

Chapitre 1

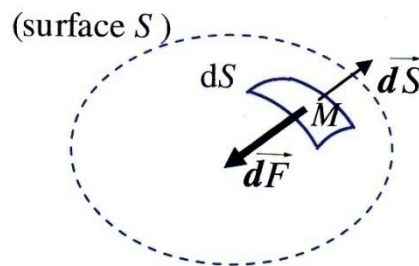
Statique des Fluides

1. Introduction :

a) Forces pressantes :

Les fluides exercent des forces de contact qui sont des forces pressantes ou forces de pression. Ces forces s'exercent aussi bien sur les bords du récipient qu'à l'intérieur même du fluide

b) Pression en un point du fluide :



Si on isole dans un fluide un volume V fictif délimité par une surface S fermée, les particules extérieures à V exercent sur une surface élémentaire dS (centrée sur le point M) de S la force pressante $\vec{dF}$ normale pour un fluide au repos à dS

$$\vec{dF} = -p \vec{dS} = -p ds \vec{n}$$

$$[p] = \frac{MLT^{-2}}{L^2} = ML^{-1}T^{-2} ; \text{ Unité (S.I.) : Pa}$$

Remarque : dans le cas d'un fluide en mouvement, cette force pressante n'est plus forcément normale à dS .

La force de pression agit vers l'intérieur du volume délimité par l'élément de surface

c) Autres unités utilisées :

Le bar : Avec : $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$

L'atmosphère (atm) : Avec : $(1 \text{ atm} = 1.013 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 1.013 \text{ bar})$

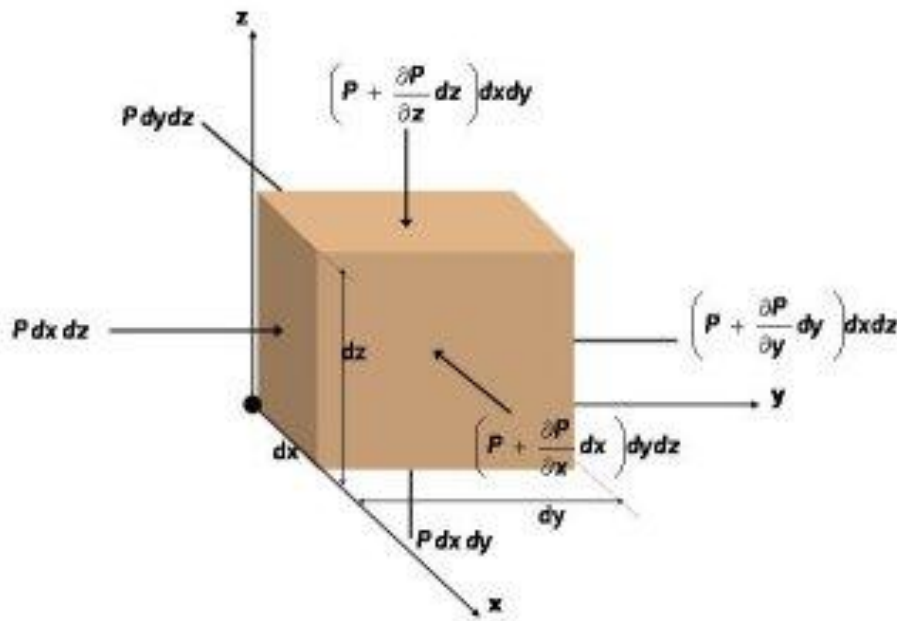
Le millimètre de mercure (mm Hg) : Avec : $(760 \text{ mm de Hg} = 1 \text{ atm})$

Le mètre de colonne d'eau (m CE) : Avec : $(10 \text{ m de CE} = 1 \text{ bar})$

2. Equation fondamentale de l'hydrostatique :

On considère un élément de volume de fluide de forme parallélépipède de volume $dV = dx \cdot dy \cdot dz$, dans un repère cartésien :

Le Bilan des forces qui s'appliquent sur cet élément de volume fluide sont:



Les forces de volume : le poids : $d\vec{P} = dm\vec{g} = dv \vec{g}$

Les forces de surface : forces de pression : $d\vec{F} = dF_x \vec{i} + dF_y \vec{j} + dF_z \vec{k}$

$$dF_z = [p(z) - p(z + dz)] dx dy$$

Par un développement limité au premier ordre : $P(z + dz) = p(z) + \frac{\partial P}{\partial z} dz$

$$\text{D'où: } dF_z = -\frac{\partial P}{\partial z} dx dy dz$$

Par analogie sur les deux autres axes :

$$dF_x = -\frac{\partial P}{\partial x} dx \cdot dy \cdot dz = -\frac{\partial P}{\partial x} \cdot dV$$

$$dF_y = -\frac{\partial P}{\partial y} dv$$

$$\overrightarrow{dF} = - \left(\frac{\partial P}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial P}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial P}{\partial z} \vec{k} \right) dV \Rightarrow \overrightarrow{dF} = -\overrightarrow{\text{grad}} p dV$$

On a donc: $\overrightarrow{dP} = dm \vec{g} = \rho dV \vec{g}$ et $\overrightarrow{dF} = -\vec{\nabla} p dV$

En vertu du principe fondamental de la dynamique :

$$\overrightarrow{dP} + \overrightarrow{dF} = \rho dV \vec{\gamma} \Rightarrow \rho dV \vec{g} - \vec{\nabla} p dV = \rho dV \vec{\gamma} \Rightarrow \rho \vec{g} - \vec{\nabla} p = \rho \vec{\gamma}$$

Dans ce cas le fluide est au repos : $\vec{\gamma} = \vec{0}$

Notre équation devient :

$$\rho \vec{g} = -\vec{\nabla} p$$

La projection de cette équation vectorielle sur notre repère cartésien nous donne : $\frac{dp}{dz} = -\rho g$ (équation différentielle de l'hydrostatique).

C'est l'équation à résoudre pour connaître la pression en tout point d'un fluide au repos.

