

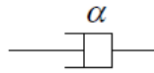
Chapitre 3 : Système linéaire libres amortis à un degré de liberté.

3.1 Force d'amortissement.

Un système soumis à un frottement est dit amorti. Le frottement le plus simple est le frottement *visqueux*. Les frottements visqueux sont de la forme

$$f = -\alpha v$$

Est une Constante positive appelé coefficient de frottement et v est la vitesse du corps en mouvement. En mécanique, l'amortissement est schématisé par :



La vitesse v est dans ce cas la vitesse relative des deux bras de l'amortissement.

3.2 Equation de Lagrange des systèmes amortis

S'il existe un frottement $f = -\alpha \dot{q}$, l'équation de Lagrange devient :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q} \right) = -\alpha \dot{q} \quad .$$

En introduisant la fonction de dissipation $D = \frac{1}{2} \alpha \dot{q}^2$, nous pouvons écrire :

$$f = -\alpha \dot{q} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}} \quad . \quad (\text{En translation } D = \frac{1}{2} \alpha v^2 = \frac{1}{2} \alpha \dot{x}^2. \text{ En électricité } D = \frac{1}{2} Ri^2 = \frac{1}{2} R \dot{q}^2).$$

L'équation de Lagrange des systèmes amortis s'écrit alors (où $q=x, y, z, q, \theta \dots$)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q} \right) = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}}$$

3.3 Equation du mouvement des systèmes amortis

L'équation du mouvement des systèmes linéaires amortis par $f = -\alpha \dot{q}$ est de la forme

- On définit l'oscillation amorti comme suit :

$$\ddot{q}(t) + 2\delta \dot{q}(t) + \omega_0^2 q(t) = 0$$

Où δ est un coefficient positif et est appelé facteur d'amortissement. ω_0 est la pulsation propre.

$\frac{\omega_0}{2\delta} = Q$ est appelé *facteur de qualité*.

3.4 Résolution de l'équation du mouvement

$$\ddot{q}(t) + 2\delta \dot{q}(t) + \omega_0^2 q(t) = 0$$

La résolution de cette équation se fait par le changement de variable

$q(t) = Ae^{\pi} \Rightarrow \dot{q}(t) = A\pi e^{\pi} \Rightarrow \ddot{q}(t) = A\pi^2 e^{\pi}$, l'équation devient alors :

$$\ddot{q}(t) + 2\delta\dot{q}(t) + \omega_0^2 q(t) = 0$$

$$Ar^2 e^{\pi} + 2\delta A r e^{\pi} + \omega_0^2 A e^{\pi} = 0$$

$$A e^{\pi} (r^2 + 2\delta r + \omega_0^2) = 0$$

$$r^2 + 2\delta r + \omega_0^2 = 0$$

On calcule le discriminant Δ et on obtient alors :

$$\Delta = (2\delta)^2 - 4\omega_0^2$$

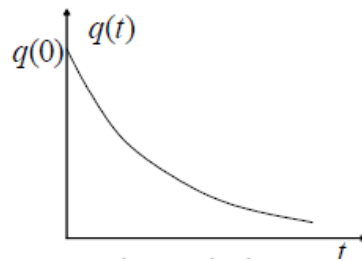
$$\Delta = 4\delta^2 - 4\omega_0^2$$

$$\Delta = 4(\delta^2 - \omega_0^2)$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{4(\delta^2 - \omega_0^2)} = 2\sqrt{(\delta^2 - \omega_0^2)}$$

Il existe trois types de solutions :

- **Cas où le système est fortement amorti :** $\Delta > 0 \Rightarrow \delta > \omega_0$ et $Q < 0.5$



La solution de l'équation différentielle s'écrit comme suit :

$$q(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} \text{ avec } r_{1,2} = \frac{-2\delta \pm 2\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}}{2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

$$q(t) = A_1 e^{(-\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t} + A_2 e^{(-\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t} = e^{-\delta t} \left(A_1 e^{(-\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t} + A_2 e^{(\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t} \right)$$

Où A_1 et A_2 sont coefficients à déterminer par les conditions initiales

$$\begin{cases} q(t=0) \\ \dot{q}(t=0) \end{cases}$$

On dit que le système a un mouvement apériodique.

