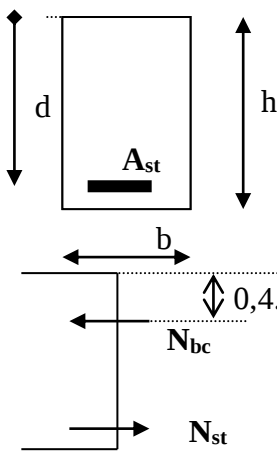
$$\alpha \leq 0,259 \Rightarrow \text{Pivot A} \Rightarrow \varepsilon_s = 10\text{‰}$$

$$\alpha = 0,259 \Rightarrow \text{Pivot A} \Rightarrow \mu = 0,186$$

$$0,259 < \alpha \leq 1 \Rightarrow \text{Pivot B} \Rightarrow \varepsilon_{bc} = 3,5\text{‰}$$

$$\alpha = 1 \Rightarrow \mu = 0,480$$

Détermination des armatures pour une section donnée :



$$\mu_\mu = \frac{M_u}{b \cdot d^2 \cdot \sigma_{bc}}$$

$$\alpha = 1,25 \left(1 - \sqrt{1 - 2\mu_\mu} \right)$$

On choisit comme origine de l'axe "z" le point d'application N_{bc} :

$$M_u = N_{st} \cdot z + N_{bc} \cdot 0$$

$$M_u = A_{st} \cdot \sigma_{st} \cdot z$$

$$Z = d - 0,4 y = d (1 - 0,4 \cdot \alpha)$$

$$A_{st} = \frac{M_u}{Z \cdot \sigma_{st}}$$

Condition de non fragilité

Le choix de A_s (section réelle) impose de prendre en compte :

- $A_s \geq A_u$;
- $A_s \geq A_{\min} = 0,23 b d f_{tj} / f_e$ (armature minimale pour respecter la condition de non-fragilité) ;

2-Dimensionnement à l'ELS

Hypothèses

Les principales hypothèses du calcul des sections en BA soumises au flexion simple aux ELS sont les suivantes :

- les sections planes restent planes,
- il n'y a pas de glissement à l'interface béton-armatures,
- le béton et l'acier sont considérés comme des matériaux élastiques,
- le béton tendu est négligé,
- l'aire des aciers est concentrée en son centre de gravité,
- le coefficient d'équivalence $n = E_s/E_v$ est fixé forfaitairement à $n = 15$

