

Chapitre 5 : Systèmes linéaires à plusieurs degrés de liberté

5.1 Degrés de liberté

Les variables indépendantes nécessaires à la description d'un système en mouvement sont appelées *degrés de liberté*. S'il y a N variables indépendantes q_i , on écrit N équations de Lagrange :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_1} \right) = - \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_1} + F_1(t) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_2} \right) = - \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_2} + F_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_N} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_N} \right) = - \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_N} + F_N(t) \end{array} \right.$$

5.1.1 Types de couplage

5.1.1.a Couplage par élasticité

Le couplage entre les deux systèmes est à travers un ressort (capacité).

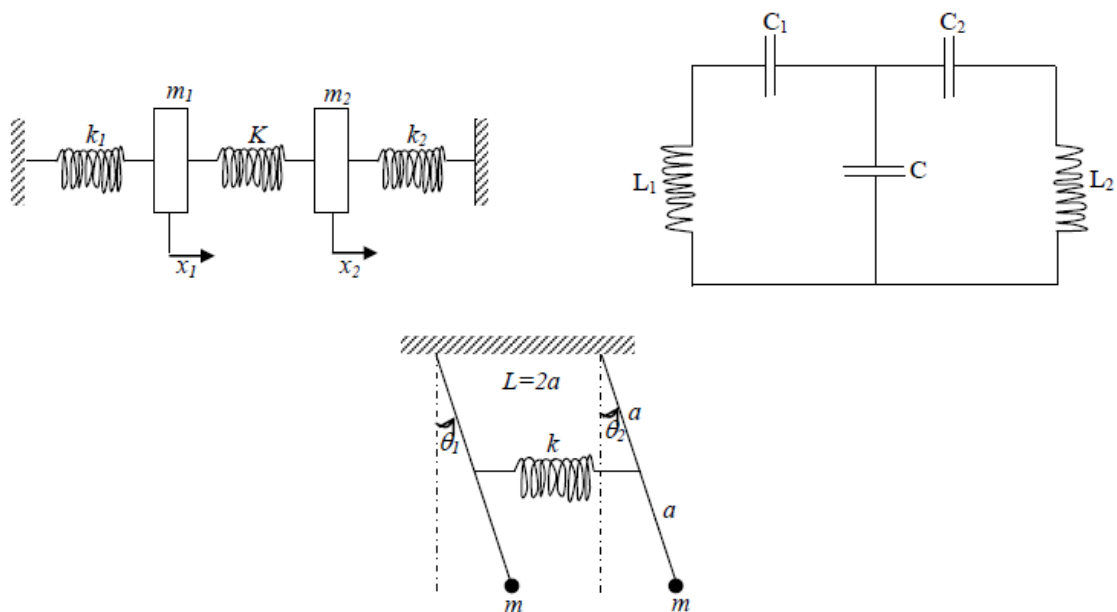


Figure 5.1 : Différents systèmes mécanique et électrique couplés par élasticité

5.1.1.b Couplage inertiel

Le couplage entre les deux systèmes est à travers une masse (bobine).

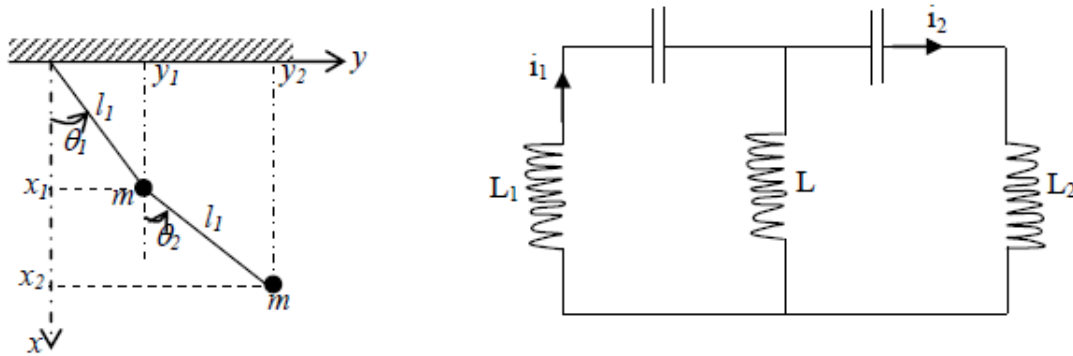


Figure 5.2 : Systèmes mécaniques et électriques couplés par inertie

5.1.1.c Couplage visqueux

Le couplage entre les deux systèmes est à travers un amortisseur (résistance).

