

CHAPITRE III

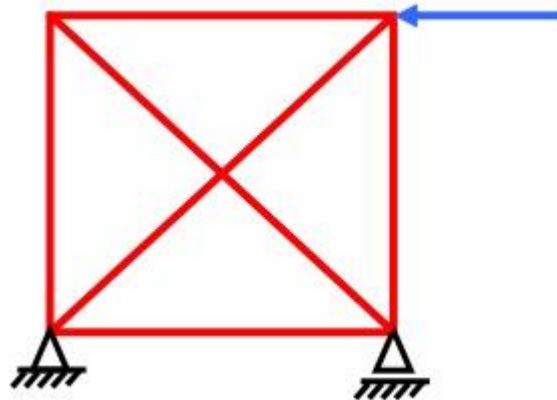
Calcul des systèmes hyperstatiques (Méthode des forces)



1- Introduction

Dans un système « hyperstatique » ou « statiquement indéterminée », la détermination des réactions, n'est plus possible au moyen des équations d'équilibre. Le nombre supérieur des inconnues provient des liaisons surabondantes.

Il est donc nécessaire pour résoudre le système, de faire intervenir d'autres conditions.



2- Liaisons surabondantes

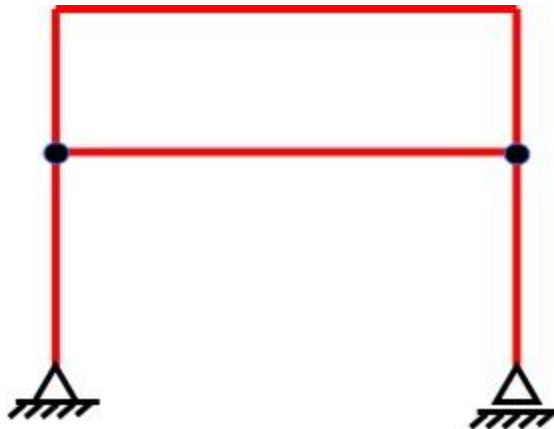
Par rapport à une structure isostatique, une structure hyperstatique contient un nombre surabondant d'inconnues.

2-1- Liaisons surabondantes extérieures

Qui sont généralement les appuis (simple, double), ou même l'encastrement, comme exemple les poutres hyperstatiques.

2-2- Liaisons surabondantes intérieures

Ils proviennent de la conception intérieure du système, comme les rotules par exemple.



3- Calcul du degré d'hyperstaticité

Le nombre de liaisons surabondantes, constitue le degré d'hyperstaticité noté « H ».

$$H = 3r + 2a + l - 3b$$

r : nombre de nœud rigide;

a : nombre d'articulation;

l : nombre de réaction;

b : nombre de barre.

4- Méthode des forces

L'étude d'un système isostatique, est accessible au départ des seules équations d'équilibre de la statique, tandis que la détermination des efforts internes et/ou des efforts de liaison dans un système hyperstatique, réclame le recours supplémentaire aux équations de compatibilité. Ce sont précisément ceux-ci qui nous permettront d'évaluer les inconnues hyperstatiques.

Appelée aussi méthode des efforts ou des sollicitations, cette méthode prend comme inconnues les forces dans les liaisons surabondante. Les équations supplémentaires permettant la détermination des forces inconnues, sont obtenues en exprimant « la continuité » de la structure déformée dans les liaisons supprimées (surabondantes).

4- Méthode des forces

4-1- Théorème de MENABREA

Le théorème de Castegliano suggère que la dérivée partielle du travail des forces extérieures par rapport à une force, est égale au déplacement du point d'application de la force dans la direction de cette dernière.

$$\delta = \frac{\partial W}{\partial P}$$

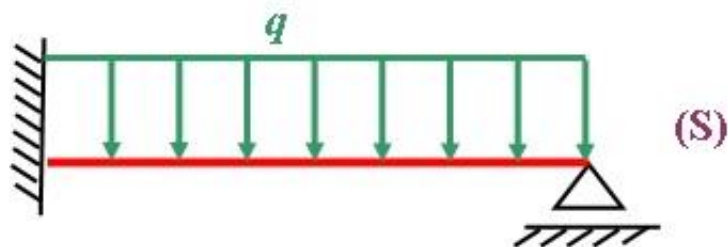
Si on remplace la force extérieure « P », par une inconnue hyperstatique « X_i », le déplacement au point d'application sera nul. On obtient, alors.