$$\sigma_{bc} = 0,6 \cdot f_{c28}$$

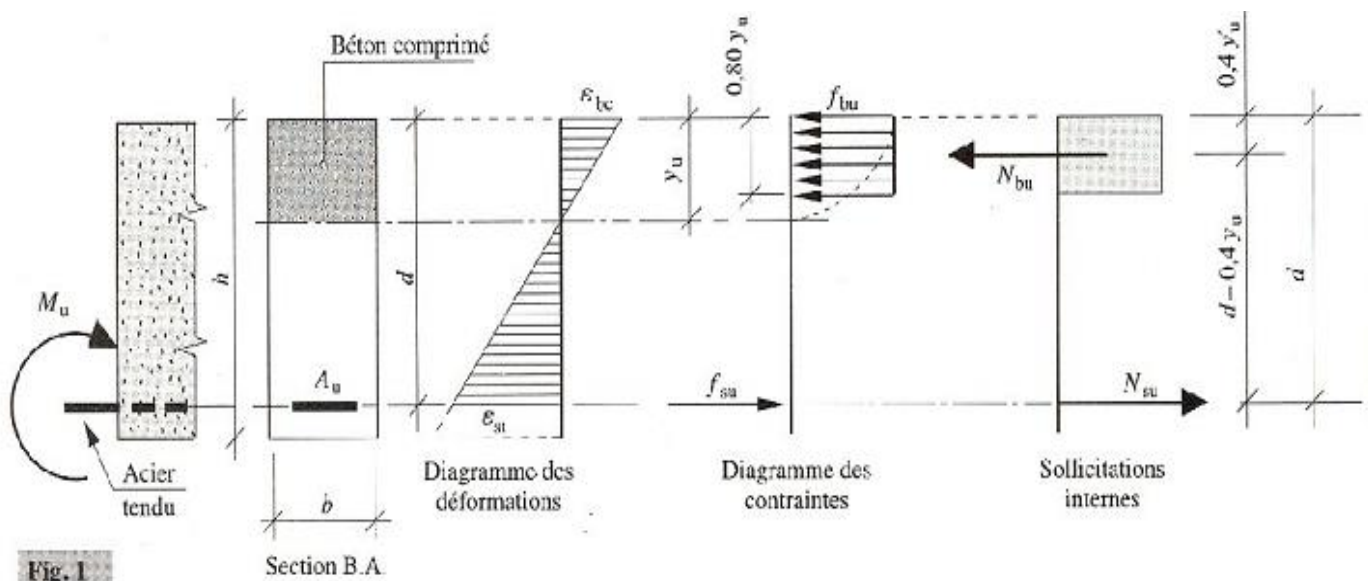


Fig. 1

Section rectangulaire B.A.: conditions d'équilibre

• Équilibre des efforts normaux

$$\sum_{\text{proj. } O_x} \{ F_{\text{int}} \} = 0, \text{ soit}$$

effort de compression du béton = effort de traction de l'acier

$$N_{bc} = N_{st}$$

$$b \cdot y_1 \cdot \frac{\sigma_{bc}}{2} = A_{ser} \cdot \sigma_{st} \quad (1)$$

• Bras de levier (symbole z_1)

$$z_1 = d - \frac{y_1}{3} \quad (2)$$

• Équilibre des moments par rapport au C.d.G. des aciers tendus

$$\vec{M}_{ser} = \sum \vec{M/A} \{ F_{\text{int}} \}, \text{ soit}$$

moment de flexion = effort de compression × bras de levier

$$M_{scr} = N_{bc} \times z_1$$

$$M_{scr} = b \cdot y_1 \cdot \frac{\sigma_{bc}}{2} \left(d - \frac{y_1}{3} \right) \quad (3)$$

• Expression de M_{ser} . Avec (1) et (2) on obtient:

$$M_{scr} = A_{ser} \cdot \sigma_{st} \cdot z_1 \quad (3')$$

$$A_{scr} = \frac{M_{ser}}{z_1 \cdot \sigma_{st}}$$

Notion de moment limite :

A de minimisé la quantité d'acier globalement mise en oeuvre on peut limiter inférieurement la contrainte de traction des aciers à f_e/γ_s .

$M_u < M_{lu}$ c'est-à-dire

On définit alors le moment limite ultime M_{lu} qui dépend de béton (f_{c28}) ; l'acier (f_e) ; $\gamma = M_u / M_{ser}$
Durée d'application des charges(θ).

On détermine μ_u à partir des tableaux.

$\mu_u \leq \mu_{lu} \Rightarrow$ Section sans armatures comprimées

$\mu_u > \mu_{lu} \Rightarrow$ Section avec armatures comprimées

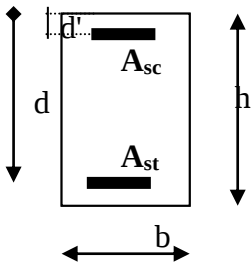
De la règle des 3 pivots nous savons que, quand le moment réduit " μ_u " dépasse le moment réduit limite " μ_{lu} ", le travail des armatures inférieures est très faible, l'acier est donc mal utilisé. Plusieurs solutions sont possibles :

- Changer les dimensions de la section (Augmenter b et h).
- Utilisation d'un béton qui a une grande résistance.
- Ajouter les armatures comprimées.

2-2 sections avec armatures comprimées (E.L.U):

$\mu_{bu} > \mu_{lu}$

Méthodes des sections fictives :



$$M_u = M_{u1} + M_{u2}$$

$$A_u = A_{u1} + A_{u2}$$

La première section fictive (sans armature comprimée) devra équilibrer un moment $M_{u1} = \mu_{lu} \cdot b \cdot d^2 \cdot \sigma_{bc}$

$$(\mu_{bu} = \mu_{lu})$$

La deuxième section fictive (avec armature comprimée et sans béton) devra équilibrer un moment :

