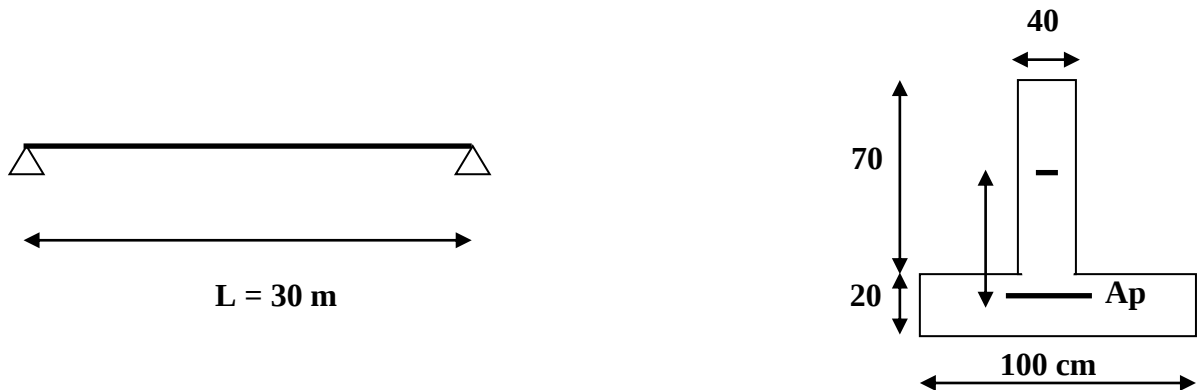


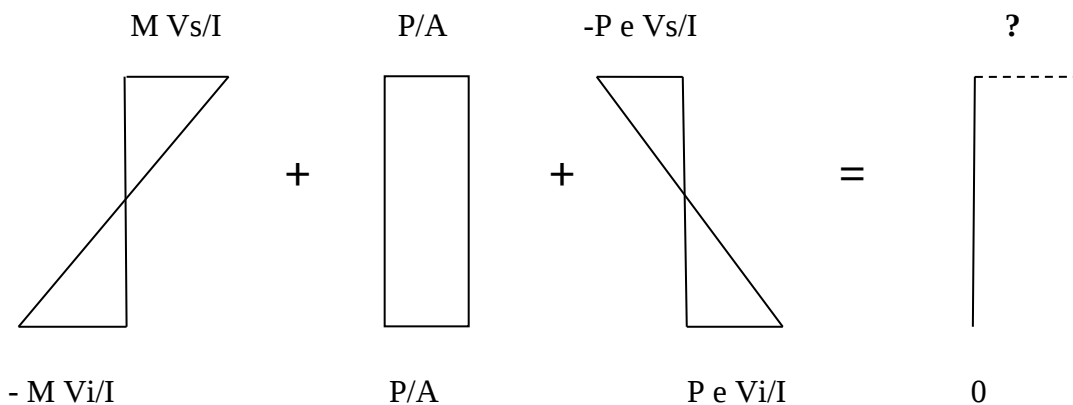
Exercice N°1 :

La poutre en T, ci-dessous représentée, est soumise à son poids propre et un effort de précontrainte P , excentré de $e = -30$ cm.

- Tracer le diagramme des contraintes.
- Déduire la valeur de P , si la contrainte finale de traction, dans les fibres inférieures, est supposée nulle. On donne : la masse volumique du béton est $2,5 \text{ g/cm}^3$.



Solution:



Du diagramme:

$$- M V_i/I + P/A + P e V_i/I = 0. \quad \Rightarrow \quad P = \frac{M V_i}{I \left(\frac{1}{A} + \frac{e V_i}{I} \right)}$$

$$A = (40 \times 70) + (20 \times 100) \quad \text{donc : } A = 4800 \text{ cm}^2.$$

$$M = Ql^2 / 8 \quad \text{avec } Q = \gamma A = 25 \times 4800 \times 10^{-4} \quad \text{donc : } Q = 12 \text{ KN/m.} \quad \text{D'où : } M = 1350 \text{ KN.m.}$$

$$Y_G = \sum A_i Y_i / \sum A_i = (2800 \times 55 + 2000 \times 10) / 2000 + 2800 \quad \text{donc : } Y_G = V_i = 36,25 \text{ cm.}$$