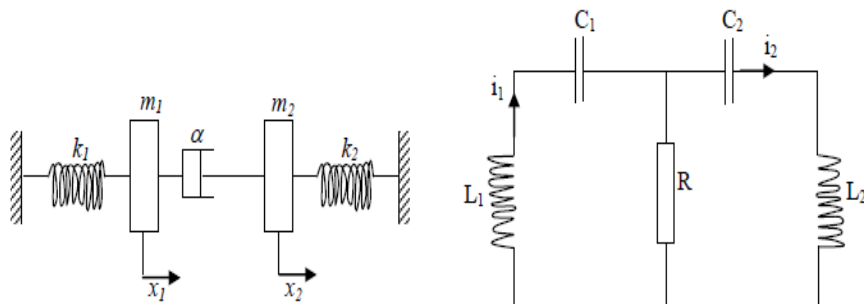


Figure 5.3 : Couplage visqueux des différents systèmes mécaniques et électriques

5.2 Systèmes libres à deux degrés de libertés

5.2.1 Equation du mouvement

Soit le système libre ci-contre. Les deux variables indépendantes sont x_1 et x_2 . k est appelé *élément de couplage*.

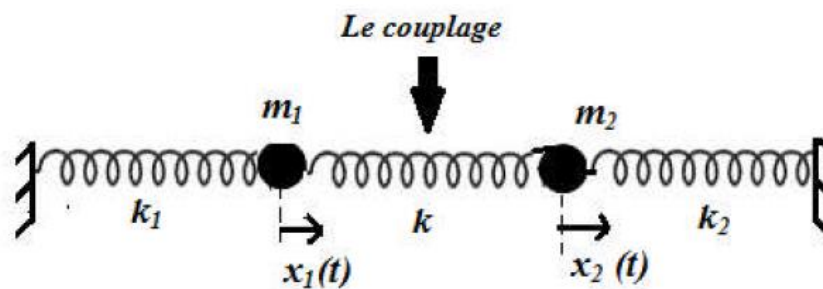


Figure 5.4 : Mouvement oscillatoire d'un système couplé à deux degrés de liberté

Pour l'énergie cinétique on a s'écrit comme suit :

$$E_c = T = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2$$

Pour l'énergie potentielle on a :

$$E_p = U = \frac{1}{2} k (x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 k_i x_i^2 = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_2 x_2^2 + \frac{1}{2} k (x_1 - x_2)^2$$

D'où le Lagrangien s'écrit : $L = T - U = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 - \frac{1}{2} k_1 x_1^2 - \frac{1}{2} k_2 x_2^2 - \frac{1}{2} k (x_1 - x_2)^2$

$$L = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 - \frac{1}{2} k_1 x_1^2 - \frac{1}{2} k_2 x_2^2 - \frac{1}{2} k (x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2)$$

$$L = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 - \frac{1}{2} k_1 x_1^2 - \frac{1}{2} k_2 x_2^2 - \frac{1}{2} k x_1^2 - \frac{1}{2} k x_2^2 - \frac{1}{2} k (-2x_1 x_2)$$

$$L = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 - \frac{1}{2} k_1 x_1^2 - \frac{1}{2} k_2 x_2^2 - \frac{1}{2} k x_1^2 - \frac{1}{2} k x_2^2 + k x_1 x_2$$

Les deux équations de Lagrange s'écrivent : (Pour $D=0$, $F=0$: système non amorti et non forcé)

Le système différentiel couplé devient alors :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x_1} \right) = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x_2} \right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) = m_1 \ddot{x}_1, \left(\frac{\partial L}{\partial x_1} \right) = -k_1 x_1 - k x_1 + k x_2 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right) = m_2 \ddot{x}_2, \left(\frac{\partial L}{\partial x_2} \right) = -k_2 x_2 - k x_2 + k x_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k) x_1 - k x_2 = 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 + (k + k_2) x_2 - k x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x}_1 + \frac{(k_1 + k)}{m_1} x_1 - \frac{k}{m_1} x_2 = 0 \\ \ddot{x}_2 + \frac{(k + k_2)}{m_2} x_2 - \frac{k}{m_2} x_1 = 0 \end{cases}$$