$$M_{u2} = M_u - M_{u1} \text{ (moment résiduel).}$$

Les règles de B.A.E.L imposent la vérification suivante $M_{u2} < 0,4 M_u$

Ferraillage de la 1^{ère} section fictive

$$\mu_{bu} = \mu_{lu} \text{ (tableau ou formule)}$$

$$\alpha = 1,25 \left(1 - \sqrt{1 - 2\mu_{lu}} \right)$$

$$A_u = \frac{0,8 \cdot \alpha_u \cdot b \cdot d \cdot f_{bu}}{f_e / \gamma_s}$$

Ferraillage de la 2^{ème} section fictive

Equilibre de la section

$$\Sigma F_i = 0 \Rightarrow N'_{su} = N_{su2} \quad (1)$$

$$\Sigma M_{i/Au2} = 0 \Rightarrow M_{u2} - N'_{su} (d-d') - N_{su2} \cdot 0 = 0$$

$$M_{u2} - N'_{su} (d-d') = 0 \quad (2)$$

$$N'_{su} = A'_u \cdot \sigma'_s$$

$$N_{su2} = A_{u2} \cdot \sigma_s \quad (\sigma_s = f_e / \gamma_s)$$

Détermination de A'_u :

$$(2) \Rightarrow M_{u2} = N'_{su} (d-d')$$

$$M_{u2} = A'_u \cdot \sigma'_s (d-d') \Rightarrow A'_u = M_{u2} / (d-d') \sigma'_s$$

Détermination de A_{u2} :

$$(1) \Rightarrow N'_{su} = N_{su2} \Rightarrow A'_u \cdot \sigma'_s = A_{u2} \cdot f_e / \gamma_s$$

$$\Rightarrow A_{u2} = \frac{A'_u \cdot \sigma'_s}{f_e / \gamma_s}$$

Détermination de l'armature totale:

$$A_u = A_{u1} + A_{u2}$$

$$A_u = \frac{0.8 \cdot \alpha_u \cdot b \cdot d \cdot f_{bu}}{f_e / \gamma_s} + \frac{A'_u \cdot \sigma'_s}{f_e / \gamma_s}$$

Vérification de condition de non fragilité

Le choix de A_s (section réelle) impose de prendre en compte:

- $A_s \geq A_u$;
- $A_s \geq A_{\min} = 0.23 b d f_{tj} / f_e$ (armature minimale pour respecter la condition de non-fragilité);

Etat limite de service :

Il est nécessaire de vérifier à l' E .L.S que la compression du béton reste admissible ainsi que la traction dans les armatures en fonction de la préjudiciabilité de la fissuration :

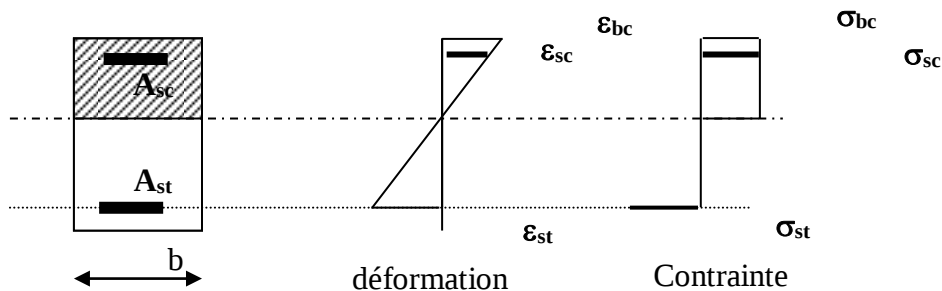
$$\sigma_{bc} = 0.6 \cdot f_{c28}$$

la fissuration préjudiciable $\sigma_{st} \leq \min \left(\frac{2}{3} \cdot f_e ; 110 \sqrt{\eta \cdot f_{t28}} \right)$

la fissuration très préjudiciable $\sigma_{st} \leq \min \left(\frac{1}{2} \cdot f_e ; 90 \sqrt{\eta \cdot f_{t28}} \right)$

1- Détermination des contraintes :

a- détermination de l'axe neutre :



Par l'équilibre des moments statiques :

$$b \cdot y \cdot \frac{x}{2} + n \cdot A_{sc} \cdot (y - d') - n \cdot A_{st} \cdot (d - y) = 0$$

b- détermination des contraintes :