3. Application aux fluides incompressibles :

Un fluide est dit incompressible si l'on peut considérer que sa masse volumique en tout point reste constante.

ρ : est une constante

En appliquant l'équation différentielle de l'hydrostatique :

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g = \text{cste} \text{ ce qui nous donne :}$$

$$p(z) = \int \frac{dp}{dz} dz = - \int \rho g dz = -\rho g \int dz = -\rho g z + \text{Cste}$$

$$\text{Soit : } p(z) + \rho g z = \text{Cste}$$

$$\text{On pourra écrire : } p_1(z_1) + \rho g z_1 = p_2(z_2) + \rho g z_2 = \text{Cste}$$

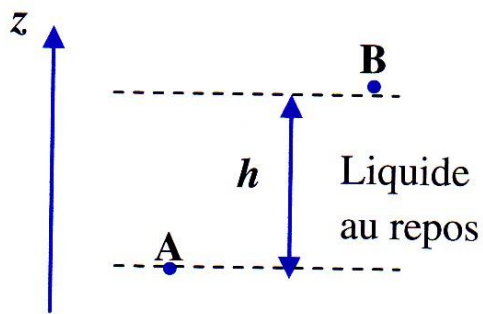
$$p_1 - p_2 = \rho g (z_2 - z_1)$$

Considérons une colonne de fluide d'une hauteur ($z_B - z_A = h$)

$p_A = p$; $p_B = p_0 = p_{\text{atm}}$ (pression atmosphérique)

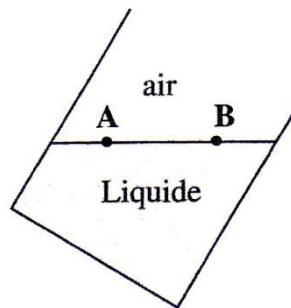
En appliquant la relation ci-dessus, il vient : $p - p_0 = \rho g h \Rightarrow$

$$p = p_{\text{atm}} + \rho g h$$



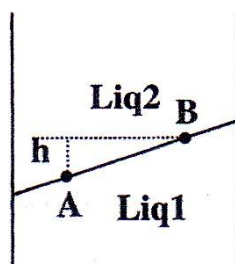
Remarques:

1) Egalité de pression d'un liquide sur un même plan horizontal :



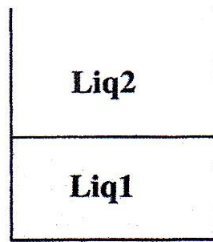
$p_A = p_B = p_{\text{atm}}$ donc $z_A = z_B$ la surface libre d'un liquide est horizontale

2) L'interface entre deux liquides non miscible est horizontale :



$$p_A = p_B + \rho_1 g h$$

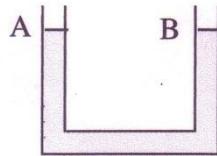
$$p_A = p_B + \rho_2 g h$$



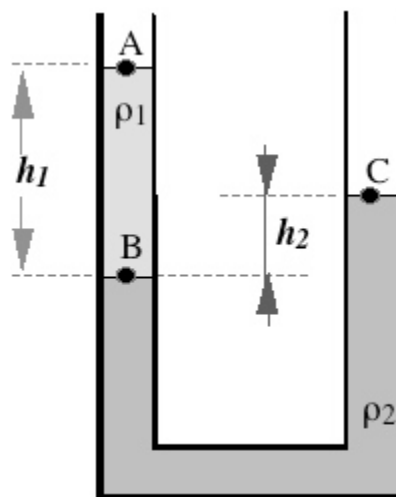
Comme $\rho_1 \neq \rho_2$ on doit avoir $h=0$

3) Principe des vases communicants :

- Si le fluide est homogène (ρ est le même partout) alors les niveaux en A et B sont les mêmes.



- Pour un fluide non homogène formé de deux liquides non miscibles de densités différentes ρ_1 et ρ_2 ($\rho_2 > \rho_1$), les niveaux en A et C sont différents.



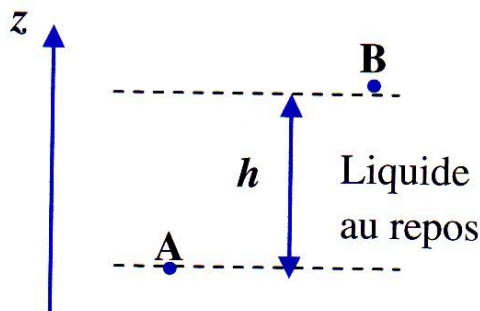
H.B. sch. tube en U deu x liquides

En effet, sur le même plan horizontal du liquide (ρ) les pressions sont les mêmes : $p_A = p_C = p_0$ (pression atmosphérique).

$$\begin{aligned} \text{On a: } p_B &= p_A + \rho_1 g h_1 \\ &\Rightarrow \rho_1 g h_1 = \rho_2 g h_2 \\ p_{B'} &= p_C + \rho_2 g h_2 \end{aligned}$$

Et comme $\rho_2 > \rho_1 \Rightarrow h_2 < h_1$, le niveau du liquide dense est plus bas.