5.2.2 Modes propres (normaux)

En mode normale (ou propre) la solution de l'équation précédente est la forme d'une superposition des deux modes propres, comme suit :

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1).$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2).$$

A_1 , A_2 , φ , Dépendant des conditions initiales. Pour trouver ω , utilisons la représentation complexe :

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \rightarrow \tilde{x}_1 = A_1 e^{j(\omega t + \varphi_1)} = \tilde{A}_1 e^{j\omega t} \\ x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \rightarrow \tilde{x}_2 = A_2 e^{j(\omega t + \varphi_2)} = \tilde{A}_2 e^{j\omega t} \end{cases} \\
& \begin{cases} \tilde{x}_1 = \tilde{A}_1 e^{j\omega t} \\ \tilde{x}_2 = \tilde{A}_2 e^{j\omega t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = j\omega \tilde{A}_1 e^{j\omega t} \\ \dot{\tilde{x}}_2 = j\omega \tilde{A}_2 e^{j\omega t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{\tilde{x}}_1 = (j\omega)^2 \tilde{A}_1 e^{j\omega t} = -\omega^2 \tilde{A}_1 e^{j\omega t} \\ \ddot{\tilde{x}}_2 = (j\omega)^2 \tilde{A}_2 e^{j\omega t} = -\omega^2 \tilde{A}_2 e^{j\omega t} \end{cases} \\
& \begin{cases} \ddot{x}_1 + \frac{(k_1+k)}{m_1} x_1 - \frac{k}{m_1} x_2 = 0 \\ \ddot{x}_2 + \frac{(k+k_2)}{m_2} x_2 - \frac{k}{m_2} x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\omega^2 \tilde{A}_1 e^{j\omega t} + \frac{(k_1+k)}{m_1} \tilde{A}_1 e^{j\omega t} - \frac{k}{m_1} \tilde{A}_2 e^{j\omega t} = 0 \\ -\omega^2 \tilde{A}_2 e^{j\omega t} + \frac{(k+k_2)}{m_2} \tilde{A}_2 e^{j\omega t} - \frac{k}{m_2} \tilde{A}_1 e^{j\omega t} = 0 \end{cases} \\
& \begin{cases} -\omega^2 \tilde{A}_1 e^{j\omega t} + \frac{(k_1+k)}{m_1} \tilde{A}_1 e^{j\omega t} - \frac{k}{m_1} \tilde{A}_2 e^{j\omega t} = 0 \\ -\omega^2 \tilde{A}_2 e^{j\omega t} + \frac{(k+k_2)}{m_2} \tilde{A}_2 e^{j\omega t} - \frac{k}{m_2} \tilde{A}_1 e^{j\omega t} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(-\omega^2 + \frac{(k_1+k)}{m_1}\right) \tilde{A}_1 e^{j\omega t} - \left(\frac{k}{m_1}\right) \tilde{A}_2 e^{j\omega t} = 0 \\ \left(-\omega^2 + \frac{(k+k_2)}{m_2}\right) \tilde{A}_2 e^{j\omega t} - \left(\frac{k}{m_2}\right) \tilde{A}_1 e^{j\omega t} = 0 \end{cases} \\
& \begin{cases} \left(-\omega^2 + \frac{(k_1+k)}{m_1}\right) \tilde{A}_1 - \left(\frac{k}{m_1}\right) \tilde{A}_2 = 0 \\ \left(-\omega^2 + \frac{(k+k_2)}{m_2}\right) \tilde{A}_2 - \left(\frac{k}{m_2}\right) \tilde{A}_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(-\omega^2 + \frac{(k_1+k)}{m_1}\right) \tilde{A}_1 - \left(\frac{k}{m_1}\right) \tilde{A}_2 = 0 \\ -\left(\frac{k}{m_2}\right) \tilde{A}_1 + \left(-\omega^2 + \frac{(k+k_2)}{m_2}\right) \tilde{A}_2 = 0 \end{cases} \\
& \begin{cases} (-\omega^2 + a) \tilde{A}_1 - b \tilde{A}_2 = 0 \\ -c \tilde{A}_1 + (-\omega^2 + d) \tilde{A}_2 = 0 \end{cases} \\
& a = \frac{k+k_1}{m_1}, b = \frac{k}{m_1}, c = \frac{k}{m_2}, d = \frac{k+k_2}{m_2}.
\end{aligned}$$