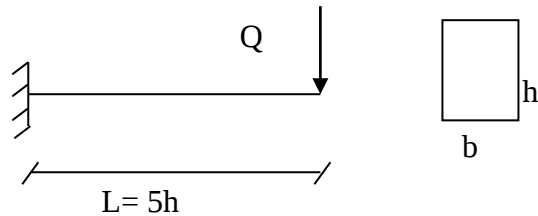
$$I = \frac{b_1 h_1^3}{12} + B_1 \Delta_1^2 + \frac{b_2 h_2^3}{12} + B_2 \Delta_2^2. \quad (\Delta_1 = 18,75, \Delta_2 = 26,25, b_1 = 40; h_1 = 70; b_2 = 100; h_2 = 20).$$

$$\text{Donc : } I = 3572500 \text{ cm}^4. \quad \text{Alors : } P = 2671,64 \text{ KN.}$$

Exercice N°2 :

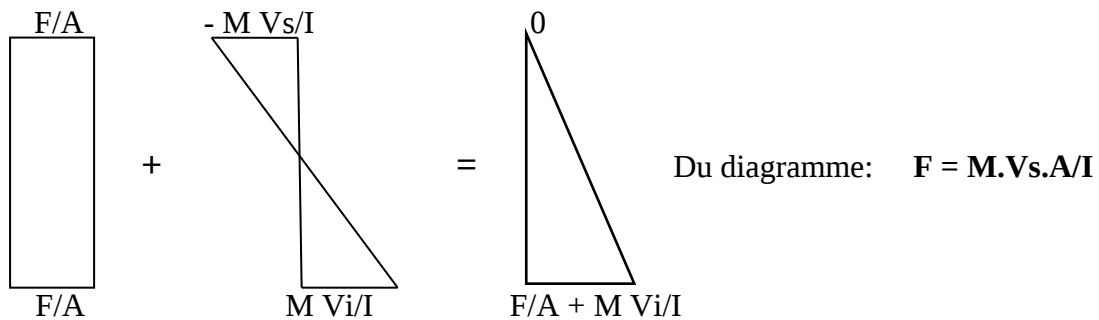
Afin d'éliminer les contraintes de traction dues au moment maximal développé par la force **Q**, la poutre console ci dessous, est soumise à un effort de précontrainte **F**. En négligeant le poids propre de la console. Déterminer:

- Le diagramme des contraintes résultant.
- La valeur de **F** en fonction de **Q** si:
 - F est centrée.
 - F est excentrée de **e = h/6**.



Solution:

Cas 1, F est centrée :

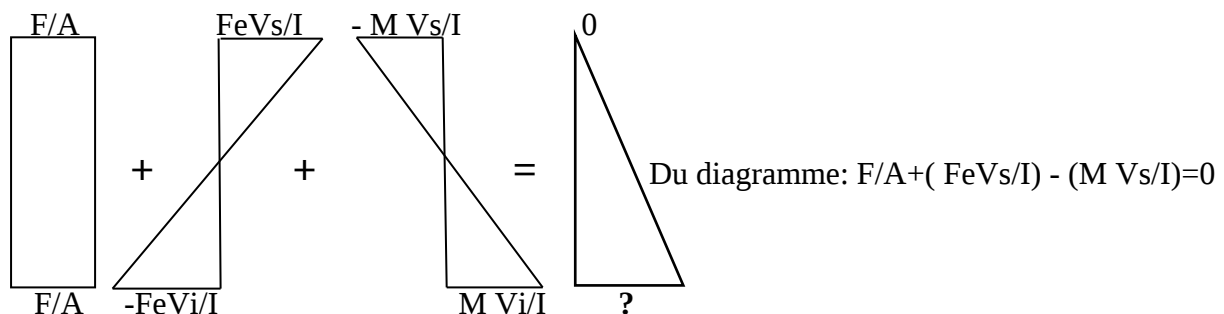


$$M = M_{\max} = QL = 5Qh$$

$$V_s = V_i = h/2 \quad \text{et} \quad I = bh^3/12.$$

$$\text{Donc: } F = (30Qbh^3)/bh^3, \quad \text{D'où: } \mathbf{F = 30Q}.$$

Cas 2, F est excentrée de **e = h/6**:



Donc:

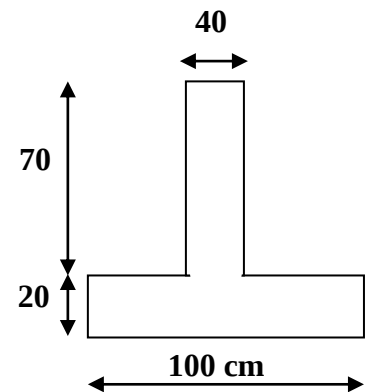
$$(F/bh) + (F/bh) - (30Q/bh) = 0$$

$$\text{D'où: } \mathbf{F = 15Q}.$$

Exercice N°3 :

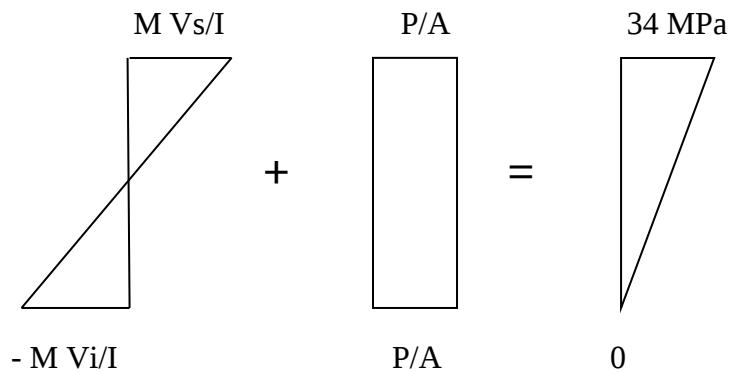
Soit la poutre en T, représentée ci-dessous, soumise à un moment extérieur $\mathbf{M}$ et un effort de précontrainte centrée $\mathbf{P}$.

1. Si la contrainte finale de compression est 34 MPa, et la contrainte finale de traction est nulle, quelles sont les valeurs de $\mathbf{M}$ (en MN.m) et $\mathbf{P}$ (en MN) ?
2. L'excentricité de la force de précontrainte $\mathbf{P}$ provoque une diminution de 60% dans la contrainte finale de compression dans la poutre. Si la contrainte finale de traction dans la poutre est nulle, déduire la nouvelle valeur de $\mathbf{P}$ et la position de son point d'application.



Solution:

Cas 1: $\mathbf{P}$ est centré.



Du diagramme:

$$(1): M V_s/I + P/A = 34 \cdot 10^{-4} \text{ MN/cm}^2.$$

$$(2): -M V_i/I + P/A = 0.$$

$$(1) - (2): M (V_s + V_i)/I = 34 \cdot 10^{-4} \text{ MN/cm}^2. \text{ Donc: } \mathbf{M} = \mathbf{I} \cdot \mathbf{34 \cdot 10^{-4} / (V_s + V_i)}$$

On a:

$$Y_G = \sum A_i Y_i / \sum A_i = (2800 \times 55 + 2000 \times 10) / 2000 + 2800.$$

Donc: $Y_G = V_i = 36,25\text{cm}$ et $V_s = 53,75\text{cm}$.

$$I = \frac{b_1 h_1^3}{12} + B_1 \Delta_1^2 + \frac{b_2 h_2^3}{12} + B_2 \Delta_2^2. (\Delta_1 = 18,75, \Delta_2 = 26,25, b_1 = 40; h_1 = 70; b_2 = 100; h_2 = 20).$$

Donc : $I = 3572500 \text{ cm}^4$.