$$\frac{\partial W}{\partial X_i} = 0$$

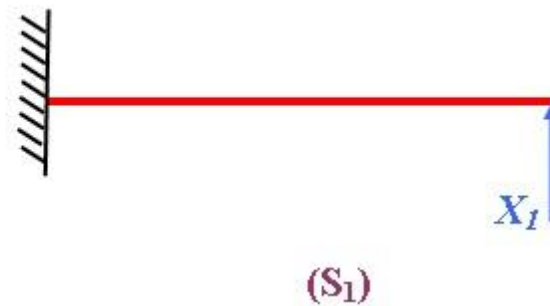
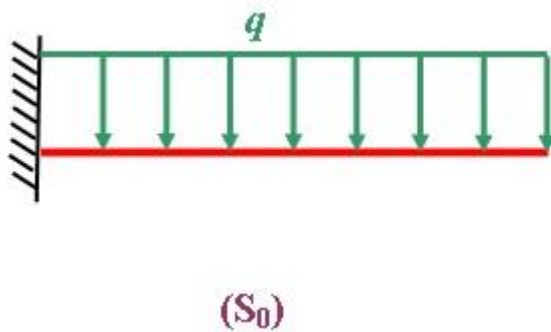
4- Méthode des forces

4-2- Structures hyperstatiques de degré 1

Considérons la structure (S) suivante.



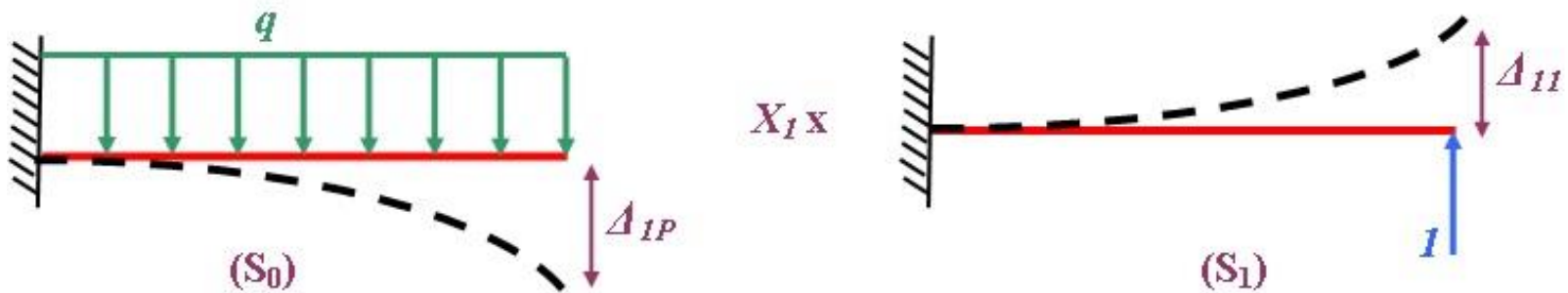
Cette structure est hyperstatique de degré 1. Elle est la superposition de deux structures (S_0) et (S_1)



4- Méthode des forces

4-2- Structures hyperstatiques de degré 1

Les déplacements au niveau de l'inconnue hyperstatique, valent zéro selon le théorème de Menabrea.