4) Pression absolue et pression effective :



$p_A = p$ et $p_B = p_{\text{atm}}$ (pression atmosphérique)

$p = p_{\text{atm}} + \rho gh$ est la pression absolue

$p = \rho gh$ est la pression effective
(pression mesurée par rapport à la pression atmosphérique)

4. Application aux fluides compressibles : Gaz

ρ n'est pas une constante

Soit un gaz parfait $pV = nRT$

$$p = \frac{nRT}{V}$$

On a : $\rho = \frac{m}{V} = \frac{nM}{V}$ avec M : masse molaire du gaz :

$\Rightarrow \frac{n}{V} = \frac{\rho}{M} \Rightarrow p = \frac{\rho RT}{M} \Rightarrow \rho = \frac{M}{RT} p$ la masse volumique est fonction de la pression (compressibilité)

En partant de la loi fondamentale de l'hydrostatique

$$\frac{dp}{dz} = -\rho(p)g \Rightarrow \frac{dp}{dz} = -\frac{M}{RT} pg \Rightarrow \frac{dp}{p} = -\frac{M}{RT} g dz$$

$$\int \frac{dp}{p} = - \int \frac{M}{RT} g dz \Rightarrow \ln p = -\frac{M}{RT} gz + C \text{ (Cste)}$$

$$p(z) = C' \exp\left(-\frac{M}{RT} gz\right)$$

Si en $z=z_0$ $p=p_0 \Rightarrow p_0 = C' \exp\left(-\frac{M}{RT} gz_0\right) \Rightarrow C' = p_0 \exp\left(\frac{M}{RT} gz_0\right)$

$$\Rightarrow p(z) = p_0 \exp\left[-\frac{M}{RT} g (z - z_0)\right]$$

5. Poussée d'Archimède : Effort exercée sur un objet totalement immergé :

La force exercée par le fluide sur un objet immergé de volume V délimité par une surface S fermée s'exprime par :

$$\vec{F} = \oint_S -p \vec{n} dS$$

En appliquant la formule d'Ostrogradski qui permet de passer d'une intégrale de surface fermée à une intégrale de volume telle que :

$$\oint_S -p \vec{n} dS = - \iiint_V \vec{\nabla} p dV$$

On trouvera donc : $\vec{F} = - \iiint_V \vec{\nabla} p dV$

Or, l'équation fondamentale de la statique des fluides nous permet d'écrire :

$$\vec{\nabla} p = \rho \vec{g} \Rightarrow \vec{F} = - \iiint_V \vec{\nabla} p dV = - \iiint_V \rho \vec{g} dV$$

En supposant g constant sur tout le volume :

$$\vec{F} = -\vec{g} \iiint_V \rho dV = -\rho V \vec{g}$$

C'est une force opposée au poids du fluide déplacé ; ce qui définit justement la poussée d'Archimède.

1) Poussée d'Archimède : Théorème

Tout corps plongé dans un fluide est soumis de la part de ce fluide à une action appelée poussée d'Archimède :

Cette force est :

- Appliquée au centre de poussée : centre de gravité de la partie immergée du corps.
- Verticale.
- Dirigée vers le haut
- D'intensité $F = \rho \cdot V_{immerg} \cdot g$

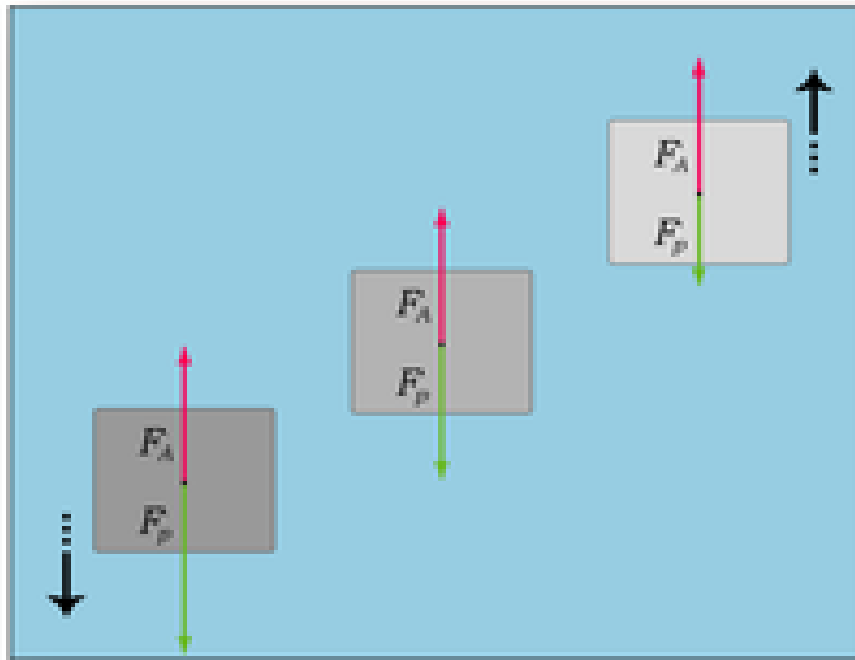
ρ : masse volumique du fluide (kg/m^3)

g : intensité de la pesanteur

V_{immerg} : volume immergé du corps en (m^3)

2) Applications :

a) Exemple d'un solide entièrement immergé :



Trois solides de densités différentes peuvent subir une poussée d'Archimède inférieure, égale ou supérieure à leur poids.

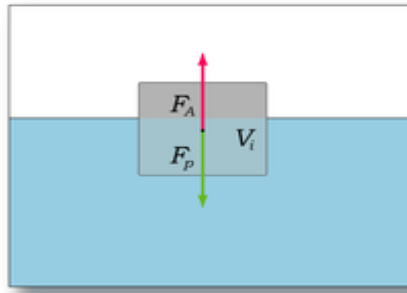
Immergeons entièrement un solide de volume V , de masse m et de masse volumique ρ dans un fluide de masse volumique ρ_f uniforme, puis relâchons-le à partir du repos. Au départ, la vitesse étant nulle, deux forces seulement agissent sur le solide : son poids F_P (vers le bas) et la poussée d'Archimède F_A (vers le haut).

$$\text{On a : } F_P = \rho V g ; F_A = \rho_f V g \Rightarrow \frac{F_P}{F_A} = \frac{\rho}{\rho_f}$$

Le rapport des masses volumiques est équivalent à celui des densités.

- Si la densité du solide est supérieure à celle du fluide, alors $F_P > F_A$ et le solide coule.
- Si la densité du solide est égale à celle du fluide, alors $F_P = F_A$ et le solide demeure immobile ; il est en équilibre neutre ou indifférent.
- Si la densité du solide est inférieure à celle du fluide, alors $F_P < F_A$ et le solide remonte vers la surface.

b) Exemple d'un solide flottant à la surface d'un liquide :



La poussée d'Archimède équilibre le poids du solide.