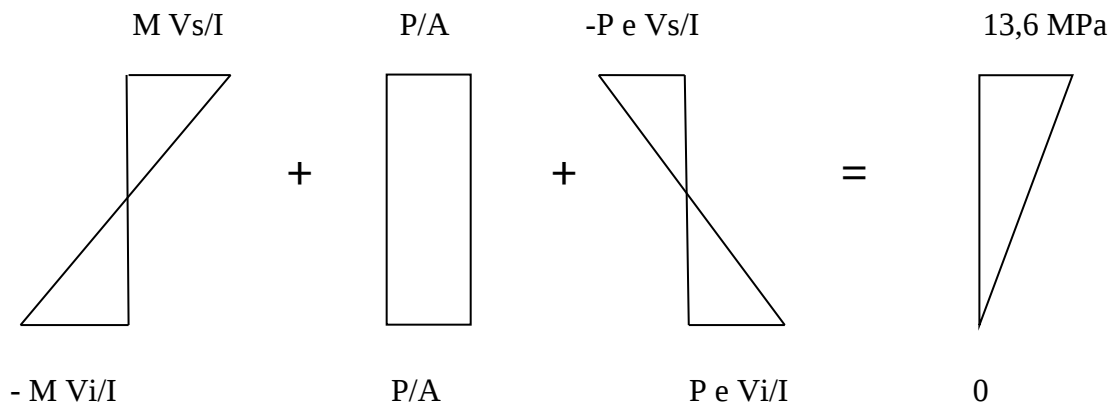
$$M = I \cdot 34 \cdot 10^{-4} / (V_s + V_i). M = 134,96 \text{ MN.cm}, \text{ donc } M = 1,35 \text{ MN.m}$$

Remplaçons dans (2), on aura : $P = AMV_i/I$.

Avec $A = 4800 \text{ cm}^2$. Donc $P = 6,57 \text{ MN}$.

Cas 2: P est excentré.

La contrainte de compression est diminuée de 60%, donc elle est 40% de 34MPa, c'est-à-dire : 13,6 MPa.



Du diagramme:

(1): $M V_s/I + P/A - P e V_s/I = 13,6 \cdot 10^{-4} \text{ MN/cm}^2$.

(2): $-M V_i/I + P/A + P e V_i/I = 0$.

((1). V_i + (2). V_s) nous donne: $P(V_i + V_s)/A = 13,6 \cdot 10^{-4} \cdot V_i$.

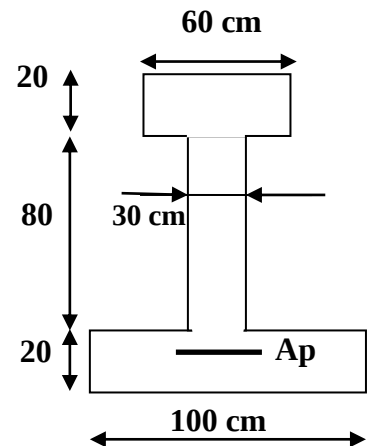
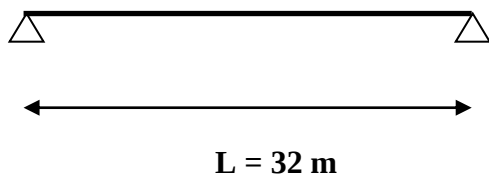
Alors : $P = 2,63 \text{ MN}$.

De l'équation (2) : $e = (M V_i/I - P/A) (I/P V_i) = (M/P - I/A V_i)$. Donc: $e = 30,8 \text{ cm}$.

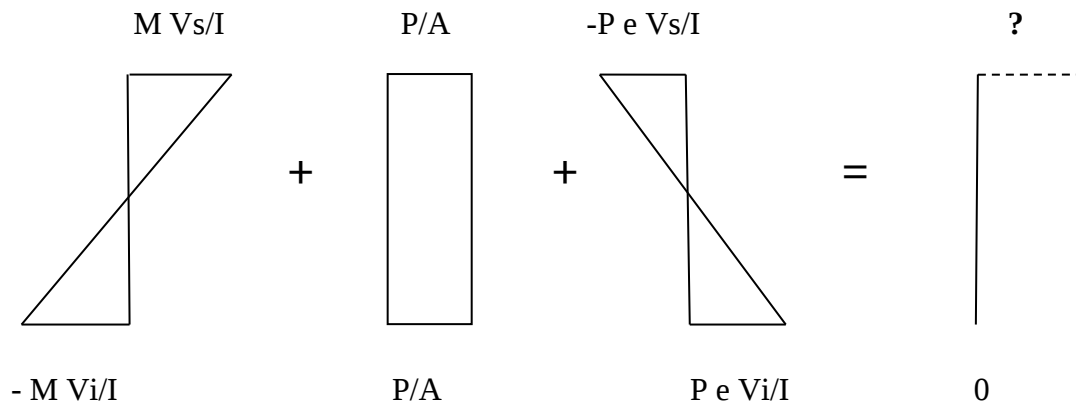
Exercice N°4 :

La poutre en I, représentée ci-dessous, est soumise à son poids propre et un effort de précontrainte **P**, excentré de **e = -40 cm**.