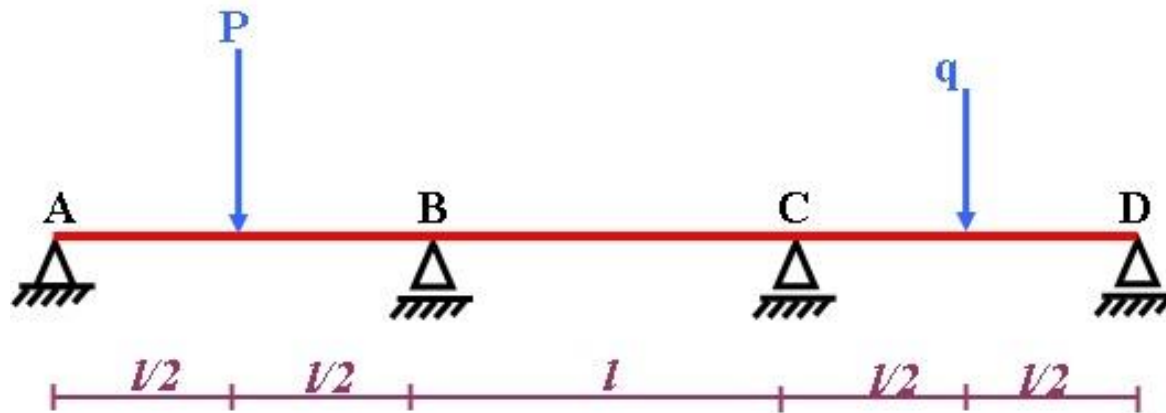


$$\begin{aligned}\Delta_1 = 0 &\Rightarrow \Delta_{11} + \Delta_{1P} = 0 \\ &\Rightarrow X_1 \delta_{11} + \Delta_{1P} = 0 \\ &\Rightarrow X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}}\end{aligned}$$

4- Méthode des forces

4-3- Structures hyperstatiques de degré supérieur à 1

Le principe reste identique au premier exemple. Le nombre d'inconnues hyperstatiques, est égal à deux: « X_1 » et « X_2 ». Ce système est la superposition de trois structures.



4- Méthode des forces

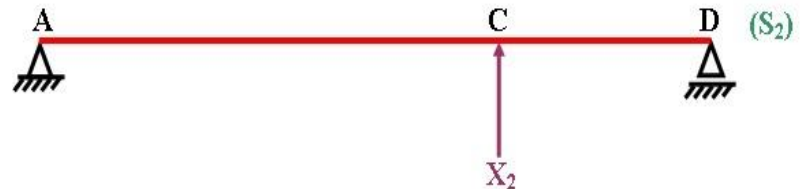
4-3- Structures hyperstatiques de degré supérieur à 1

Selon le théorème de Menabrea, les déplacements au niveau de l'appui « B » et « C » sont nuls, on peut écrire donc:

$$\Delta_B = 0 \Rightarrow \Delta_{11} + \Delta_{12} + \Delta_{1\Sigma F} = 0$$

$$\Delta_C = 0 \Rightarrow \Delta_{22} + \Delta_{21} + \Delta_{2\Sigma F} = 0$$

$$\begin{cases} X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + \Delta_{1\Sigma F} = 0 \\ X_2 \delta_{22} + X_1 \delta_{21} + \Delta_{2\Sigma F} = 0 \end{cases}$$



4- Méthode des forces

L'objectif dans cette méthode, consiste à déterminer les efforts « X_i » tels qu'ils existent réellement dans la structure hyperstatique de départ. Avec l'aide du théorème de Castegliano/Menabrea, qui suggère que le déplacement au niveau de l'inconnue hyperstatique est nuls, la dernière équation peut être généralisée, pour devenir l'équation canonique de la méthode des forces.

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \Delta_{1\Sigma F} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \dots + \Delta_{2\Sigma F} = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \delta_{k1}X_1 + \delta_{k2}X_2 + \dots + \Delta_{k\Sigma F} = 0 \end{array} \right.$$

4- Méthode des forces

4-4- Détermination des coefficients « δ_{ki} et $\delta_{k\Sigma F}$ »

L'évaluation des coefficients « δ_{ki} » et « $\delta_{k\Sigma F}$ » repose sur l'intégrale de MOHR.

$$\delta_{ki} = \int \frac{m_k m_i}{EI} dx; \quad \delta_{k\Sigma F} = \int \frac{m_k M_{\Sigma F}}{EI} dx$$

On peut alléger les calculs, si on dispose de tableaux donnant les valeurs calculées des intégrales pour les formes courantes du diagramme des moments fléchissant.