Pour que l'équation soit vraie sans que $\tilde{A}_1$ et $\tilde{A}_2$ soient tous les deux nuls, il faut que son *déterminant caractéristique* soit nul :

$$\begin{aligned}
\Delta(\omega) &= \begin{vmatrix} (-\omega^2 + a) & -b \\ -c & (-\omega^2 + d) \end{vmatrix} = (-\omega^2 + a)(-\omega^2 + d) - (-c)(-b) = 0 \\
\Delta(\omega) &= \omega^4 - \omega^2 d - \omega^2 a + ad - bc = \omega^4 - (d+a)\omega^2 + (ad-bc) = 0
\end{aligned}$$

Ceci nous donne l'équation caractéristique :

$$\omega^4 - (d+a)\omega^2 + (ad-bc) = 0$$

Les deux solutions réelles et positives ω_1 et ω_2 de cette équation sont appelées *pulsations propres* ou *normales*. La plus petite est appelée la *fondamentale*, l'autre est appelée l'*harmonique*.

Premier mode propre : Pour $\omega = \omega_1$, le système implique que :

$$\begin{cases} (-\omega^2 + a)\tilde{A}_1 - b\tilde{A}_2 = 0 \\ -c\tilde{A}_1 + (-\omega^2 + d)\tilde{A}_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-\omega^2 + a)\tilde{A}_1 = b\tilde{A}_2 \\ (-\omega^2 + d)\tilde{A}_2 = c\tilde{A}_1 \end{cases}$$

$$\frac{\tilde{A}_1(1)}{\tilde{A}_2(1)} = \frac{-\omega_1^2 + d}{c} > 0.$$

La vibration est dite en *phase* car la solution s'écrit dans ce cas $\begin{cases} x_{1(1)} = A_{1(1)} \cos(\omega_1 t + \varphi) \\ x_{2(1)} = A_{2(1)} \cos(\omega_1 t + \varphi) \end{cases}$

Deuxième mode propre : Pour $\omega = \omega_2$, le système implique que :

$$\frac{\tilde{A}_1(2)}{\tilde{A}_2(2)} = \frac{-\omega_2^2 + d}{c} < 0. \text{ La vibration est dite en } \textit{opposition de phase} \text{ car la solution s'écrit dans ce}$$

cas :

$$\begin{cases} x_{1(2)} = A_{1(2)} \cos(\omega_2 t + \varphi) \\ x_{2(2)} = -A_{2(2)} \cos(\omega_2 t + \varphi) \end{cases}$$

Dans le cas général, le système vibre dans une *superposition* de ces deux modes propres.

5.3 Système forces a deux degrés de libertés

5.3.1 Equations de mouvement

Soit le système ci- contre.

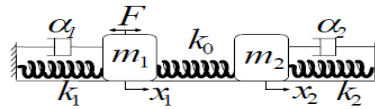


Figure 5.5 : Mouvement oscillatoire d'un système couplé à deux degrés de liberté

Pour l'énergie cinétique on a s'écrit comme suit :

$$E_c = T = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2$$

Pour l'énergie potentielle on a :

$$E_p = U = \frac{1}{2} k (x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 k_i x_i^2 = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_2 x_2^2 + \frac{1}{2} k_0 (x_1 - x_2)^2$$

D'où le Lagrangien s'écrit : $L = T - U = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 - \frac{1}{2} k_1 x_1^2 - \frac{1}{2} k_2 x_2^2 - \frac{1}{2} k_0 (x_1 - x_2)^2$

$$L = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 - \frac{1}{2} k_1 x_1^2 - \frac{1}{2} k_2 x_2^2 - \frac{1}{2} k_0 (x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2)$$

$$L = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 - \frac{1}{2} k_1 x_1^2 - \frac{1}{2} k_2 x_2^2 - \frac{1}{2} k_0 x_1^2 - \frac{1}{2} k_0 x_2^2 - \frac{1}{2} k_0 (-2x_1 x_2)$$

$$L = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 - \frac{1}{2} k_1 x_1^2 - \frac{1}{2} k_2 x_2^2 - \frac{1}{2} k_0 x_1^2 - \frac{1}{2} k_0 x_2^2 + k_0 x_1 x_2$$