- Tracer le diagramme des contraintes.
- Déduire la valeur de **P**, si la contrainte finale de traction, dans les fibres inférieures, est supposée nulle. On donne : la masse volumique du béton est **2,5 g/cm³**.



Solution:



Du diagramme:

$$-M V_i/I + P/A + P e V_i/I = 0. \quad \Rightarrow \quad P = \frac{M V_i}{I \left(\frac{1}{A} + \frac{e V_i}{I} \right)}$$

On a:

$$A = (20 \times 60) + (30 \times 80) + (20 \times 100) \quad \text{donc : } A = 5600 \text{ cm}^2.$$

$$M = Ql^2 / 8 \quad \text{avec } Q = \gamma A = 25 \times 5600 \times 10^{-4} \quad \text{donc : } Q = 14 \text{ KN/m.} \quad \text{D'où : } M = 1792 \text{ KN.m.}$$

$$Y_G = \sum A_i Y_i / \sum A_i = (1200 \times 110 + 2400 \times 60 + 2000 \times 10) / 5600$$

Donc : $Y_G = V_i = 52,86 \text{ cm}$.

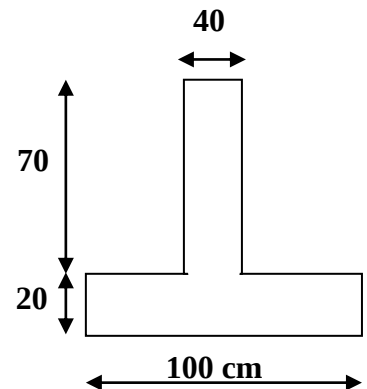
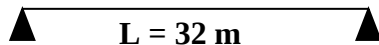
$$I = \left(\frac{b_1 h_1^3}{12} + B_1 \Delta_1^2 \right) + \frac{b_2 h_2^3}{3} + \frac{b_3 h_3^3}{3} + \left(\frac{b_4 h_4^3}{12} + B_4 \Delta_4^2 \right). \quad (\Delta_1 = 57,14 \text{ cm}, \Delta_4 = 42,86 \text{ cm}).$$

Donc : $I = 9100952,43 \text{ cm}^4$. Alors : **$P = 2533,05 \text{ KN}$** .

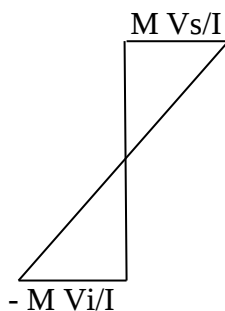
Exercice N°5 :

Soit la poutre en T représentée ci-dessous, soumise à la charge uniformément répartie $Q = 5 \text{ KN/m}$. Quelle est la valeur de la contrainte de traction dans cette poutre ?.

1. Afin d'éliminer cette contrainte de traction, on procède à la précontrainte, en utilisant la force **centrée** P . Déduire la valeur de P .
2. Si la force de précontrainte nécessaire pour annuler cette contrainte de traction est $P = 1,5 \text{ MN}$, quelle sera la valeur de son **excentricité** e ?