En réalité, le point d'application de la poussée d'Archimède devrait se trouver au centre du volume immergé, donc plus bas que le centre de gravité du solide.

Considérons un solide de volume V et de masse volumique ρ_S flottant à la surface d'un liquide de masse volumique ρ_L . Si le solide flotte, c'est que son poids est équilibré par la poussée d'Archimède: $F_A = F_p$

La poussée d'Archimède étant égale (en grandeur) au poids du volume de liquide déplacé (équivalent au volume V_i immergé), on peut écrire :

$$\rho_L V_i g = \rho_S V g$$

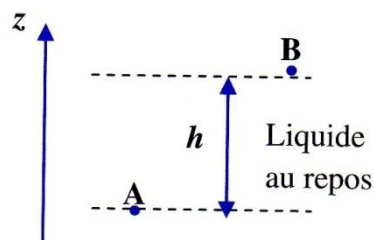
Le volume immergé vaut donc :

$$V_i = \frac{\rho_S}{\rho_L} \cdot V$$

$$\text{Puisque : } V_i < V \Rightarrow \rho_S < \rho_L$$

6. Applications :

a) Principe de Pascal :



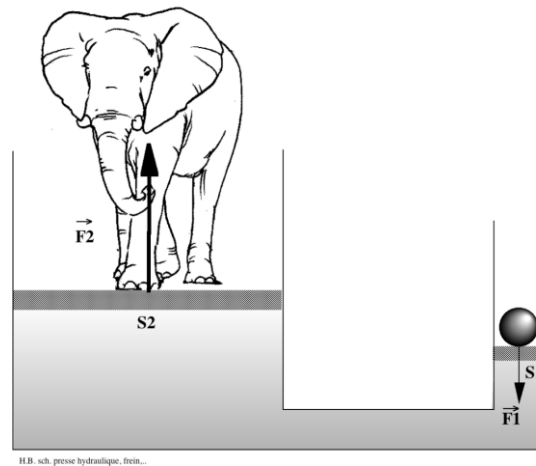
$$p_A = p_B + \rho g h$$

Si p_A varie de Δp , alors p_B doit également varier de Δp .

Un liquide étant considéré comme incompressible, toute variation de pression en un point de ce liquide est transmise à tous les points

Application : vérins et presses hydrauliques : crics.....

Soient un grand piston de section S_2 et un petit piston de section S_1



On exerce une force $\vec{F}_1$ sur le petit piston (S_1), l'augmentation de pression est $p_1 = \frac{F_1}{S_1}$, d'où une surpression en (S_2) : $p_2 = \frac{F_2}{S_2}$.

D'après le théorème de Pascal : $p_A = p_B \Rightarrow \frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2} \Rightarrow F_2 = F_1 \frac{S_2}{S_1}$

b) Mesure de la pression:

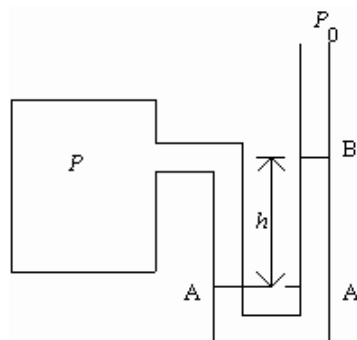
❖ Manomètre :

Un manomètre est un instrument destiné à mesurer la différence de pression.

Entre un gaz contenu dans une enceinte fermée et la pression atmosphérique.

Il s'agit donc d'un appareil de mesure relative

- Principe du plus simple des manomètres :



- Le gaz est contenu dans un volume limité. Il présente donc la même pression en tout point :

$$p_A = p$$

- Par contre, le liquide possède la même pression le long d'un plan horizontal :

$$p_{A'} = p$$

- L'équation fondamentale de l'hydrostatique appliquée à un fluide incompressible s'écrit dans notre cas :

$$p_A - p_0 = \rho g h \Rightarrow p_A = p_0 + \rho g h$$

Remarques:

- Dans le cas où $p_A < p_B$, le niveau du mercure en B serait au dessous du niveau A.
- Le liquide utilisé étant fréquemment le mercure, l'emploi du millimètre de mercure (mm Hg) comme unité usuelle de pression est assez répandu. La relation entre pression et hauteur se simplifie :

$$p - p_0 = \rho g h \Rightarrow \frac{\Delta p}{\rho g} = h$$

- Sensibilité de l'appareil :

Elle est définie comme le rapport de la plus petite variation de niveau décelable associée à la variation de pression correspondante :

$$s = \frac{\Delta h}{\Delta p} \text{ ou } s = \frac{\Delta h}{\rho g \Delta h} = \frac{1}{\rho g}$$

La sensibilité est donc d'autant plus grande que la masse volumique du liquide manométrique sera faible.

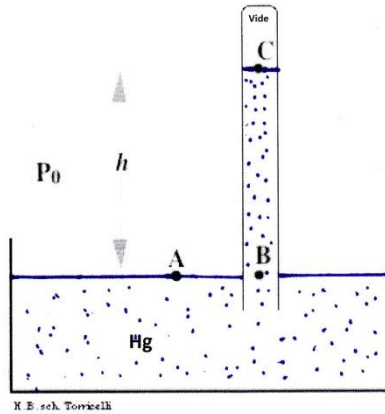
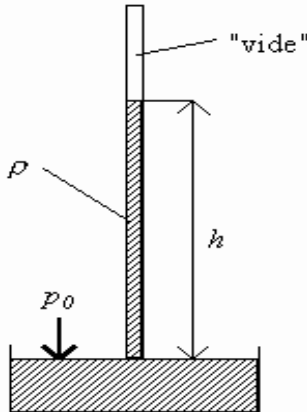
❖ Les baromètres

Définition :

Ce sont des appareils permettant la mesure absolue de la pression ; plus particulièrement la mesure de la pression atmosphérique.