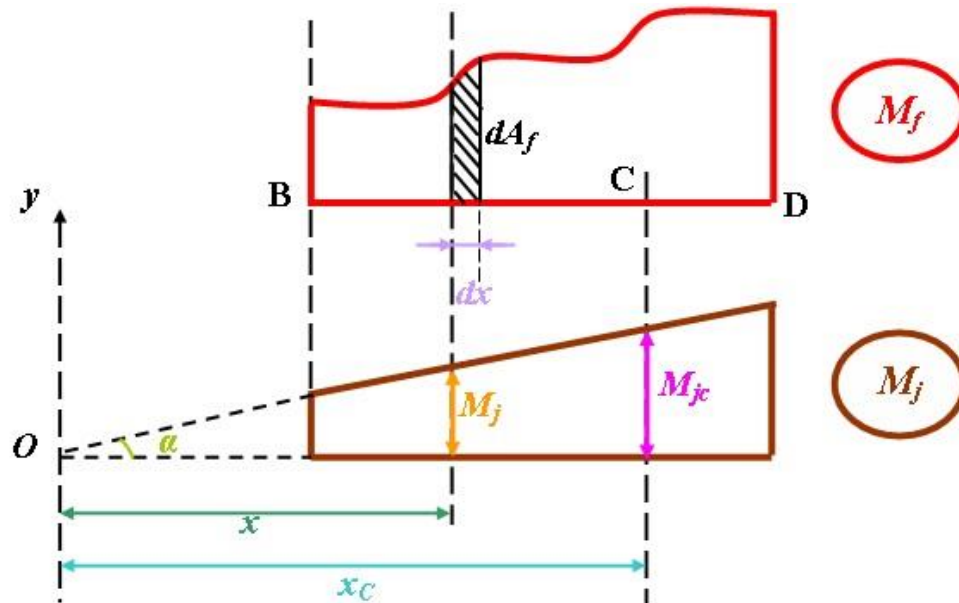
Le calcul immédiat de l'intégral de MOHR, peut se faire aussi par la multiplication des diagrammes ou la règle de VERECHTCHAGUINE.

4- Méthode des forces

4-5- Règle de VERECHTCHAGUINE

Considérons deux diagrammes des moments fléchissants. L'un est le diagramme du moment fléchissant « M_f » sous l'effet des charges extérieures. Il varie, selon des équations de 1^{er}, 2^{ème} ou plus rarement, du 3^{ème} ordre).

L'autre est le diagramme du moment fléchissant « M_j » sous l'effet d'une charge unitaire, donc de forme réctiligne.



4- Méthode des forces

4-5- Règle de VERECHTCHAGUINE

Remarquons que:

$$M_f dx = dA_f; \quad M_j = x.tg\alpha$$

L'intégral de MOHR devient

$$\int_B^D \frac{M_j M_f}{EI} dx = \frac{1}{EI} . tg\alpha \int_B^D x . dA_f$$

Moment statique du diagramme de « M_f » par rapport à l'axe « y » passant par le point « O » et égal à « $A_f x_C$ »

Le dessin montre que « $x_C = M_{j_c}/tg\alpha$ », où « M_{j_c} » est l'ordonnée du diagramme de « M_j » sous le centre de gravité du diagramme de « M_f » (sous le point « C »). Donc;

$$\frac{1}{EI} tg\alpha \int_B^D x dA_f = \frac{tg\alpha}{EI} A_f x_C = A_f M_{j_c} / EI$$

4- Méthode des forces

Exercice: Tracer le diagramme du moment flechissant du portique illustrer.

Solution:

1-Détermination du degré d'hyperstaticité « H »

$$H=3C-A-2S$$

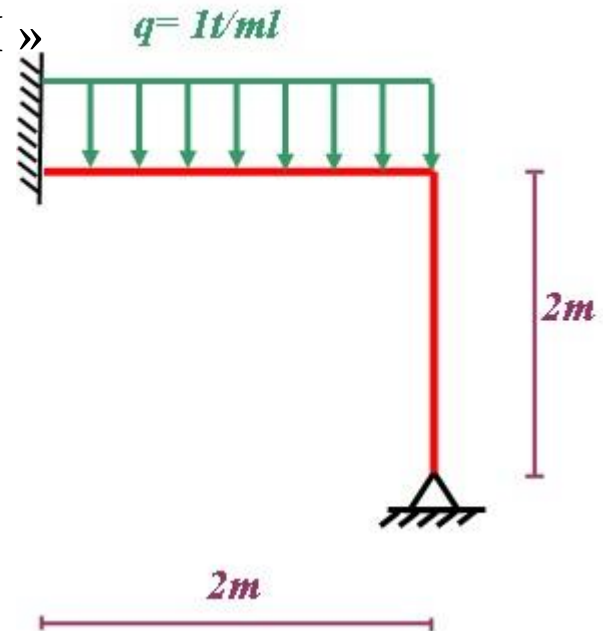
« C » : Le nombre de contours de la structure