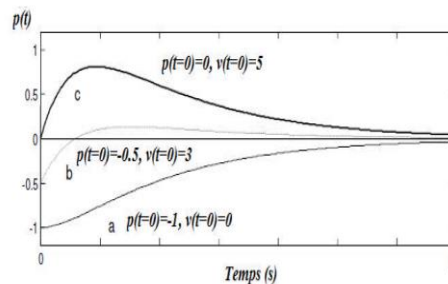
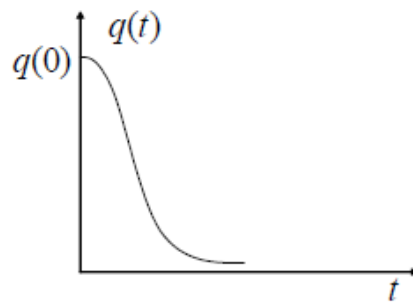


Figure 3.1 : Mouvement amorti apériodique

- **Cas où l'amortissement est critique :** $\Delta = 0 \Rightarrow \delta = \omega_0$ et $Q = 0.5$



La solution de l'équation est de la forme :

$$q(t) = (A_1 t + A_2) e^{\pi}$$

$$r_1 = r_2 = r = \frac{-2\delta}{2} = -\delta$$

$$q(t) = (A_1 t + A_2) e^{-\delta t}$$

Où A_1 et A_2 sont coefficients à déterminer par les conditions initiales :

$$\begin{cases} q(t=0) \\ \dot{q}(t=0) \end{cases}$$

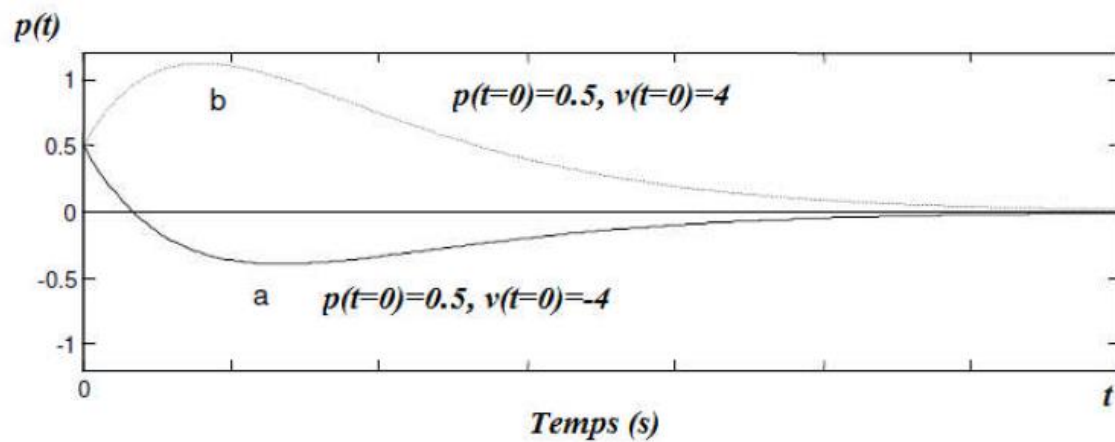
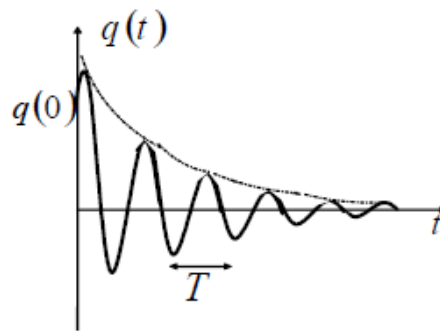


Figure 3.2 : Mouvement amorti critique

- **Cas où l'amortissement est faible :** $\Delta < 0 \Rightarrow \delta < \omega_0$ et $Q > 0.5$



Deux solutions complexes pour l'équation caractéristique

$$\begin{cases} r_1 = -\delta - j\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \\ r_2 = -\delta + j\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \end{cases}$$

Le mouvement résultant est $q(t) = A_1 e^{-r_1 t} + A_2 e^{-r_2 t}$ soit :

$$q(t) = A e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi)$$

Où A et φ sont des constantes à déterminer par les conditions initiales : $\begin{cases} q(t=0) \\ \dot{q}(t=0) \end{cases}$

Le mouvement est dit pseudo- périodique. $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ est appelé **pseudo- pulsation**.

$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$ est appelé **pseudo période**.

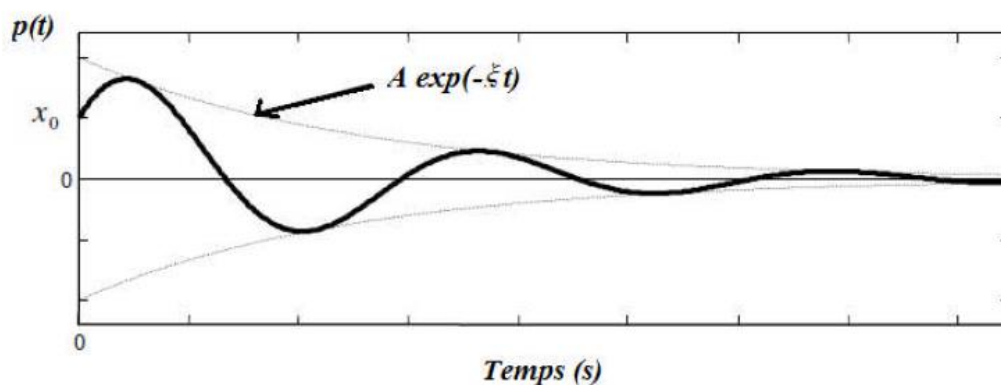


Figure 3.3 : Mouvement oscillatoire amorti

3.5 Décrément logarithmique

Pour évaluer la diminution exponentielle de l'amplitude du mouvement pseudo-périodique, nous utilisons le logarithme. Le rapport