Principe :

Il est fondé sur l'expérience de Torricelli qui consiste à retourner sur une cuve à mercure un tube rempli de mercure. La longueur du tube doit dépasser 760 mm. Il apparaît alors au sommet du tube retourné un espace vide appelé "chambre barométrique".



En A, on a la pression atmosphérique P_0 .

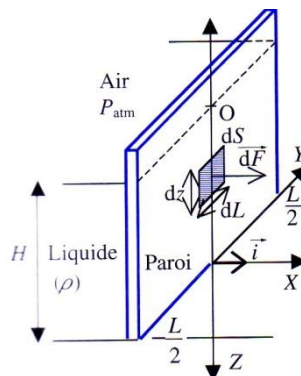
$$p_B - p_C = \rho_{Hg} g h = p_A = p_0$$

Pour une pression atmosphérique de 1013 mbar, on aura

$$h = \frac{p_0}{\rho_{Hg} \cdot g} = \frac{1.013 \cdot 10^5}{13.6 \cdot 10^3 \cdot 9.8} = 0.760 \text{ m} = 760 \text{ mm de mercure (Hg)}.$$

7. Forces de pression : Poussée sur une paroi verticale plane :

a) Calcul de la poussée $\vec{F}$ exercée par le liquide seul sans tenir compte de la pression atmosphérique :



$$\overrightarrow{dF} = p \overrightarrow{dS} = \rho g z \overrightarrow{dS} \text{ avec } dS = dy dz$$

Et $S = L \cdot H$ (surface de contact paroi – liquide)

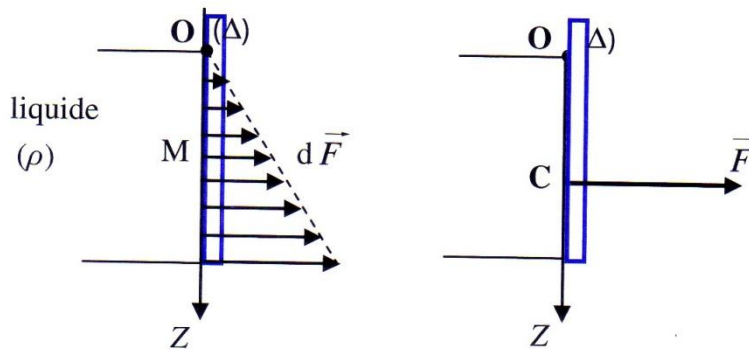
$$\text{Donc } dF = \rho g z dy dz$$

$$F = \iint \rho g z dy dz = \rho g \int_{y=-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dy \int_{z=0}^H z dz = \rho g [y]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^H$$

$$\Rightarrow F = \frac{1}{2} \rho g L H^2 = \frac{1}{2} \rho \cdot g \cdot S \cdot H$$

b) Centre de poussée :

Il s'agit du point d'application C de la poussée résultante $\vec{F}$, qui se trouve par symétrie sur l'axe Oz.



Soit Δ un axe fictif autour duquel la paroi pouvait tourner si elle n'était soumise qu'aux forces de poussée

On rappelle que le moment d'une force par rapport à un axe Δ est :

$$\Gamma (\vec{F} / \Delta) = \Gamma \left(\int \overrightarrow{dF} \right) / \Delta$$

$\Gamma (\vec{F} / \Delta)$ = moment d'une force par rapport à un axe Δ

= $F \cdot$ (distance entre Δ et la droite d'action de $\vec{F}$)

$$\Gamma (\vec{F} / \Delta) = OC \cdot F = OC \cdot \frac{1}{2} \rho g L H^2$$

D'une autre manière on a :

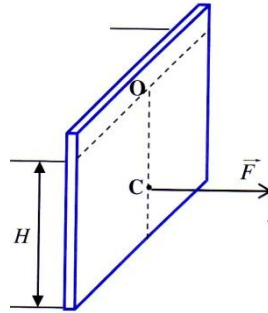
$$\Gamma \left(\int \overrightarrow{dF} \right) / \Delta = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{dF} = z \cdot dF$$

$$\text{Donc } \Gamma (\vec{F} / \Delta) = \iint z \cdot \rho g z dy dz = \rho g \int_{y=-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dy \int_{z=0}^H z^2 dz$$

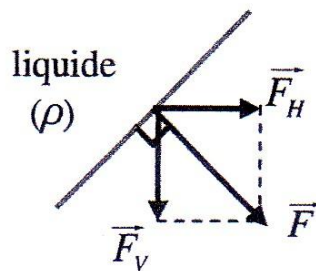
$$\Gamma (\vec{F} / \Delta) = \frac{1}{3} \rho g L H^3$$

En comparant les deux équations, on en déduit :

$$OC = \frac{2}{3} \cdot H$$



8. Poussée sur une paroi plane non verticale :



La résultante des forces de pression exercées par un liquide sur une surface :

$$\vec{F} = \vec{F}_H + \vec{F}_V$$

$\vec{F}_H$ composante horizontale de $\vec{F}$. Son module $|\vec{F}_H|$ est égal à la force qu'exercerait le liquide sur la projection verticale de la surface et s'applique au centre de poussée de la surface projetée.

$\vec{F}_V$ composante verticale de $\vec{F}$. Son module $|\vec{F}_V|$ est égal au poids du liquide au dessus de la surface.

$$F = \sqrt{F_H^2 + F_V^2}$$

Exercices d'application:

Exercice n° 1:

Le liquide 1 est moins dense que le liquide 2: $\rho_1 = 998 \text{ kg.m}^{-3}$; et $\rho_2 = 1022 \text{ kg.m}^{-3}$

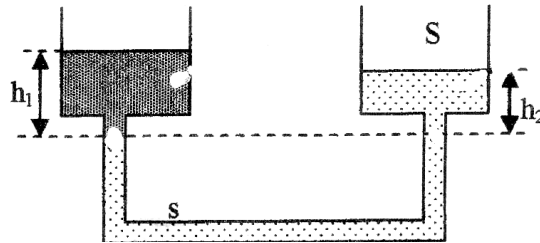
1) La pression p au-dessus des liquide est la même. Etablir une relation entre h_1 et h_2 .