« A » : Le nombre d'articulation
(y compris les appuis doubles)

« S » : Le nombre d'appuis simples

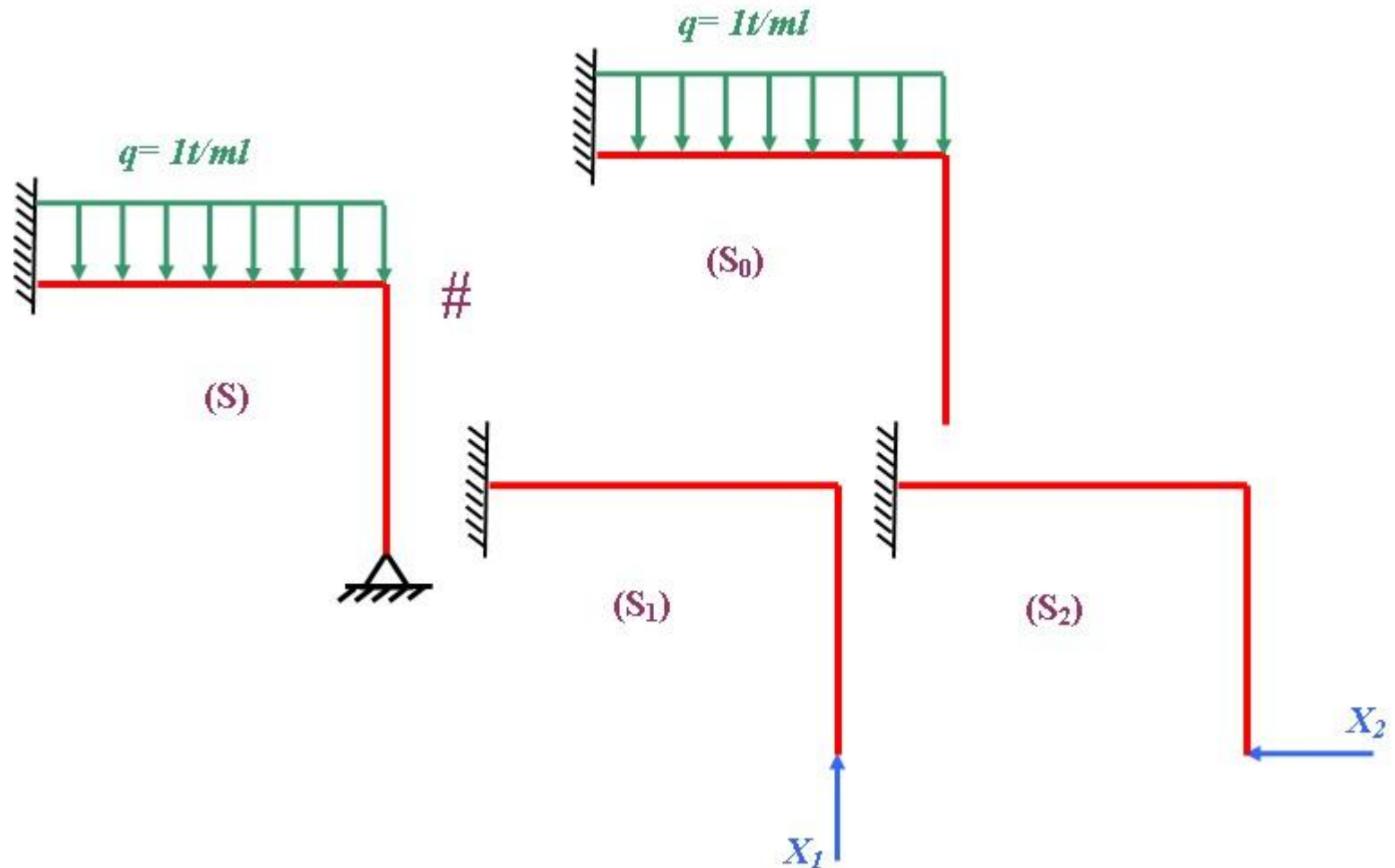
$$H=3(1)-1-2(0) = 2.$$

Le nombre de liaisons surabondantes ou inconnues hyperstatiques, est de « 2 »