$D = \ln \frac{q(t)}{q(t+T)}$ Ou encore $D = \frac{1}{n} \ln \frac{q(t)}{q(t+nT)}$ est appelé le **décroissement logarithmique**. En

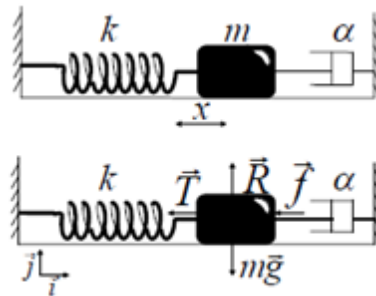
utilisant l'équation $q(t) = Ae^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi)$, on trouve $\delta = \ln \frac{Ae^{-\delta t}}{Ae^{-\delta(t+T)}} \Rightarrow D = \delta T$

✓ Il faut signaler que le système subit **une perte d'énergie totale** due **au travail des forces de frottement**.

$$dE_T(t) = -\alpha \dot{p}(t)^2 dt = -dW_{fr} \Rightarrow \Delta E_T + \Delta W_{fr} = 0$$

3.5.1 Exemples

a) Soit le système masse-ressort ci-contre. Trouver l'équation du mouvement d'abord avec le Lagrangien puis avec PFD.



Solution

• A l'aide du Lagrangien :

Le Lagrangien est :

$$L = T - U = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2.$$

$$D = \frac{1}{2} \alpha v^2 = \frac{1}{2} \alpha \dot{x}^2$$

L'équation de Lagrange s'écrit alors :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x} \right) = - \frac{\partial D}{\partial \dot{x}}$$

$$\text{Avec } L = T - U = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2 + cte$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 \right) = \frac{1}{2} m \frac{\partial}{\partial \dot{x}} (\dot{x}^2) = \frac{1}{2} m (2\dot{x}) = m\dot{x} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{d}{dt} (m\dot{x}) = m \frac{d}{dt} (\dot{x}) = m\ddot{x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{1}{2} k x^2 \right) = -\frac{1}{2} k \frac{\partial}{\partial x} (x^2) = -\frac{1}{2} k (2x) = -kx$$

$$D = \frac{1}{2} \alpha v^2 = \frac{1}{2} \alpha \dot{x}^2 \Rightarrow \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \left(\frac{1}{2} \alpha \dot{x}^2 \right) = \frac{1}{2} \alpha \frac{\partial}{\partial \dot{x}} (\dot{x}^2) = \frac{1}{2} \alpha (2\dot{x}) = \alpha \dot{x}$$

Alors

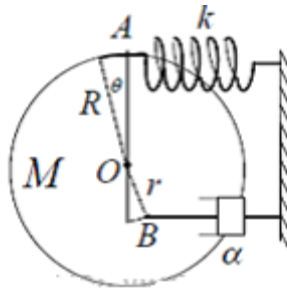
$$m\ddot{x} + kx = -\alpha\dot{x} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} + \frac{k}{m}x + \frac{\alpha}{m}\dot{x} = 0 \\ \ddot{x} + \omega_0^2 x + 2\delta\dot{x} = 0 \end{cases}$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ et } 2\delta = \frac{\alpha}{m} \Rightarrow \delta = \frac{\alpha}{2m}$$

$$\text{À l'aide du PFD : } \sum \vec{F} = m \vec{a} \Rightarrow m\vec{g} + \vec{T} + \vec{R} + \vec{f} = m \vec{a} \Rightarrow -kx\vec{i} - mg\vec{j} + R\vec{j} - \alpha\dot{x}\vec{i} = m\ddot{x}\vec{i}$$

$$\text{Par projection sur } x'Ox: -kx - \alpha\dot{x} = m\ddot{x} \Rightarrow m\ddot{x} + kx + \alpha\dot{x} = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x + \frac{\alpha}{m}\dot{x} = 0$$

b) Soit le système disque-ressort ci-contre. $\theta \ll 1$. Trouver l'équation du mouvement si $M=1kg$, $k=2 \text{ N/m}$, $R=10cm$, $r=5cm$, $\alpha=8Ns/m$.