2) On augmente la pression au-dessus du liquide 1 de $p = 10 \text{ Pa}$. Sachant que la surface des grands récipients est $S = 100 \text{ cm}^2$ et celle du tube en U les reliant $s = 1 \text{ cm}^2$.

Exprimez les nouvelles hauteurs des liquides h'_1 , et h'_2 : en fonction de h_1 , h_2 , du déplacement des surfaces libres et de celui de la surface de séparation des deux hquides.

Calculez ce dernier.

3) Si on peut apprécier un déplacement de la surface de séparation de 1 mm. quelle est la sensibilité de ce manomètre ?



Solution :

1) Soient les deux points A et B situés sur le même plan horizontal :

$$p_A = p_B$$

$$p_A = p_0 + \rho_1 g h_1$$

$$\Rightarrow \rho_1 g h_1 = \rho_2 g h_2 \quad p_0 \text{ étant la pression atmosphérique}$$

$$p_B = p_0 + \rho_2 g h_2$$

2)

ΔH étant la différence de hauteur dans le récipient

Δh étant la différence de hauteur dans le tube

$$\text{On a : } h'_1 = h_1 + \Delta h - \Delta H \quad \text{et} \quad h'_2 = h_2 + \Delta h + \Delta H$$

$$\text{La conservation du volume déplacé : } \Delta H \cdot S = \Delta h \cdot s \Rightarrow \Delta H = \frac{\Delta h}{S} \cdot s$$

Les deux équations précédentes deviennent :

$$h'_1 = h_1 + \Delta h - \frac{\Delta h}{S} \cdot s$$

$$h'_2 = h_2 + \Delta h + \frac{\Delta h}{S} \cdot s$$

De la même manière :

$$p'_A = p'_B$$

$$p_{A'} = p_0 + \Delta p + \rho_1 g h'_1$$

$$\Rightarrow \rho_1 g h'_1 + \Delta p = \rho_2 g h'_2 \quad \Delta p \text{ étant la pression ajoutée}$$

$$p_{B'} = p_0 + \rho_2 g h'_2$$

$$p_0 + \Delta p + \rho_1 g h'_1 = p_0 + \rho_2 g h'_2$$

En remplaçant h'_1 et h'_2 par leurs valeurs respectives On trouvera :

$$\Delta h = \frac{\Delta p}{g \left[\rho_2 \left(1 + \frac{S}{S} \right) - \rho_1 \left(1 - \frac{S}{S} \right) \right]}$$

$$\text{A.N. } \Delta h = 2.26 \text{ cm}$$

$$3) \text{ Pour } \Delta h = 1 \text{ mm} \Rightarrow \Delta p = 0.44 \text{ Pa}$$

Exercice n° 2 :

Le réservoir de la figure possède deux piézomètres A et B contenant deux liquides non miscibles Trouver

- La hauteur de la surface liquide dans le piézomètre A.
- La hauteur du la surface liquide dans te piézomètre B.
- La pression totale dans le fond du réservoir

Solution :

- 1) Le liquide A s'élèvera dans le piézomètre A à la même hauteur que le liquide A dans le réservoir ($h = 2 \text{ m}$)
- 2) Le liquide B s'élèvera dans le piézomètre B à la hauteur de $h_B = 0.3 \text{ m}$, plus une hauteur additionnelle h'_B due à la pression p_A exercée par le liquide A.

Calculons cette pression p_A :

$$p_A = \rho_A g h_A = 12007 \text{ Pa} \quad \text{avec } h_A = 1.7 \text{ m}$$

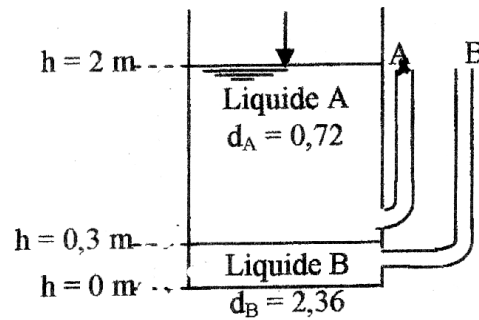
$$\text{La hauteur } h'_B \text{ est donc : } h'_B = \frac{p_A}{\rho_B g} = 0.519 \text{ m}$$

Enfin le liquide B s'élèvera dans le piézomètre B à la hauteur :

$$h_T = h_B + h'_B = 0.3 \text{ m} + 0.519 \text{ m} = 0.819 \text{ m}$$

- 3) La pression totale au fond du réservoir est :

$$p_T = \rho_A g h_A + \rho_B g h_B = 18950 \text{ Pa}$$



Exercice n° 3 :

Lors d'un prélèvement on introduit un tube cylindrique dans un récipient de manière à ce que la moitié de la longueur ($L/2$) soit remplie par le liquide à prélever (1). L'extrémité supérieure du tube est alors fermée par un doigt et le tube est tiré (2). Une partie du liquide s'écoule hors du tube, On admet que l'air se comporte comme un gaz parfait ($PV = Cste$).

On appellera ρ la masse volumique du liquide, $\pi R^2 = A$ la section droite du tube, et P_0 la pression atmosphérique, On néglige la variation de la pression atmosphérique avec L

1) Exprimer la pression P de l'air dans le tube en fonction de

a) de P_0 , L et h

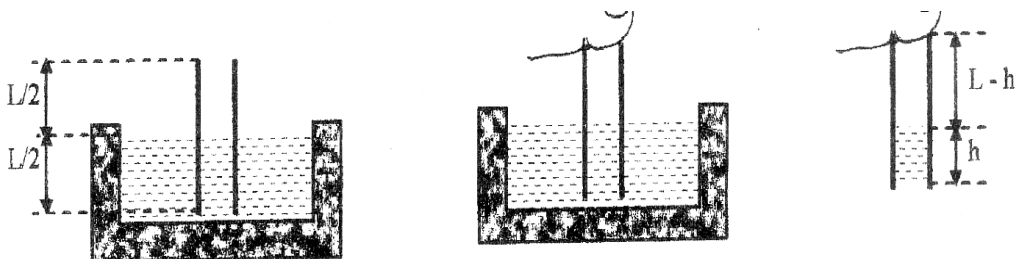
b) de P_0 , ρ et h .