Les deux équations de Lagrange s'écrivent : (Pour $D = \frac{1}{2} \alpha_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} \alpha_2 \dot{x}_2^2$ et $F_0 \cos \omega t$)

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_1} = +F \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) = m_1 \ddot{x}_1, \left(\frac{\partial L}{\partial x_1} \right) = -k_1 x_1 - k_0 x_1 + k_0 x_2, \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_1} = \alpha_1 \dot{x}_1 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right) = m_2 \ddot{x}_2, \left(\frac{\partial L}{\partial x_2} \right) = -k_2 x_2 - k_0 x_2 + k_0 x_1, \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_2} = \alpha_2 \dot{x}_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_0) x_1 + \alpha_1 \dot{x}_1 - k_0 x_2 = F_0 \cos \omega t \\ m_2 \ddot{x}_2 + (k_0 + k_2) x_2 + \alpha_2 \dot{x}_2 - k_0 x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x}_1 + \frac{(k_1 + k_0)}{m_1} x_1 - \frac{k_0}{m_1} x_2 + \frac{\alpha_1}{m_1} \dot{x}_1 = \frac{F_0}{m_1} \cos \omega t \\ \ddot{x}_2 + \frac{(k_0 + k_2)}{m_2} x_2 - \frac{k_0}{m_2} x_1 + \frac{\alpha_2}{m_2} \dot{x}_2 = 0 \end{cases}$$

5.3.2 Résonance et antirésonance

(Avec $D=0$ et $F \neq 0$: système forcé mais non amorti.) La solution permanente est :

$$\begin{cases} x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \\ x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \end{cases}$$

A_1, A_2, φ_2 dépendent de la pulsation d'excitation ω et de F_0 . Pour trouver A_1, A_2 , utilisons la représentation complexe

Lorsque $D = 0$:

$$\begin{cases} x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \rightarrow \tilde{x}_1 = A_1 e^{j(\omega t + \varphi_1)} = \tilde{A}_1 e^{j\omega t} \\ x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \rightarrow \tilde{x}_2 = A_2 e^{j(\omega t + \varphi_2)} = \tilde{A}_2 e^{j\omega t} \end{cases}$$