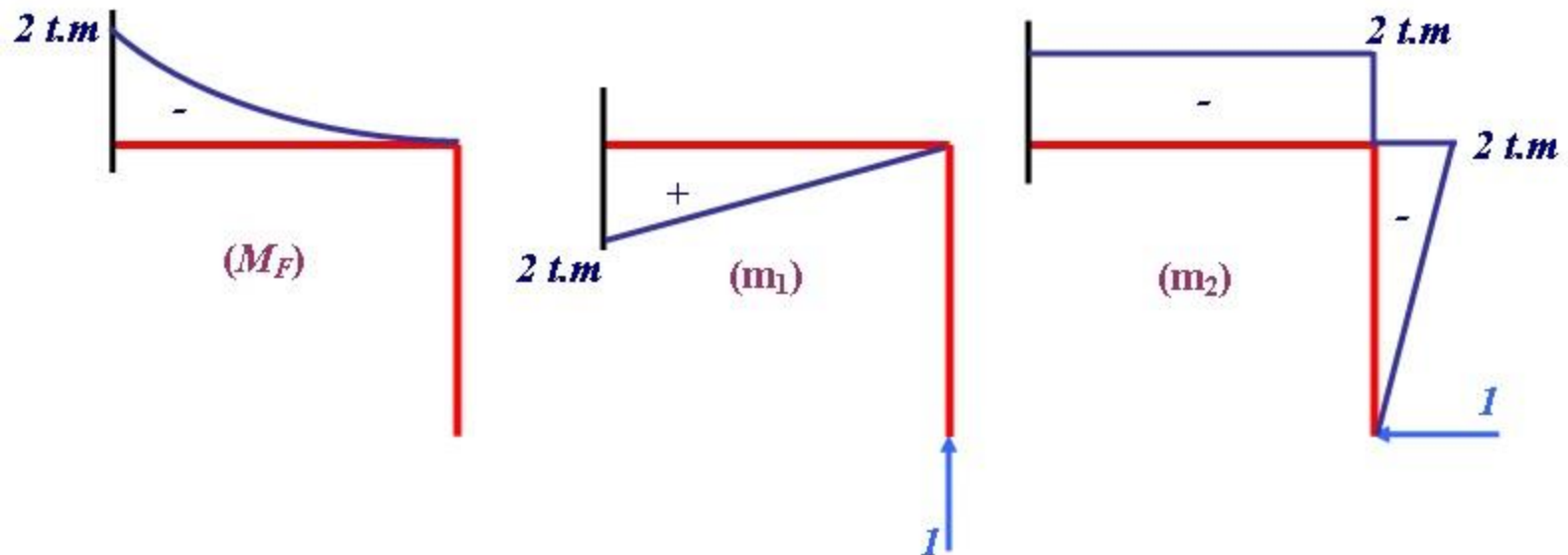
4- Méthode des forces

2- Le choix d'un système de base (fondamental, principal).



4- Méthode des forces

3- Le tracé du diagramme des efforts internes (Cas de notre exercice c'est le moment fléchissant) sous chargement externe ($q=1t/ml$). Le tracé des diagrammes des efforts internes sous chargement unitaire (inconnues hyperstatiques).



4- Méthode des forces

4- Calcul des coefficients d'influences par la règle de VERECHTCHAGUINE.

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \right] = \frac{8}{3EI}$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (-2) \cdot \frac{2}{3} \cdot (-2) + 2 \cdot (-2) \cdot (-2) \right] = \frac{32}{3EI}$$

$$\delta_{12} = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot (-2) \right] = \frac{-4}{EI}$$

$$\delta_{21} = \frac{1}{EI} \left[2 \cdot (-2) \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \right] = \frac{-4}{EI}$$

$$\Delta_{1F} = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{3} \cdot 2 \cdot (-2) \cdot \frac{3}{4} \cdot 2 \right] = \frac{-2}{EI}$$

$$\Delta_{2F} = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{3} \cdot 2 \cdot (-2) \cdot (-2) \right] = \frac{8}{3EI}$$

4- Méthode des forces

5- Détermination des réactions du système à travers l'équation canonique de la méthode des forces.