2) Exprimer h en fonction de la longueur du tube L et d'une nouvelle variable $H = \frac{P_0}{\rho g}$ où ρ

est la masse volumique du liquide et g l'accélération terrestre.

3) Calculer h pour $\rho = \rho_{Hg} = 13.6 \text{ g.cm}^{-3}$ et pour $\rho = \rho_{eau} = 1 \text{ g.cm}^{-3}$.

On prendra $g = 10 \text{ ms}^{-2}$ et $P_0 = 10^5$ pascals, $L = 20 \text{ cm}$.



Solution :

1)

Supposons que l'air se comporte comme un gaz parfait :

$$pV = n R T = \text{Cste}$$

$$a) p_0 \frac{A \cdot L}{2} = n R T \quad (\text{tube à l'intérieur du récipient})$$

$$\Rightarrow p = p_0 \frac{L}{2(L-h)}$$

$$b) p A (L - h) = n R T \quad (\text{tube à l'extérieur du récipient})$$

Tube à l'extérieur du récipient, appliquons l'équation de l'hydrostatique :

$$p_0 = \rho g h + p \Rightarrow p = p_0 - \rho g h \Rightarrow p_0 - \rho g h = p_0 \frac{L}{2(L-h)}$$

$$2) \text{ Comme } \frac{p_0}{\rho g} \Rightarrow p_0 = \rho g H, \text{ on remplace } p_0 \text{ par cette valeur dans l'équation}$$

$$\rho g H - \rho g h = \rho g H \frac{L}{2(L-h)}$$

Finalement on obtient l'équation suivante :

$$2 h^2 - 2 (H + L)h + HL = 0$$

$$\text{Les solutions de cette équation sont : } h = \frac{(L+H) \pm \sqrt{L^2 + H^2}}{2}$$

3) Une des deux solutions est valable, on trouvera donc :

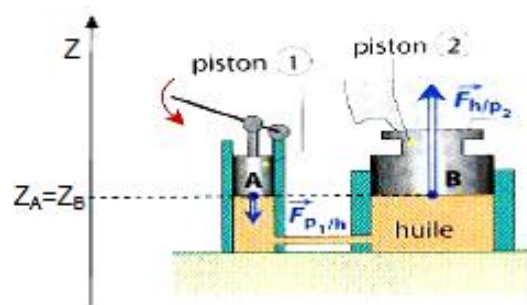
$$\text{Pour le mercure : } h_{Hg} = 8.7 \text{ cm}$$

$$\text{Pour l'eau : } h_{eau} = 10 \text{ cm}$$

Exercice 4 :

La figure ci-dessous représente un cric hydraulique formé de deux pistons (1) et (2) de section circulaire. Sous l'effet d'une action sur le levier, le piston (1) agit au point (A), par une force de pression $F_{p1/h}$ sur l'huile. L'huile agit, au point (B) sur le piston (2) par une force $F_{h/p2}$.

On donne :

- les diamètres de chacun des pistons : $D_1 = 10 \text{ mm}$; $D_2 = 100 \text{ mm}$.- l'intensité de la force de pression en A : $F_{p1/h} = 150 \text{ N}$.1) Déterminer la pression P_A de l'huile au point A2) Quelle est la pression P_B au point B ?3) En déduire l'intensité de la force de pression $F_{h/p2}$; Que peut-on conclure ?

Solution :

1) Pression P_A de l'huile au point A:

$$p_A = \frac{4.F_{P1/h}}{\pi.D_1^2} \quad \text{AN: } p_A = \frac{4.150}{\pi.0.01^2}$$

2) En appliquant la relation fondamentale de l'hydrostatique (RFH) entre les points A et B:

$$p_A - p_B = \rho g (z_A - z_B) \quad \text{Or } z_A = z_B \text{ donc } p_A = p_B = 19.10^5 \text{ Pa}$$

3) Force de pression en B :

$$F_{h/P2} = P_B \cdot \frac{\pi.D_2^2}{4} \quad \text{AN: } F_{h/P2} = 19.10^5 \cdot \frac{\pi.0.1^2}{4} = 14922.56 \text{ N}$$

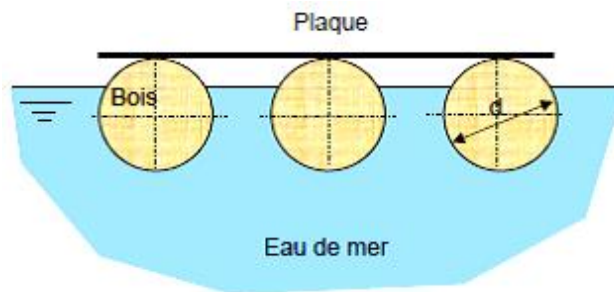
Conclusion:

On constate que la force $F_{P1/h} = 150 \text{ N}$ est relativement faible par rapport à $F_{h/P2} = 14922.56 \text{ N}$.

Avec ce système nous avons atteint un rapport de réduction de force presque 100. Ce rapport correspond au rapport des diamètres des cylindres. On utilise souvent le même principe de réduction d'effort dans plusieurs applications hydrauliques (exemple: presse hydraulique).

Exercice 5 :

On considère une plate-forme composée d'une plaque plane et de trois poutres cylindriques en bois qui flottent à la surface de la mer.



On donne:

- les dimensions d'une poutre: diamètre $d = 0,5 \text{ m}$ et longueur $L = 4 \text{ m}$.
- la masse volumique du bois : $\rho_{\text{bois}} = 700 \text{ kg/m}^3$.
- la masse volumique de l'eau de mer: $\rho_{\text{mer}} = 1027 \text{ kg/m}^3$.
- la masse de la plaque $M_c = 350 \text{ kg}$.
- l'accélération de la pesanteur $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$.