Sous l'action du moment, la section se déforme jusqu'à obtenir un état de contrainte qui équilibre le moment :

$$\Sigma M_i = M_S \text{ (moment de service)}$$

Nous avons : $M_b + M_{ASC} + M_{AST} = M_S$

$$I = I_b + n \cdot I_{st} + n \cdot I_{sc}$$

$$I_b = \frac{b \cdot x^3}{3} \quad ; \quad I_{sc} = A_{sc} \cdot (y - d')^2 \quad ; \quad I_{st} = A_{st} \cdot (d - y)^2$$

Alors les contraintes sont : $\sigma_{bc} = \frac{M_S \cdot x}{I}$ et $\sigma_{st} = \frac{n \cdot M_S \cdot (d - x)}{I}$

Les vérifications sont :

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{bc} \prec \overline{\sigma_{bc}} \\ \sigma_{st} \prec \overline{\sigma_{st}} \end{array} \right\} E.L.S \text{ est vérifié}$$

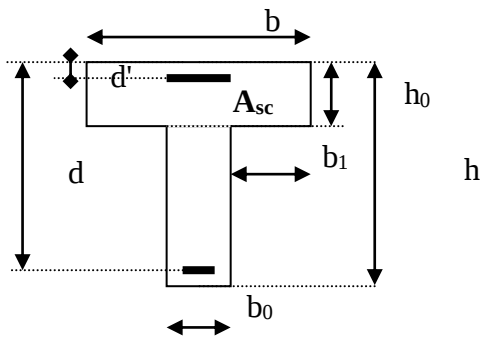
Si l'une ou les deux conditions ne sont pas vérifiées alors l'E.L.S n'est pas vérifié.

Etat limite ultime pour une section en " T " sans armature comprimée:

1 – Definition:

Les sections en T se rencontrent généralement dans:

- les planchers bâtiments.
- Les murs de soutènements
- Les tabliers des ponts.
- Les ouvrages où l'on fait participer le hourdis à la résistance de la poutre.



b : Largeur de la table

h : hauteur total de la section en T

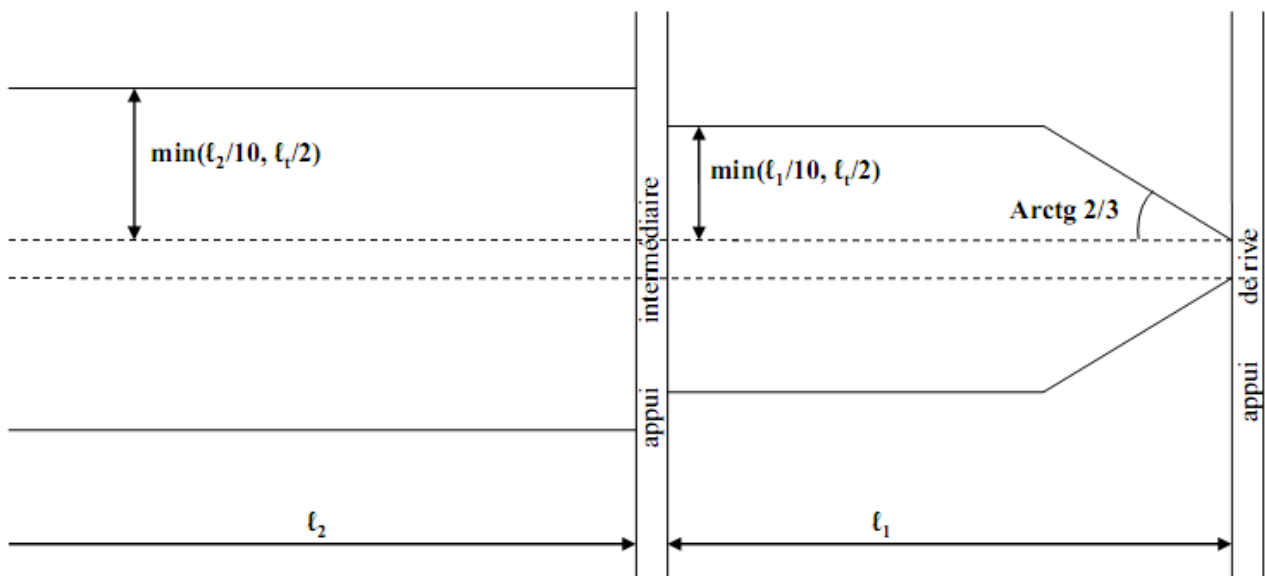
b_0 : Largeur de la nervure.