A l'aide du Lagrangien :

$$T = E_c = T [\text{Disque}] = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2$$

$$J = \frac{1}{2} MR^2$$

$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} MR^2 \right) \dot{\theta}^2$$

$$dU_k = -\vec{F}_k d\vec{l} = -F_k dl \cos(\vec{F}_k(\uparrow), d\vec{l}(\downarrow))$$

$$dU_k = -F_k dl \cos(180^\circ)$$

$$\cos(180^\circ) = -1$$

$$dU_k = +F_k dl = kx dx / F_k = kx, dl = dx$$

$$U_k = \int dU_k = \int_0^{x_0+x} kx dx = k \int_0^{x_0+x} x dx = k \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{x_0+x} = \frac{k}{2} [x^2]_0^{x_0+x}$$

$$U = U_k = \frac{k}{2} \left[(x_0 + x)^2 - 0 \right]$$

$$U = \frac{k}{2} (x_0 + x)^2 = \frac{k}{2} (x^2 + 2xx_0 + x_0^2) = \frac{k}{2} x^2 + kxx_0 + \frac{k}{2} x_0^2$$

$$U = \frac{k}{2} x^2 + kxx_0 + \frac{k}{2} x_0^2 + cte \quad / \quad \frac{k}{2} x_0^2 = cte$$

Alors

$$U = U_k = \frac{k}{2} x^2 + kxx_0 + cte$$

Avec

$$\sin \theta = \frac{x}{R} \Rightarrow x = R \sin \theta$$

$$U = U_k = \frac{k}{2} x^2 + kxx_0 + cte = \frac{k}{2} (R \sin \theta)^2 + k (R \sin \theta) x_0 + cte$$

A faible amplitude $\sin \theta \approx \theta$

$$U = \frac{k}{2} R^2 (\theta^2) + (kRx_0)(\theta) + cte$$

Equilibre

$$\left. \frac{\partial U}{\partial \theta} \right|_{\theta=0} = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{k}{2} \times R^2 \times 2\theta - (kRx_0)$$

$$\left. \frac{\partial U}{\partial \theta} \right|_{\theta=0} : \theta = 0 \Rightarrow \frac{k}{2} \times R^2 \times 2(\theta = 0) - (kRx_0) = -(kRx_0)$$

$$\left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \Rightarrow -(kRx_0) = 0 \Rightarrow x_0 = 0$$

Alors

$$U = \frac{k}{2} R^2 \theta^2 + cte .$$

$$D = \frac{1}{2} \alpha v^2 = \frac{1}{2} \alpha \dot{x}^2$$

$$\dot{x} = r\dot{\theta} \Rightarrow D = \frac{1}{2} \alpha (r\dot{\theta})^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right) = -\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}}$$

$$\text{Avec } L = T - U = U = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\dot{\theta}^2 - \frac{k}{2}R^2\theta^2 + \text{cte}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\dot{\theta}^2\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\frac{\partial}{\partial \dot{\theta}}(\dot{\theta}^2) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)(2\dot{\theta}) = \left(\frac{1}{2}MR^2\right)\dot{\theta}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\dot{\theta}\right) = \left(\frac{1}{2}MR^2\right)\frac{d}{dt}(\dot{\theta}) = \left(\frac{1}{2}MR^2\right)\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}\left(-\frac{1}{2}kR^2\theta^2\right) = -\frac{1}{2}kR^2\frac{\partial}{\partial \theta}(\theta^2) = -\frac{1}{2}kR^2(2\theta) = -kR^2\theta$$

$$D = \frac{1}{2}\alpha v^2 = \frac{1}{2}\alpha r^2\dot{\theta}^2 \Rightarrow \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}}\left(\frac{1}{2}\alpha r^2\dot{\theta}^2\right) = \frac{1}{2}\alpha r^2\frac{\partial}{\partial \dot{\theta}}(\dot{\theta}^2) = \frac{1}{2}\alpha r^2(2\dot{\theta}) = \alpha r^2\dot{\theta}$$

Alors

$$\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\ddot{\theta} + kR^2\theta = -\alpha r^2\dot{\theta} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{\theta} + \frac{kR^2}{\left(\frac{1}{2}MR^2\right)}\theta + \frac{\alpha r^2}{\left(\frac{1}{2}MR^2\right)}\dot{\theta} = 0 \\ \ddot{\theta} + \omega_0^2\theta + 2\delta\dot{\theta} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{\theta} + \frac{2k}{M}\theta + \frac{2\alpha r^2}{MR^2}\dot{\theta} = 0 \\ \ddot{\theta} + \omega_0^2\theta + 2\delta\dot{\theta} = 0 \end{cases}$$

$$\omega_0^2 = \frac{2k}{M} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{M}} \text{ et } 2\delta = \frac{2\alpha r^2}{MR^2} \Rightarrow \delta = \frac{\alpha r^2}{MR^2}$$