- 1) Calculer le poids total P_0 de la plate-forme.
- 2) Ecrire l'équation d'équilibre de la plate-forme.
- 3) En déduire la fraction $F(\%)$ du volume immergé des poutres.
- 4) Déterminer la masse M_c maximale qu'on peut placer sur la plate-forme sans l'immerger complètement.

Solution :

1) Poids total de la plate-forme :

$$P_0 = (M_P + 3 \cdot M_b) \cdot g = \left(M_P + 3 \cdot \rho_{\text{bois}} \cdot \frac{\pi D^2}{4} L \right) \cdot g$$

$$\text{AN: } \left(350 + 3 \cdot 700 \cdot \frac{\pi \cdot 0.5^2}{4} \cdot 4 \right) \cdot 9.81 = 19613,49 \text{ N}$$

2) Equation d'équilibre : $P_0 = \text{Poussée d'Archimède}$.

3) $P_{\text{Arch}} = \text{poids du volume d'eau déplacé}$

$$P_{\text{Arch}} = 3 \cdot \rho_{\text{eau}} \cdot V_{\text{immergé}} \cdot g = P_0 \Rightarrow V_{\text{immergé}} = \frac{P_0}{3 \cdot \rho_{\text{eau}} \cdot g}$$

$$\text{La fraction du volume immergé : } F\% = \frac{V_{\text{immergé}}}{V_{\text{poutre}}} \cdot 100 = \frac{P_0}{3 \cdot \rho_{\text{eau}} \cdot g \cdot V_{\text{poutre}}} \cdot 100$$

$$\text{AN: } \frac{19613,49}{3 \cdot 1027 \cdot 9,81 \cdot \frac{\pi \cdot 0.5^2}{4} \cdot 4} \cdot 100 = 82,62 \%$$

4) Poutre complètement immergée : $F(\%) = 100 \%$ c'est-à-dire $V_{\text{immergé}} = V_{\text{poutre}}$

$$\frac{P_0 + M_c \cdot g}{3 \cdot \rho_{\text{eau}} \cdot g} = V_{\text{poutre}} \quad \text{on obtient : } M_c = \frac{1}{g} (3 \cdot \rho_{\text{eau}} \cdot g \cdot V_{\text{poutre}} - P_0)$$

$$\text{AN: } M_c = \frac{1}{9,81} \left(3 \cdot 1027 \cdot 9,81 \cdot \frac{\pi \cdot 0.5^2}{4} \cdot 4 - 19613,49 \right) = 420,47 \text{ Kg}$$

Exercice 6 :

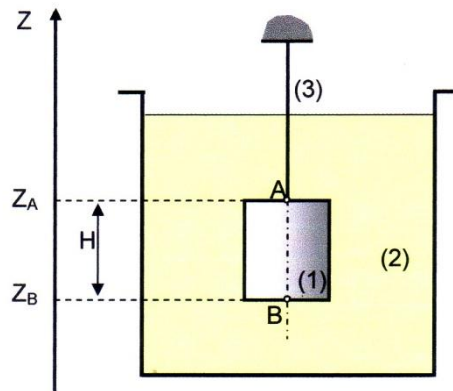
On considère un cylindre (1) en acier, de rayon R et de hauteur H . Ce cylindre est suspendu par un fil (3) à l'intérieur d'un récipient contenant de l'huile (2).

1) Déterminer à l'équilibre l'expression de la tension T du fil en utilisant la Relation Fondamentale de la Dynamique.

2) Retrouver la même expression en appliquant le théorème d'Archimède.

3) Application numérique :

$R = 0,1 \text{ m}$ et $H = 0,2 \text{ m}$; $g = 9,81 \text{ m/s}^2$; la masse volumique de l'huile $\rho_{\text{huile}} = 824 \text{ kg/m}^3$; la masse volumique de l'acier $\rho_{\text{acier}} = 7800 \text{ kg/m}^3$.



Solution :

1) *A l'équilibre : En appliquant la relation fondamentale de la dynamique.*

$$\vec{T} + \vec{P} + \vec{F}_A + \vec{F}_B + \sum \vec{F}_L = \vec{0}$$

$\sum \vec{F}_L$ Forces de pression sur la surface latérale

La projection de cette équation vectorielle sur l'axe z nous donne :

$$T - mg - P_A \cdot S + P_B \cdot S = 0$$

P_A : Pression en A et P_B : Pression en B

$$\text{Avec } P_B - P_A = \rho_{\text{Huile}} g H \Rightarrow T = mg - (P_B - P_A)S = \rho_{\text{acier}} S H g - \rho_{\text{Huile}} g H S$$

$$\Rightarrow T = (\rho_{\text{acier}} - \rho_{\text{Huile}}) S g H = (\rho_{\text{acier}} - \rho_{\text{Huile}}) \pi R^2 g H.$$

2) *A l'équilibre : en appliquant le théorème d'Archimède :*

$$\vec{T} + \vec{P} + \vec{F}_{AR} = \vec{0}$$

$\vec{F}_{AR}$ étant la force ou la poussée d'Archimède :

La projection de cette équation différentielle selon l'axe z nous donne :

$$T - mg + F_{AR} = 0$$

$$F_{AR} = \rho_{\text{Huile}} V_{\text{imm}} g = \rho_{\text{Huile}} \pi R^2 H g \text{ avec } V_{\text{imm}} = \pi R^2 H$$

$$\text{On a : } T = mg - F_{AR}$$

$$\Rightarrow T = \rho_{\text{acier}} V g - \rho_{\text{Huile}} \pi R^2 H g \Rightarrow T = \rho_{\text{acier}} \pi R^2 H g - \rho_{\text{Huile}} \pi R^2 H g$$

$$\text{Donc } T = (\rho_{\text{acier}} - \rho_{\text{Huile}}) \pi R^2 g H$$

$$\text{A.N : } T = 429.5 \text{ N}$$