h_0 : épaisseur de l'hourdis

Largeur de table(b) à prendre en compte dans les calculs

Le BAEL définit la largeur du débord à prendre en compte par la plus restrictive des conditions suivantes :

- on ne doit pas attribuer une même zone de hourdis à deux nervures différentes,
- la largeur en cause ne doit pas dépasser le dixième de la travée, $b=2(l_i/10) + b_0$
- la largeur en cause ne doit pas dépasser les deux tiers de la distance de la section considérée à l'axe de l'appui extrême le plus proche. $b=2(2/3x) + b_0$



Calcul des armatures à Etat limite ultime

soit M_t le moment équilibré par la table de compression bh_0 supposée entièrement comprimée

$$M_t = bh_0 f_{bu} \left(d - \frac{h_0}{2} \right)$$

Nous pouvons avoir deux cas différents selon la position du diagramme des contraintes

1^{er} cas

$$M_u \leq M_t \quad \text{c-à-d.} \quad 0.8 y_u \leq h_0 \quad \text{ou} \quad y_u \leq 1.25 h_0$$

La table n'est pas entièrement comprimée. La détermination des armatures sera identique à une section rectangulaire ($b \times h$).

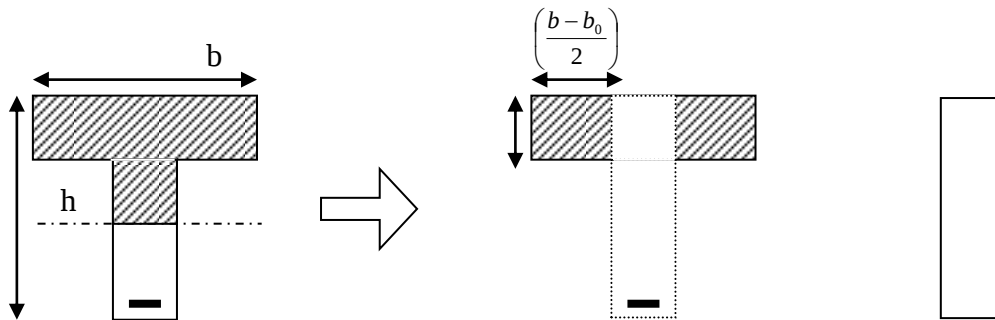
2^{ème} cas

$$M_u > M_t \quad \text{c-à-d.} \quad 0.8 y_u > h_0 \quad \text{ou} \quad y_u > 1.25 h_0$$

Section en T à considérer

Dans ce cas une partie de la nervure est comprimée. Le moment ultime est alors repris d'une part par les débords de la table et d'autre part par l'âme de la poutre.

En décomposant la section en T de la manière suivante :



Sur les ailes(1) : une résultante de compression : $N_{bu1} = (b-b_0) h_0 f_{bu}$

Sur la nervure : une résultante de compression : $N_{bu2} = b_0 \cdot 0.8 \cdot \alpha_u \cdot d \cdot f_{bu}$

Sur l'armature tendue A_u : résultante : $N_{su} = A_u \cdot \sigma_s$

Equilibre de la section

$$\Sigma F_i = 0 \quad \Rightarrow \quad N_{bu1} + N_{bu2} - N_{su} = 0$$

$$(b-b_0) h_0 f_{bu} + b_0 \cdot 0.8 \cdot \alpha_u \cdot d \cdot f_{bu} - A_u \cdot \sigma_s = 0 \quad (1)$$

$$\Sigma M_{i/A_u} = 0 \quad \Rightarrow \quad M_u - N_{su2} \cdot 0 - N_{bu1} (d - h_0/2) - N_{bu2} (d - 0.4 \alpha_u d) = 0 \quad (2)$$