$$F(t) = F_0 \cos \omega t \rightarrow \tilde{F}(t) = F_0 e^{j\omega t}$$

$$\begin{cases} \tilde{x}_1 = \tilde{A}_1 e^{j\omega t} \\ \tilde{x}_2 = \tilde{A}_2 e^{j\omega t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = j\omega \tilde{A}_1 e^{j\omega t} \\ \dot{\tilde{x}}_2 = j\omega \tilde{A}_2 e^{j\omega t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{\tilde{x}}_1 = (j\omega)^2 \tilde{A}_1 e^{j\omega t} = -\omega^2 \tilde{A}_1 e^{j\omega t} \\ \ddot{\tilde{x}}_2 = (j\omega)^2 \tilde{A}_2 e^{j\omega t} = -\omega^2 \tilde{A}_2 e^{j\omega t} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\begin{cases} \ddot{x}_1 + \frac{(k_1+k_0)}{m_1}x_1 - \frac{k_0}{m_1}x_2 = \frac{F_0}{m_1}e^{j\omega t} \\ \ddot{x}_2 + \frac{(k_0+k_2)}{m_2}x_2 - \frac{k_0}{m_2}x_1 = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} -\omega^2 \tilde{A}_1 e^{j\omega t} + \frac{(k_1+k_0)}{m_1} \tilde{A}_1 e^{j\omega t} - \frac{k_0}{m_1} \tilde{A}_2 e^{j\omega t} = \frac{F_0}{m_1} e^{j\omega t} \\ -\omega^2 \tilde{A}_2 e^{j\omega t} + \frac{(k_0+k_2)}{m_2} \tilde{A}_2 e^{j\omega t} - \frac{k_0}{m_2} \tilde{A}_1 e^{j\omega t} = 0 \end{cases} \\
\begin{cases} -\omega^2 \tilde{A}_1 e^{j\omega t} + \frac{(k_1+k_0)}{m_1} \tilde{A}_1 e^{j\omega t} - \frac{k_0}{m_1} \tilde{A}_2 e^{j\omega t} = \frac{F_0}{m_1} e^{j\omega t} \\ -\omega^2 \tilde{A}_2 e^{j\omega t} + \frac{(k_0+k_2)}{m_2} \tilde{A}_2 e^{j\omega t} - \frac{k_0}{m_2} \tilde{A}_1 e^{j\omega t} = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \left(-\omega^2 + \frac{(k_1+k_0)}{m_1} \right) \tilde{A}_1 e^{j\omega t} - \left(\frac{k_0}{m_1} \right) \tilde{A}_2 e^{j\omega t} = \frac{F_0}{m_1} e^{j\omega t} \\ \left(-\omega^2 + \frac{(k_0+k_2)}{m_2} \right) \tilde{A}_2 e^{j\omega t} - \left(\frac{k_0}{m_2} \right) \tilde{A}_1 e^{j\omega t} = 0 \end{cases} \\
\begin{cases} \left(-\omega^2 + \frac{(k_1+k_0)}{m_1} \right) \tilde{A}_1 - \left(\frac{k_0}{m_1} \right) \tilde{A}_2 = \frac{F_0}{m_1} \\ \left(-\omega^2 + \frac{(k_0+k_2)}{m_2} \right) \tilde{A}_2 - \left(\frac{k_0}{m_2} \right) \tilde{A}_1 = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \left(-\omega^2 + \frac{(k_1+k_0)}{m_1} \right) \tilde{A}_1 - \left(\frac{k_0}{m_1} \right) \tilde{A}_2 = \frac{F_0}{m_1} \\ -\left(\frac{k_0}{m_2} \right) \tilde{A}_1 + \left(-\omega^2 + \frac{(k_0+k_2)}{m_2} \right) \tilde{A}_2 = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Cas où : $m_1=m_2=m$ et $k_0=k_1=k_2=k$.

En posant $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, l'équation devient

$$\begin{cases} \left(-\omega^2 + 2\frac{k}{m}\right)\tilde{A}_1 - \frac{k}{m}\tilde{A}_2 = \frac{F_0}{m} \\ -\frac{k}{m}\tilde{A}_1 + \left(-\omega^2 + 2\frac{k}{m}\right)\tilde{A}_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(-\omega^2 + 2\omega_0^2\right)\tilde{A}_1 - \omega_0^2\tilde{A}_2 = \frac{F_0}{m} \dots\dots\dots(1) \\ -\omega_0^2\tilde{A}_1 + \left(-\omega^2 + 2\omega_0^2\right)\tilde{A}_2 = 0 \dots\dots\dots(2) \end{cases}$$

$$(2) \Rightarrow +\left(-\omega^2 + 2\omega_0^2\right)\tilde{A}_2 = +\omega_0^2\tilde{A}_1$$

$$\tilde{A}_2 = \frac{\omega_0^2}{\left(-\omega^2 + 2\omega_0^2\right)}\tilde{A}_1 \dots\dots\dots(3)$$

On remplace (3) par (1)

$$\left(-\omega^2 + 2\omega_0^2\right)\tilde{A}_1 - \omega_0^2 \frac{\omega_0^2}{\left(-\omega^2 + 2\omega_0^2\right)}\tilde{A}_1 = \frac{F_0}{m}$$

$$\left(-\omega^2 + 2\omega_0^2\right)\tilde{A}_1 - \frac{\omega_0^4}{\left(-\omega^2 + 2\omega_0^2\right)}\tilde{A}_1 = \frac{F_0}{m}$$

$$\left(\left(-\omega^2 + 2\omega_0^2\right) - \frac{\omega_0^4}{\left(-\omega^2 + 2\omega_0^2\right)}\right)\tilde{A}_1 = \frac{F_0}{m}$$