Solution:



$$\sigma_{\text{(traction)}} = M \cdot V_i / I$$

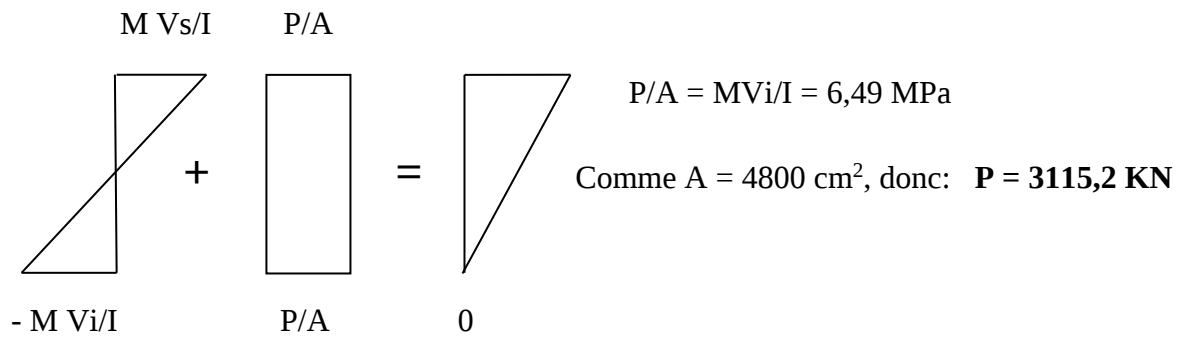
$$M = Ql^2/8. \text{ Donc, } M = 640 \text{ KN.m}$$

$$V_i = Y_G = \sum A_i Y_i / \sum A_i \text{ Donc, } V_i = 36,25 \text{ cm}.$$

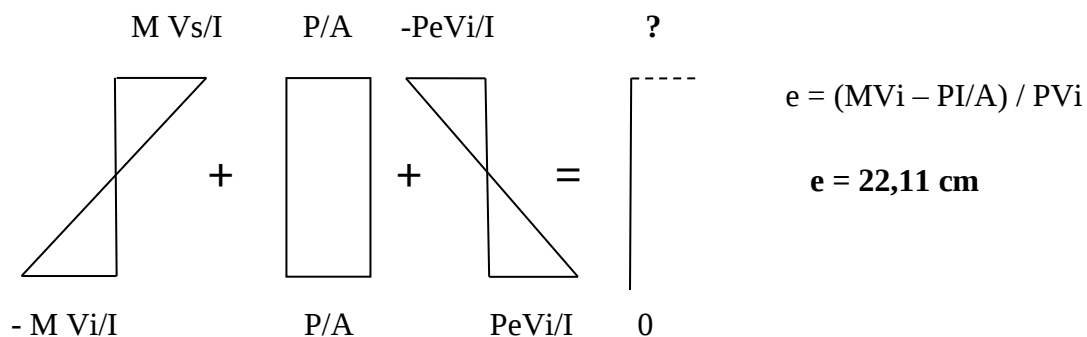
$$I_{(G)} = 3572500 \text{ cm}^4.$$

$$\text{D'où: } \sigma_{\text{(traction)}} = 6,49 \text{ MPa}.$$

a. Précontrainte centrée:



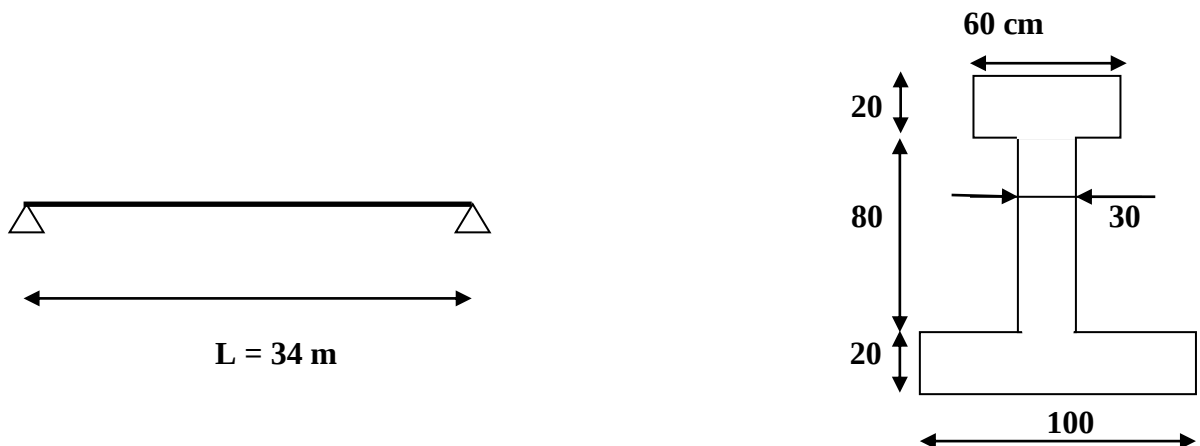
b. Précontrainte excentrée:



Exercice N°6 :

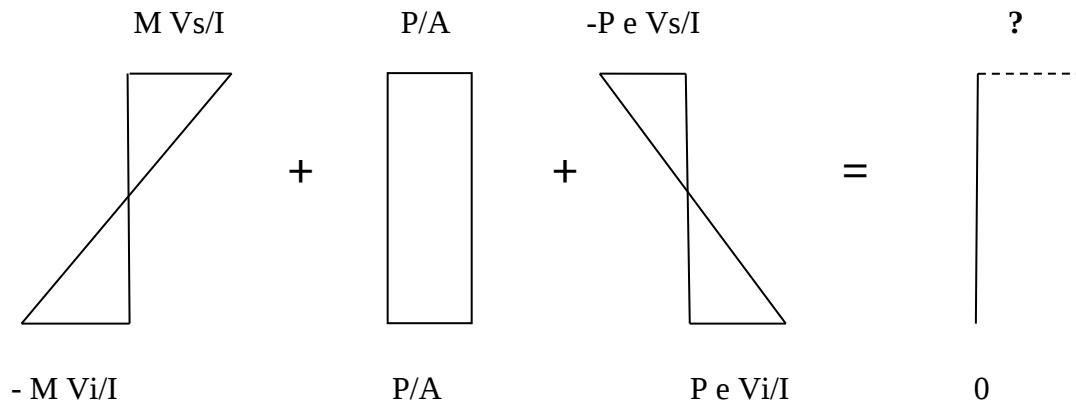
La poutre en I, représentée ci-dessous, est soumise à son poids propre et un effort de précontrainte **excentré**, de valeur **$P = 2 \text{ MN}$** . On donne : la masse volumique du béton est **25 KN/m^3** .

- Calculer la valeur de l'excentricité **e** , nécessaire pour annuler la contrainte finale dans les fibres inférieures de la poutre. Que remarquez-vous ?
- Quelle sera donc la valeur de **P** nécessaire pour annuler la traction, si le centre de gravité des armatures actives se trouve au milieu de la semelle inférieure de la poutre.



Solution:

Cas 1 :



Du diagramme:

$$-M V_i/I + P/A + P e V_i/I = 0. \quad \longrightarrow \quad e = \left(M V_i - \frac{P I}{A} \right) \frac{1}{P V_i}$$

On a:

$$A = \sum A_i \quad \text{donc : } A = 5600 \text{ cm}^2.$$

$$M = Q l^2 / 8 \quad \text{avec } Q = \gamma A = 14 \text{ KN/m.} \quad \text{D'où : } M = 2023 \text{ KN.m.}$$

$$Y_G = \sum A_i Y_i / \sum A_i. \quad \text{Donc : } Y_G = V_i = 52,86 \text{ cm.}$$

$$I = \left(\frac{b_1 h_1^3}{12} + B_1 \Delta_1^2 \right) + \frac{b_2 h_2^3}{3} + \frac{b_3 h_3^3}{3} + \left(\frac{b_4 h_4^3}{12} + B_4 \Delta_4^2 \right). \quad (\Delta_1 = 57,14 \text{ cm}, \Delta_4 = 42,86 \text{ cm}).$$

$$\text{Donc : } I = 9100952,43 \text{ cm}^4.$$

$$\text{Alors : } e = 70,4 \text{ cm.}$$

On a ($e = 70,4 \text{ cm} > V_i = 52,86 \text{ cm}$). Le CDG des câbles est à l'extérieur de la poutre.

Cas 2 :

Le CDG des câbles est au milieu de la semelle inférieure. Donc : $e = 42,86 \text{ cm}$

Du diagramme:

$$-M V_i/I + P/A + P e V_i/I = 0. \quad \longrightarrow \quad P = \frac{M V_i}{I \left(\frac{1}{A} + \frac{e V_i}{I} \right)}$$

$$\text{Alors : } P = 2748,46 \text{ KN.}$$