$M_{u2} = M_u - (b-b_o).h_o. (d-h_o/2).f_{bu}$ moment fictif

Et on a $M_{u2} = M_u - \frac{(b-b_o)}{b} M_{tu}$

$$D'où (2) \Rightarrow \begin{cases} M_{u2} - 0,8.\alpha_u.b_o.d^2.(1-0,4 \alpha_u) f_{bu} = 0 & (3) \\ (b-b_o).h_o f_{bu} - 0,8.\alpha_u.d f_{bu} - A_u . \sigma_s = 0 & (4) \end{cases}$$

Les sections en T se calculent finalement comme des sections rectangulaires de largeur (b_o) soumises à un moment fictif : $M_{u2} = M_u - \frac{(b-b_o)}{b} M_{tu}$

Condition de non fragilité

Le choix de A_s (section réelle) impose de prendre en compte :

- $A_s \geq A_u$;
- $A_s \geq A_{min} = 0,23 b d f_{tj} / f_e$ (armature minimale pour respecter la condition de non-fragilité);

Vérification des sections en flexion simple à l'E.L.S

En ce concerne l'E.L.S vis-à-vis de la durabilité et l'exploitation de la structure les vérifications portent sur :

- Un état limite de compression du béton : $\sigma_b \leq \bar{\sigma}_b$
- Un état limite d'ouverture des fissures : $\sigma_s \leq \bar{\sigma}_s$

avec $\left\{ \begin{array}{l} \bar{\sigma}_b : \text{contrainte admissible en compression du béton,} \\ \bar{\sigma}_s : \text{contrainte admissible en traction de l'acier.} \end{array} \right.$

- et un état limite des déformations qui se traduit par une limitation des flèches dans les pièces de B.A (poutres ; dalles...)

Hypothèses de calcul à l'E.L.S

- les sections droites restent planes après déformation (hypothèse de Navier-Bernoulli),
- il n'y a pas de glissement relatif entre les armatures et le béton,
- le béton tendu est négligé,
- l'aire des aciers est supposée concentrée en son centre de gravité pourvu que l'erreur ainsi commise sur les déformations unitaires ne dépasse pas 15% (ce qui est généralement réalisé en pratique),
- le béton et l'acier sont considérés comme des matériaux linéairement élastiques,
- le rapport du module d'élasticité longitudinal de l'acier à celui du béton est : $n = 15$

1) Dispositions générales

On peut admettre (Article B.6.5.1) qu'il n'est pas indispensable de procéder au calcul de flèches si les trois conditions suivantes sont vérifiées:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{h}{\ell} \geq \max \left(\frac{1}{16} ; \frac{M_t}{10 M_o} \right) \\ \frac{A}{b_o d} \leq \frac{4.2}{f_e} \quad (f_e \text{ en MPa}) \\ \text{et} \quad \ell \leq 8 \text{ m} \end{array} \right. \quad \text{avec :}$$
$$\left\{ \begin{array}{l} h = \text{hauteur de la poutre} \\ \ell = \text{portée de la poutre} \\ M_t = \text{moment maximal en travée} \\ M_o = \text{moment dans la travée considérée isostatique} \\ b_o = \text{largeur de la nervure} \\ d = \text{hauteur utile de la poutre} \end{array} \right.$$

Si ces conditions ne sont pas vérifiées, on procède à l'évaluation des flèches.

2) Évaluation des flèches

- Le calcul des déformations globales doit tenir compte des phases successives de construction et des différentes sollicitations exercées.
- Pour la conduite du calcul, on distingue deux cas suivant que la pièce est fissurée ou non.
- Dans le cas des planchers, on procède à l'évaluation des flèches suivant l'article B.6.5.2.

3) Valeurs limites des flèches

Les valeurs limites des déformations qui peuvent résulter des conditions particulières d'exploitation de l'ouvrage sont fixées par le cahier des charges.

Dans le cas de bâtiments courants, il est par exemple admis que :

- **pour les éléments reposant sur deux appuis ou plus, les flèches sont limitées à :**
 - ✗ $\frac{\ell}{500}$ si $\ell \leq 5 \text{ m}$
 - ✗ $0.005 + \frac{\ell}{1000}$ si $\ell > 5 \text{ m}$ (la flèche et la portée sont exprimées en mètre)
- **et pour les éléments en console, elles sont limitées à :**
 - ✗ $\frac{\ell}{250}$ si $\ell \leq 2 \text{ m}$