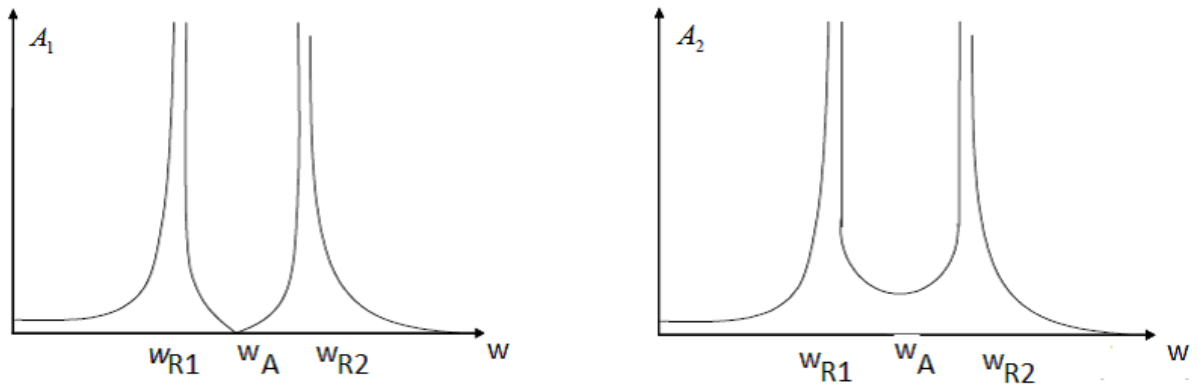
$$\left(\frac{\left(-\omega^2 + 2\omega_0^2\right)\left(-\omega^2 + 2\omega_0^2\right) - \omega_0^4}{\left(-\omega^2 + 2\omega_0^2\right)}\right)\tilde{A}_1 = \frac{F_0}{m}$$

$$\left(\frac{\left(-\omega^2 + 2\omega_0^2\right)^2 - \omega_0^4}{\left(-\omega^2 + 2\omega_0^2\right)}\right)\tilde{A}_1 = \frac{F_0}{m}$$

$$\begin{cases} \tilde{A}_1 = \frac{F_0}{m} \frac{\left(-\omega^2 + 2\omega_0^2\right)}{\left(\left(-\omega^2 + 2\omega_0^2\right)^2 - \omega_0^4\right)} \\ \tilde{A}_2 = \frac{\omega_0^2}{\left(-\omega^2 + 2\omega_0^2\right)}\tilde{A}_1 = \frac{F_0}{m} \frac{\omega_0^2}{\left(-\omega^2 + 2\omega_0^2\right)} \frac{\left(-\omega^2 + 2\omega_0^2\right)}{\left(\left(-\omega^2 + 2\omega_0^2\right)^2 - \omega_0^4\right)} = \frac{F_0}{m} \frac{\omega_0^2}{\left(\left(-\omega^2 + 2\omega_0^2\right)^2 - \omega_0^4\right)} \end{cases}$$

$A_1=A_2=\infty$ lorsque

- ✓ $\omega \cong \omega_0 \cong \omega_{R1}$ (appelée **première** pulsation de résonance.)
- ✓ $\omega \cong \sqrt{3}\omega_0 \cong \omega_{R2}$ $\omega=\sqrt{3}\omega_0=\omega_{R2}$ (appelée **deuxième** pulsation de résonance.)
- ✓ $A_1=0$ lorsque $\omega \cong \sqrt{2}\omega_0 \cong \omega_A$ (appelée pulsation d'**antirésonance**.)



5.3.3 Impédance d'entrée et de transfert

(Avec $D \neq 0$ et $F \neq 0$: *Système amorti et forcé*)

En électricité, l'impédance est définie par $\tilde{Z} = \frac{F}{\tilde{i}_1}$. Par analogie, on définit l'impédance

mécanique par $\tilde{Z} = \frac{F}{\tilde{v}'}.$ $\tilde{Z}_E = \frac{F}{\tilde{v}_1}$ est appelée impédance *d'entrée*. $\tilde{Z}_T = \frac{F}{\tilde{v}_2}$ est appelée

impédance de transfert. Pour les trouver on utilise encore la représentation complexe :