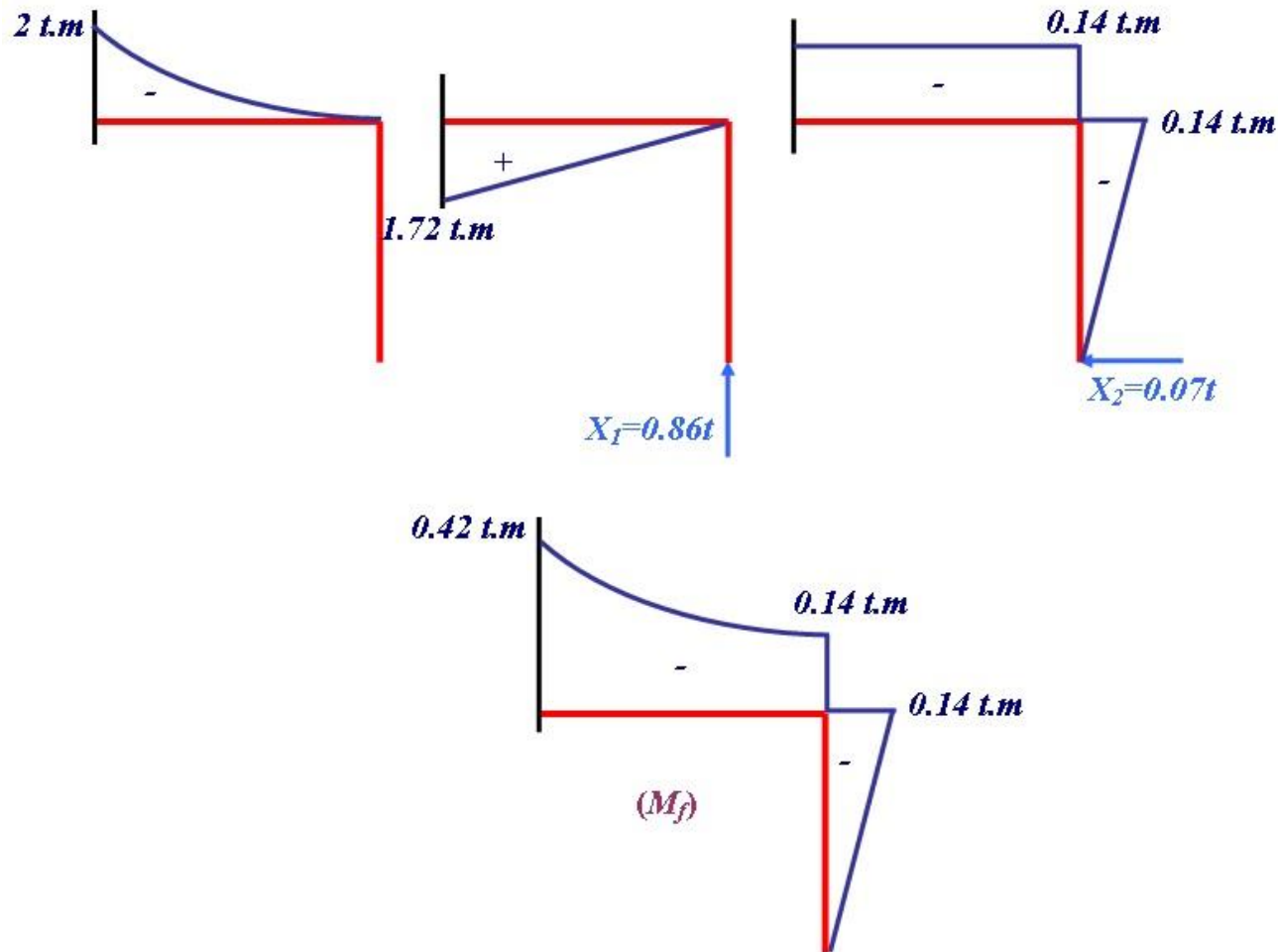
$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1\Sigma F} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2\Sigma F} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{8}{3}X_1 - 4X_2 - 2 = 0 \\ -4X_1 + \frac{32}{3}X_2 + \frac{8}{3} = 0 \end{cases}$$

$$X_1 = 0.86t; \quad X_2 = 0.07t$$

4- Méthode des forces

6- Le tracé du diagramme du moment fléchissant.



Merci