$$F(t) = F_0 \cos \omega t \rightarrow \tilde{F}(t) = F_0 e^{j\omega t}$$

$$\begin{cases} x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \rightarrow \tilde{x}_1 = A_1 e^{j(\omega t + \varphi_1)} = \tilde{A}_1 e^{j\omega t} \\ x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \rightarrow \tilde{x}_2 = A_2 e^{j(\omega t + \varphi_2)} = \tilde{A}_2 e^{j\omega t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{v}_1 = j\omega \tilde{x}_1 \Rightarrow \tilde{x}_1 = \frac{\tilde{v}_1}{j\omega} \\ \tilde{v}_2 = j\omega \tilde{x}_2 \Rightarrow \tilde{x}_2 = \frac{\tilde{v}_2}{j\omega} \end{cases}$$

Alors

$$\begin{cases} \tilde{\ddot{x}}_1 = j\omega \tilde{v}_1 \\ \tilde{\ddot{x}}_2 = j\omega \tilde{v}_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1 \tilde{\ddot{x}}_1 + (k_1 + k_0) \tilde{x}_1 + \alpha_1 \tilde{\dot{x}}_1 - k_0 \tilde{x}_2 = \tilde{F} \\ m_2 \tilde{\ddot{x}}_2 + (k_0 + k_2) \tilde{x}_2 + \alpha_2 \tilde{\dot{x}}_2 - k_0 \tilde{x}_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(j\omega m_1 + \frac{k_1}{j\omega} + \frac{k_0}{j\omega} + \alpha_1 \right) \tilde{v}_1 - \frac{k_0}{j\omega} \tilde{v}_2 = \tilde{F} \\ \left(j\omega m_2 + \frac{k_2}{j\omega} + \frac{k_0}{j\omega} + \alpha_2 \right) \tilde{v}_2 - \frac{k_0}{j\omega} \tilde{v}_1 = 0 \end{cases}$$

En posant $j\omega m_1 + \frac{k_1}{j\omega} + \alpha_1 = \tilde{z}_1, j\omega m_2 + \frac{k_2}{j\omega} + \alpha_2 = \tilde{z}_2, \frac{k_0}{j\omega} = \tilde{z}_0$ on obtient

$$\begin{cases} (\tilde{z}_1 + \tilde{z}_0) \tilde{v}_1 - \tilde{z}_0 \tilde{v}_2 = \tilde{F} \\ (\tilde{z}_2 + \tilde{z}_0) \tilde{v}_2 - \tilde{z}_0 \tilde{v}_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow F = \left(\tilde{z}_1 + \tilde{z}_0 - \frac{\tilde{z}_0^2}{(\tilde{z}_2 + \tilde{z}_0)} \right) \tilde{v}_1 = \left(\tilde{z}_1 + \frac{\tilde{z}_2 \tilde{z}_0}{(\tilde{z}_2 + \tilde{z}_0)} \right) \tilde{v}_1$$

➤ L'impédance d'entrée est $z_E = \frac{F}{\tilde{v}_1} = \left(\tilde{z}_1 + \frac{\tilde{z}_0 \tilde{z}_2}{(\tilde{z}_2 + \tilde{z}_0)} \right) \equiv \left(\frac{\tilde{z}_1 + \tilde{z}_0}{\tilde{z}_2} \right)$

➤ L'impédance de *transfert* est $z_T = \frac{F}{\tilde{v}_2} = \tilde{z}_1 + \tilde{z}_2 + \frac{\tilde{z}_1 \tilde{z}_2}{\tilde{z}_0}$

A l'aide de l'analogie de Maxwell,

$m_1 \longleftrightarrow L_1, m_2 \longleftrightarrow L_2,$ $\alpha_1 \longleftrightarrow R_1, \alpha_2 \longleftrightarrow R_2,$ $k_0 \longleftrightarrow 1/C_0, k_1 \longleftrightarrow 1/C_1, k_2 \longleftrightarrow 1/C_2,$
--

on conclut que:

$\underline{z}_1 \iff \text{impédance}(L_1) + \text{condensateur}(C_1) + \text{résistance}(R_1).$

$\underline{z}_2 \iff \text{impédance}(L_2) + \text{condensateur}(C_2) + \text{résistance}(R_2).$

$\underline{z}_0 \iff \text{condensateur}(C_0).$

D'où le circuit électrique équivalent suivant:

