

Pratique du BAEL 91

Cours avec exercices
corrigés

Deuxième édition

Jean Perchat
Jean Roux

Cette deuxième édition tient compte des nouvelles valeurs des contraintes limites de l'acier à l'état-limite de service définies dans les *Recommandations provisoires relatives à la modification des règles de prise en compte de la fissuration et à l'emploi des bétons à hautes performances* en date du 25 juin 1997 cosigné par le président de la commission BAEL-BPEL-EC2, par le SETRA, le LCPC et le CSTB.

Pratique du BAEL 91 intègre ces modifications et présente, à partir des lois classiques de la résistance des matériaux, et après l'étude des méthodes de calcul propres à chaque sollicitation élémentaire (effort normal, effort tranchant, moment fléchissant, moment de torsion) et au flambement, le dimensionnement des éléments de base d'une structure (tirant, poteau, poutre, dalle).

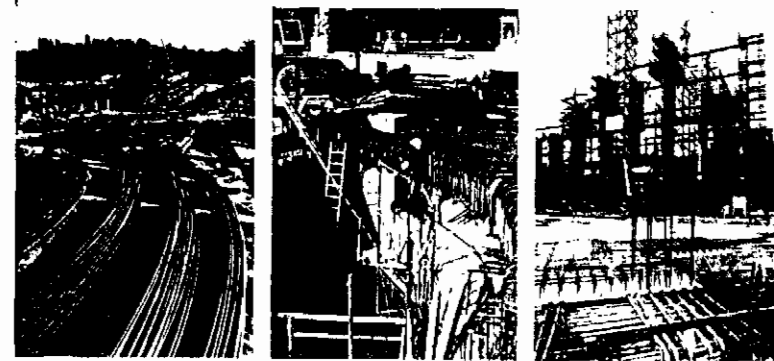
Chaque chapitre comporte un rappel de cours suivi d'un ou plusieurs exercices d'application traités en détail. Ces exercices sont accompagnés de nombreuses informations utiles pour les calculs : valeurs des charges, contraintes limites, caractéristiques des aciers en barres, formulaire pour poutres isostatiques, calculs de sections et moments d'inertie, etc.

Cet ouvrage est extrait du cours de l'École Spéciale des Travaux Publics (ESTP) professé jusqu'à ces dernières années par Jean Perchat et repris depuis par Jean Roux. Il s'adresse aux étudiants en bâtiment et génie civil, aux techniciens, ingénieurs et projecteurs désireux d'acquérir les mécanismes et ordres de grandeur couramment pratiqués en calcul des ossatures en béton armé ou de mettre à jour leurs connaissances dans ce domaine.

Pratique du BAEL 91

Cours avec exercices
corrigés

Deuxième édition



Jean Perchat
Jean Roux

Copie pour Asseli
mars 2001

Eyrolles

Eyrolles



PRATIQUE DU BAEL 91

Cours avec exercices corrigés

MAÎTRISE DU B.A.E.L. 91 ET DES D.T.U. ASSOCIÉS

J. PERCHAT, J. ROUX.

2^e édition 1997, 17 x 24, 408 pages, n° 1274.

Suite logique de *Pratique du BAE.L. 91*, des mêmes auteurs, cet ouvrage traite du calcul et de la conception d'éléments de structures tels que prédalles, planchers-dalles et planchers-champignons, semelles de fondations superficielles et sur pieux, portiques et consoles courtes. Il aborde également le calcul des déformations et le comportement au feu des poteaux, poutres et dalles.

Résistance des matériaux • Prédalles • Planchers-dalles et planchers-champignons • Semelles superficielles • Semelles sur pieux • Portiques, charges verticales, charges horizontales • Consoles courtes • État-limite de service vis-à-vis des déformations • Comportement au feu des structures en béton armé • Ouvertures dans les éléments en béton armé.

B.A.E.L. 91

Règles techniques de conception et de calcul des ouvrages et constructions en béton armé suivant la méthode des états limites

1992, 15,5 x 24, 320 pages, n° 10012

Règles B.P.E.L. 91

Règles techniques de conception et de calcul des ouvrages et constructions en béton précontraint suivant la méthode des états limites

1993, 15,5 x 24, 328 pages, n° 10013.

LES BÉTONS. Bases et données pour leur formulation

ATILH (Association technique de l'industrie des liants hydrauliques).

1996, 17 x 24, 576 pages, n° 1316.

Rédigé à un moment où les normes sont en pleine évolution, cet ouvrage de référence, orienté vers la formulation et conçu comme un traité général sur le béton, apporte à l'ingénieur une méthode ouverte pour tirer le meilleur profit des découvertes les plus récentes en matière d'adjuvants et d'additions. Il offre au contrôleur technique une vue raisonnée des points sensibles à considérer, au spécialiste et au chercheur des résultats expérimentaux facilement consultables et à l'étudiant une synthèse à jour, en prise avec la réalité professionnelle.

Sommaire

Les constituants du béton et les données de base de la formulation • La formulation des bétons de gros œuvre et ses objectifs • Mélanges granulaires de porosité minimale et approche expérimentale des formulations complexes • Applications diverses et développement • Glossaire

NOUVEAU GUIDE DU BÉTON

Composants et propriétés • Composition et dosage • Fabrication, transport et mise en œuvre • Contrôle et normalisation

G. DREUX, J. FESTA.

7^e édition 1995, 17 x 24, 320 pages, n° 10230.

PRATIQUE DU BAE.L. 91

Cours avec exercices corrigés



Jean PERCHAT

Ingénieur E.C.P.

Professeur honoraire à l'ESTP

Professeur honoraire au CHIEC

Jean ROUX

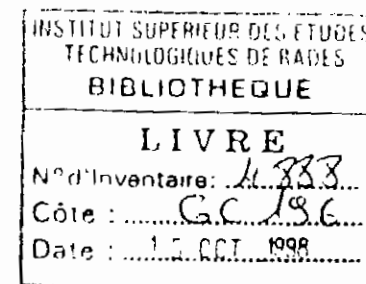
Ingénieur E.T.P. - CHIEBAP

Ingénieur SNCF

Professeur à l'ESTP

DEUXIEME EDITION

deuxième tirage 1998



Eyrolles

ÉDITIONS EYROLLES
61, Bld Saint-Germain
75240 Paris Cedex 05

Crédit photographique de couverture
© Alex Béraud
Avec son aimable autorisation



Le code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée notamment dans les établissements d'enseignement, provoquant une baisse brutale des achats de livres, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.

En application de la loi du 11 mars 1957, il est interdit de reproduire intégralement ou partiellement le présent ouvrage, sur quelque support que ce soit, sans autorisation de l'Éditeur ou du Centre Français d'exploitation du droit de Copie, 20, rue des Grands Augustins, 75006 Paris.

© Éditions Eyrolles, 1993, 1997, ISBN 2-212-01317-5

PRÉFACE

Un titre sans prétention mais qui annonce clairement le thème ; deux auteurs qui ont largement pratiqué la construction et qui savent exposer simplement la science du béton armé, c'est un plaisir pour moi de préfacer cet ouvrage dédié aux ingénieurs d'aujourd'hui et de demain.

Jean Perchat est ingénieur des Arts et Manufactures. Entré à la Fédération Nationale du Bâtiment en 1953, il a eu le privilège de fréquenter dès le début de sa carrière les "Grands" du béton armé de l'époque, tels que J. Blévyot, R. Chambaud, N. Esquillan et P. Lebel. Ceux-ci l'ont associé à leurs réalisations, à leurs études et à leurs recherches théoriques et expérimentales. Une fois ses classes faites, ils l'ont introduit dans les commissions nationales de réglementation, présidées, entre autres, par A. Caquot, J.R. Robinson, et dans les instances internationales. Jean Perchat a ainsi participé activement à la rédaction des Règles BA 1960, CCBA 68 et BAEL et des Recommandations 1965 de l'ASP ; au Comité euro-international du béton, il a, de 1974 à 1978, présidé la commission chargée d'élaborer le "Code-modèle CEB-FIP pour les structures en béton", ce qui l'a mené directement, en 1980, dans le groupe de rédaction international de l'Eurocode 2 où il représentait, avec R. Lacroix, le point de vue français.

Ses fonctions à la FNB, où il dirigeait le service "Règles de Calcul", ont cessé en 1990. Parallèlement, Jean Perchat a mené une longue carrière d'enseignant du béton armé. Ses activités professionnelles le plaçant à la source même de l'évolution des méthodes de calcul et de la réglementation, il a pu dispenser un cours réactualisé en permanence. Il a ainsi enseigné à l'École Supérieure des Travaux Publics de 1961 à 1991, avant de passer le flambeau à l'un de ses assistants et ancien élève, Jean Roux. Il a aussi animé de nombreuses sessions de formation continue, tant en France que dans divers pays étrangers. Il a déjà publié plusieurs ouvrages ou articles sur le béton armé ou précontraint. Jean Perchat a enseigné au Centre de Hautes Études de la Construction pendant près de quarante ans. Titulaire de la chaire de Béton Armé depuis 1977, il s'est finalement retiré en 1996.

Jean Roux est ingénieur de l'École Spéciale des Travaux Publics et du Centre des Hautes Études de la Construction.

Entré au Département des Ouvrages d'Art de la SNCF en 1975, il prend aussitôt une part active dans l'équipe d'étude des ouvrages de la ligne nouvelle à très grande vitesse de Paris-Sud-Est.

À partir de 1981, à la Direction des Études Générales et de la Recherche, il met au point un programme d'étude géométrique des tunnels qui permettra, par la recherche des tracés de voie

compatibles avec la géométrie du tunnel pour un gabarit de véhicule donné, de réduire considérablement les coûts de "mise au gabarit" des tunnels de la SNCF.

De retour au Département des Ouvrages d'Art en 1983, il devient responsable des études techniques et informatiques de la Division des Tunnels, dans un domaine où la Résistance des matériaux et la Mécanique des Sols sont si étroitement confrontées.

Son expérience et ses compétences lui valent plusieurs missions à l'étranger pour des projets de rénovation de tunnels, auxquels il apporte toutes ses connaissances techniques et économiques.

Intégré à la SNCF dans une solide équipe d'ingénieurs émérites, tels que J. Gandil, C. Trufandier, J. Eyraud, A. Rozière, Jean Roux garde le contact avec l'École Spéciale des Travaux Publics en tant que Maître assistant puis Professeur de béton armé. Il est aussi Professeur de Résistance des Matériaux au Centre des Hautes Études de la Construction depuis 1983.

Le présent ouvrage a trois objectifs :

- il est d'abord un *vade-mecum* de l'ingénieur par le rappel constant des bases de la Résistance des Matériaux, fondement logique de toute réflexion sur la construction ;
- il est aussi l'image vivante d'un cours agréable. Certes il faut y trouver la trame de l'exposé théorique et la rigueur de la formule car il s'agit bien là de règles et de normes, mais l'exercice appliqué et expliqué y ajoute l'exemple, l'utile et le concret ;
- il est enfin un recours pour l'ingénieur confirmé, en lui présentant les dernières évolutions, qui relèvent d'expérimentations ou de dispositions réglementaires dans une dynamique d'actualité et de progrès.

Sous la double signature de Jean Perchat et de Jean Roux, qui furent dans la relation de maître à élève avant d'œuvrer dans une fructueuse collaboration, cet ouvrage arrive à son heure pour tous ceux qui participent à l'art d'édifier et de construire.

E. CHAMBRON

Ingénieur en Chef des Ponts et Chaussées
Directeur honoraire de l'Équipement de la SNCF

AVANT-PROPOS

Les dernières mises à jour des Règles de calcul des ouvrages en béton armé aux états limites dites Règles BAEL 91 sont applicables depuis le 1^{er} juillet 1992.

Cet ouvrage, extrait du cours de béton armé professé à l'École Spéciale des Travaux Publics (ESTP) jusqu'à ces toutes dernières années par J. PERCHAT et maintenant par J. ROUX, qui intègre ces modifications, est destiné :

- aux projeteurs, élèves-ingénieurs, jeunes ingénieurs et étudiants avant le béton armé à leur programme d'études, désireux d'acquérir les mécanismes et ordres de grandeur couramment pratiqués dans le domaine du calcul des structures de génie civil en béton armé,
- ainsi qu'aux ingénieurs confirmés qui souhaitent appliquer correctement les derniers errements réglementaires.

Après quelques rappels sommaires de Résistance des Matériaux, matière qu'il est indispensable de connaître avant d'aborder le calcul d'une construction (quelque matériau que ce soit), puis des généralités concernant l'évaluation des sollicitations et des caractéristiques des matériaux acier et béton, chaque chapitre est consacré aux méthodes de calcul propres à une sollicitation élémentaire (traction simple, compression simple, flexion simple, ...) ce qui permet d'aborder dans les derniers chapitres les calculs relatifs aux éléments constitutifs d'une construction simple (dalles, poutres, planchers, ...).

Chaque chapitre est organisé en deux parties :

- 1) des rappels de cours comprenant les méthodes de calcul et les règles complémentaires avec des démonstrations et des explications permettant de comprendre leur fondement scientifique et expérimental ainsi que leur philosophie,
- 2) un ou plusieurs exercices d'application commentés et des compléments permettant de visualiser les techniques et hypothèses en même temps que d'acquérir une expérience et de "bonnes" habitudes dans le domaine du béton armé appliqué aux bâtiments et aux travaux publics.

Si les Règles BAEL se prêtent bien aux calculs informatiques, il ne nous a pas paru nécessaire, devant la multiplicité des langages de programmation (basic, C, turbo pascal, ...), de donner, chaque fois que l'usage d'un micro-ordinateur se justifiait, des programmes de calculs. Nous avons préféré donner plutôt des organigrammes et enchaînements explicitant le déroulement des processus de calcul que le lecteur pourra aisément transcrire sur son ordinateur.

Les nombreuses informations relatives au génie civil (valeurs des charges permanentes et d'exploitation, contraintes limites des matériaux, caractéristiques géométriques des aciers en barres, formulaires pour poutres isostatiques, tableaux de caractéristiques des sections, ...) rencontrées en parcourant les divers chapitres faciliteront la tâche du technicien dans l'élaboration de ses projets.

Cet ouvrage n'a pas la prétention d'être exhaustif et complet dans ce vaste domaine qu'est le béton armé (ce n'est qu'un extrait du cours de l'ESTP). Il a pour seul objectif de bien faire comprendre les méthodes de calcul propres au béton armé aux états-limites, de répondre aux interrogations et de faciliter la tâche de l'ingénieur d'études qui appliquera les Règles BAEL 91.

AVERTISSEMENT

Dans cette nouvelle édition de « Pratique du BAEL 91 », les auteurs ont introduit les nouvelles valeurs des contraintes limites de l'acier à l'état-limite de service, telles qu'elles sont définies dans l'additif aux Règles BAEL 91 préparé par la Commission de suivi EC2-BAEL-BPEL présidée par R. LACROIX. La nécessité d'atténuer, pour les bétons courants, la sévérité des valeurs résultant de l'application stricte des Règles BAEL 91 s'est révélée à l'usage. Pour ces bétons, les nouvelles limites proposées conduisent à des dimensionnements quasi identiques à ceux des Règles BAEL 83, en cas de fissuration préjudiciable, mais légèrement plus favorables en cas de fissuration très préjudiciable.

L'additif précité étend par ailleurs le domaine d'application des Règles aux bétons de résistance caractéristique comprise entre 60 et 80 MPa. Les modifications corrélatives des données et formules de base sont nombreuses et importantes. En tenir compte, même en se bornant à les mentionner, aurait exigé une refonte totale du présent ouvrage. Compte tenu du caractère exceptionnel, actuellement, de l'emploi de tels bétons, ceux-ci restent hors du domaine visé par « Pratique du BAEL 91 ».

Les auteurs ont mis à profit cette nouvelle édition pour expliciter certains points comme, par exemple :

- le pourcentage minimal d'armatures transversales dans le cas de torsion et d'effort tranchant combinés où les Règles BAEL 91 laissent matière à interprétation,
- les formules forfaitaires pour l'évaluation du moment limite ultime réduit et la contrainte à prendre en compte pour le calcul des aciers comprimés, dont les expressions ont été modifiées pour y faire apparaître les paramètres qui contribuent à leur établissement,
- les organigrammes de calcul qui ont été revus, dans un souci de clarification, afin d'éviter certaines erreurs d'interprétation.

Les Auteurs.

SOMMAIRE

CHAPITRE 1 : RAPPELS DE RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX	1
I. RAPPELS DE COURS	1
1. Caractéristiques géométriques	1
2. Théorie des contraintes	6
3. Théorie des poutres	10
4. Éléments de réduction	12
5. Conditions générales d'appui des poutres	14
6. Systèmes isostatiques et hyperstatiques	15
7. Équations intrinsèques des poutres droites	16
8. Relations contraintes-efforts	18
9. Tronçons de poutres droites	24
II. FORMULAIRE POUR POUTRES ISOSTATIQUES	34
CHAPITRE 2 : BÉTON ARMÉ – GÉNÉRALITÉS	41
I. RAPPELS DE COURS	41
1. Unités	41
2. Actions et sollicitations	41
3. Caractéristiques des matériaux	50
4. Hypothèses et données pour le calcul du béton armé	55
II. EXERCICE : COMBINAISONS D'ACTIONS	57
CHAPITRE 3 : ASSOCIATION ACIER – BÉTON	65
I. RAPPELS DE COURS	65
1. Définitions	65
2. Disposition des armatures	66
3. Contrainte d'adhérence	67
4. Ancrage des barres	72
II. EXERCICE : ANCRAGE COURBE	76

CHAPITRE 4 : TRACTION SIMPLE-TIRANTS	81
I. RAPPELS DE COURS	81
1. Introduction	81
2. Dimensionnement des armatures	81
3. Vérification des contraintes	83
4. Détermination du coffrage	83
5. Condition de non-fragilité	83
6. Armatures transversales	84
II. EXERCICE : TIRANT – FISSURATION PRÉJUDICIABLE	86
CHAPITRE 5 : COMPRESSION SIMPLE	89
I. RAPPELS DE COURS	89
1. Hypothèses	89
2. Élançement	89
3. Armatures longitudinales	90
4. Armatures transversales	93
5. Coffrage	94
II. EXERCICE N° 1 : POTEAU – ARMATURES MINIMALES	95
III. EXERCICE N° 2 : FORCE PORTANTE D'UN POTEAU	98
IV. EXERCICE N° 3 : POTEAU – GRANDE DIMENSION IMPOSÉE	101
CHAPITRE 6 : FLEXION SIMPLE	109
I. RAPPELS DE COURS	109
1. Introduction	109
2. Section rectangulaire – fissuration peu préjudiciable	109
3. Section rectangulaire – fissuration préjudiciable ou très préjudiciable	120
4. Coffrage des sections rectangulaires	125
5. Sections en T	125
6. Pourcentage minimal d'armatures	129
7. Vérification des contraintes à l'E.L.S.	131
8. Organigrammes récapitulatifs pour le dimensionnement des armatures	134
9. Vérification à l'E.L.U. d'une section rectangulaire dont on connaît les armatures	137
II. EXERCICE N° 1 : FISSURATION PEU PRÉJUDICIABLE – SECTION RECTANGULAIRE AVEC ACIERS COMPRIMÉS	138
III. EXERCICE N° 2 : FISSURATION PRÉJUDICIABLE – SECTION À TABLE DE COMPRESSION	143
IV. EXERCICE N° 3 : FISSURATION TRÈS PRÉJUDICIABLE – SECTION RECTANGULAIRE	149

CHAPITRE 7 : EFFORT TRANCHANT	153
I. RAPPELS DE COURS	153
1. Vérification du béton	153
2. Calcul des armatures d'âme	158
3. Répartition des armatures d'âme (méthode Caquot)	162
4. Zones d'application des efforts	166
5. Jonction hourdis-nervure	169
6. Poutres à talon	172
II. EXERCICE N° 1 : POUTRE – EFFORT TRANCHANT	173
III. EXERCICE N° 2 : POUTRE À SECTION RECTANGULAIRE – ARMATURES D'ÂME INCLINÉES	180
CHAPITRE 8 : FLEXION COMPOSÉE	191
I. RAPPELS DE COURS	191
1. Généralités – Introduction	191
2. Sections partiellement tendues	192
3. Sections entièrement tendues	201
4. Sections entièrement comprimées	202
5. Diagrammes d'interaction	203
II. EXERCICE N° 1 : FLEXION – COMPRESSION – SECTION PARTIELLEMENT TENDUE	215
III. EXERCICE N° 2 : FLEXION – TRACTION – SECTION ENTIÈREMENT TENDUE	221
IV. EXERCICE N° 3 : FLEXION – TRACTION – SECTION PARTIELLEMENT TENDUE	224
CHAPITRE 9 : ÉPURES DE RÉPARTITION DES ARMATURES LONGITUDINALES ET DES ARMATURES D'ÂME	229
I. RAPPELS DE COURS	229
1. Introduction	229
2. Répartition des armatures longitudinales	229
3. Répartition des armatures d'âme	237
CHAPITRE 10 : TORSION	239
I. RAPPELS DE COURS	239
1. Rappels de Résistance des Matériaux	239
2. Vérification du béton	241
3. Armatures	243

II. EXERCICE : AUVENT	245
CHAPITRE 11 : FLAMBEMENT	253
I. RAPPELS DE COURS	253
1. Excentricités	253
2. État-limite ultime de stabilité de forme	255
3. Équations du problème	256
4. Méthode de l'équilibre – Méthode des déformations internes	261
5. Utilisation des tables de Faessel – Robinson – Morisset	266
6. Corrections diverses	270
7. Utilisation des abaques de Capra	275
II. EXERCICE N° 1 : DIMENSIONNEMENT DE L'ARMATURE PAR LES TABLES (CHARGES DE LONGUE DURÉE)	279
III. EXERCICE N° 2 : VÉRIFICATION PAR LA MÉTHODE DE L'ÉQUILIBRE ET PAR LES TABLES	282
IV. EXERCICE N° 3 : DIMENSIONNEMENT DE L'ARMATURE PAR LES ABAQUES DE CAPRA	288
CHAPITRE 12 : POUTRES CONTINUES – PLANCHERS	293
I. RAPPELS DE COURS	293
A. Poutres continues – Rappels – Adaptation	293
1. Rappels de Résistance des Matériaux	293
2. Essais de poutres en béton armé	294
3. Portées des poutres et portiques	296
4. Poutres de planchers	298
B. Planchers – Méthode forfaitaire	301
1. Domaine de validité	301
2. Principe de la méthode – Adaptation	302
3. Moments fléchissants	303
4. Efforts tranchants	305
5. Méthode «Caquot minorée»	306
C. Planchers – Méthode Caquot	306
1. Domaine de validité	306
2. Évaluation des moments	306
3. Efforts tranchants	311
4. Travées de rive avec console	315
D. Poutres continues – Dimensionnement	316
1. Conditions de déformation	316

2. Résistance à la flexion	318
3. Vérification à l'effort tranchant	319
II. EXERCICE N° 1 : PLANCHER – MÉTHODE FORFAITAIRE	319
III. EXERCICE N° 2 : PLANCHER – MÉTHODE CAQUOT	337
CHAPITRE 13 : DALLES RECTANGULAIRES	351
I. RAPPELS DE COURS	351
1. Introduction	351
2. Moments dans les dalles articulées sur leur contour	352
3. Dalles rectangulaires continues – Moments fléchissants	354
4. Effort tranchant	356
5. Poinçonnement	358
6. Dispositions constructives	359
7. Arrêt des armatures	361
8. Autres critères pour les bâtiments	361
II. EXERCICE : PANNEAU DE DALLE ($\alpha = 0,40$)	362
CHAPITRE 14 : DESCENTE DE CHARGES	371
I. RAPPELS DE COURS	371
1. Principe	371
2. Valeurs des charges permanentes et des charges d'exploitation	371
3. Dégression des charges variables d'exploitation	373
4. Effet de la continuité sur les poteaux voisins de rive	374
II. EXERCICE : BÂTIMENT – DESCENTE DE CHARGES	377
ANNEXE 1 : CALCUL MANUEL D'UNE SECTION RECTANGULAIRE À ARMATURES SYMÉTRIQUES À L'ELU PAR APPROXIMATIONS SUCCESSIVES	395
ANNEXE 2 : VÉRIFICATION À L'ELU D'UNE SECTION RECTANGULAIRE DONT ON CONNAÎT LES ARMATURES	401
NOTATIONS – SYMBOLES	403
RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES	409

CHAPITRE 1

RAPPELS DE RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

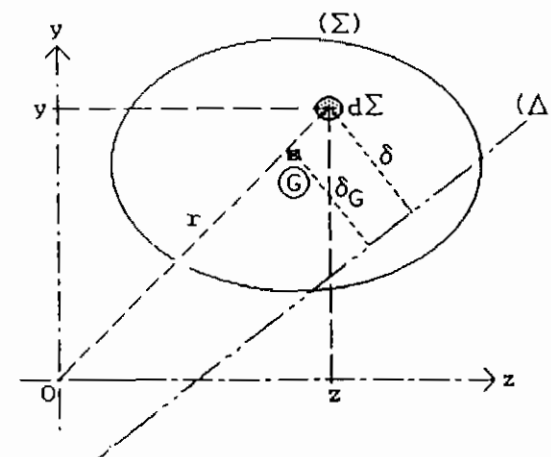
Ce chapitre rassemble les notions de base indispensables en Résistance des Matériaux pour bien aborder les calculs de béton armé selon les Règles BAEL 91. Il se présente donc plutôt sous la forme d'un aide-mémoire.

I. RAPPELS DE COURS

1. CARACTÉRISTIQUES GÉOMÉTRIQUES

1.1. MOMENT STATIQUE-CENTRE DE GRAVITÉ

■ Pour une surface Σ repérée par rapport aux axes Oy et Oz :



- On appelle AIRE d'une SURFACE, la quantité :

$$S = \iint_{\Sigma} d\Sigma$$

- On appelle MOMENTS STATIQUES de la surface Σ par rapport aux axes (Δ) Oz et Oy, les quantités :

$$S_{\Delta} = \iint_{\Sigma} \delta \cdot d\Sigma \Rightarrow \begin{cases} S_z = \iint_{\Sigma} y \, d\Sigma \\ S_y = \iint_{\Sigma} z \, d\Sigma \end{cases}$$

- On appelle CENTRE DE GRAVITÉ (ou BARYCENTRE) de la surface Σ , le point G de Σ dont les coordonnées sont définies par les relations :

$$G \left\{ \begin{aligned} z_G &= \frac{S_y}{S} = \frac{\iint_{\Sigma} z \, d\Sigma}{\iint_{\Sigma} d\Sigma} \\ y_G &= \frac{S_z}{S} = \frac{\iint_{\Sigma} y \, d\Sigma}{\iint_{\Sigma} d\Sigma} \end{aligned} \right.$$

- La distance du centre de gravité G à l'axe (Δ) est définie par

$$\delta_G = \frac{S_{\Delta}}{S} = \frac{\iint_{\Sigma} \delta \, d\Sigma}{\iint_{\Sigma} d\Sigma}$$

1.2. MOMENTS ET PRODUITS D'INERTIE

- On appelle MOMENTS D'INERTIE de la surface Σ , par rapport aux axes (Δ) , Oz et Oy, les quantités :

$$I_{\Delta} = \iint_{\Sigma} \delta^2 \, d\Sigma \Rightarrow \begin{cases} I_z = \iint_{\Sigma} y^2 \, d\Sigma \\ I_y = \iint_{\Sigma} z^2 \, d\Sigma \end{cases}$$

- On appelle PRODUIT D'INERTIE de la surface Σ par rapport aux axes Oz et Oy la quantité :

$$I_{yz} = \iint_{\Sigma} y \cdot z \, d\Sigma$$

- On appelle RAYONS DE GIRATION relatifs aux axes (Δ) , Oz et Oy, les quantités

$$r_{\Delta}^2 = \frac{I_{\Delta}}{S} \Rightarrow \begin{cases} r_z^2 = \frac{I_z}{S} \\ r_y^2 = \frac{I_y}{S} \end{cases}$$

- On appelle MOMENT D'INERTIE POLAIRE de la surface Σ par rapport au point O la quantité :

$$K = \iint_{\Sigma} r^2 \, d\Sigma$$

1.3. REMARQUES

- Si le point O est choisi au centre de gravité G :

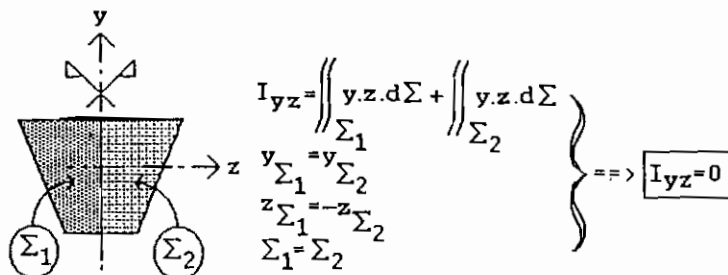
$z_G = y_G = 0$ et LE MOMENT STATIQUE PAR RAPPORT A UN AXE PASSANT PAR LE CENTRE DE GRAVITE EST NUL.

- Il est possible d'obtenir le moment d'inertie de l'aire Σ par addition des moments d'inertie des aires Σ_i constituant l'aire Σ :

$$\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2 \Rightarrow I_{\Delta}(\Sigma) = \iint_{\Sigma_1} \delta^2 \, d\Sigma + \iint_{\Sigma_2} \delta^2 \, d\Sigma$$

■ Si $I_{yz} = 0$, les axes Oz et Oy sont dits : AXES PRINCIPAUX D'INERTIE.

■ Le produit d'inertie est nul si l'un des axes Oz ou Oy est axe de symétrie de l'aire Σ :



■ Comme $r^2 = y^2 + z^2$, on peut exprimer le moment d'inertie polaire en fonction des moments d'inertie :

$$K = \iint_{\Sigma} r^2 \cdot d\Sigma = \iint_{\Sigma} (y^2 + z^2) \cdot d\Sigma = \iint_{\Sigma} y^2 \cdot d\Sigma + \iint_{\Sigma} z^2 \cdot d\Sigma$$

$$\boxed{K = I_z + I_y}$$

1.4. CHANGEMENT D'AXE—THÉORÈME DE HUYGHENS

En posant :

Δ' = axe passant par le centre de gravité G de Σ ,

Δ = axe quelconque parallèle à Δ' ,

d = distance entre ces deux axes,

on a :

$$\delta = \delta' + d$$

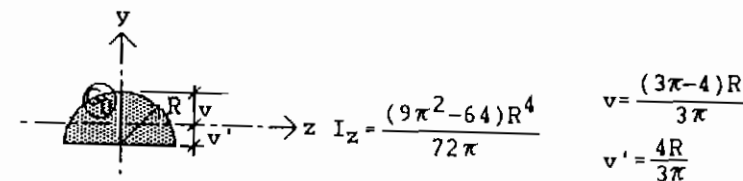
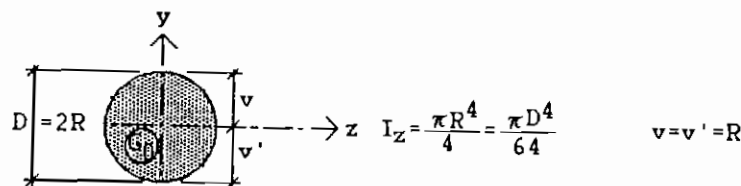
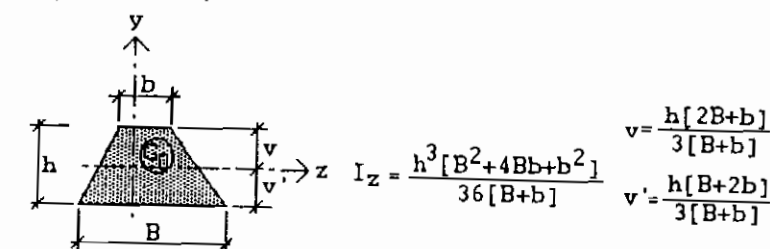
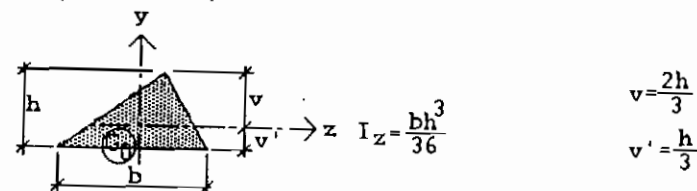
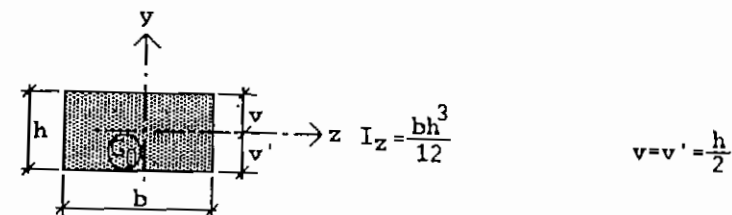
d'où :

$$I_{\Delta} = \iint_{\Sigma} (\delta' + d)^2 \cdot d\Sigma = \iint_{\Sigma} \delta'^2 \cdot d\Sigma + 2d \iint_{\Sigma} \delta' \cdot d\Sigma + d^2 \iint_{\Sigma} d\Sigma$$

$\underbrace{\hspace{1cm}}_{S_{\Delta'} = 0} \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_S$

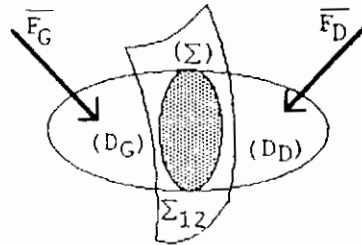
$$\boxed{I_{\Delta} = I_{\Delta'} + Sd^2}$$

1.5. FORMULES USUELLES



2. THÉORIE DES CONTRAINTES

2.1. PRINCIPE D'ÉQUIVALENCE



Σ_{12} = surface à normale unique divisant le corps en deux domaines (D_G) et (D_D) .

Σ = section commune à (D_G) et (D_D) .

$S(\bar{f})$ = système des forces de contact exercées par (D_G) sur (D_D) à travers Σ_{12} .

$S(\bar{F}_G)$ et $S(\bar{F}_D)$ = actions appliquées au domaine de gauche (D_G) et de droite (D_D) .

En écrivant, d'une part, l'équilibre de la partie (D_D) du solide et, d'autre part, celui de l'ensemble du solide, puis en identifiant ces deux relations :

$$\left. \begin{aligned} S(\bar{F}_D) + S(\bar{f}) &= 0 \\ S(\bar{F}_D) + S(\bar{F}_G) &= 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow S(\bar{F}_G) = S(\bar{f})$$

D'où :

il y a équivalence entre le système des forces appliquées au domaine de gauche (D_G) et le système des forces transmises par (D_G) à (D_D) à travers la surface Σ_{12} .

2.2. DÉFINITIONS

2.2.1. Vecteur contrainte

$\Delta\Sigma$ étant une surface élémentaire de Σ , de centre M, si Mf est la résultante des forces de contact transmises par (D_G) à (D_D) à travers $\Delta\Sigma$, on définit le VECTEUR CONTRAINTE par

$$\bar{t} = \lim_{\Delta\Sigma \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta\Sigma}$$

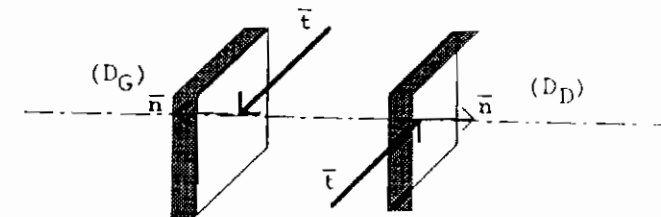
2.2.2. Facettes

- On appelle FACETTE un élément d'aire $d\Sigma$ de Σ_{12} .

- On girera le côté de la facette situé du côté du matériau conservé
- On orientera la normale à la facette vers l'intérieur du domaine conservé

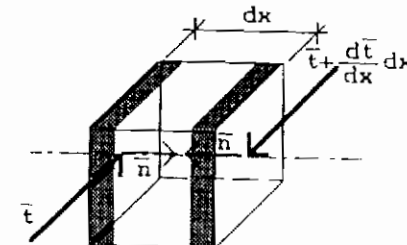
2.3. PRINCIPE ACTION-RÉACTION

Les facettes contiguës appartenant aux deux domaines (D_G) et (D_D) sont soumises à des contraintes $\bar{t}$ opposées, mais de même sens compte tenu de l'orientation de la normale $\bar{n}$ à la facette



2.4. PRINCIPE DE CONTINUITÉ

Les contraintes relatives à deux facettes parallèles, infiniment voisines, distantes de dx , ne diffèrent entre elles que d'un infiniment petit du même ordre que dx



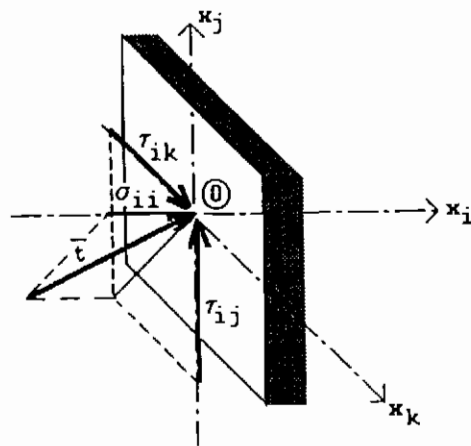
2.5. FAISCEAU DES CONTRAINTES

2.5.1. Notations

Toute facette est définie par sa normale orientée

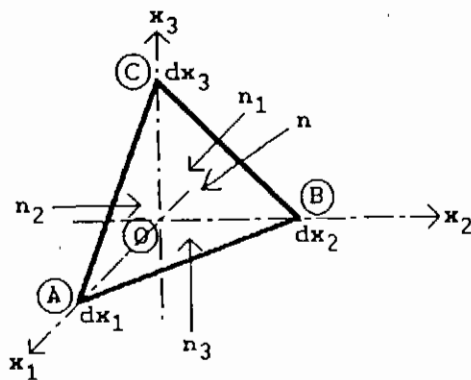
Le vecteur contrainte agissant sur une facette dont la normale est parallèle à l'un des axes Ox_1 , Ox_2 ou Ox_3 , se décompose en :

- une composante normale σ_n portée par la normale Ox_i à la facette,
- deux composantes τ_{ij} et τ_{ik} portées par les deux autres axes Ox_j et Ox_k



2.5.2. Réciprocité des cisaillements

■ Pour le tétraèdre OABC repéré dans $Ox_1x_2x_3$ (tétraèdre élémentaire), les aires des facettes sont obtenues par :



$$A_{ABC} = ds$$

$$A_{OAC} = n_2 \cdot ds = \frac{1}{2} dx_1 \cdot dx_3$$

$$A_{OBC} = n_1 \cdot ds = \frac{1}{2} dx_2 \cdot dx_3$$

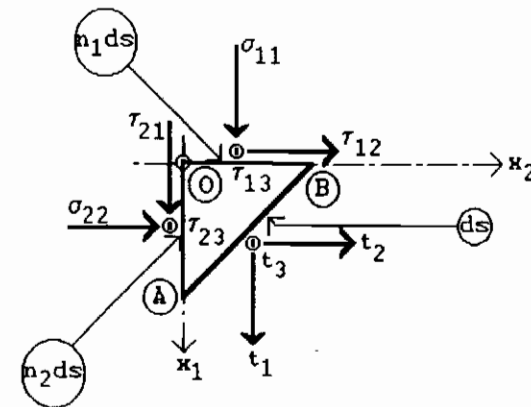
$$A_{OAB} = n_3 \cdot ds = \frac{1}{2} dx_1 \cdot dx_2$$

n_i = cosinus directeur de la facette dont la normale est parallèle à Ox_i .

■ La contrainte agissant sur la face ABC vaut :

$$t = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix}$$

■ Les facettes OBC, OAC et ABC sont soumises aux contraintes représentées sur la figure ci-après :



d'où, en multipliant les contraintes par l'aire des facettes, les composantes des efforts suivant les axes valent :

Projection sur Facette	Ox_1	Ox_2	Ox_3
OBC	$\sigma_{11} n_1 ds$	$\tau_{12} n_1 ds$	$\tau_{13} n_1 ds$
OAC	$\tau_{21} n_2 ds$	$\sigma_{22} n_2 ds$	$\tau_{23} n_2 ds$
OAB	$\tau_{31} n_3 ds$	$\tau_{32} n_3 ds$	$\sigma_{33} n_3 ds$
ABC	$-t_1 ds$	$-t_2 ds$	$-t_3 ds$

} $-S(f)$ dû aux forces agissant «à droite» du tétraèdre.

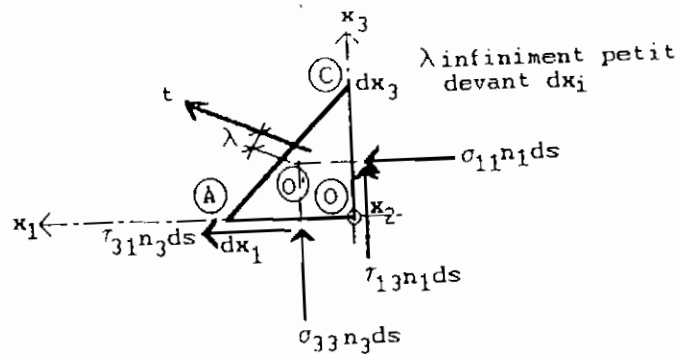
et en écrivant que la projection des efforts suivant chacun des axes de coordonnées est nulle, on obtient :

$$-t_i ds + \sigma_{ii} n_i ds + \sum_{j \neq i} \tau_{ji} n_j ds = 0$$

d'où :

$$t_i = \sigma_{ii} n_i + \sum_{j \neq i} \tau_{ji} n_j$$

■ Pour la facette OAC dans le plan Ox_1x_3 :



Aux infiniment petits du second ordre près, les moments en O' donnent :

$$\tau_{13} n_1 ds \frac{dx_1}{3} = \tau_{31} n_3 ds \frac{dx_3}{3}$$

or :

$$n_1 ds = \frac{1}{2} dx_2 dx_3 \quad \text{et} \quad n_3 ds = \frac{1}{2} dx_1 dx_2$$

d'où :

$$\frac{1}{6} \tau_{13} dx_1 dx_2 dx_3 - \frac{1}{6} \tau_{31} dx_1 dx_2 dx_3 = 0$$

soit, en simplifiant par $\frac{1}{6} dx_1 dx_2 dx_3$: $\tau_{13} = \tau_{31}$

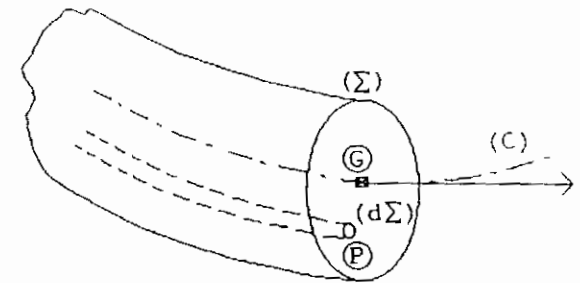
Cette démonstration étant valable dans les trois plans, on en déduit :

$$\tau_{ij} = \tau_{ji} \text{ quel que soit } i \neq j$$

3. THÉORIE DES POUTRES

3.1. POUTRE

- Une **POUTRE** est un solide engendré par une aire plane (Σ) délimitée par un contour fermé dont le centre de gravité G décrit une courbe (C) de l'espace de telle sorte :
 - que le plan de (Σ) soit toujours normal à la tangente en G à la courbe (C) ,
 - que la trajectoire décrite par un point P quelconque de (Σ) soit toujours parallèle à la courbe (C) .



3.2. SECTION DROITE

- L'aire plane (Σ) est appelée : **SECTION DROITE** ou **PROFIL**.

- Elle peut être :

- plane ou évidée,
- constante ou lentement variable, pour pouvoir résister notamment aux efforts au voisinage des appuis

- Les dimensions de la section droite doivent être petites relativement à la longueur parcourue par G sur la courbe (C) .

3.3. FIBRE MOYENNE

- La courbe (C) décrite par le centre de gravité G de la section droite est dite **FIBRE** ou **LIGNE MOYENNE** de la poutre.

- Selon la forme de la ligne moyenne, on obtient :

- une **POUTRE DROITE** lorsque (C) est une droite,
- une **POUTRE GAUCHE** lorsque (C) est une courbe gauche,
- un **ARC** lorsque (C) est une courbe plane ouverte,
- un **ANNEAU** lorsque (C) est une courbe plane fermée,
- une **POUTRE À PLAN MOYEN** lorsque (C) est une courbe plane dans le plan de symétrie de la section droite (appelé **PLAN MOYEN**).

3.4. DOMAINE DE VALIDITÉ DES HYPOTHÈSES DE LA THÉORIE DES POUTRES

En désignant par :

h_t = plus grande dimension transversale de la section droite,

b = plus petite dimension transversale de la section droite,

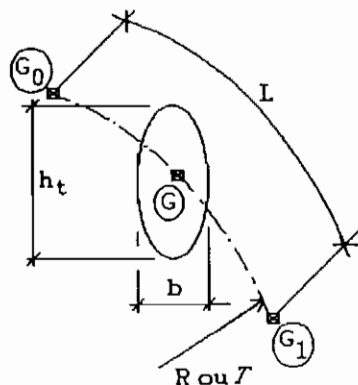
R = rayon de courbure de la ligne moyenne,

T = rayon de torsion de la ligne moyenne,

L = longueur développée de la poutre,

il faut :

$$\begin{aligned} \frac{h_t}{b} &\leq 10 \\ \frac{1}{30} < \frac{h_t}{L} < \frac{1}{5} & : \text{poutres} \\ \frac{1}{100} < \frac{h_t}{L} < \frac{1}{5} & : \text{arcs} \\ \frac{r}{h_t} > 5 & : \text{poutres courbes} \\ r &= R \text{ ou } T \end{aligned}$$



■ Remarque :

Pour les poutres à plan moyen, G_y est dans le plan moyen.

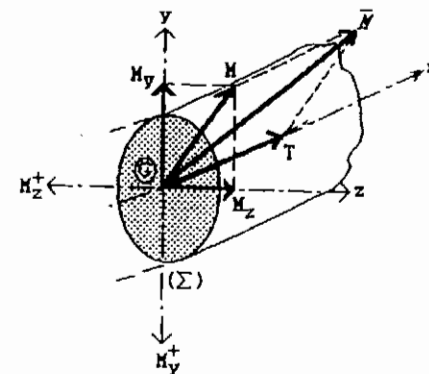
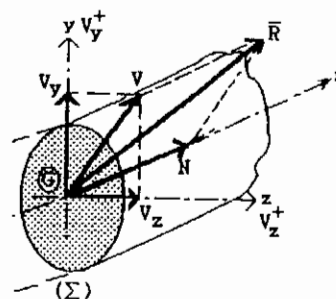
■ Le système des forces extérieures agissant sur la partie (D_G) se réduit, au centre de gravité G de la section droite, à :

$$\begin{aligned} \bar{R}(s) &= \text{RÉSULTANTE GÉNÉRALE} \\ \bar{M}(s) &= \text{MOMENT RÉSULTANT} \end{aligned}$$

■ Dans le repère $Gxyz$, lié au centre de gravité G de (Σ) , la décomposition des efforts s'écrit, pour la section d'abscisse curviligne s :

$$\begin{aligned} \bar{R}(s) &= N \cdot \bar{x} + V_y \cdot \bar{y} + V_z \cdot \bar{z} \\ \bar{M}(s) &= T \cdot \bar{x} + M_y \cdot \bar{y} + M_z \cdot \bar{z} \end{aligned}$$

■ D'où :



– la résultante générale $\bar{R}$ se décompose en :

N = EFFORT NORMAL porté par Gx ,

$V = \begin{Bmatrix} V_y \\ V_z \end{Bmatrix}$ = EFFORTS TRANCHANTS dans le plan de (Σ) .

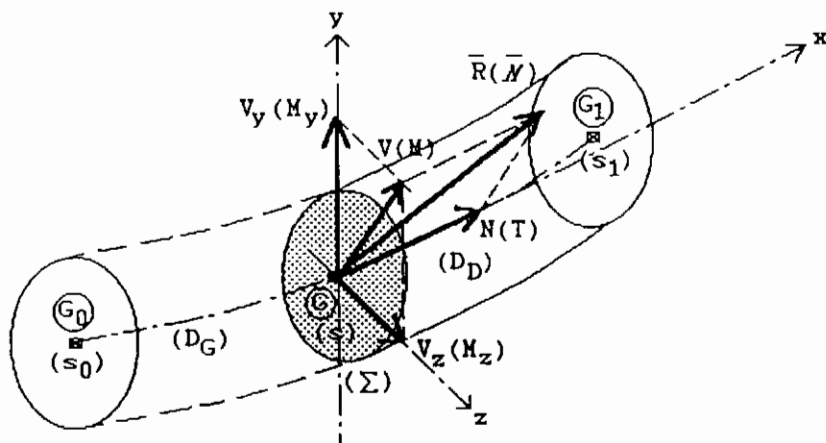
– le moment résultant $\bar{M}$ se décompose en :

T = COUPLE DE TORSION d'axe porté par Gx ,

$M = \begin{Bmatrix} M_y \\ M_z \end{Bmatrix}$ = MOMENTS FLÉCHISSANTS dans le plan de (Σ) .

1. ÉLÉMENTS DE RÉDUCTION

1.1. EFFORTS SUR UNE SECTION DROITE



■ Repère associé au centre de gravité de la section droite (Σ) :

Gx , orienté de la gauche vers la droite sur la tangente à la ligne moyenne,

Gy et Gz , portés par les axes principaux d'inertie de la section droite.

4.2. EFFORT NORMAL ET TRANCHANT

Nous avons défini l'effort normal (resp. tranchant) relatif à la section (Σ) de centre de gravité G , d'abscisse curviligne s , comme étant égal :

- à la composante suivant Gx (resp. dans le plan de la section) de la résultante des forces appliquées sur la partie de poutre constituée par l'ensemble des sections droites dont les centres de gravité ont des abscisses curvilignes inférieures à s (FORCES DE GAUCHE),
- à l'opposé de la composante suivant Gx (resp. dans le plan de la section) de la résultante des forces appliquées sur la partie de poutre constituée par l'ensemble des sections droites dont les centres de gravité ont des abscisses curvilignes supérieures à s (FORCES DE DROITE).

4.3. MOMENT FLÉCHISSANT ET COUPLE DE TORSION

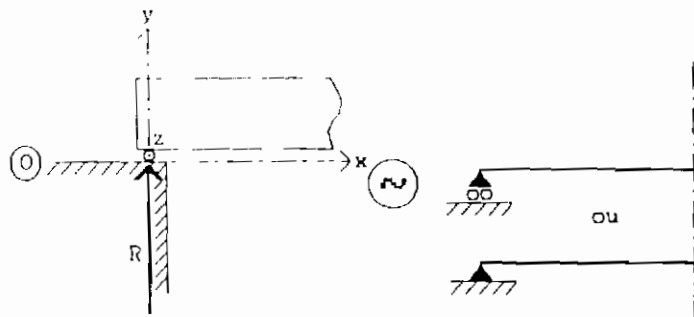
De la même manière, le moment fléchissant (ou le couple de torsion) relatif à la section (Σ) de centre de gravité G d'abscisse curviligne s est défini comme étant égal :

- à la composante située dans le plan de la section droite (ou suivant la normale Gx) du moment résultant des forces appliquées sur la partie de poutre constituée par l'ensemble des sections droites dont les centres de gravité ont des abscisses curvilignes inférieures à s (FORCES DE GAUCHE),
- à l'opposé de la composante située dans le plan de la section droite (ou suivant la normale Gx) du moment résultant des forces appliquées sur la partie de poutre constituée par l'ensemble des sections droites dont les centres de gravité ont des abscisses curvilignes supérieures à s (FORCES DE DROITE).

5. CONDITIONS GÉNÉRALES D'APPUI DES POUTRES

5.1. APPUI SIMPLE

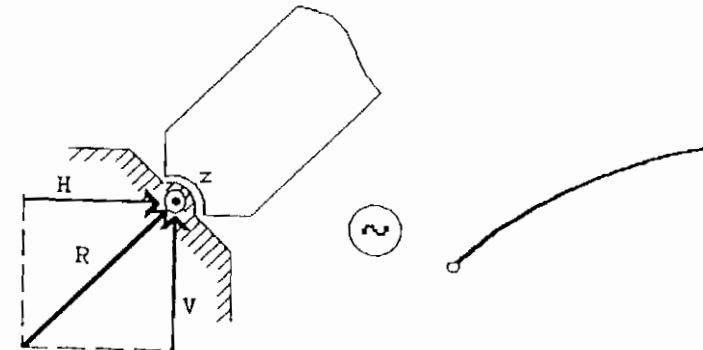
- Appui qui n'empêche le déplacement que dans le sens perpendiculaire à sa surface. Un tel appui permet la translation suivant l'axe Ox et la rotation autour de l'axe Oz .



- Une seule composante de la réaction d'appui

5.2. ARTICULATION

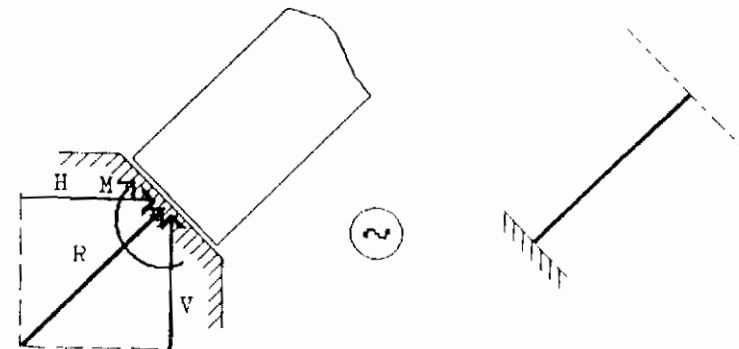
- Appui s'opposant à toute translation, mais autorisant les rotations.



- Deux composantes de la réaction d'appui.

5.3. ENCASTREMENT PARFAIT

- Appui interdisant toute translation et toute rotation



- Deux composantes de la réaction d'appui et une du moment d'encastrement

6. SYSTÈMES ISOSTATIQUES ET HYPERSTATIQUES

- D'après le principe fondamental de la Statique, un solide est en équilibre si le système $S(F)$ des forces qui lui sont appliquées (charges et réactions d'appui) est équivalent à un système de forces nul. Cela conduit, dans le cas général, à six équations.

$$\bar{R} = \bar{0} \rightarrow \begin{pmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{M} = \bar{0} \rightarrow \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

■ Par conséquent :

r = nombre de réactions et moments d'appui inconnus,

k = nombre d'équations fournies par la Statique ($k \leq 6$),

si $r = k$, le système est dit ISOSTATIQUE et les équations de la Statique permettent de déterminer toutes les réactions d'appui,

si $r > k$, le système est dit HYPERSTATIQUE d'ordre $r - k$ car il manque $r - k$ équations pour calculer toutes les réactions d'appui,

si $r \leq k$, le système est dit INSTABLE puisqu'il y a $k - r$ équations surabondantes.

■ Dans le cas de forces agissant dans le plan moyen et de couples d'axes perpendiculaires à ce plan, $k \leq 3$ (cf. $V_z = M_y = T = 0$).

7. ÉQUATIONS INTRINSÈQUES DES POUTRES DROITES

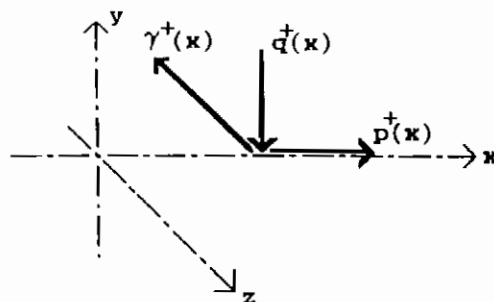
7.1. CONVENTIONS DE SIGNE

■ On se bornera à l'étude des poutres à plan moyen chargées dans leur plan :

$p(x)$ = densité de charge suivant Gx ,

$q(x)$ = densité de charge suivant Gy ,

$\gamma(x)$ = densité de couple d'axe normal au plan moyen.



■ Les conventions de signe pour les charges sont indiquées sur la figure ci-dessus.

7.2. ÉQUILIBRE DU TRONÇON ÉLÉMENTAIRE DE POUTRE

■ Le tronçon GG' limité par deux sections droites infiniment voisines (Σ) et (Σ') d'abscisses respectives x et $x + dx$ est en équilibre sous l'action :

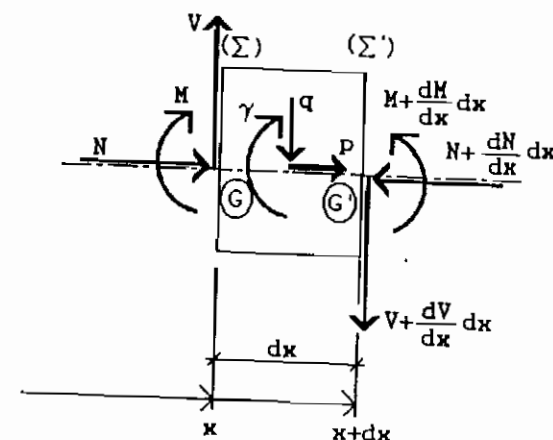
– des charges appliquées : $p(x)$, $q(x)$ et $\gamma(x)$,

– des éléments de réduction des forces de gauche : M , N et V ,

– des éléments de réduction des forces de droite :

$$M + \frac{dM}{dx} dx, \quad N + \frac{dN}{dx} dx \quad \text{et} \quad V + \frac{dV}{dx} dx$$

■ Par projection, il vient :



$$\begin{cases} N + p(x) dx - \left(N + \frac{dN}{dx} dx \right) = 0 \\ V - q(x) dx - \left(V + \frac{dV}{dx} dx \right) = 0 \\ M + V \cdot \frac{dx}{2} + \gamma(x) dx - \left(M + \frac{dM}{dx} dx \right) + \left(V + \frac{dV}{dx} dx \right) \frac{dx}{2} = 0 \end{cases}$$

■ Après simplification, il vient, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur à 2 :

$$\begin{cases} \frac{dN}{dx} = p(x) \\ \frac{dV}{dx} = -q(x) \\ \frac{dM}{dx} = V(x) + \gamma(x) \end{cases}$$

8. RELATIONS CONTRAINTES-EFFORTS

8.1. LOI DE HOOKE

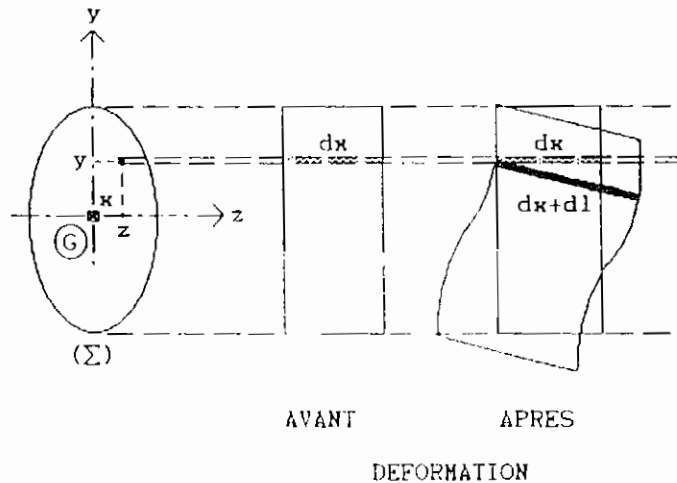
- Toute contrainte normale est accompagnée d'une dilatation unitaire :
 - de même direction que la contrainte,
 - de signe opposé à la contrainte,
 - proportionnelle à la contrainte.

$$\sigma = -E \frac{dl}{l}$$

- E est appelé MODULE D'ÉLASTICITÉ ou MODULE D'YOUNG.

8.2. PRINCIPE DE NAVIER-BERNOULLI

- Les variations unitaires de longueur $\frac{dl}{l}$ sont des fonctions linéaires des coordonnées y et z des fibres dans le plan de la section droite (déplacement simple = rotation + translation).



- On a donc pour $l = dx$,

$$\frac{dl}{dx} = a + by + cz$$

rotation/Gy et Gz
 translation

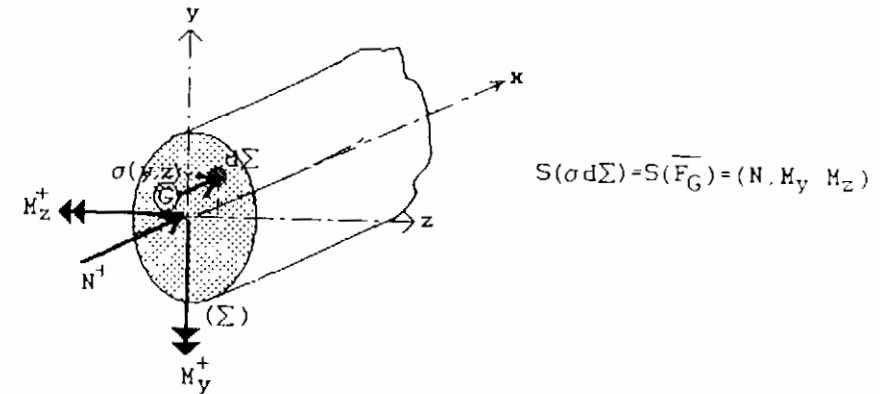
d'où, la loi de Hooke s'écrit :

$$\sigma = -E \frac{dl}{dx} = -E[a + by + cz]$$

- Cette équation traduit le PRINCIPE DE PIGEAUD.

8.3. CHAMP DES CONTRAINTES NORMALES

- D'après le principe d'équivalence, le système des forces de contact est équivalent au système des forces de gauche.



- Nous obtenons donc :

$$\left. \begin{aligned} \iint_{\Sigma} \sigma d\Sigma &= N && \text{résultante générale} \\ \iint_{\Sigma} \sigma y d\Sigma &= M_z \\ \iint_{\Sigma} \sigma z d\Sigma &= -M_y \end{aligned} \right\} \text{moment résultant}$$

D'après le principe de Pigeaud : $\sigma = -E[a + by + cz] = \alpha + \beta y + \gamma z$ d'où le système linéaire en α, β, γ

$$\begin{aligned} \alpha \iint_{\Sigma} d\Sigma + \beta \iint_{\Sigma} y d\Sigma + \gamma \iint_{\Sigma} z d\Sigma &= N \\ \alpha \iint_{\Sigma} y d\Sigma + \beta \iint_{\Sigma} y^2 d\Sigma + \gamma \iint_{\Sigma} yz d\Sigma &= M_z \end{aligned}$$

$$\alpha \iint_{\Sigma} z d\Sigma + \beta \iint_{\Sigma} yz d\Sigma + \gamma \iint_{\Sigma} z^2 d\Sigma = -M_y$$

■ Or, par définition du centre de gravité et des axes principaux d'inertie :

$$\iint_{\Sigma} y d\Sigma = \iint_{\Sigma} z d\Sigma = 0 \quad \text{et} \quad \iint_{\Sigma} yz d\Sigma = 0$$

■ D'où, compte tenu de la définition des aires et des moments d'inertie :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \iint_{\Sigma} d\Sigma = N \\ \beta \iint_{\Sigma} y^2 d\Sigma = M_z \\ \gamma \iint_{\Sigma} z^2 d\Sigma = -M_y \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha S = N \\ \beta I_z = M_z \\ \gamma I_y = -M_y \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{N}{S} \\ \beta = \frac{M_z}{I_z} \\ \gamma = -\frac{M_y}{I_y} \end{array} \right.$$

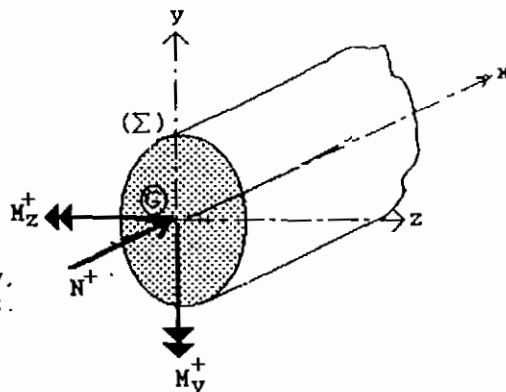
■ On obtient donc :

$$\sigma = \alpha + \beta y + \gamma z \rightarrow \sigma = \frac{N}{S} + \frac{M_z \cdot y}{I_z} - \frac{M_y \cdot z}{I_y}$$

■ La contrainte normale, due à la flexion composée déviée, dans une section droite homogène et élastique à plan moyen vaut :

$$\sigma = \frac{N}{S} + \frac{M_z \cdot y}{I_z} - \frac{M_y \cdot z}{I_y}$$

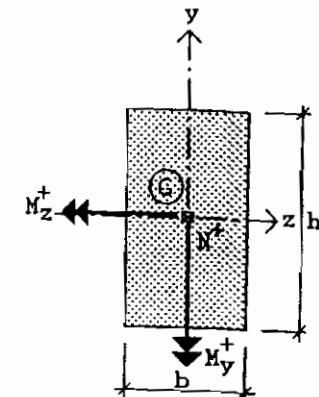
$\left\{ \begin{array}{l} S = \text{aire de la section droite,} \\ I_y = \text{moment d'inertie/Gy,} \\ I_z = \text{moment d'inertie/Gz.} \end{array} \right.$



■ Dans le cas d'une section rectangulaire, sur les fibres extrêmes :

$$\begin{aligned} S &= bh \\ I_z &= \frac{bh^3}{12} \\ I_y &= \frac{hb^3}{12} \end{aligned} \Rightarrow \sigma = \frac{N}{bh} \pm \frac{6M_z}{bh^2} \mp \frac{6M_y}{hb^2}$$

$$y = \pm \frac{h}{2} \quad z = \pm \frac{b}{2}$$



8.4. SOLLICITATIONS PARTICULIÈRES

8.4.1. Compression et traction simple

■ Le système des forces de gauche se réduit, au centre de gravité de la section droite, à :

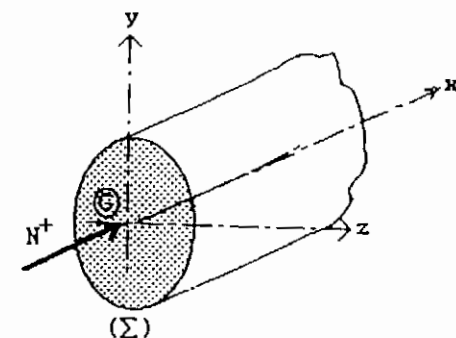
– un effort normal :

- positif pour une compression,
- négatif pour une traction.

■ Dans ces conditions, la contrainte normale et le déplacement dus à la compression ou à la traction simple, dans une section droite d'une poutre homogène et élastique, valent :

$$\sigma = \frac{N}{S}$$

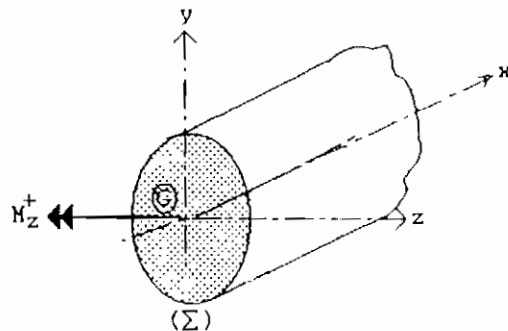
$$\frac{dl}{dx} = -\frac{\sigma}{E} = -\frac{N}{ES}$$



8.4.2. Flexion simple

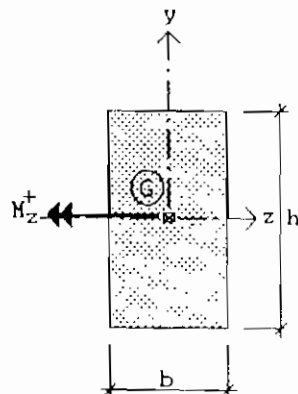
- Le système des forces de gauche se réduit, au centre de gravité de la section droite à un moment fléchissant M_z d'axe Gz .
- Dans ces conditions, la contrainte normale due à la flexion simple, dans une section droite homogène et élastique, vaut :

$$\sigma = \frac{M_z \cdot y}{I_z}$$

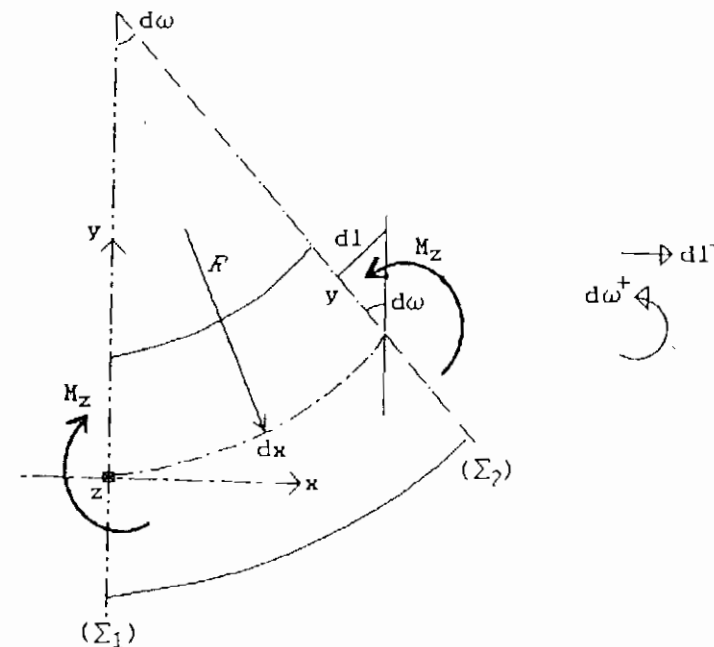


- Pour une section rectangulaire, sur les fibres extrêmes ($y = \pm h/2$) :

$$\sigma = \pm \frac{6M_z}{bh^2}$$



- Pour deux sections droites (Σ_1) et (Σ_2) , infiniment voisines, distantes de dx et soumises à l'action d'un moment fléchissant M_z :



- D'après la loi de Hooke, la déformation relative de la fibre d'ordonnée y vaut :

$$\frac{dl}{dx} = \frac{\sigma(y)}{E} = \frac{M_z \cdot y}{E I_z}$$

La rotation relative $d\omega$ entre les deux sections est

$$d\omega = \frac{dl}{y} = \frac{M_z}{EI_z} dx = \frac{dx}{R}$$

- D'où la valeur de la courbure de la ligne moyenne :

$$\frac{1}{R} = \frac{d\omega}{dx} = \frac{M_z}{EI_z}$$

8.4.3. Flexion déviée

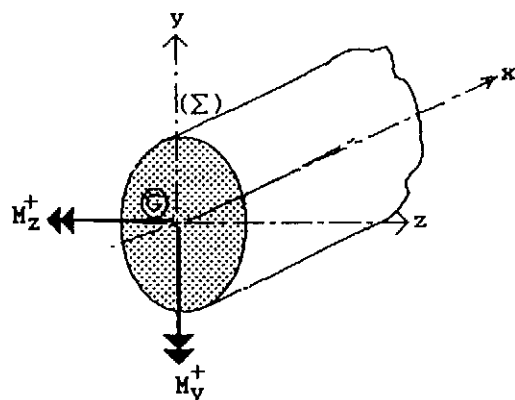
- Le système des forces de gauche se réduit, au centre de gravité de la section droite, à :
 - un moment fléchissant M_y d'axe Gy ,
 - un moment fléchissant M_z d'axe Gz .

■ Dans ces conditions, la contrainte normale et les déplacements relatifs dus à la flexion déviée, dans une section droite homogène et élastique, valent :

$$\sigma = \frac{M_z \cdot y}{I_z} - \frac{M_y \cdot z}{I_y}$$

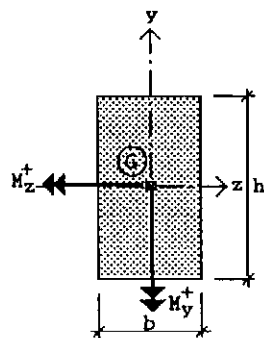
$$\frac{d\theta_y}{dx} = \frac{M_y}{EI_y}$$

$$\frac{d\theta_z}{dx} = \frac{M_z}{EI_z}$$



■ Pour une section rectangulaire, sur les fibres extrêmes ($y = \pm h/2$ et $z = \pm b/2$) :

$$\sigma = \pm \frac{6M_z}{bh^2} \mp \frac{6M_y}{hb^2}$$



9. TRONÇONS DE POUTRES DROITES

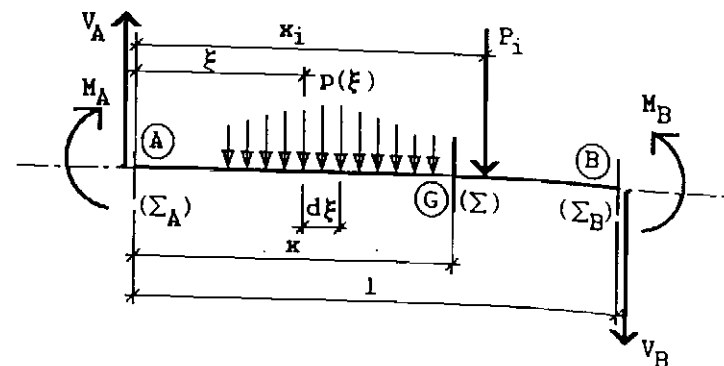
9.1. CHARGEMENT ENVISAGÉ

■ On considère un tronçon de poutre droite limité par deux sections droites : (Σ_A) (origine) et (Σ_B) (extrémité).

■ Ce tronçon de poutre est supposé sollicité par des forces situées dans son plan moyen :

- densité de charge répartie $p(\xi)$ d'abscisse ξ depuis (Σ_A) ,
- forces verticales concentrées P_i d'abscisse x_i depuis (Σ_A) ,

- V_A et M_A = éléments de réduction des forces de gauche en (Σ_A) ,
- V_B et M_B = éléments de réduction des forces de droite en (Σ_B) .



■ Les sens positifs sont ceux figurant ci-dessus.

9.2. ÉLÉMENTS DE RÉDUCTION DANS TOUTE SECTION (Σ) DU TRONÇON DE POUTRE

9.2.1. Effort tranchant

Les forces de gauche donnent en G :

$$V = V_A - \sum_0^x P_i - \int_0^x p(\xi) d\xi$$

9.2.2. Moment fléchissant

De la même façon :

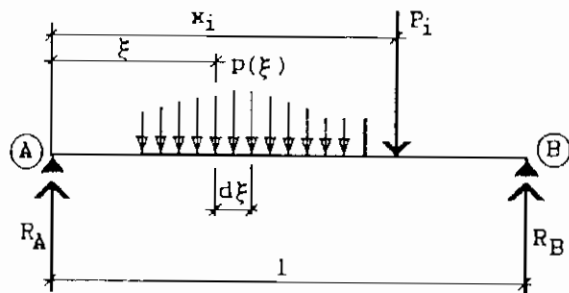
$$M = M_A + V_A x - \sum_0^x P_i (x - x_i) - \int_0^x p(\xi) (x - \xi) d\xi$$

9.3. ÉLÉMENTS DE RÉDUCTION

9.3.1. Éléments de réduction en fonction des éléments de réduction isostatiques

a) Réactions d'appui de la poutre isostatique associée

■ Pour une poutre sur deux appuis simples soumise aux mêmes charges et de même longueur que le tronçon de poutre étudié (POUTRE ISOSTATIQUE ASSOCIÉE) :



■ R_A est obtenue en écrivant que le moment résultant en B est nul :

$$1 \cdot R_A - \sum_0^1 P_i (1 - x_i) - \int_0^1 p(\xi) (1 - \xi) d\xi = 0$$

Comme, en B, dans le tronçon de poutre réel, on a :

$$M_B = M_A + V_A l - \sum_0^1 P_i (1 - x_i) - \int_0^1 p(\xi) (1 - \xi) d\xi$$

nous obtenons, par identification :

$$l \cdot R_A = M_A + V_A l - M_B$$

soit :

$$R_A = V_A + \frac{M_A - M_B}{l} \Leftrightarrow V_A = R_A + \frac{M_B - M_A}{l}$$

■ La réaction R_B est obtenue en écrivant que la résultante générale des forces est nulle

$$R_A + R_B - \sum_0^1 P_i - \int_0^1 p(\xi) d\xi = 0$$

Comme, en B, dans le tronçon de poutre réel, on a :

$$V_B = V_A - \sum_0^1 P_i - \int_0^1 p(\xi) d\xi$$

nous obtenons par identification

$$R_A + R_B = V_A - V_B$$

soit

$$R_B = V_A - V_B - R_A \text{ avec } R_A = V_A + \frac{M_A - M_B}{l}$$

d'où, il vient :

$$R_B = -V_B - \frac{M_A - M_B}{l} \Leftrightarrow V_B = -R_B + \frac{M_B - M_A}{l}$$

b) Éléments de réduction

■ Dans toute section droite (Σ) du tronçon de poutre étudié :

$$\begin{cases} V = V_A - \sum_0^x P_i - \int_0^x p(\xi) d\xi \\ M = M_A + V_A x - \sum_0^x P_i (x - x_i) - \int_0^x p(\xi) (x - \xi) d\xi \end{cases}$$

■ En remarquant que pour la poutre isostatique associée au tronçon étudié

$$\begin{cases} \frac{d\mu}{dx} = R_A - \sum_0^x P_i - \int_0^x p(\xi) d\xi = V_A + \frac{M_A - M_B}{l} - \sum_0^x P_i - \int_0^x p(\xi) d\xi \\ \mu = R_A x - \sum_0^x P_i (x - x_i) - \int_0^x p(\xi) (x - \xi) d\xi \\ \mu = \left[V_A + \frac{M_A - M_B}{l} \right] x - \sum_0^x P_i (x - x_i) - \int_0^x p(\xi) (x - \xi) d\xi \end{cases}$$

■ Nous obtenons par identification :

$$\begin{cases} V = V_A + \left[\frac{d\mu}{dx} - V_A - \frac{M_A - M_B}{l} \right] \\ M = M_A + V_A x + \left[\mu - \left(V_A + \frac{M_A - M_B}{l} \right) x \right] \end{cases}$$

■ Soit, après simplification :

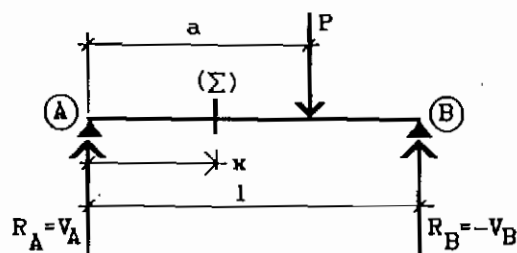
$$\boxed{\begin{aligned} V &= \frac{d\mu}{dx} + \frac{M_B - M_A}{l} \\ M &= \mu + M_A \left(1 - \frac{x}{l} \right) + M_B \frac{x}{l} \end{aligned}}$$

9.3.2. Définition

On appelle éléments de réduction isostatiques (respectivement MOMENT et EFFORT TRANCHANT ISOSTATIQUES), les éléments de réduction dans toute section droite (Σ) d'un tronçon de poutre, lorsque ce tronçon de poutre repose à ses deux extrémités sur des appuis simples.

9.3.3. Poutres droites isostatiques : éléments de réduction

a) Cas d'une charge concentrée



■ Réactions d'appui :

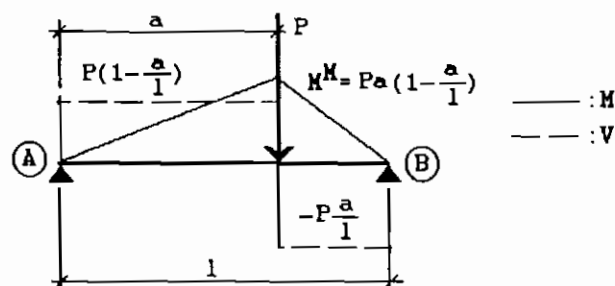
$$M_B = 0 \Rightarrow R_A \cdot l - P(l - a) = 0 \Rightarrow R_A = P \left(1 - \frac{a}{l}\right)$$

$$R_A + R_B = P \Rightarrow R_B = P - R_A \Rightarrow R_B = P \frac{a}{l}$$

■ Sollicitations :

$$0 \leq x \leq a : \begin{cases} M(x) = R_A x = P \left(1 - \frac{a}{l}\right) x \\ V(x) = R_A = P \left(1 - \frac{a}{l}\right) \end{cases} \quad (\text{forces de gauche})$$

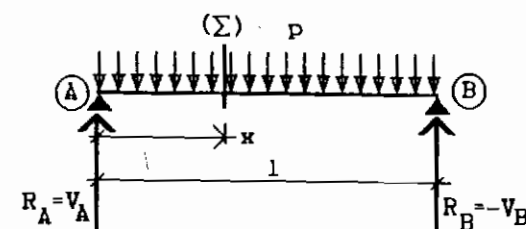
$$a \leq x \leq l : \begin{cases} M(x) = R_B (l - x) = P \left(1 - \frac{x}{l}\right) a \\ V(x) = -R_B = -P \frac{a}{l} \end{cases} \quad (\text{forces de droite})$$



■ Remarque : dans le cas où $a = \frac{l}{2}$ on pose :

$$\begin{aligned} M_0 &= M = \frac{Pl}{4} \\ V_0 &= V_A = -V_B = \frac{P}{2} \end{aligned}$$

b) Cas d'une charge uniformément répartie



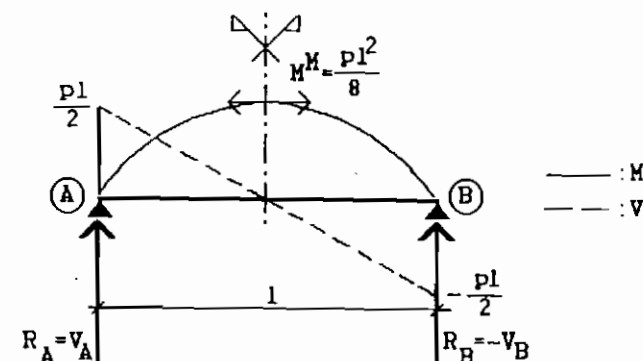
■ Réactions d'appui :

$$R_A \cdot l - pl \frac{l}{2} = 0 \Rightarrow R_A = \frac{pl}{2}$$

$$R_A + R_B = pl \Rightarrow R_B = pl - R_A \Rightarrow R_B = \frac{pl}{2}$$

■ Sollicitations :

$$\begin{cases} M(x) = R_A x - px \frac{x}{2} = \frac{pl}{2} x - \frac{px^2}{2} = \frac{px}{2} (l - x) \\ V(x) = R_A - px = p \left(\frac{l}{2} - x\right) \end{cases}$$



مكتب
موريطانيا
20
أبواب
البريد
البريد
05

03153833

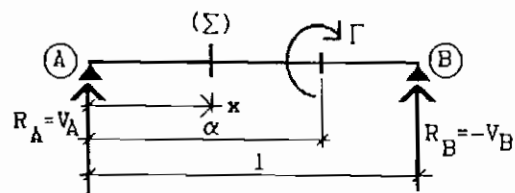
05

[illegible]

■ On pose :

$$\begin{aligned} M_0 &= M_A = \frac{Pl^2}{8} \\ V_0 &= V_A = -V_B = \frac{Pl}{2} \end{aligned}$$

c) Cas d'un couple concentré d'axe perpendiculaire au plan moyen



■ Réactions d'appui :

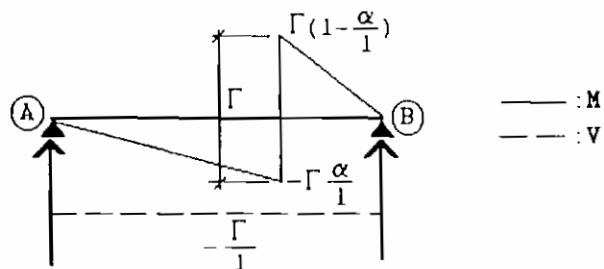
$$M_B = 0 \Rightarrow R_A \cdot l + \Gamma = 0 \Rightarrow R_A = -\frac{\Gamma}{l}$$

$$R_A + R_B = 0 \Rightarrow R_B = -R_A \Rightarrow R_B = \frac{\Gamma}{l}$$

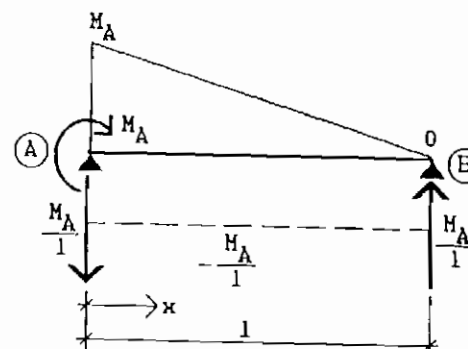
■ Sollicitations :

$$0 \leq x \leq \alpha : \begin{cases} M(x) = R_A x = -\Gamma \frac{x}{l} \\ V(x) = R_A = -\frac{\Gamma}{l} \end{cases} \quad (\text{forces de gauche})$$

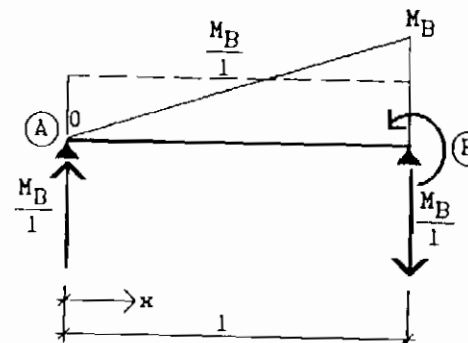
$$\alpha \leq x \leq l : \begin{cases} M(x) = R_B (l - x) = \Gamma \left(1 - \frac{x}{l}\right) \\ V(x) = -R_B = -\frac{\Gamma}{l} \end{cases} \quad (\text{forces de droite})$$



■ Cas particulier des couples sur appuis :



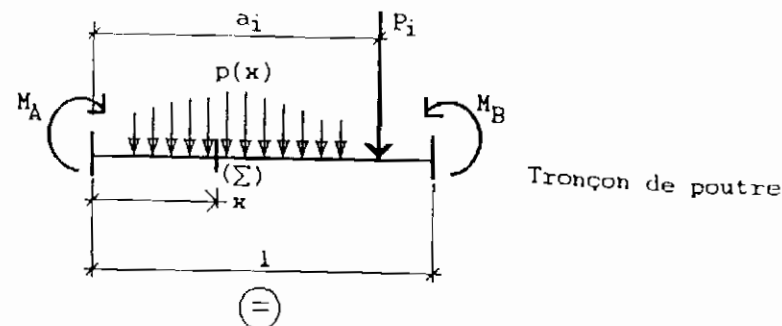
$$\begin{aligned} \text{Pour } \alpha=0 : \Gamma &= M_A \\ \begin{cases} M(x) = M_A \left(1 - \frac{x}{l}\right) \\ V(x) = -\frac{M_A}{l} \end{cases} \end{aligned}$$

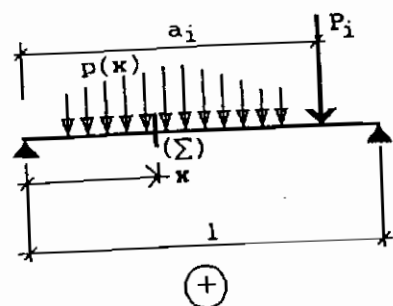


$$\begin{aligned} \text{Pour } \alpha=1 : \Gamma &= -M_B \\ \begin{cases} M(x) = M_B \frac{x}{l} \\ V(x) = \frac{M_B}{l} \end{cases} \end{aligned}$$

9.3.4. Éléments de réduction dans un tronçon de poutre

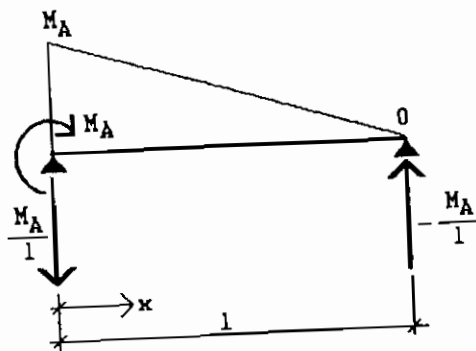
■ Les éléments de réduction dans un tronçon de poutre peuvent, d'après ce qui précède, être évalués à partir des éléments de réduction de la travée isostatique associée en opérant par superposition :





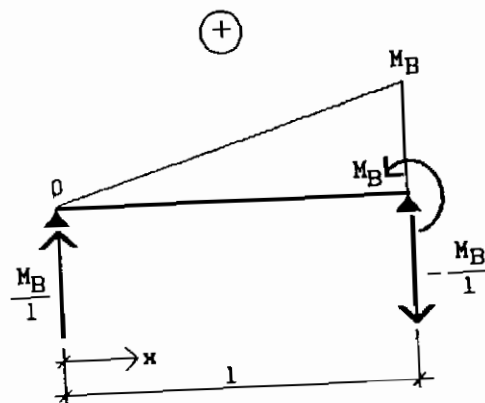
Travée de référence soumise aux mêmes charges (ou travée isostatique associée):

$$\begin{cases} M(x) = \mu(x) \\ V(x) = \frac{d\mu}{dx}(x) \end{cases}$$



Travée de référence soumise à M_A :

$$\begin{cases} M(x) = M_A \left(1 - \frac{x}{l}\right) \\ V(x) = -\frac{M_A}{l} \end{cases}$$



Travée de référence soumise à M_B :

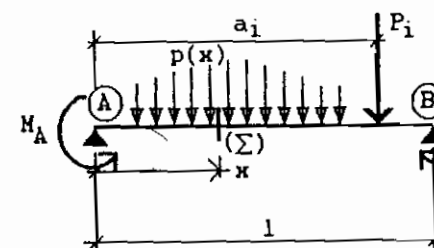
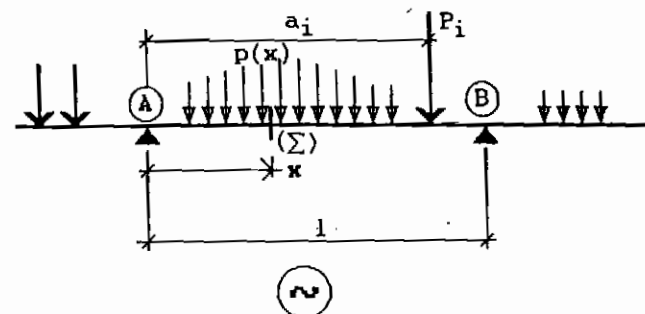
$$\begin{cases} M(x) = M_B \frac{x}{l} \\ V(x) = \frac{M_B}{l} \end{cases}$$

■ D'où par superposition :

$$\begin{aligned} V &= \frac{d\mu}{dx} + \frac{M_B - M_A}{l} \\ M &= \mu + M_A \left(1 - \frac{x}{l}\right) + M_B \frac{x}{l} \end{aligned}$$

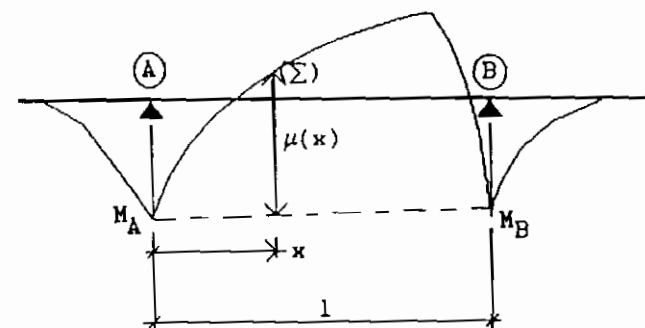
9.4. APPLICATION AUX POUTRES CONSOLES

■ En dissociant les deux consoles de la travée centrale, on obtient la décomposition des efforts suivante :



M_A = moment à gauche de A.
 M_B = moment à droite de B.

■ D'où le diagramme des moments :



II. FORMULAIRE POUR POUTRES ISOSTATIQUES

1. CONVENTIONS

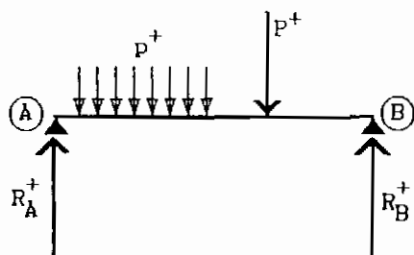
Les sens positifs adoptés pour les forces, les éléments de réduction et les déformations sont les suivants.

FORCES APPLIQUÉES

P = charge appliquée concentrée,

p = charge appliquée répartie.

R_A, R_B = réactions d'appui.

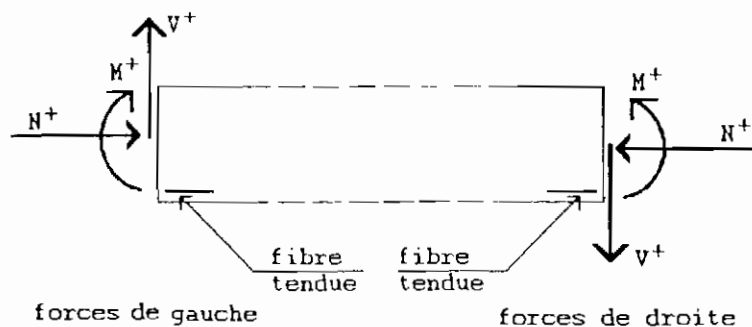


ÉLÉMENTS DE RÉDUCTION

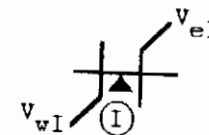
■ M = moment fléchissant,

V = effort tranchant,

N = effort normal



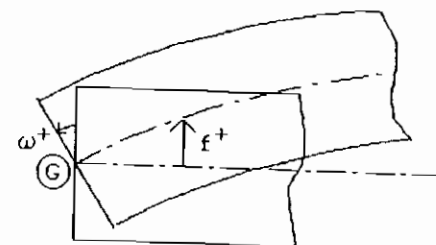
■ Les efforts tranchants à gauche et à droite d'un appui I sont notés respectivement (indice w pour ouest, indice e pour est).



DÉFORMATIONS

f = flèche,

ω = rotation.



2. FORMULAIRE

SCHEMA RdM	FORMULES
Chargement Diagrammes — M - - - V	$M_0 = \frac{pl^2}{8}$ $V_A = -V_B = \frac{pl}{2}$ $\omega_A = \omega_B = \frac{pl^3}{24EI}$ $f = -\frac{5pl^4}{384EI}$

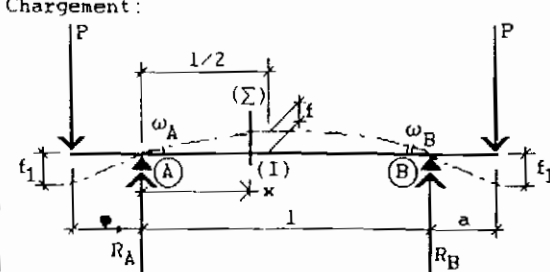
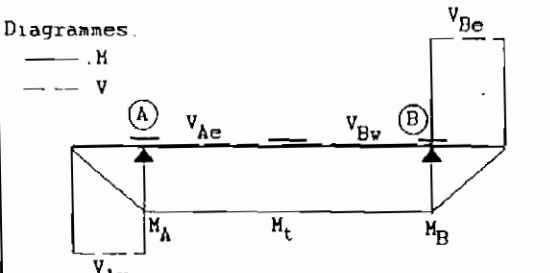
SCHEMA RdM	FORMULES
Chargement: Diagrammes: — : M - - : V	$M_0 = Pa(1 - \frac{a}{l})$ $V_A = P(1 - \frac{a}{l})$ $V_B = -P\frac{a}{l}$ $\omega_A = -\frac{P}{6EI} \frac{a(1-a)(2l-a)}{l}$ $\omega_B = \frac{P}{6EI} \frac{a(1-a)(l+a)}{l}$ $f = -\frac{Pa^2(1-a)^2}{3EI l}$

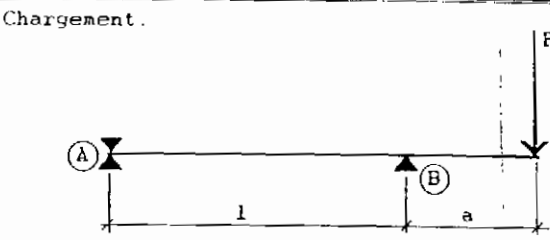
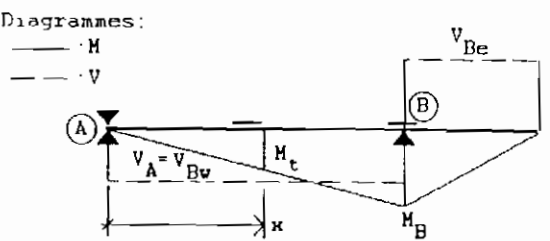
Chargement: Diagrammes: — : M - - : V	$a = 2b = c = \frac{l}{3}$ $M(x) = M_A(1 - \frac{x}{l})$ $V(x) = -\frac{M_A}{l}$ $\omega_A = -aM_A$ $\omega_B = bM_A$ $f = -\frac{M_A l^2}{16EI}$
--	---

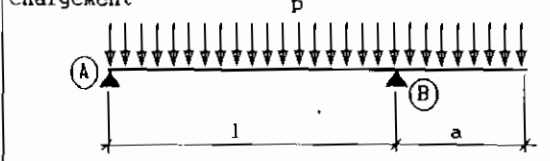
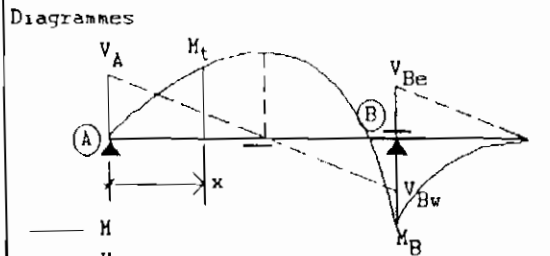
Chargement: Diagrammes: — : M - - : V	$M_A = -\frac{pl^2}{2}$ $V_A = pl$ $f = -\frac{pl^4}{8EI}$
--	--

SCHEMA RdM	FORMULES
Chargement: Diagrammes: — : M - - : V	$M_A = -Pl$ $V_A = P$ $f = -\frac{Pl^3}{3EI}$
Chargement: Diagrammes: — : M - - : V	$M_A = M_B = -\frac{pa^2}{2}$ $M_0 = \frac{pl^2}{8}$ $M_t = M_0 + M_A$ $V_{Ae} = -V_{Be} = \frac{pl}{2}$ $V_{Av} = -V_{Bv} = -pa$ $f = -\frac{pl^2(5l^2 - 24a^2)}{384EI}$ $f_1 = \frac{pa(1^3 - 6a^2l - 3a^3)}{24EI}$ $\omega_A = -\omega_B = -\frac{pl(1^2 + 6a^2)}{24EI}$

$$pl^1 l^2 + P \cdot a \times 6a^2$$

SCHEMA RdM	FORMULES
Chargement :  Diagrammes : 	$M_A = M_B = M_t = -Pa$ $V_{Av} = -V_{Be} = -P$ $V_{Ae} = V_{Bv} = 0$ $f = + \frac{Pa l^2}{8EI}$ $f_1 = - \frac{Pa^2(4a+3l)}{12EI}$ $\omega_A = -\omega_B = - \frac{Pla}{2EI}$

SCHEMA RdM	FORMULES
Chargement :  Diagrammes : 	$M_B = -Pa$ $M_t(x) = M_B \frac{x}{l}$ $V_A = V_{Bv} = - \frac{M_B}{l}$ $V_{Be} = P$

Chargement :  Diagrammes : 	$M_B = - \frac{pa^2}{2}$ $\mu(x) = \frac{px(1-x)}{2}$ $M_t(x) = \mu(x) + M_B \frac{x}{l}$ $V_A = \frac{pl}{2} + \frac{M_B}{l}$ $V_{Bv} = - \frac{pl}{2} + \frac{M_B}{l}$ $V_{Be} = pa$
--	--

CHAPITRE 2

BÉTON ARMÉ : GÉNÉRALITÉS

I. RAPPELS DE COURS

1. UNITÉS

Longueurs en mètres (m).

Sous-multiple : $1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m}$

Forces en newtons (N).

Multiples : $1 \text{ kN} = 10^3 \text{ N}$ (kilonewton),

$1 \text{ MN} = 10^6 \text{ N}$ (méganewton),

Remarque : $1 \text{ MN} = 10^5 \text{ daN}$ (décanewton) $\approx 10^5 \text{ kg}$ (kilogramme) $= 100 \text{ t}$ (tonne).

Pressions, contraintes en pascals (Pa) : $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$.

Multiple : $1 \text{ MPa} = 10^6 \text{ Pa}$ (mégapascal) $= 1 \text{ N/mm}^2$,

Remarque : $1 \text{ MPa} = 10 \text{ daN/cm}^2 = 10 \text{ bars} \approx 10 \text{ kg/cm}^2 = 100 \text{ t/m}^2$.

2. ACTIONS ET SOLLICITATIONS

2.1. TERMINOLOGIE

ACTION = toute cause produisant un état de contraintes dans la construction.

– Actions permanentes :

- poids propre,
- poids des superstructures,
- poussées des remblais,
- etc.

– Actions variables :

- charges d'exploitation,
- charges appliquées en cours d'exécution,
- action de la température,
- etc.

– Actions accidentelles :

- chocs de véhicules routiers ou de bateaux sur appuis des ponts,
- séismes,
- etc.

SOLLICITATIONS = forces et moments produits par les actions :

- effort normal : N ,
- effort tranchant : V ,
- moment fléchissant : M ,
- couple de torsion : T .

2.2. VALEURS DES ACTIONS

La variabilité des actions agissant sur la structure est prise en compte en définissant pour chacune d'elles des VALEURS REPRÉSENTATIVES déterminées :

- par exploitation statistique des données nécessaires existantes,
- par estimation fondée sur l'expérience.

La VALEUR DE CALCUL d'une action est obtenue par multiplication de sa valeur représentative à l'aide d'un COEFFICIENT DE PONDÉRATION γ destiné à couvrir :

- les incertitudes résultant de la connaissance imparfaite des données de base,
- l'imprécision des calculs,
- les imperfections de l'exécution.

2.3. ÉTATS-LIMITES

2.3.1. Définition

Un ÉTAT-LIMITE est un état particulier dans lequel une condition requise pour une construction (ou l'un de ses éléments) est strictement satisfaite et cesserait de l'être en cas de modification défavorable d'une action.

2.3.2. Différents états-limites

a) États-limites ultimes (E.L.U.)

Ils mettent en jeu la sécurité des biens et des personnes.

Ils correspondent à l'atteinte du maximum de la capacité portante de l'ouvrage ou de l'un de ses éléments avant dépassement par :

- perte d'équilibre statique,
- rupture de sections par déformation excessive,
- instabilité de forme (flambement),
- transformation de la structure en un mécanisme.

Critères de calcul :

- déformations relatives (ou courbure) limites,
- calcul de type « rupture » avec lois contraintes-déformations des matériaux.

b) États-limites de service (E.L.S.)

Ils sont liés aux conditions normales d'exploitation et de durabilité.

Ils correspondent aux phénomènes suivants :

- ouvertures excessives des fissures,
- compression excessive du béton,
- déformations excessives des éléments porteurs,
- vibrations excessives et/ou inconfortables,
- perte d'étanchéité,
- etc.

Critères de calcul :

- contraintes (ou déformations) limites,
- calculs de type élastique (loi de Hooke, coefficient d'équivalence, ...).

2.3.3. Vérifications

a) États-limites ultimes (E.L.U.)

La SOLLICITATION AGISSANTE DE CALCUL est obtenue pour une combinaison d'actions F_i :

$$S \left[\sum_i \gamma_i \cdot \psi_i \cdot F_i \right] \text{ avec } \begin{cases} \gamma_i = \text{coefficient de pondération} \\ \psi_i F_i = \text{valeur représentative (et 2.2 et 2.4.1)} \\ \psi_i = 1 \text{ s'il s'agit d'une action permanente} \end{cases}$$

La SOLLICITATION RÉSISTANTE est celle pour laquelle l'un des matériaux constitutifs de la structure atteint soit une déformation limite, soit une résistance limite :

$$R \left[\frac{f_c}{\gamma_s} ; \frac{f_{cj}}{\gamma_b} ; \frac{f_{tj}}{\gamma_b} \right]$$

où :

f_c, f_{cj} et f_{tj} = résistances caractéristiques des matériaux acier et béton en compression et en traction,

γ_s et γ_b = coefficients de pondération ≥ 1 pour l'acier et le béton

On doit vérifier :

$$S \left[\sum_i \gamma_i \cdot \psi_i \cdot F_i \right] \leq R \left[\frac{f_e}{\gamma_s}; \frac{f_{cj}}{\gamma_b}; \frac{f_{ty}}{\gamma_b} \right]$$

b) États-limites de service (E.L.S.)

On doit montrer que la sollicitation de calcul agissante ne provoque pas le dépassement des limites de l'E.L.S. considéré :

– pour les contraintes :

$$\sigma \left[S \left(\sum_i \psi_i F_i \right) \right] \leq \overline{\sigma}_{lim} \quad S = M \text{ et/ou } N$$

$$\tau \left[S \left(\sum_i \psi_i F_i \right) \right] \leq \overline{\tau}_{lim} \quad S = V \text{ et/ou } T$$

– pour la flèche :

$$f \left[S \left(\sum_i \psi_i F_i \right) \right] \leq \overline{f}_{lim} \quad S = M \text{ ou } M + N$$

2.4. COMBINAISONS D'ACTIONS

2.4.1. Notations

On désigne par :

G_{max} = ensemble des actions permanentes défavorables,

G_{min} = ensemble des actions permanentes favorables,

Q_1 = action variable de base (valeur caractéristique, $\psi = 1$),

Q_i = action variable d'accompagnement ($i > 1$) :

$\psi_{0i} \cdot Q_i$ = valeur de combinaison,

$\psi_{1i} \cdot Q_i$ = valeur fréquente,

$\psi_{2i} \cdot Q_i$ = valeur quasi permanente,

F_A = action accidentelle.

On note :

G = valeur probable d'une charge permanente,

Q_{prc} = charges d'exécution connues (en grandeur et en position),

Q_{pra} = charges d'exécution aléatoires,

Q_r = charges routières sans caractère particulier (systèmes A, B et leurs effets annexes, charges de trottoirs) obtenues par multiplication des charges figurant au Fascicule 61-titre II par :

- 1,07 aux E.L.U.,
- 1,20 aux E.L.S.,
- 1,00 aux E.L.S. pour charges de trottoirs,

Q_{rp} = charges routières de caractère particulier (convois militaires et exceptionnels) définies au Fascicule 61-titre II,

Q_B = charges d'exploitation des bâtiments,

Q_{ex} = charges d'exploitation ferroviaires définies par le livret 2.01 du CPC ⁽¹⁾ de la SNCF,

W = action du vent définie :

- par le Fascicule 61 – titre II pour les ponts-routes,
- par les Règles NV 65 pour les autres constructions, les valeurs du vent normal étant multipliées par :
 - 1,20 aux E.L.U.,
 - 1,00 aux E.L.S.,

Q_{1v} = action du vent sur les ponts-rails à vide,

Q_{iv} = action du vent sur les ponts-rails en cours d'exploitation,

S_n = action de la neige pour les bâtiments définie par le Fascicule 61 – titre IV, section II (Règles N 84),

T = variations uniformes de la température,

$\Delta\theta = \frac{\Delta\theta}{h}$ = gradient thermique prescrit par le marché (rapport de la différence $\Delta\theta$ de température entre les deux faces d'un élément à l'épaisseur h de celui-ci),

Q_θ = effet des variations de température sur les ponts-rails :

- dilatation des longs rails soudés,
- gradient de température,
- variation de température.

Dans ce qui suit, pour les COMBINAISONS D'ACTIONS, il faut :

- prendre la combinaison la plus défavorable pour l'effet recherché, une même action n'intervenant au plus qu'une seule fois dans la combinaison,
- choisir une (ou aucune) action parmi celles se trouvant derrière une accolade ({}),
- les valeurs entre crochets ([...]) ne sont généralement pas à prendre en compte.

2.4.2. États-limites ultimes (E.L.U.)

a) Combinaison fondamentale

■ Formulation symbolique :

$$1,35 \cdot G_{max} + G_{min} + \gamma_{Q1} \cdot Q_1 + \sum_{i>1} 1,3 \cdot \psi_{0i} \cdot Q_i$$

■ Cas des ponts-routes :

– situation d'exécution :

(1) Cahier des prescriptions communes applicables aux marchés de travaux d'ouvrages d'art.

$$1,35(G_{\max} + Q_{\text{prc}}) + (G_{\min} + Q_{\text{prc}}) + \left\{ \begin{array}{l} 1,5 \left\{ \begin{array}{l} Q_{\text{pra}} \\ W \end{array} \right. \\ 1,35 [T] \end{array} \right. + 1,3 \left\{ \begin{array}{l} 1,0 W \\ 1,0 Q_{\text{pra}} \\ \left[\frac{0,8}{1,3} T + \frac{0,65}{1,3} \Delta\Theta \right] \end{array} \right. + 1,3 \left[\frac{0,8}{1,3} T + \frac{0,65}{1,3} \Delta\Theta \right]$$

– situation d'exploitation :

$$1,35 \cdot G_{\max} + G_{\min} + \left\{ \begin{array}{l} 1,5 \left\{ \begin{array}{l} Q_r \\ W \end{array} \right. \\ 1,35 \left\{ \begin{array}{l} Q_{rp} \\ [T] \end{array} \right. \end{array} \right. + 1,3 \left[\frac{0,8}{1,3} T + \frac{0,65}{1,3} \Delta\Theta \right]$$

■ Cas des bâtiments :

– situation d'exécution : combinaison identique à celle des ponts-routes

– situation d'exploitation :

$$1,35 \cdot G_{\max} + G_{\min} + \left\{ \begin{array}{l} 1,5 \left\{ \begin{array}{l} Q_B \\ W \\ S_n \end{array} \right. \\ 1,35 [T] \end{array} \right. + 1,3 \left\{ \begin{array}{l} 0,77 \cdot W \\ 0,77 \cdot S_n \\ \psi_0 \cdot Q_B \\ 0,77 \cdot W + \psi_0 \cdot Q_B \\ 0,77 \cdot S_n + \psi_0 \cdot Q_B \\ 0,77 \cdot W + 0,77 \cdot S_n \end{array} \right. + 1,3 \left[\frac{0,8}{1,3} T \right]$$

ψ_0 = coefficient défini dans l'annexe à la norme NFP 06-001

■ Cas des ponts-rails :

– situation d'exécution :

$$1,35(G_{\max} + Q_{\text{prc}}) + (G_{\min} + Q_{\text{prc}}) + \left\{ \begin{array}{l} 1,35 \cdot Q_{\text{ex}} + 1,5 \cdot Q_{\text{pra}} \\ 1,5 \left\{ \begin{array}{l} W \\ Q_{\Theta} \end{array} \right. \end{array} \right. + 1,3 \left\{ \begin{array}{l} W \\ 1,3 \left\{ \begin{array}{l} 0,8 \\ 1,3 \end{array} \right. \cdot Q_{\Theta} \end{array} \right.$$

– situation d'exploitation :

$$1,35 G_{\max} + G_{\min} + \left\{ \begin{array}{l} 1,35 \cdot Q_{\text{ex}} \\ 1,5 \left\{ \begin{array}{l} Q_{iv} \\ Q_{\Theta} \end{array} \right. \end{array} \right. + 1,3 \left\{ \begin{array}{l} Q_{iv} \\ \left[\frac{0,8}{1,3} \cdot Q_{\Theta} \right] \end{array} \right.$$

b) Combinaisons accidentelles

■ Formulation symbolique :

$$G_{\max} + G_{\min} + F_A + \psi_{11} \cdot Q_1 + \sum_{i>1} \psi_{2i} \cdot Q_i$$

où :

$\psi_{11} \cdot Q_1$ = valeur fréquente d'une action variable,

$\psi_{2i} \cdot Q_i$ = valeur quasi permanente d'une autre action variable, etc.

■ Cas des ponts-routes :

$$G_{\max} + G_{\min} + F_A + \left\{ \begin{array}{l} 0,6 \\ 0,4 \\ 0,2 \end{array} \right\} Q_r \text{ pour } \left\{ \begin{array}{l} \text{pont de 1}^{\text{re}} \text{ classe} \\ \text{pont de 2}^{\text{e}} \text{ classe} \\ \text{pont de 3}^{\text{e}} \text{ classe} \end{array} \right. + \left\{ \begin{array}{l} 0,2 W \\ 0,5 T \\ 0,5 \Delta\Theta \end{array} \right.$$

■ Cas des bâtiments :

$$G_{\max} + G_{\min} + F_A + \left\{ \begin{array}{l} 0,75 \cdot Q_B \\ 0,20 \cdot W \\ 0,15 \cdot S_n \\ 0,50 \cdot T \end{array} \right. + \left\{ \begin{array}{l} 0,65 \cdot Q_B \\ \psi_{2i} \cdot T \end{array} \right. \text{ si le C.P.S. (1) le prescrit.}$$

■ Cas des ponts-rails :

$$G_{\max} + G_{\min} + F_A + \left\{ \begin{array}{l} 0,8 \\ 0,6 \\ 0,4 \end{array} \right\} Q_{\text{ex}} \text{ pour } \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ voie} \\ 2 \text{ voies} \\ \geq 3 \text{ voies} \end{array} \right. + \left\{ \begin{array}{l} 0,6 Q_{\Theta} \end{array} \right.$$

(1) Cahier des prescriptions spéciales au marché

2.4.3. États-limites de service (E.L.S.)

■ Formulation symbolique :

$$G_{\max} + G_{\min} + Q_1 + \sum_{i>1} \psi_{0i} \cdot Q_i$$

■ Cas des ponts-routes :

– situation d'exécution :

$$(G_{\max} + Q_{\text{prc}}) + (G_{\min} + Q_{\text{prc}}) + \begin{cases} Q_{\text{pra}} \\ W \\ T \\ \Delta\Theta \end{cases} + \begin{cases} Q_{\text{pra}} \\ W \\ T \\ \Delta\Theta \end{cases} + \begin{cases} 0,6 T \\ 0,5 \cdot \Delta\Theta \\ 0,6 \cdot T + 0,5 \cdot \Delta\Theta \end{cases}$$

– situation d'exploitation :

$$G_{\max} + G_{\min} + \begin{cases} Q_r \\ Q_{\text{rp}} \\ \Delta\Theta \\ T \\ W \end{cases} + \begin{cases} Q_r \\ Q_{\text{rp}} \\ \Delta\Theta \\ T \\ W \end{cases} + \begin{cases} 0,6 T \\ 0,5 \cdot \Delta\Theta \\ 0,6 \cdot T + 0,5 \cdot \Delta\Theta \end{cases}$$

■ Cas des bâtiments :

– situation d'exécution : combinaison identique à celle des ponts-routes.

– situation d'exploitation :

$$G_{\max} + G_{\min} + \begin{cases} Q_B \\ W \\ S_n \\ T \end{cases} + \begin{cases} Q_B \\ 0,77 \cdot W \\ 0,77 \cdot S_n \\ 0,77 \cdot W + 0,77 \cdot S_n \\ Q_B + 0,77 \cdot W \\ Q_B + 0,77 \cdot S_n \\ Q_B + 0,77 \cdot W + 0,77 \cdot S_n \end{cases} + \begin{cases} 0,6 T \end{cases}$$

■ Cas des ponts-rails :

– situation d'exécution :

$$(G_{\max} + Q_{\text{prc}}) + (G_{\min} + Q_{\text{prc}}) + \begin{cases} (Q_{\text{ex}} + Q_{\text{pra}}) \\ W \\ Q_{\Theta} \end{cases} + \begin{cases} (Q_{\text{ex}} + Q_{\text{pra}}) \\ W \\ Q_{\Theta} \end{cases} + \begin{cases} 0,6 \cdot Q_{\Theta} \end{cases}$$

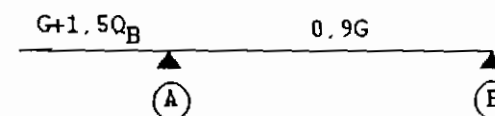
– situation d'exploitation :

$$G_{\max} + G_{\min} + \begin{cases} Q_{\text{ex}} \\ Q_{\text{iv}} \\ Q_{\Theta} \end{cases} + \begin{cases} Q_{\text{iv}} \\ 0,6 \cdot Q_{\Theta} \end{cases}$$

2.4.4. Équilibre statique

Il s'agit de cas délicats pour lesquels une analyse particulière est à faire. Par exemple :

– pour une poutre-console, il faut considérer :



– pour les bâtiments, il faut faire un calcul avec le maximum de précision (densité moyenne des aciers, poids minimal des cloisons stabilisatrices...).

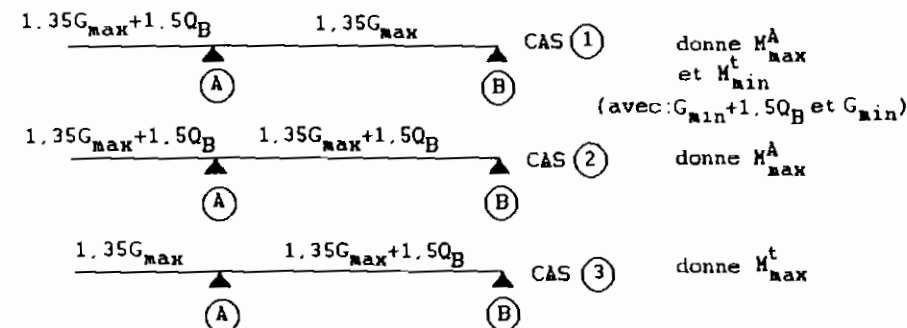
2.4.5. Stabilité de forme

Voir chapitre 11 «FLAMBEMENT».

2.5. REMARQUES

2.5.1. Combinaisons d'actions et cas de charge

Combinaisons d'actions et cas de charge constituent deux notions distinctes (le CAS DE CHARGE correspondant à la répartition des actions sur la structure).

Par exemple, pour une poutre-console, la combinaison avec $G_{\max}$ et Q_B conduit aux cas de charge suivants pour la détermination des sollicitations extrêmes :

2.5.2. Origine et nature des actions

$G_{\max}$ et $G_{\min}$ désignent des actions d'origine et de nature différentes. D'où : le poids propre d'une poutre continue, **dans toutes les travées** :

- à la même valeur : $G_{\max}$ (ou $G_{\min}$),
- entre dans les combinaisons avec le même coefficient : 1,35 (ou 1).

2.5.3. Actions variables

Les actions variables sont à considérer les unes après les autres comme « action de base » et doivent être introduites dans les combinaisons d'actions de la manière la plus défavorable.

2.5.4. Cas des bâtiments

Planchers-terrasses des bâtiments : considérer les charges d'exploitation ou les charges climatiques, mais non les deux simultanément.

Pour les IGH ⁽¹⁾, la dégression des charges d'exploitation s'effectue avant la prise en compte des coefficients : ψ_{0i} , ψ_{1i} et ψ_{2i} .

3. CARACTÉRISTIQUES DES MATÉRIAUX

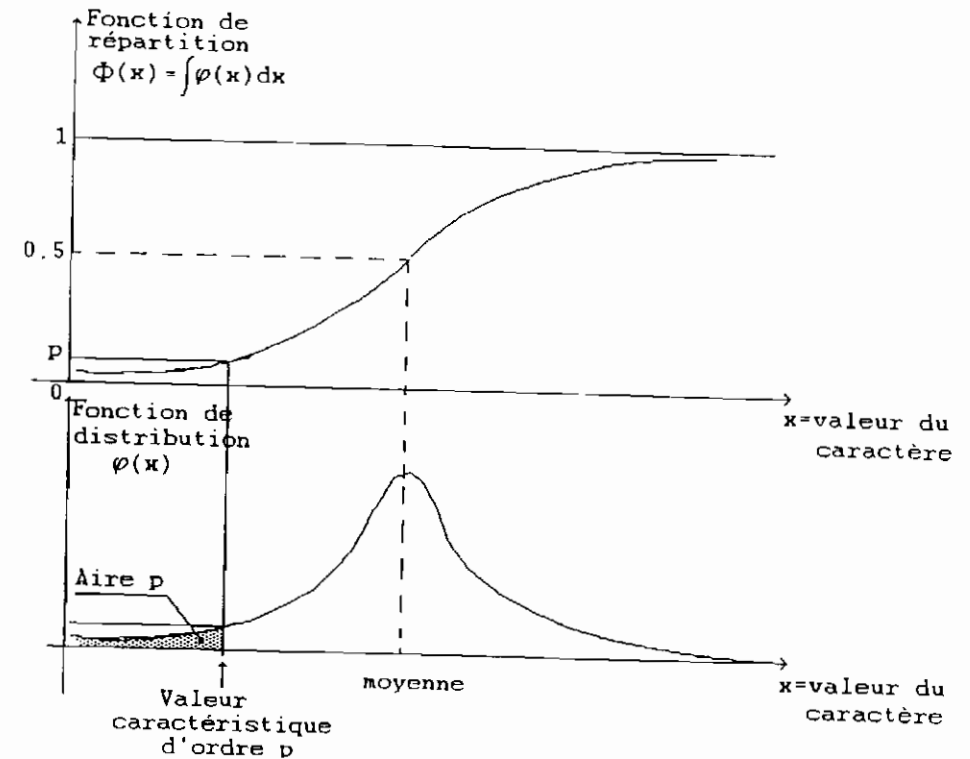
3.1. VALEURS DES RÉSISTANCES

La variabilité de la résistance (et des autres propriétés) du béton et de l'acier est prise en compte en définissant sur une base statistique, à partir des mesures effectuées en laboratoire sur éprouvettes, des **RÉSISTANCES CARACTÉRISTIQUES**.

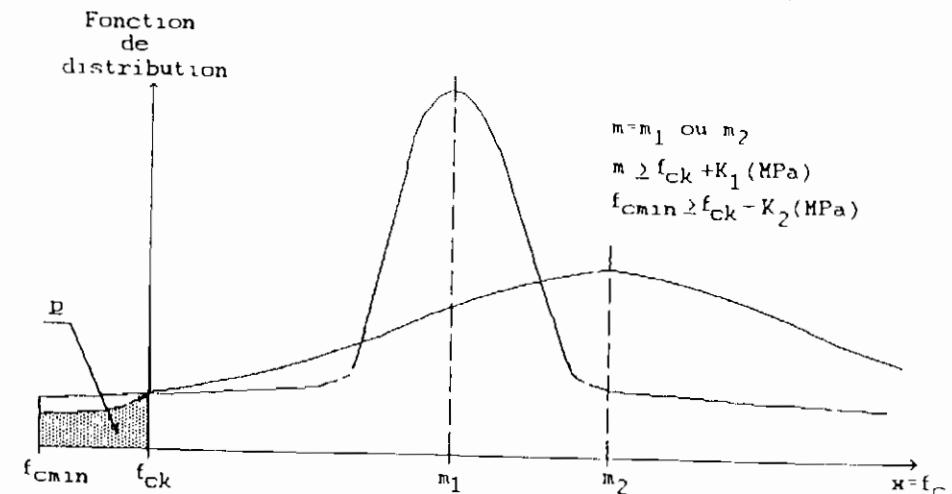
La **VALEUR CARACTÉRISTIQUE** d'ordre p d'un caractère déduit d'un ensemble de valeurs est la valeur de ce caractère telle que la population des valeurs qui lui est inférieure est égale à p ($0 < p < 1$).

On définit ainsi la valeur du caractère considéré qui a une probabilité p , acceptée a priori, de ne pas être atteinte.

(1) Immeubles de grande hauteur



Régularisation des courbes de répartition normales (gaussiennes) afin d'éviter les trop fortes dispersions (surtout lorsque l'on dispose d'un petit nombre d'essais) :



K_1 et K_2 = «contraintes» fonction :

- du nombre d'échantillons essayés,
- de la résistance caractéristique à la compression du béton à 28 jours (voir paragraphe 3.3.1.).

3.2. ACIERS

3.2.1. Caractéristiques géométriques

Les barres utilisées sont caractérisées par leur diamètre nominal : Φ

Φ (mm)	6	8	10	12	14	16	20	25	32	40
Section (cm ²)	0,28	0,50	0,79	1,13	1,54	2,01	3,14	4,91	8,04	12,57
Poids (kg/m)	0,222	0,395	0,616	0,888	1,208	1,579	2,466	3,854	6,313	9,864

3.2.2. Caractéristiques mécaniques

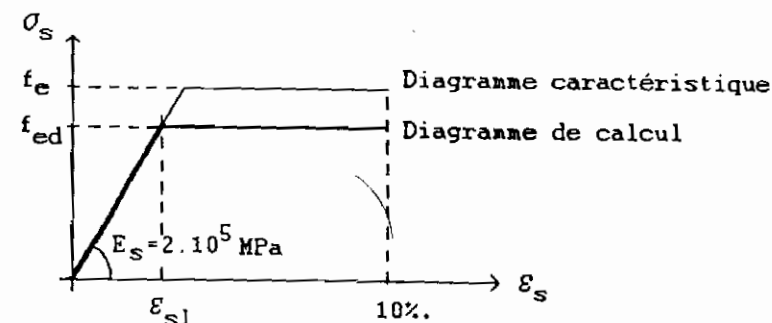
f_c = LIMITE D'ÉLASTICITÉ GARANTIE (résistance caractéristique).

On distingue :

- des ronds lisses :
Fe E 215 $f_c = 215$ MPa
Fe E 235 $f_c = 235$ MPa
- des barres à haute adhérence (HA) :
Fe E 400 $f_c = 400$ MPa
Fe E 500 $f_c = 500$ MPa
- des fils tréfilés HA et des treillis soudés formés de ces fils (TSHA) :
Fe TE 400 $f_c = 400$ MPa : fils HA
Fe TE 500 $f_c = 500$ MPa : fils HA et TSHA
- des fils tréfilés lisses qui sont assemblés en treillis soudés (TSL) :
TSL 500 $f_c = 500$ MPa

3.2.3. Diagramme contraintes-déformations

Le diagramme de calcul se déduit du diagramme caractéristique (idéalisé) par une affinité parallèle à la droite de Hooke et de rapport $1/\gamma_s$.



$$f_{cd} = \frac{f_c}{\gamma_s} \quad \text{avec : } \gamma_s = \begin{cases} 1,00 & \text{pour les combinaisons accidentelles} \\ 1,15 & \text{dans les autres cas} \end{cases}$$

$$\varepsilon_{s1} = \frac{f_{cd}}{E_s}$$

3.2.4. Caractères d'adhérence

a) Coefficient de fissuration η

$$\eta = \begin{cases} 1,0 & \text{pour ronds lisses et fils tréfilés lisses en treillis soudés} \\ 1,3 & \text{pour fils HA } \Phi < 6 \text{ mm} \\ 1,6 & \text{pour barres HA et fils HA } \Phi \geq 6 \text{ mm} \end{cases}$$

b) Coefficient de scellement ψ_s

$$\psi_s = \begin{cases} 1,0 & \text{pour ronds lisses} \\ 1,5 & \text{pour barres et fils HA} \end{cases}$$

3.3. BÉTONS

3.3.1. Résistances

f_{c28} = résistance caractéristique à la compression,

f_{t28} = résistance caractéristique à la traction,

$$f_{t28} = 0,6 + 0,06 \cdot f_{c28} \text{ (MPa)}$$

soit, dans les cas courants :

$f_{t,28}$ (MPa)	$f_{t,j}$ (MPa)
20	18
22	19
25	21
30	24

3.3.2. Modules de déformation

Instantanée à j jours d'âge :

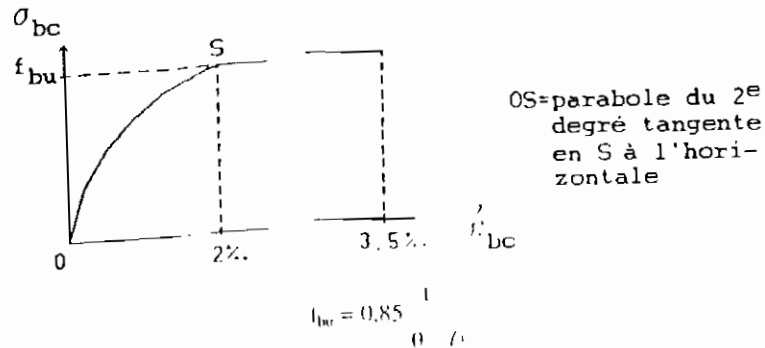
$$E_{ij} = 11\,000 \sqrt[3]{f_{t,j}} \text{ (MPa)}$$

Différée (charges de longue durée) :

$$E_{vj} = \frac{E_{ij}}{1 + \mu}$$

3.3.3. Diagramme contraintes-déformations

Diagramme parabole-rectangle



avec :

$$\gamma_b = \begin{cases} 1,1 & \text{combinaison d'actions accidentelles} \\ 1,5 & \text{autres cas} \end{cases}$$

et en fonction de la durée t d'application des combinaisons d'actions :

$$\theta = \begin{cases} 1,00 & t > 24 \text{ heures} \\ 0,90 & 1 \text{ heure} \leq t \leq 24 \text{ heures} \\ 0,85 & t < 1 \text{ heure} \end{cases}$$

3.3.4. Retrait du béton

$$\frac{\Delta l}{l} = \begin{cases} 1,5 \cdot 10^{-4} & \text{dans les climats très humides} \\ 2,0 \cdot 10^{-4} & \text{en climat humide, ce qui est le cas de la France métropolitaine} \\ & \text{sauf dans le quart sud-est} \\ 3,0 \cdot 10^{-4} & \text{en climat tempéré sec, tel que le quart sud-est de la France métropolitaine} \\ 4,0 \cdot 10^{-4} & \text{en climat chaud et sec} \\ 5,0 \cdot 10^{-4} & \text{en climat très sec ou désertique} \end{cases}$$

4. HYPOTHÈSES ET DONNÉES POUR LE CALCUL DU BÉTON ARMÉ

On distingue deux types d'états-limites pour le dimensionnement (armatures et béton) :

- états-limites ultimes (E.L.U.),
 - de résistance,
 - de stabilité de forme,
- états-limites de service (E.L.S.) atteints :
 - par compression du béton,
 - par ouverture des fissures,
 - par déformation.

4.1. HYPOTHÈSES SUPPLÉMENTAIRES GÉNÉRALES VALABLES POUR TOUS LES ÉTATS-LIMITES

Au cours de la déformation, les sections droites restent planes et conservent leurs dimensions (principe de Navier-Bernoulli).

La résistance du béton tendu est considérée comme nulle.

Par adhérence, les déformations relatives de l'acier et du béton au contact sont les mêmes.

4.2. HYPOTHÈSES SUPPLÉMENTAIRES POUR LES E.L.S.

En vertu de la loi de Hooke, les contraintes sont proportionnelles aux déformations relatives :

$$\sigma = E \cdot \epsilon = E \cdot \frac{\Delta l}{l}$$

On définit le coefficient d'équivalence par la relation :

$$n = \frac{E_s}{E_b} = 15 \text{ (forfaitairement)}$$

4.3. HYPOTHÈSES SUPPLÉMENTAIRES POUR L'E.L.U.

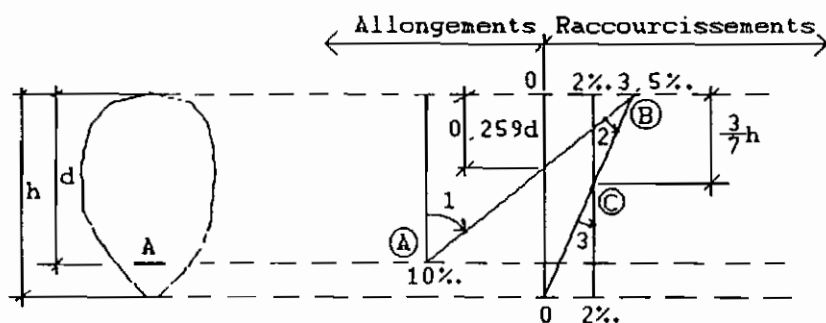
Le raccourcissement relatif du béton est limité :

- à 3,5/1 000 en flexion,
- à 2/1 000 en compression simple.

L'allongement relatif de l'acier est limité :

- à 10/1 000.

Le dimensionnement à l'état-limite ultime est conduit en supposant que le diagramme des déformations passe par l'un des trois pivots A, B ou C définis ci-dessous.



■ Pivot A Région 1

- Allongement de l'acier le plus tendu : $\epsilon_s = 10 \cdot 10^{-3}$;

pièces soumises à la traction simple ou à la flexion simple ou composée.

■ Pivot B Région 2

- Raccourcissement de la fibre de béton la plus comprimée : $\epsilon_{bc} = 3,5 \cdot 10^{-3}$;

pièces soumises à la flexion simple ou composée.

■ Pivot C Région 3

- Raccourcissement de la fibre de béton à la distance $3h/7$ de la fibre la plus comprimée :

$$\epsilon_{bc} = 2 \cdot 10^{-3};$$

pièces soumises à la flexion composée ou à la compression simple.

II. EXERCICE : COMBINAISONS D'ACTIONS

— ÉNONCÉ —

Pour l'ossature de bâtiment figurée ci-contre :

■ Charges :

- sur terrasse et les trois planchers :
 $g = 17 \text{ kN/m}^2$ permanentes,
 $q = 17,83 \text{ kN/m}^2$ variables
 $(\psi_0 = 0,77)$.

- acrotères et façades :

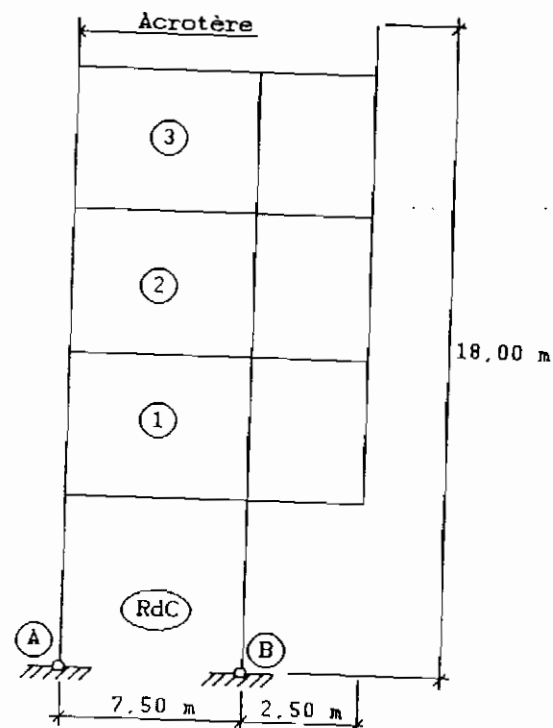
$$G = 48 \text{ kN/m à l'E.L.S.},$$

- vent :

$$w = 5,60 \text{ kN/m}^2 \text{ à l'E.L.U.}$$

■ On se propose :

- 1) De déterminer les charges globales pour une longueur unitaire de bâtiment, en supposant pour simplifier que les planchers sont simplement appuyés sur les poteaux, au niveau :
 - du plancher haut du rez-de-chaussée (RdC) pour les charges verticales,
 - de la base des poteaux pour les charges horizontales.



— CORRIGÉ —

1. CHARGES À L'ÉTAT-LIMITE ULTIME

1.1. CHARGES VERTICALES

Pour 1 mètre de longueur de bâtiment :

$$\text{– Charges permanentes : } g = (3 + 1) \cdot 17 = 68 \text{ kN/m}$$

$$\text{– Charges variables : } q = (3 + 1) \cdot 17,83 = 71,32 \text{ kN/m}$$

$$\text{– Façades : } G = 48 \text{ kN/façade}$$

1.2. CHARGES HORIZONTALES

$$W = w \cdot h$$

appliqué à $h/2$ au dessus des fondations

$$W = 5,60 \cdot 18 = 100,80 \text{ kN}$$

appliqué à 9,00 m au dessus du niveau AB.

2. COMBINAISONS D'ACTIONS À L'E.L.U.

La formule générale des combinaisons d'actions à considérer à l'E.L.U. s'écrit :

$$1,35 \cdot G_{\max} + G_{\min} \left\{ \begin{array}{l} 1,5 \left\{ \begin{array}{l} Q_B \\ W \\ S_n \end{array} \right. \\ 1,35 [T] \end{array} \right. + 1,3 \left\{ \begin{array}{l} 0,77 \cdot W \\ 0,77 \cdot S_n \\ \psi_0 \cdot Q_B \\ 0,77 \cdot W + \psi_0 \cdot Q_B \\ 0,77 \cdot S_n + \psi_0 \cdot Q_B \\ 0,77 W + 0,77 \cdot S_n \end{array} \right. + 1,3 \left\{ \begin{array}{l} 0,8 \\ 1,3 \end{array} \right. T$$

Elle conduit à deux combinaisons d'actions lorsque l'on prend Q_B comme action variable de base :

$$1,35 G_{\max} + G_{\min} + 1,5 \cdot Q_B \quad (1)$$

$$1,35 G_{\max} + G_{\min} + 1,5 \cdot Q_n + W \quad (2)$$

et à deux autres combinaisons d'actions lorsque l'on choisit W comme action variable de base :

$$1,35 G_{\max} + G_{\min} + 1,5 \cdot W + 1,3 \cdot \psi_0 Q_B \quad (3)$$

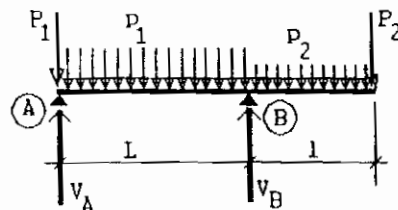
$$1,35 G_{\max} + G_{\min} + 1,5 \cdot W \quad (4)$$

Chacune de ces quatre combinaisons d'actions est à décomposer en cas de charge suivant l'effet recherché (cas de charge = disposition des charges sur la structure)

3. COMBINAISON (1) : $1,35 G_{\max} + G_{\min} + 1,5 Q_B$

3.1. INTRODUCTION

Sous l'effet des charges verticales, l'étude du bâtiment se ramène au schéma statique suivant :



$$M_B' = V_A \cdot L = P_1 \cdot L - P_2 \cdot l + p_1 \frac{L^2}{2} - p_2 \frac{l^2}{2} \Rightarrow V_A = \frac{P_1 \cdot L - P_2 \cdot l + p_1 \frac{L^2}{2} - p_2 \frac{l^2}{2}}{L}$$

D'où :

$$V_A^{\max} \Leftrightarrow \begin{cases} P_1 \text{ et } p_1 \text{ maxi} \\ P_2 \text{ et } p_2 \text{ mini} \end{cases}$$

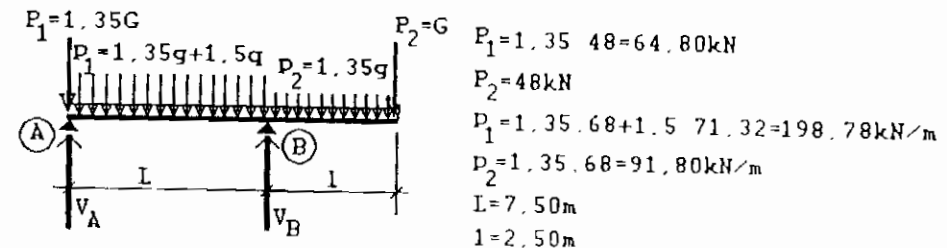
$$V_A^{\min} \Leftrightarrow \begin{cases} P_1 \text{ et } p_1 \text{ mini} \\ P_2 \text{ et } p_2 \text{ maxi} \end{cases}$$

De la même manière :

$$M_A' = V_B \cdot L = P_2 (L + l) + p_1 \frac{L^2}{2} + p_2 \cdot l \left(L + \frac{l}{2} \right) \Rightarrow V_B = \frac{P_2 (L + l) + p_1 \frac{L^2}{2} + p_2 \cdot l \left(L + \frac{l}{2} \right)}{L}$$

3.2. RÉACTION D'APPUI MAXIMALE EN A

a) Cas de charge



b) Remarque

Le poids propre des planchers, g , intervient sur toute la longueur de ces derniers dans $G_{\max}$.

Le poids G des façades est tantôt multiplié par 1,35 et tantôt par 1,00 dans la mesure où ces deux façades ne sont pas identiques ni composées des mêmes matériaux.

c) Réaction d'appui

$$V_A = \frac{P_1 \cdot L - P_2 \cdot l + p_1 \frac{L^2}{2} - p_2 \frac{l^2}{2}}{L} = \frac{64,80 \cdot 7,50 - 48 \cdot 2,5 + 198,78 \frac{7,50^2}{2} - 91,80 \frac{2,50^2}{2}}{7,50}$$

$$V_A^{\max} = 755,98 \text{ kN}$$

3.3. RÉACTION D'APPUI MINIMALE EN A

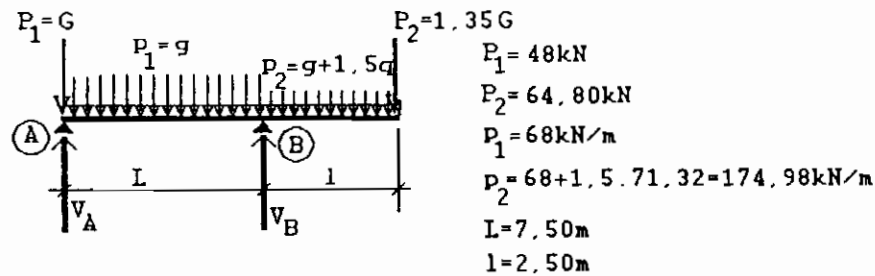
a) Remarque

Compte tenu du rapport des portées $L/l=3$, la part de V_A due au poids propre des planchers est :

$$V_A^s = (9 \cdot p_1 - p_2) \frac{l^2}{2 \cdot L} = \frac{4 \cdot p \cdot l^2}{L}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} V_A^{\max} \Leftrightarrow p = 1,35 \cdot g \\ V_A^{\min} \Leftrightarrow p = g \end{cases}$$

b) Cas de charge



c) Réaction d'appui

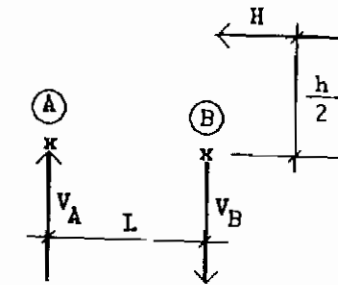
$$V_A = \frac{P_1 \cdot L - P_2 \cdot l + p_1 \frac{L^2}{2} - p_2 \frac{l^2}{2}}{L} = \frac{48 \cdot 7,50 - 64,8 \cdot 2,5 + 68 \frac{7,50^2}{2} - 174,98 \frac{2,50^2}{2}}{7,50}$$

$$V_A^{\min} = 208,49 \text{ kN}$$

4. COMBINAISON (2) : $1,35 \cdot G_{\max} + G_{\min} + 1,5 \cdot Q_B + W$

4.1. INTRODUCTION

L'effet du vent au niveau des fondations se ramène au schéma statique suivant :

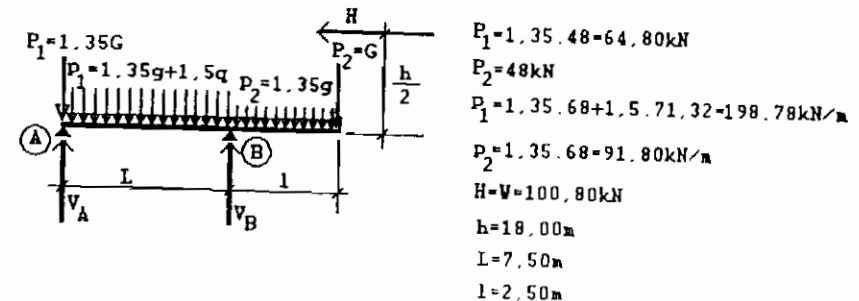


$$V_A^{\max} = V_B = \frac{H \cdot h}{2 \cdot L} \quad \text{d'où : } \begin{cases} V_A^{\max} \Leftrightarrow \text{Vent soufflant de B vers A} \\ V_A^{\min} \Leftrightarrow \text{Vent soufflant de A vers B} \end{cases}$$

Pour V_B , c'est l'inverse qui se produit.

4.2. RÉACTION D'APPUI MAXIMALE EN A

a) Cas de charge



b) Réaction d'appui

$$V_A = \frac{P_1 \cdot L - P_2 \cdot l + p_1 \frac{L^2}{2} - p_2 \frac{l^2}{2}}{L} + \frac{H \cdot h}{2 \cdot L}$$

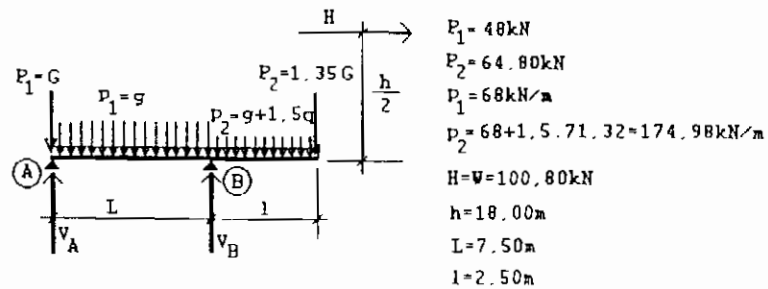
$$V_A = \frac{64,8 \cdot 7,50 - 48 \cdot 2,5 + 198,78 \frac{7,50^2}{2} - 91,8 \frac{2,50^2}{2}}{7,50} + 100,80 \frac{18,00}{2 \cdot 7,50}$$

$$V_A^{\max} = 755,98 + 120,96 = 876,94 \text{ kN (voir 3.2.c)}$$

4.3. RÉACTION D'APPUI MINIMALE EN A

a) Cas de charge

(Compte tenu de la remarque du paragraphe 3.3. a) :



b) Réaction d'appui

$$V_A = \frac{P_1 \cdot L - P_2 \cdot l + p_1 \frac{L^2}{2} - p_2 \frac{l^2}{2}}{L} - \frac{H \cdot h}{2 \cdot L}$$

$$V_A = \frac{48 \cdot 7.50 - 64.8 \cdot 2.5 + 68 \frac{7.50^2}{2} - 174.98 \frac{2.50^2}{2}}{7.50} - 100.80 \frac{18.00}{2 \cdot 7.50}$$

$$V_A^{\min} = 208.49 - 120.96 = 87.53 \text{ kN}$$

5. COMBINAISON (3) : $1.35 G_{\max} + G_{\min} + 1.5.W + 1.3 \psi_0 Q_B$

5.1. RÉACTION D'APPUI MAXIMALE EN A

Un calcul identique à celui effectué au paragraphe 4.2. avec $p_1 = 1.35 \cdot 68 + 1.3 \cdot 0.77 \cdot 71.32$ et $H = 1.5 \cdot 100.80$ donne :

$$V_A^{\max} = 803.69 \text{ kN}$$

5.2. RÉACTION D'APPUI MINIMALE EN A

Un calcul identique à celui effectué au paragraphe 4.3. avec $p_2 = 68 + 1.3 \cdot 0.77 \cdot 71.32$ et $H = 1.5 \cdot 100.80$ donne :

$$V_A^{\min} = 41.91 \text{ kN}$$

6. COMBINAISON (4) : $1.35 G_{\max} + G_{\min} + 1.5.W$

Cette combinaison d'actions est moins «agressive» que la combinaison (3) qui comporte en plus le terme en $1.3 \psi_0 Q_B$, donc qui fait intervenir les charges d'exploitation uniquement dans les sections où elles induisent l'effet recherché (maxi ou mini).

7. CONCLUSION – RÉACTIONS EXTRÊMES EN A

On a le tableau récapitulatif :

REACTION COMBINAISON	$V_A^{\max} \text{ (kN)}$	$V_A^{\min} \text{ (kN)}$
(1)	755.98	208.49
(2)	876.94 *	87.53
(3)	803.69	41.91 *
Enveloppe	876.94	41.91

NB : L'astérisque correspond à la combinaison d'action prépondérante

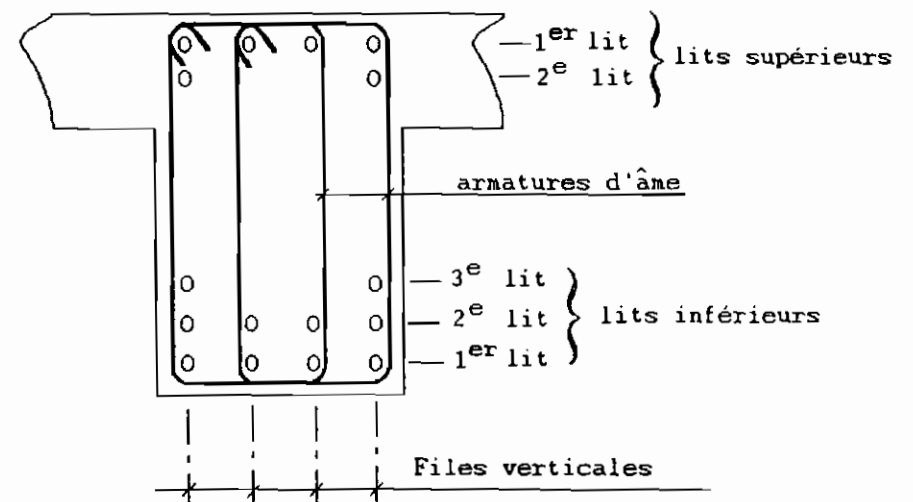
CHAPITRE 3

ASSOCIATION ACIER-BÉTON

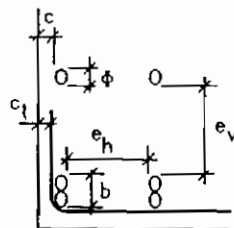
I. RAPPELS DE COURS

1. DÉFINITIONS

Dans une section droite d'une poutre rectiligne, on utilisera la terminologie ci-après :



2. DISPOSITION DES ARMATURES



2.1. ENROBAGE

C'est la distance du nu d'une armature à la paroi la plus proche.

$$c \text{ (ou } c_t) = \text{Max} \begin{cases} e \\ \phi \\ 1 \text{ cm} \end{cases}$$

Avec :

$$e = \begin{cases} 5 \text{ cm} : \text{ouvrages à la mer ou exposés aux embruns,} \\ 3 \text{ cm} : \text{parois non coffrées soumises à des actions agressives,} \\ \quad \text{parois exposées aux intempéries, aux condensations ou en contact avec un liquide,} \\ \quad \text{ouvrages à la mer avec béton protégé par un procédé efficace,} \\ 1 \text{ cm} : \text{parois situées dans des locaux clos ou couverts, non exposées à des condensations.} \end{cases}$$

Φ = diamètre de l'armature considérée.

2.2. DISTANCES ENTRE BARRES

Les barres d'acier sont disposées :

- de manière isolée,
- en paquet vertical (jamais horizontal) de deux barres,
- en paquet de trois barres (non considéré dans la suite)

2.2.1. Verticalement

$$e_v \geq \text{Max} \begin{cases} \phi \text{ ou } b \\ c_g \end{cases}$$

Avec :

e_v = distance libre verticale entre :

- deux barres isolées,

- ou deux paquets de deux barres,

- ou une barre isolée et un paquet de deux barres,

c_g = plus grosse dimension du granulat utilisé dans le béton (2,5 cm en général).

2.2.2. Horizontalement

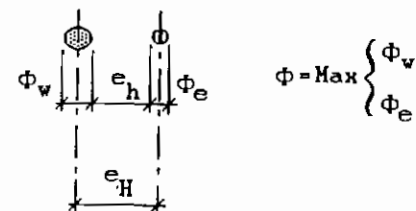
$$e_h \geq \text{Max} \begin{cases} \phi \text{ ou } b \\ 1,5.c_g \end{cases}$$

Avec :

c_h = distance libre horizontale entre :

- deux barres isolées,
- ou deux paquets de deux barres,
- ou une barre isolée et un paquet de deux barres.

La distance entre axes des files verticales doit être telle que le bétonnage soit réalisé correctement entre elles (ménager le passage des aiguilles de vibration du béton...) :



À titre indicatif et sans que cela soit une obligation réglementaire, on peut prendre :

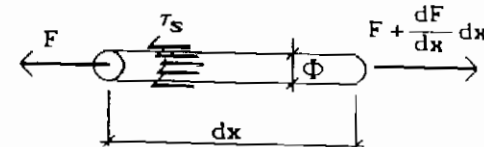
$$e_h = e_h + \frac{\phi_w + \phi_e}{2} \geq \begin{cases} 8 \text{ cm} & \text{si } \phi < 25 \text{ mm} \\ 10 \text{ cm} & \text{si } \phi \geq 25 \text{ mm} \end{cases}$$

3. CONTRAINTE D'ADHÉRENCE

3.1. CONTRAINTE D'ADHÉRENCE MOYENNE

La contrainte d'adhérence moyenne est égale au quotient de la variation d'effort axial par le périmètre de l'armature :

$$\tau_s = \frac{\frac{dF}{dx}}{\pi \cdot \Phi}$$



3.2. CONTRAINTE LIMITE D'ADHÉRENCE

Pour assurer un ancrage correct, c'est-à-dire empêcher le glissement de l'armature dans la gaine de béton qui l'entoure, il faut limiter la contrainte d'adhérence à la valeur :

$$\tau_{su} = 0,6 \cdot \psi_s^2 \cdot f_{tj}$$

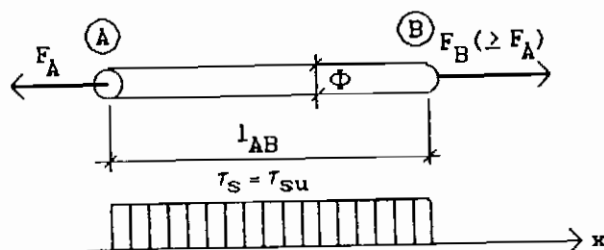
avec :

$$\psi_s = \begin{cases} 1 & : \text{ronds lisses,} \\ 1,5 & : \text{barres HA courantes.} \end{cases}$$

f_{tj} = résistance caractéristique à la traction du béton à j jours.

3.3. ANCRAGE DES BARRES DROITES ISOLÉES

En supposant $\tau_s = \tau_{su}$ = constante entre deux sections droites A et B distantes de l_{AB} et soumises respectivement aux efforts F_A et F_B ($\geq F_A$), on a :



$$\tau_s = \frac{dF}{\pi \cdot \Phi \cdot dx} = \tau_{su} \Rightarrow dF = \pi \cdot \Phi \cdot \tau_{su} \cdot dx$$

d'où par intégration :

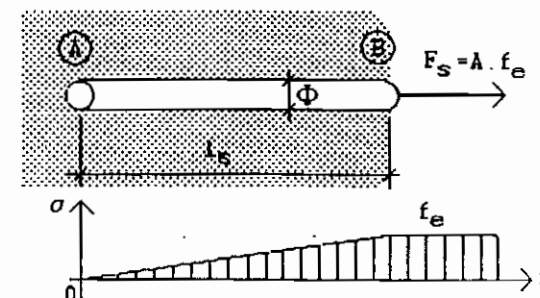
$$F_B - F_A = \pi \cdot \Phi \cdot \tau_{su} \cdot l_{AB}$$

ce qui conduit à :

$$F_B = F_A + \pi \cdot \Phi \cdot \tau_{su} \cdot l_{AB}$$

ANCERER une barre, soumise dans une section B à un effort de traction F_s axial, c'est assurer, à partir de cette section, la transmission intégrale de cet effort au béton par adhérence.

Si $F_s = A \cdot f_c = \frac{\pi \cdot \Phi^2}{4} f_c$ (ou si la contrainte en B vaut f_c) on a un «ANCORAGE TOTAL».



3.4. LONGUEUR DE SCHELLEMENT DROIT

C'est la longueur nécessaire pour assurer un ancrage total :

$$\left. \begin{aligned} F_A &= 0 \\ F_B &= A \cdot f_c = \frac{\pi \cdot \Phi^2}{4} f_c \\ l_{AB} &= l_s \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\pi \cdot \Phi^2}{4} f_c = 0 + \pi \cdot \Phi \cdot \tau_{su} \cdot l_s$$

d'où :

$$l_s = \frac{\Phi}{4} \cdot \frac{f_c}{\tau_{su}}$$

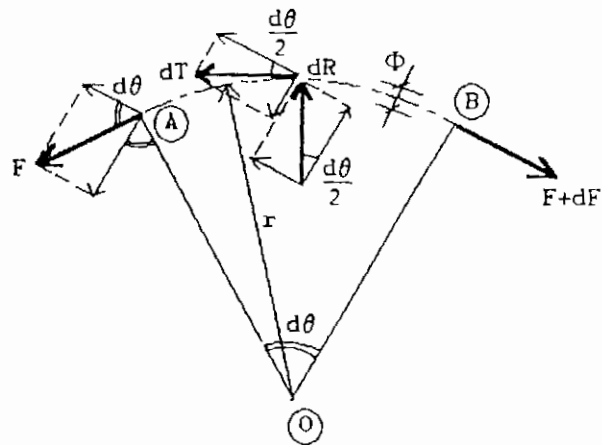
On peut prendre forfaitairement pour $f_{c28} \leq 25$ MPa :

$$l_s = \begin{cases} 40 \cdot \Phi : \text{barres HA Fe E 400} \\ 50 \cdot \Phi : \text{barres HA Fe E 500} \\ 50 \cdot \Phi : \text{ronds lisses.} \end{cases}$$

3.5. ADHÉRENCE DES BARRES COURBES

Considérons un tronçon de barre courbe tendue, infiniment petit, représenté par sa ligne moyenne AB d'ouverture $d\theta$.

On suppose que l'on est à l'état-limite de glissement ($\tau_s = \tau_{su}$)



Le tronçon AB est soumis :

- aux forces de traction F en A et $F + dF$ en B,
- à la force due à l'adhérence sur l'arc $AB = r \cdot d\theta : dT$,
- à la réaction transversale du béton : dR .

Par projection des forces sur le rayon OB :

$$- F \cdot \sin d\theta - dT \cdot \sin \frac{d\theta}{2} + dR \cdot \cos \frac{d\theta}{2} = 0$$

soit puisque $d\theta$ et dT sont des infiniment petits

$$dR = F \cdot d\theta$$

En désignant par μ le coefficient de frottement acier sur béton, l'effort dR développe une force tangentielle

$$\mu \cdot dR = \mu \cdot F \cdot d\theta$$

de sens opposé au sens du glissement de la barre

Par projection des forces sur la tangente en B à la barre :

$$F + dF - F \cdot \cos d\theta - \mu \cdot F \cdot d\theta - dT \cdot \cos \frac{d\theta}{2} = 0$$

$$dF - \mu \cdot F \cdot d\theta - \pi \cdot \Phi \cdot r \cdot d\theta \cdot \tau_{su} = 0$$

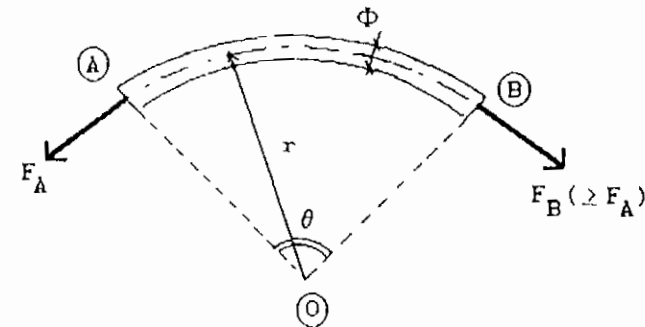
que l'on écrit :

$$dF - \mu \cdot d\theta \left(F + \frac{\pi \cdot \Phi \cdot r \cdot \tau_{su}}{\mu} \right) = 0$$

soit :

$$\frac{dF}{F + \frac{\pi \cdot \Phi \cdot r \cdot \tau_{su}}{\mu}} = \mu \cdot d\theta$$

Pour un tronçon courbe de barre AB d'angle au centre θ et soumis à ses extrémités aux efforts F_A et $F_B (\geq F_A)$,



par intégration entre A et B, il vient :

$$\left[\text{Log} \left(F + \frac{\pi \cdot \Phi \cdot r \cdot \tau_{su}}{\mu} \right) \right]_A^B = \mu \cdot [\theta]_A^B \quad \text{Log} \left(\frac{F_B + \frac{\pi \cdot \Phi \cdot r \cdot \tau_{su}}{\mu}}{F_A + \frac{\pi \cdot \Phi \cdot r \cdot \tau_{su}}{\mu}} \right) = \mu \cdot \theta$$

$$\frac{F_B + \frac{\pi \cdot \Phi \cdot r \cdot \tau_{su}}{\mu}}{F_A + \frac{\pi \cdot \Phi \cdot r \cdot \tau_{su}}{\mu}} = e^{\mu \theta}$$

$$\text{soit : } F_B = F_A \cdot e^{\mu \theta} + \frac{\pi \cdot \Phi \cdot r \cdot \tau_{su}}{\mu} \left(e^{\mu \theta} - 1 \right)$$

expression que l'on écrit :

$$F_B = \psi \cdot F_A + \psi' \cdot \pi \cdot \Phi \cdot r \cdot \tau_{su}$$

avec :

$$\psi = e^{\mu \theta}$$

$$\psi' = \frac{e^{\mu \theta} - 1}{\mu} = \frac{\psi - 1}{\mu}$$

$$\mu = 0,4$$

Remarque :

Cette formule est à rapprocher de celle concernant les ancrages des barres droites isolées, la formule pour les ancrages courbes s'en déduisant :

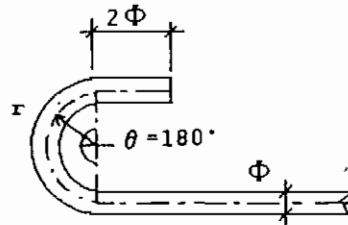
- 1) en multipliant F_A par ψ ,
- 2) en multipliant $\pi \cdot \Phi \cdot \tau_{su} \cdot l_{AB}$ par ψ' ,
- 3) en faisant $l_{AB} = r$.

4. ANCRAGE DES BARRES

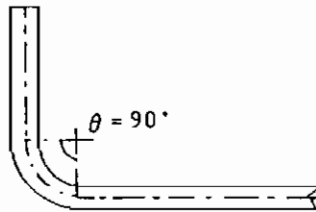
4.1. TYPES D'ANCRAGES D'EXTRÉMITÉ

On utilise le plus couramment :

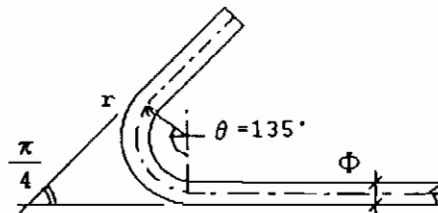
– les « crochets normaux » :



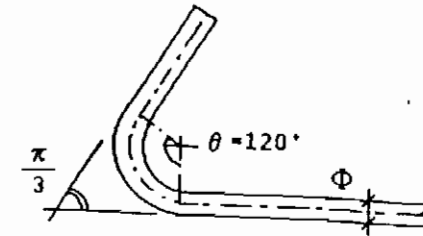
– les « retours d'équerre » :



– les « ancrages à 45° » ($\theta = 135^\circ$) :



– les « ancrages à 60° » ($\theta = 120^\circ$) :



4.2. RAYONS DE COURBURE DE L'AXE DES BARRES

Ils résultent :

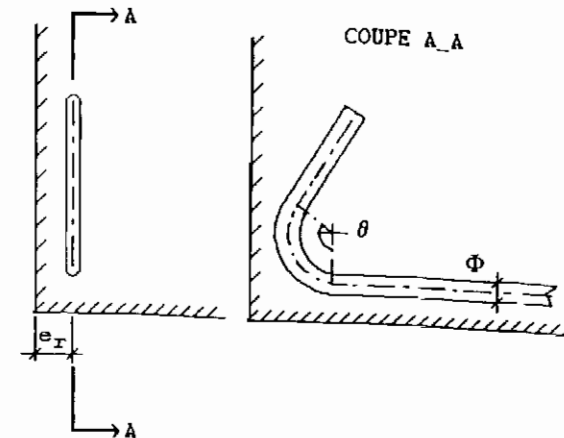
- 1) des conditions de façonnage des barres (1) :
 - + $r \geq 3 \cdot \Phi$ pour Fe E 215 et Fe E 235,
 - + $r \geq 5,5 \cdot \Phi$ pour les barres HA,
- 2) de la condition de non-écrasement du béton :

$$r \geq 0,20 \cdot \Phi \cdot \frac{\sigma_s}{f_{cj}} \left(1 + \frac{\Phi}{e_r}\right) \nu$$

avec :

σ_s = contrainte à l'origine de la courbure sous sollicitation ultime,
 e_r = distance du centre de courbure de la barre à la paroi la plus proche,

$$\nu = \frac{1 + 2 m}{3},$$



(1) Les mandrins de cintrage respectifs ont des diamètres $D \geq 5\Phi$ et $D \geq 10\Phi$

m = nombre de lits courbés simultanément,

f_{cj} = résistance caractéristique à la compression du béton à j jours.

3) des conditions propres à certaines formes de barres ou d'ancrages :

- courbes sur toute leur longueur,
- munies de boucles de jonction (épingles à cheveux) :

$$r \geq 0,35 \cdot \Phi \cdot \frac{f_e}{f_{cj}} \left(1 + \frac{2 \cdot n \cdot \Phi}{b} \right) \cdot v$$

avec :

f_e = limite d'élasticité de l'acier,

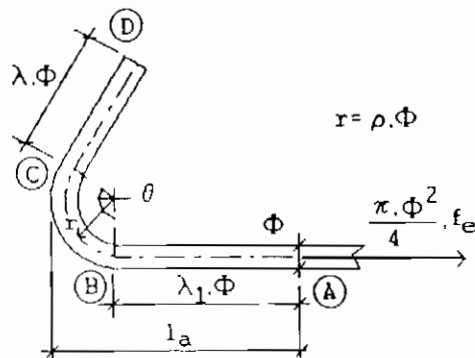
n = nombre de barres composant un lit,

b = largeur de l'élément de béton.

4.3. MÉTHODE DE CALCUL D'UN ANCRAGE COURBE

Pour l'ancrage courbe ABCD ci-dessous, soumis en A à un effort :

$$F_A = A \cdot f_c = \frac{\pi \Phi^2}{4} \cdot f_c$$



- en D : $F_D = 0$

- en C : $F_C = F_D + \pi \cdot \Phi (\lambda \cdot \Phi) \cdot \tau_{su} = \lambda \cdot \pi \cdot \Phi^2 \cdot \tau_{su}$

- en B : $F_B = \psi \cdot F_C + \psi' \cdot \pi \cdot \Phi \cdot r \cdot \tau_{su} = \pi \cdot \Phi^2 \cdot \tau_{su} (\lambda \cdot \psi + \rho \cdot \psi')$

- en A : $F_A = F_B + \pi \cdot \Phi (\lambda_1 \cdot \Phi) \cdot \tau_{su} = \pi \cdot \Phi^2 \cdot \tau_{su} (\lambda \cdot \psi + \rho \cdot \psi' + \lambda_1) = \frac{\pi \Phi^2}{4} \cdot f_c$

d'où, après division par $\pi \cdot \Phi \cdot \tau_{su}$

$$\Phi (\lambda \cdot \psi + \rho \cdot \psi' + \lambda_1) = \frac{\Phi}{4} \cdot \frac{f_c}{\tau_{su}} = l_s$$

r et θ étant fixés, on a donc deux possibilités :

1) calcul de la longueur $\lambda \cdot \Phi$ du retour rectiligne d'extrémité si $\lambda_1 \cdot \Phi$ est connu :

$$\lambda \cdot \Phi = \frac{1}{\psi} [l_s - \Phi (\rho \cdot \psi' + \lambda_1)]$$

2) calcul de la profondeur d'ancrage l_a si l'on connaît $\lambda \cdot \Phi$:

$$l_a = \lambda_1 \cdot \Phi + r + \frac{\Phi}{2} = \left(\lambda_1 + \rho + \frac{1}{2} \right) \cdot \Phi$$

soit :

$$l_a = l_s - \Phi \left[\lambda \cdot \psi + \rho \cdot \psi' - \rho - \frac{1}{2} \right]$$

$$l_a = l_s - \Phi \left[\lambda \cdot \psi + \rho (\psi' - 1) - \frac{1}{2} \right]$$

que l'on écrit :

$$l_a = l_s - k \cdot \Phi$$

$$k = \lambda \cdot \psi + \rho (\psi' - 1) - \frac{1}{2}$$

4.4. ANCRAGE TOTAL DES CADRES, ÉTRIERS ET ÉPINGLES

Rayons de courbure des cadres, étriers et épingles :

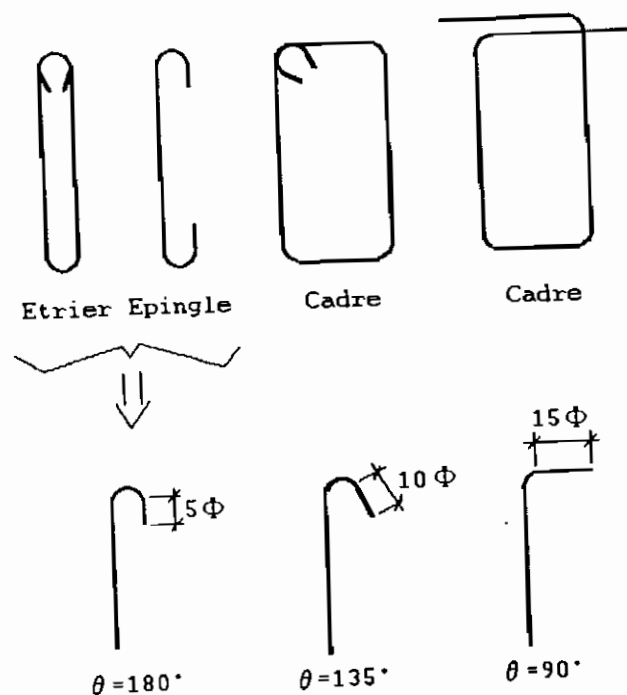
$r = \rho \cdot \Phi$ (diamètre du mandrin de cintrage : $D = 2r - \Phi$)

avec :

$\rho \geq 2$ ronds lisses, ($D \geq 3 \Phi$),

$\rho > 3$ barres HA ($D \geq 5 \Phi$).

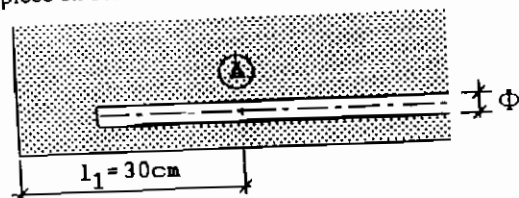
L'ancrage des cadres, étriers et épingles est considéré comme total si on respecte :



II. EXERCICE : ANCRAGE COURBE

— ÉNONCÉ —

On cherche à réaliser l'ancrage total d'une barre $\Phi 32$ HA à partir d'un point A situé à 30 cm du bord d'une pièce en béton armé d'épaisseur « infinie » :



■ Matériaux :

- béton : $f_{c28} = 25$ MPa, $f_{t28} = 2,10$ MPa,
- acier : Fe E 500, $r \geq 5,5 \cdot \Phi$.

■ Enrobage des aciers : $e = 3$ cm.

■ On se propose de déterminer les caractéristiques géométriques de l'ancrage (longueur, retour d'un crochet à 45° si nécessaire).

— CORRIGÉ —

1. TYPE D'ANCRAGE

$$\left. \begin{array}{l} \text{Barres HA} \\ \text{Fe E 500} \end{array} \right\} \Rightarrow l_s \approx 50 \cdot \Phi \quad l_s = 50 \cdot 3,2 = 160 \text{ cm}$$

$$l_s > l_1 \Rightarrow \text{type d'ancrage} \quad l_s = 160 \text{ cm} > l_1 = 30 \text{ cm} \Rightarrow \text{ancrage courbe}$$

2. CALCUL D'UN ANCRAGE COURBE « A 45° »

2.1. RAYON DE COURBURE

a) Rayon minimal

$$r_1 = 5,5 \cdot \Phi \quad r_1 = 5,5 \cdot 3,2 = 17,60 \text{ cm}$$

b) Non-écrasement du béton

Contrainte limite d'adhérence :

$$\tau_{su} = 0,6 \cdot \psi_s^2 \cdot f_{t28} \quad \tau_{su} = 0,6 \cdot 1,5^2 \cdot 2,10 = 2,84 \text{ MPa}$$

$$\psi_s = \begin{cases} 1 & \text{: ronds lisses,} \\ 1,5 & \text{: barres HA.} \end{cases}$$

Enrobage :

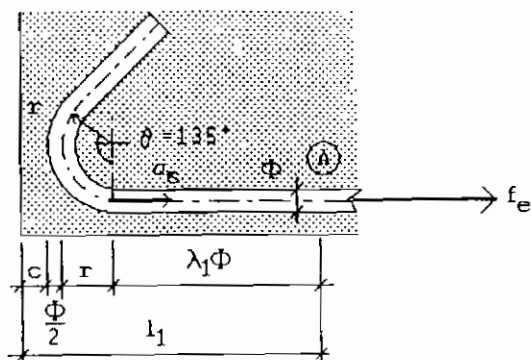
$$c = \text{Max} \left\{ \begin{array}{l} e, \\ \Phi, \\ 1 \text{ cm.} \end{array} \right. \quad c = 3,2 \text{ cm} = \text{Max} \left\{ \begin{array}{l} 3 \text{ cm} \\ 3,2 \text{ cm} \\ 1 \text{ cm} \end{array} \right.$$

Rayon de courbure (en fait, la vérification est inutile si on respecte $r \geq 5,5 \Phi$. On ne fait donc le calcul qu'à titre d'exemple) :

$$r \geq 0,20 \Phi \frac{\sigma_s}{f_{cj}} \left(1 + \frac{\Phi}{c_r} \right) \cdot \nu$$

avec :

σ_s = contrainte à l'origine de la courbure sous sollicitation ultime,



$$\Lambda f_c = A \sigma_s + \pi \cdot \Phi (\lambda_1 \Phi) \tau_{su}$$

avec

$$\lambda_1 \cdot \Phi = l_1 - c - \frac{\Phi}{2} - r$$

d'où :

$$\sigma_s = f_c - \frac{\pi \cdot \Phi}{A} \left[l_1 - c - \frac{\Phi}{2} - r \right] \tau_{su}$$

soit puisque $A = \frac{\pi \cdot \Phi^2}{4}$

$$\sigma_s = f_c - \frac{4}{\Phi} \left[l_1 - c - \frac{\Phi}{2} - r \right] \tau_{su}$$

$$f_{cj} = f_{c28}$$

$$f_{cj} = 25 \text{ MPa}$$

$$\left. \begin{array}{l} c_r = \text{distance du centre de courbure de la} \\ \text{barre à la paroi la plus voisine,} \\ v = \frac{1 + 2m}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow c_r \text{ infini et } \frac{\Phi}{c_r} = 0$$

épaisseur de la pièce infinie $v = 1$

avec : m = nombre de lits courbés simultanément

D'où :

$$r \geq 0,20 \cdot \Phi \cdot \frac{f_c - \frac{4}{\Phi} \left[l_1 - c - \frac{\Phi}{2} - r \right] \tau_{su}}{f_{cj}} \left(1 + \frac{\Phi}{c_r} \right) v$$

équation du 1^{er} degré en r :

$$r \left[f_{cj} - 0,20 \cdot \Phi \cdot \frac{4}{\Phi} \tau_{su} \left(1 + \frac{\Phi}{c_r} \right) v \right] \geq 0,20 \cdot \Phi \left[f_c - \frac{4}{\Phi} \left(l_1 - c - \frac{\Phi}{2} \right) \tau_{su} \right] \left(1 + \frac{\Phi}{c_r} \right) v$$

qui donne :

$$r \geq \frac{0,20 \cdot \Phi \left[f_c - \frac{4}{\Phi} \left(l_1 - c - \frac{\Phi}{2} \right) \tau_{su} \right] \left(1 + \frac{\Phi}{c_r} \right) v}{f_{cj} - 0,8 \cdot \tau_{su} \left(1 + \frac{\Phi}{c_r} \right) v}$$

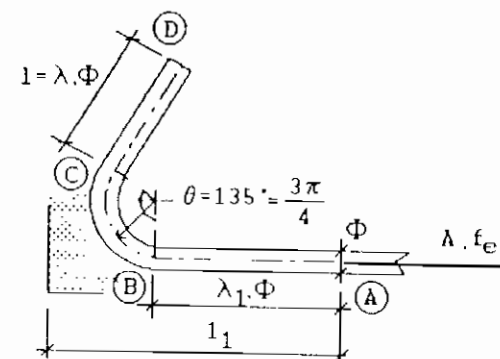
$$r \geq \frac{0,20 \cdot 3,2 \left[500 - \frac{4}{3,2} \left(30 - 3,2 - \frac{3,2}{2} \right) 2,84 \right] (1 + 0) 1}{25 - 0,8 \cdot 2,84 (1 + 0) 1}$$

$$r \geq r_2 = 11,56 \text{ cm}$$

c) Retenu

$$r \geq \text{Max} \left\{ \begin{array}{l} r_1 \\ r_2 \end{array} \right\} \quad r = 17,60 \text{ cm} = \text{Max} \left\{ \begin{array}{l} 17,60 \text{ cm} \\ 11,60 \text{ cm} \end{array} \right.$$

2.2. LONGUEUR $l = \lambda_1 \Phi$ DU RETOUR RECTILIGNE D'EXTRÉMITÉ



$$\lambda_1 \cdot \Phi = l_1 - c - \frac{\Phi}{2} - r$$

$$\lambda_1 \cdot \Phi = 30 - 3,2 - \frac{3,2}{2} = 17,6$$

$$\lambda_1 \cdot \Phi = 7,6 \text{ cm} = 2,38 \cdot \Phi$$

$$\lambda_1 = 2,38$$

$$l_s = \frac{\Phi}{4} \cdot \frac{f_c}{\tau_{su}}$$

$$l_s = \frac{3,2}{4} \cdot \frac{500}{2,84} = 140 \text{ cm}$$

$$\psi = e^{\mu\theta}$$

$$\psi' = \frac{\psi - 1}{\mu}$$

d'où :

$$\lambda\Phi = \frac{1}{\psi} \left[l_s - \Phi (\rho\psi' + \lambda_1) \right]$$

$$\psi = e^{0,4 \cdot \frac{3\pi}{4}} = 2,566$$

$$\psi' = \frac{2,566 - 1}{0,4} = 3,916$$

$$\lambda\Phi = \frac{140 - 3,2 (5,5 \cdot 3,916 + 2,38)}{2,566} = l$$

$$l = 24,7 \text{ cm} \Rightarrow \text{retenu } l = 25 \text{ cm}$$

CHAPITRE 4

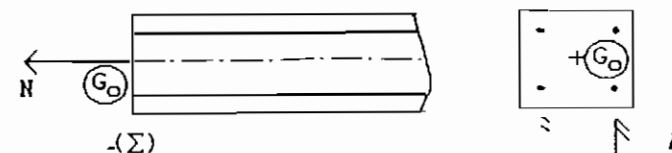
TRACTION SIMPLE – TIRANTS

I. RAPPELS DE COURS

1. INTRODUCTION

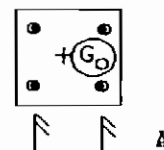
Une pièce en béton armé est sollicitée en traction simple lorsque les forces agissant à gauche d'une section droite Σ se réduisent au centre de gravité de la section à une force unique N (effort normal) perpendiculaire à Σ et dirigée vers la gauche.

Le béton tendu étant négligé, le centre de gravité de la section droite doit être confondu avec celui de la section des armatures.



2. DIMENSIONNEMENT DES ARMATURES

2.1. POSE DU PROBLÈME



Données :

B = aire de béton,

N_u = effort de traction à l'E.L.U.,

N_{ser} = effort de traction à l'E.L.S.

Inconnue :

A = section d'aciers

2.2. CAS OÙ LA FISSURATION EST PEU PRÉJUDICIALE

Dans le cas où les aciers sont de la classe Fe E 500, le dimensionnement se fait à l'E.L.U. (le calcul à l'E.L.S. est inutile).

Fissuration peu préjudiciable : cas des pièces situées à l'intérieur des constructions.

En traction simple, la section est uniformément tendue.

En négligeant le béton tendu, les aciers équilibrent intégralement l'effort de traction N_u avec un allongement unitaire maximal de 10/1 000.

Le diagramme de calcul $\sigma_s = g(\epsilon_s, f_{ed})$ donne pour les aciers :

$$\sigma_s = \frac{f_e}{\gamma_s} = f_{ed}$$

D'où la section d'armatures :

$$A_u = \frac{N_u}{f_{ed}}$$

Il faut en outre $A_u \geq A_{min}$ (voir paragraphe 5).

2.3. CAS OÙ LA FISSURATION EST PRÉJUDICIALE OU TRÈS PRÉJUDICIALE

Dans le cas où les aciers sont de la classe Fe E 500, le dimensionnement se fait à l'E.L.S. (le calcul à l'E.L.U. est inutile)

2.3.1. Contraintes limites des aciers tendus

Fissuration préjudiciable : cas des pièces exposées aux intempéries ou à des condensations . limitation de la contrainte des aciers tendus.

$$\overline{\sigma_s} = \min \begin{cases} \frac{2}{3} f_e \\ \text{Max} \begin{cases} 240 \text{ MPa} \\ 110 \sqrt{\eta f_{tj}} \text{ (MPa)} \end{cases} \end{cases}$$

Fissuration très préjudiciable : cas des pièces placées en milieu agressif ou des éléments devant assurer une étanchéité . limitation de la contrainte des aciers tendus.

$$\overline{\sigma_s} = \min \begin{cases} \frac{1}{2} f_e \\ \text{Max} \begin{cases} 200 \text{ MPa} \\ 90 \sqrt{\eta f_{tj}} \text{ (MPa)} \end{cases} \end{cases}$$

2.3.2. Section des armatures

$$A_{ser} = \frac{N_{ser}}{\sigma_s}$$

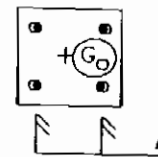
$\Phi \geq 6 \text{ mm}$ si fissuration préjudiciable

$\Phi \geq 8 \text{ mm}$ si fissuration très préjudiciable

Il faut en outre $A_{ser} \geq A_{min}$ (voir paragraphe 5).

3. VÉRIFICATION DES CONTRAINTES

3.1. DONNÉES



$A = (m-p) \frac{\pi \Phi^2}{4}$ = section utile d'aciers,

m = nombre total de barres.

p = nombre de coupures par longueur de scellement droit.

B = section de béton.

N_u = effort de traction à l'E.L.U.

N_{ser} = effort de traction à l'E.L.S.

Avant tout calcul, il faut s'assurer que $A \geq A_{min}$ (voir paragraphe 5)

3.2. VÉRIFICATION

Sans objet si la fissuration est peu préjudiciable.

$$\text{Aux E.L.S. : } \sigma_s = \frac{N_{ser}}{A} \leq \overline{\sigma_s}$$

4. DÉTERMINATION DU COFFRAGE

La section A d'aciers tendus est déterminée comme indiqué au paragraphe 2

La section B de béton est obtenue en satisfaisant :

- 1) la condition de non-fragilité (cf. paragraphe 5),
- 2) le bon enrobage des aciers,
- 3) les conditions de jonction par recouvrement des barres réalisant la section A d'aciers.

5. CONDITION DE NON-FRAGILITÉ

La sollicitation fissurant le béton ne doit pas entraîner le dépassement de la limite d'élasticité f_e dans les aciers :

$$A \cdot f_e \geq B \cdot f_{t28} \Rightarrow A \geq A_{\min} = \frac{B f_{t28}}{f_e}$$

6. ARMATURES TRANSVERSALES

6.1. EN ZONE DE RECOUVREMENT

6.1.1. Contrainte limite d'adhérence

Voir paragraphe 3.2. chapitre 3 « ASSOCIATION ACIER-BÉTON ».

6.1.2. Longueur de scellement droit

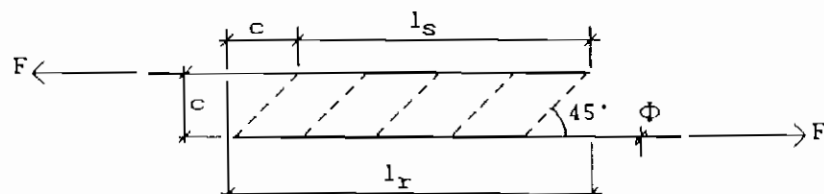
Voir paragraphe 3.4. chapitre 3 « ASSOCIATION ACIER-BÉTON ».

Si $f_{c28} \leq 25 \text{ MPa}$:

$$l_s = \frac{\Phi}{4} \cdot \frac{f_e}{\tau_{su}} \quad l_s = \begin{cases} 40 \cdot \Phi : \text{barres HA en Fe E 400} \\ 50 \cdot \Phi : \text{barres HA en Fe E 500} \\ 50 \cdot \Phi : \text{ronds lisses} \end{cases}$$

6.1.3. Armatures transversales

On admet que la transmission des efforts d'une barre à l'autre s'effectue par compression des « bielles » de béton découpées par des fissures inclinées à 45° sur la direction des barres.

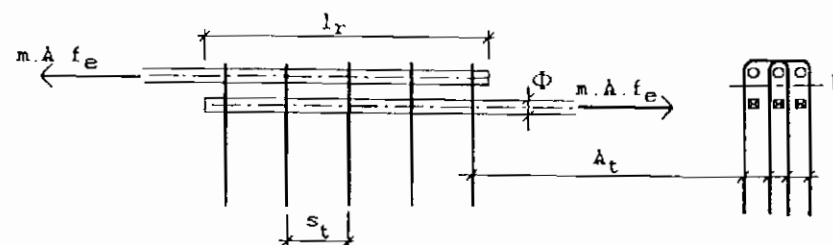


Cette transmission n'est donc effective que sur la longueur : $l_s = l_r - c$

Pour des barres rectilignes :

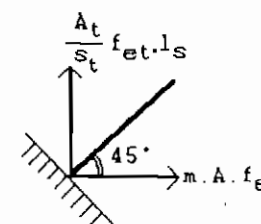
$$\begin{aligned} l_r &= l_s + c & \text{si } c > 5 \cdot \Phi \\ l_r &= l_s & \text{si } c \leq 5 \cdot \Phi \end{aligned}$$

Soit m barres de même diamètre se recouvrant avec m autres barres de part et d'autre d'un même plan P.



Du fait de la transmission à 45° , l'effort transversal et l'effort longitudinal sont égaux, il faut donc que la somme des sections ΣA_t rencontrées sur la longueur l_s soit telle que :

$$\Sigma(A_t \cdot f_{et}) = m \cdot A \cdot f_e$$



Or sur la longueur l_s , on a :

$$\Sigma A_t = \frac{A_t}{s_t} l_s$$

D'où, pour m barres de même diamètre en recouvrement de part et d'autre d'un même plan :

$$\left. \begin{aligned} \frac{A_t}{s_t} l_s f_{et} &= m A f_e \\ l_s &= \frac{\Phi}{4} \cdot \frac{f_e}{\tau_{su}} \\ A &= \frac{\pi \Phi^2}{4} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{A_t}{s_t} f_{et} = m \cdot \pi \cdot \Phi \cdot \tau_{su}$$

Par conséquent :

$$\frac{A_t}{s_t} f_{et} = m \cdot \pi \cdot \Phi \cdot \tau_{su}$$

Les armatures transversales ainsi déterminées doivent être distribuées sur toute la longueur l_r (et non l_s seulement ; on n'a $l_r = l_s$ que si $c \leq 5\Phi$).

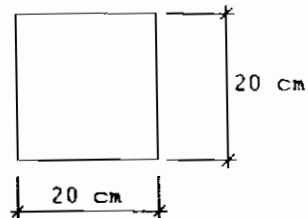
6.2. EN ZONE COURANTE

$$s_t \leq a$$

a = plus petite dimension transversale de la pièce

II. EXERCICE : TIRANT - FISSURATION PRÉJUDICIABLE

— ÉNONCÉ —



*Solllicitations de traction :

$$N_G = 100 \text{ kN}$$

$$N_Q = 40 \text{ kN}$$

*Fissuration préjudiciable.

*Matériaux :

— Béton : $f_{c28} = 25 \text{ MPa}$.

— Aciers : Fe E 500 HA.

■ On se propose :

- 1) de déterminer les armatures longitudinales,
- 2) de calculer les armatures transversales.

— CORRIGÉ —

1. CARACTÉRISTIQUES DES MATÉRIAUX

1.1. BÉTON

$$f_{t28} = 0,6 + 0,06 \cdot f_{c28} \text{ (MPa)} \quad f_{t28} = 0,6 + 0,06 \cdot 25 = 2,10 \text{ MPa}$$

1.2. ACIERS

$$\left. \begin{array}{l} \text{fissuration} \\ \text{préjudiciable} \end{array} \right\} \Rightarrow \bar{\sigma}_s = \min \left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{3} f_c \\ \max \left\{ \begin{array}{l} 240 \text{ MPa} \\ 110 \sqrt{\eta} \cdot f_{ty} \text{ (MPa)} \end{array} \right. \end{array} \right. \quad \bar{\sigma}_s = \min \left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{3} 500 = 333 \text{ MPa} \\ \max \left\{ \begin{array}{l} 240 \text{ MPa} \\ 110 \sqrt{1,6} \cdot 2,10 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \bar{\sigma}_s = 240 \text{ MPa}$$

2. SOLLICITATIONS

La fissuration étant préjudiciable, les calculs sont conduits à l'E.L.S.

$$N_{ser} = N_G + N_Q$$

$$N_{ser} = 100 + 40 = 140 \text{ kN}$$

$$N_{ser} = 0,140 \text{ MN}$$

3. CONDITION DE NON-FRAGILITÉ

$$A \cdot f_c \geq B \cdot f_{t28}$$

$$A \geq 20 \cdot 20 \frac{2,1}{500} = 1,68 \text{ cm}^2$$

$$A \geq 1,68 \text{ cm}^2$$

4. ARMATURES LONGITUDINALES

4.1. ÉTAT-LIMITE DE SERVICE

$$\Lambda_{ser} = \frac{N_{ser}}{\sigma_s}$$

$$\Lambda_{ser} = \frac{0,140}{240} = 5,83 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$\Lambda_{ser} = 5,83 \text{ cm}^2$$

4.2. RETENU

Résistance : $\Lambda = \Lambda_{ser}$

$$\Lambda = 5,83 \text{ cm}^2$$

Non-fragilité : $\Lambda \geq \Lambda_{min}$

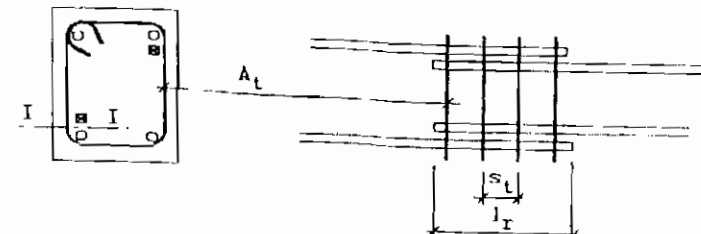
$$5,83 \text{ cm}^2 \geq 1,68 \text{ cm}^2 \text{ O.K.}$$

Conclusion : $\left. \begin{array}{l} \text{fissuration} \\ \text{préjudiciable} \end{array} \right\} \Rightarrow \Phi \geq 6 \text{ mm} \quad \Lambda = 5,83 \text{ cm}^2 \Rightarrow 4 \Phi 14 \text{ HA}$

$$\Lambda = 4 \cdot 1,54 = 6,16 \text{ cm}^2$$

5. ARMATURES TRANSVERSALES

5.1. ZONE DE RECOUVREMENT



a) *Longueur de recouvrement*

$$\tau_{su} = 0,6 \cdot \psi_s^2 \cdot f_{t28}$$

$$\tau_{su} = 0,6 \cdot 1,5^2 \cdot 2,1 = 2,84 \text{ MPa}$$

$$\psi_s = \begin{cases} 1 & : \text{ronds lisses,} \\ 1,5 & : \text{barres HA.} \end{cases}$$

$$I_s = \frac{\Phi}{4} \cdot \frac{f_c}{\tau_{su}}$$

$$l_r = l_s = \frac{\Phi}{4} \cdot \frac{500}{2,84} = 44 \cdot 1,4 = 62 \text{ cm}$$

b) Armatures transversales

$$\frac{A_l}{S_l} \cdot f_{cl} = m \cdot \pi \cdot \Phi \cdot \tau_{su}$$

Pour un brin $\Phi 8\text{HA}$: $A_1 = 0,50 \text{ cm}^2$
 $f_{c1} = f_c$

$$\frac{A_l}{s_l} = \frac{1 \cdot \pi \cdot 1,4 \cdot 2,84}{500} = \frac{1}{40,03} \text{ cm}^2/\text{cm}$$

d'où : $s_t = 40,03 \cdot A_t$
 $s_l = 40,03 \cdot 0,5 = 20 \text{ cm}$

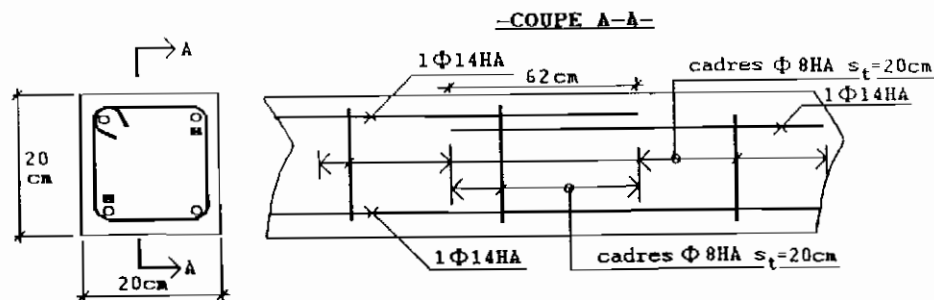
$\Rightarrow$ cadres $\Phi 8HA$: $s_1 = 20 \text{ cm}$

5.2. ZONE COURANTE

$$s_i = \mathbf{a}$$

$\Rightarrow$ cadres $\Phi 8HA : s_1 = 20 \text{ cm}$

6. SCHÉMA DE FERRAILLAGE



CHAPITRE 5

COMPRESSION SIMPLE

I. RAPPELS DE COURS

1. HYPOTHÈSES

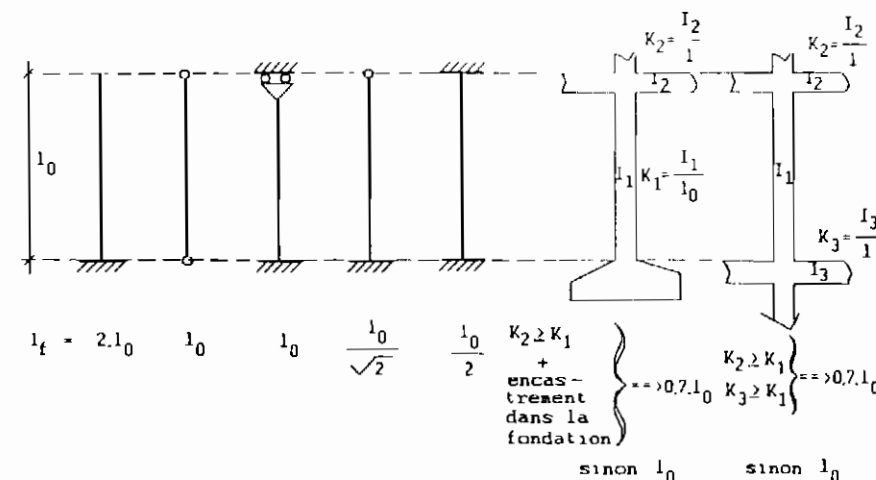
On considère conventionnellement comme soumis à une «COMPRESSION CENTRÉE» tout poteau sollicité :

1) par un effort normal de compression N ,

2) par des moments n'intervenant pas dans les calculs de stabilité et de résistance des éléments qui lui sont liés lorsque les excentricités sont faibles (point d'application de l'effort normal à l'intérieur d'une zone déduite du noyau central par une homothétie de rapport 1/2). Dans un poteau sollicité en «compression centrée» le centre de gravité du béton et celui des armatures sont confondus.

2. ÉLANCEMENT

2.1. LONGUEURS DE FLAMBEMENT l_f



2.2. ÉLANCEMENT

2.2.1. Cas général

$$\lambda = \frac{l_f}{i}$$

avec :

$$i = \sqrt{\frac{I}{B}} = \text{rayon de giration de la section transversale}$$

I = moment d'inertie de la section transversale (béton seul) dans le plan de flambement,
 B = aire de la section transversale.

Le plan de flambement mentionné plus loin est celui pour lequel $\lambda = \lambda_{\max}$.

2.2.2. Cas particuliers

a) Section rectangulaire

Il faut normalement envisager les deux possibilités : flambement dans le plan parallèle au petit côté et flambement dans le plan parallèle au grand côté. En désignant par l_{fa} et l_{fb} les longueurs de flambement correspondant aux liaisons d'extrémité dans les sens a (parallèle à la dimension a) et b (parallèle à la dimension b), on retiendra :

$$\lambda = \text{Max} \left\{ \begin{array}{l} \frac{l_{fa}\sqrt{12}}{a} \quad (I = \frac{ba^3}{12} ; B = ba ; i = \frac{a}{\sqrt{12}}) \\ \frac{l_{fb}\sqrt{12}}{b} \quad (I = \frac{ab^3}{12} ; B = ba ; i = \frac{b}{\sqrt{12}}) \end{array} \right.$$

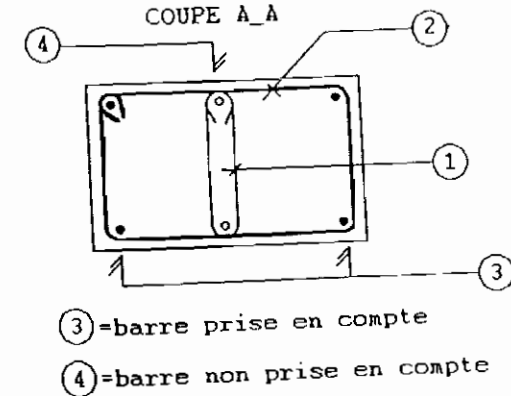
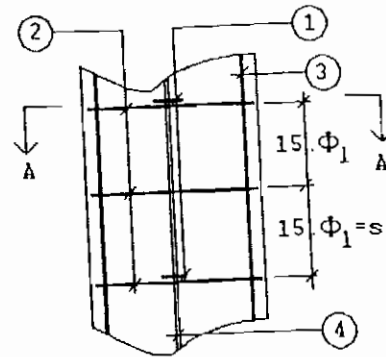
b) Section circulaire

$$\left. \begin{array}{l} I = \frac{\pi \cdot a^4}{64} \\ B = \frac{\pi \cdot a^2}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow i = \frac{a}{4} \quad \Rightarrow \lambda = \frac{4 \cdot l_f}{a}$$

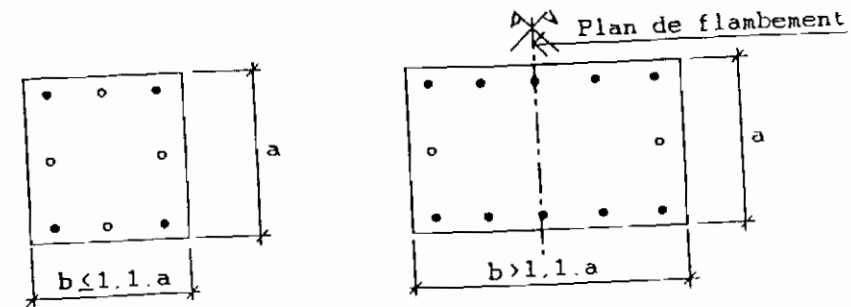
3. ARMATURES LONGITUDINALES

3.1. INTRODUCTION - HYPOTHÈSES

Toute barre longitudinale de diamètre Φ_1 non maintenue par des armatures transversales telles que $s_t \leq 15 \cdot \Phi_1$ n'est pas prise en compte dans les calculs de résistance.

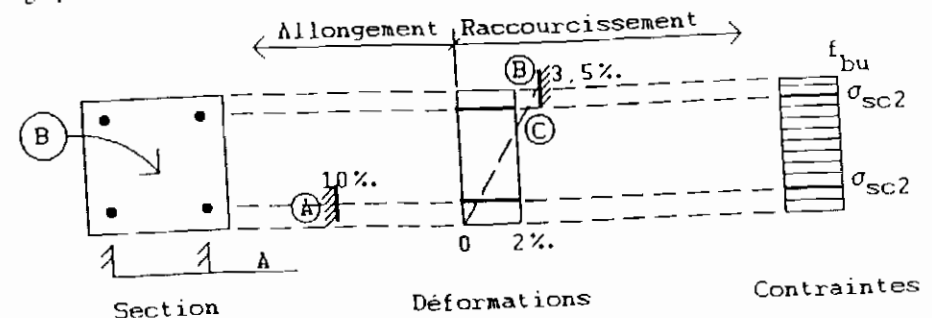


Si $\lambda > 35$, seuls sont à prendre en compte les aciers augmentant le plus efficacement la rigidité dans le plan de flambement (pochées en noir sur la figure ci-dessous).



3.2. FORCE PORTANTE

À l'état-limite ultime, le raccourcissement du béton sous compression centrée est limité à 2/1 000. Le diagramme des déformations correspond à la verticale du pivot C (voir paragraphe 4.3 chapitre 2 «BETON ARMÉ - GÉNÉRALITÉS»), d'où :



L'effort normal limite théorique est :

$$N_{ulim, th} = B \cdot f_{bu} + A \cdot \sigma_{sc2}$$

L'effort normal résistant est obtenu par correction de la formule théorique avec :

- B_r = section réduite de béton pour tenir compte de la sensibilité aux défauts d'exécution, notamment pour les poteaux de faible section transversale,
- $\theta/(0,9 \cdot 0,85)$ = facteur majorateur de la part de l'effort limite théorique relative au béton pour tenir compte de la maturité de ce dernier à l'âge de sa mise en charge,
- α = facteur réducteur affectant $N_{ulim, th}$ qui tient compte des effets du second ordre que l'on a négligés,
- $\sigma_{sc2} = f_{cd} = f_c / \gamma_s$ par simplification de calcul.

D'où la condition à respecter :

$$N_u \leq N_{ulim} = \alpha \left[\frac{B_r \cdot f_{cd}}{0,9 \cdot \gamma_b} + A \cdot \frac{f_c}{\gamma_s} \right]$$

En introduisant f_{bu} et f_{cd} , cette formule s'écrit :

$$k \cdot \beta \cdot N_u \leq \theta \cdot \frac{B_r \cdot f_{bu}}{0,9} + 0,85 \cdot A \cdot f_{ed}$$

avec :

B_r = section réduite obtenue en retirant 1 cm d'épaisseur de béton sur toute la périphérie du poteau,

$$\frac{0,85}{\alpha} = \beta = \begin{cases} 1 + 0,2 \cdot \left(\frac{\lambda}{35} \right)^2 & \text{si } \lambda \leq 50 \\ 0,85 \cdot \frac{\lambda^2}{1500} & \text{si } 50 < \lambda \leq 70 \end{cases}$$

$$k = \begin{cases} 1,10 & \text{si plus de la moitié des charges est appliquée à } j < 90 \text{ jours,} \\ 1,20 & \text{et} \\ f_{cd} \text{ à remplacer par } f_{cj} & \text{si la majeure partie des charges est appliquée avant 28 jours,} \\ 1 & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

3.3. ARMATURES LONGITUDINALES

3.3.1. Armatures calculées

Le béton équilibre :

$$N_b = \theta \cdot \frac{B_r \cdot f_{bu}}{0,9}$$

Les aciers doivent équilibrer : $N_s = k \cdot \beta \cdot N_u - N_b$

D'où leur section :

$$A = \frac{N_s}{0,85 \cdot f_{ed}}$$

3.3.2. Sections extrêmes

B = aire de la section de béton.

On doit vérifier :

$$A_{min} \leq A \leq A_{max}$$

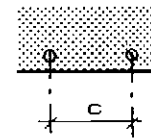
$$A_{min} = \text{Max} \begin{cases} 4 \text{ cm}^2 / \text{m de périmètre} \\ 0,2 \frac{B}{100} \end{cases}$$

$$A_{max} = 5 \frac{B}{100}$$

Si $A > A_{max}$ (en dehors des zones de recouvrement), il faut revoir le coffrage.

3.3.3. Dispositions constructives

Sur chaque face, on doit vérifier :



$$c \leq \text{Min} \begin{cases} 40 \text{ cm} \\ a + 10 \text{ cm} \end{cases}$$

a = plus petite dimension transversale

4. ARMATURES TRANSVERSALES

Les armatures transversales doivent maintenir :

- 1) toutes les barres prises en compte dans les calculs de résistance,
- 2) les barres de diamètre $\Phi \geq 20$ mm même celles non prises en compte.

4.1. DIAMÈTRE

$$\Phi_t \approx \frac{1}{3} \Phi_l$$

$$\Phi_t \leq 12 \text{ mm}$$

4.2. EN ZONE COURANTE

C'est-à-dire hors recouvrements :

$$s_t \leq \text{Min} \begin{cases} 40 \text{ cm} \\ a+10 \text{ cm} \\ 15\phi_{\text{min}} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \leftarrow a = \text{plus petite dimension transversale} \\ \text{dans le plan de flambement} \\ \leftarrow \text{pour } A \geq A_{\text{min}} \end{array}$$

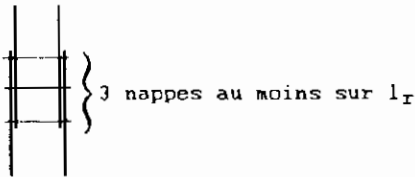
4.3. EN ZONE DE RECOUVREMENT

4.3.1. Longueur de recouvrement

$$l_r = \begin{cases} 0,6 \cdot l_s & \leftarrow \text{cas courants,} \\ l_s & \leftarrow \text{pièces soumises à des chocs.} \end{cases}$$

4.3.2. Armatures transversales

Dans les zones où il y a plus de la moitié des barres en recouvrement :



Dans la pratique, on assure un léger dépassement (2ϕ environ) des extrémités des barres arrêtées par rapport aux nappes extrêmes

5. COFFRAGE

La formule de l'effort normal ultime limite donne :

$$B_t \geq \frac{k \cdot \beta \cdot N_u}{\theta \frac{f_{bu}}{0,9} + 0,85 \frac{\lambda}{B_t} f_{ed}}$$

On peut adopter par exemple : $\lambda/B_t = 1\%$

$$B_t \geq \frac{k \cdot \beta \cdot N_u}{\theta \frac{f_{bu}}{0,9} + \frac{0,85}{100} f_{ed}}$$

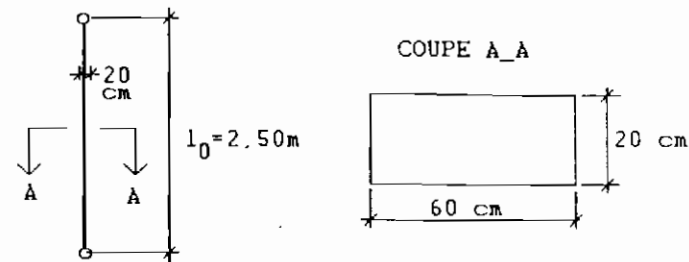
Remarque :

on peut chercher à atteindre $\lambda = 35$ pour que toutes les armatures participent à la résistance.

Dans ce cas : $\beta = 1,20$

II. EXERCICE N°1 : POTEAU – ARMATURES MINIMALES

— ÉNONCÉ —



■ Sollicitations : $N_u = 1\,200 \text{ kN}$ de durée ≥ 24 heures.

■ Moins de la moitié des charges agit avant 90 jours.

■ Matériaux :

– béton : $f_{c28} = 25 \text{ MPa}$,

– aciers : Fe E 500 HA.

■ Longueur de flambement : $l_f = l_0 = 2,50 \text{ m}$.

■ Enrobage des armatures : 3 cm.

■ On se propose :

1) de déterminer les armatures longitudinales,

2) de déterminer les armatures transversales en zone courante

— CORRIGÉ —

1. CARACTÉRISTIQUES DES MATÉRIAUX

1.1. BÉTON

$$f_{bu} = 0,85 \cdot \frac{f_{c28}}{\theta \cdot \gamma_b}$$

$$f_{bu} = 0,85 \cdot \frac{25}{1 \cdot 1,5} = 14,2 \text{ MPa}$$

1.2. ACIERS

$$f_{ed} = \frac{f_e}{\gamma_s}$$

$$f_{ed} = \frac{500}{1,15} = 435 \text{ MPa}$$

2. ARMATURES LONGITUDINALES

2.1. SECTION CALCULÉE

Élancement pour une section rectangulaire :

$$\lambda = \frac{l_f \sqrt{12}}{a}$$

$$\lambda = \frac{250 \sqrt{12}}{20} = 43,30$$

Coefficient β :

$$\lambda \leq 50 \Rightarrow \beta = 1 + 0,2 \left(\frac{\lambda}{35} \right)^2 \quad \beta = 1 + 0,2 \left(\frac{43,30}{35} \right)^2 = 1,31$$

Le béton équilibre :

$$N_b = 0 \frac{B_r \cdot f_{bu}}{0,9}$$

$$N_b = 1 \frac{(0,60 - 0,02)(0,20 - 0,02) 14,2}{0,9}$$

$$N_b = 1,65 \text{ MN}$$

Les aciers doivent équilibrer :

$$N_s = k \cdot \beta \cdot N_u - N_b$$

$k = 1$ car moins de la moitié des charges est appliquée avant 90 jours,

$$N_s = 1 \cdot 1,31 \cdot 1,2 - 1,65 = -0,08 \text{ MN}$$

d'où :

$N_s < 0 \Rightarrow$ Le béton est surabondant ; il suffit de prévoir la section minimale.

2.2. ARMATURES MINIMALES

$$u = 2(a + b) = \text{périmètre (m)}$$

$$B = a \cdot b = \text{aire béton (cm}^2\text{)}$$

$$A_{\min} = \text{Max} \begin{cases} 4 \text{ cm}^2 \text{ m de périmètre} \\ 0,2 \frac{B}{1,0} \end{cases}$$

$$u = 2(0,60 + 0,20) = 1,60 \text{ m}$$

$$B = 60 \cdot 20 = 1\,200 \text{ cm}^2$$

$$A_{\min} = \text{Max} \begin{cases} 4 \cdot 1,60 = 6,40 \text{ cm}^2 \\ 0,2 \frac{1\,200}{100} = 2,40 \text{ cm}^2 \end{cases}$$

$$A = A_{\min} = 6,40 \text{ cm}^2$$

$$\text{soit : } 6\Phi 12\text{HA} : A = 6 \cdot 1,13 = 6,78 \text{ cm}^2$$

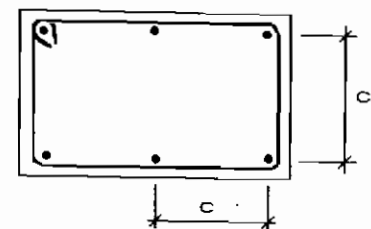
$$A > A_{\max} = 5 \frac{B}{100}$$

$$6,78 \text{ cm}^2 < 60 \text{ cm}^2 = 5 \frac{1\,200}{100} \text{ O.K.}$$

3. ARMATURES TRANSVERSALES EN ZONE COURANTE

3.1. CHOIX DES ARMATURES TRANSVERSALES

Armature minimale $\Rightarrow$ on peut se contenter d'un cadre général :



$$\frac{1}{3} \Phi_l = \Phi_t \leq 12 \text{ mm}$$

$$\frac{1}{3} 12 = 4 \text{ mm} \approx \Phi_t \leq 12 \text{ mm}$$

$\Rightarrow$ 1 cadre $\Phi 6\text{HA}$

Pour 3 cm d'enrobage :

$$3 + 0,6 + \frac{1,2}{2} = 4,2 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow c = \frac{60 - 2 \cdot 4,2}{2} = 25,8 \text{ cm}$$

$$c' = 20 - 2 \cdot 4,2 = 11,6 \text{ cm}$$

$$c \text{ et } c' \leq \text{Min} \begin{cases} 40 \text{ cm} \\ a + 10 \text{ cm} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = 25,8 \text{ cm} \\ c' = 11,6 \text{ cm} \end{cases} < 30 \text{ cm} = \text{Min} \begin{cases} 40 \text{ cm} \\ 20 + 10 \text{ cm} \end{cases}$$

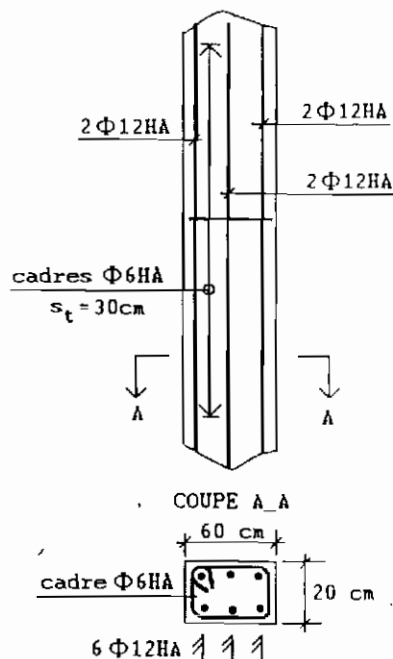
3.2. ESPACEMENT

$$s_t \leq \text{Min} \begin{cases} 40 \text{ cm} \\ a + 10 \text{ cm} \\ 15 \cdot \Phi_{l \min} \text{ si } A > A_{\min} \end{cases}$$

$$s_t \leq \text{Min} \begin{cases} 40 \text{ cm} \\ 20 + 10 = 30 \text{ cm} \\ \text{sans objet car } A = A_{\min} \end{cases}$$

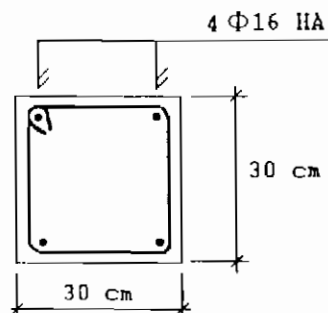
$\Rightarrow$ cadres $\Phi 6\text{HA}$ $s_t = 30 \text{ cm}$

4. SCHÉMA DE FERRAILLAGE



III. EXERCICE N° 2 : FORCE PORTANTE D'UN POTEAU

— ÉNONCÉ —



■ Matériaux

-- béton : $f_{c28} = 25$ MPa,

-- aciers : Fe E 500 HA.

■ Longueur de flambement $l_f = 2,80$ m

■ Moins de la moitié des charges appliquées avant 90 jours.

■ Charges de durée d'application supérieure à 24 heures.

■ On demande :

1) de vérifier la section minimale d'armatures.

2) de calculer la force portante du poteau,

3) de déterminer les armatures transversales en zone courante.

— CORRIGÉ —

1. CARACTÉRISTIQUES DES MATÉRIAUX

1.1. BÉTON

$$f_{bu} = 0,85 \cdot \frac{f_{c28}}{\theta \cdot \gamma_b}$$

$$f_{bu} = 0,85 \cdot \frac{25}{1 \cdot 1,5} = 14,2 \text{ MPa}$$

1.2. ACIERS

$$f_{cd} = \frac{f_e}{\gamma_s}$$

$$f_{cd} = \frac{500}{1,15} = 435 \text{ MPa}$$

2. SECTION MINIMALE D'ARMATURES

$$u = 2(a + b) = \text{périmètre (m)}$$

$$u = 2 \cdot 2,0 \cdot 30 = 1,20 \text{ m}$$

$$B = a \cdot b = \text{aire béton (cm}^2\text{)}$$

$$B = 30 \cdot 30 = 900 \text{ cm}^2$$

$$A_{min} = \text{Max} \begin{cases} 4 \text{ cm}^2/\text{m} \\ \text{de périmètre} \\ 0,2 \frac{B}{100} \end{cases}$$

$$A_{min} = \text{Max} \begin{cases} 4 \cdot 1,20 = 4,80 \text{ cm}^2 \\ 0,2 \frac{900}{100} = 1,80 \text{ cm}^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = 4 \cdot 2,01 = 8,04 \text{ cm}^2 > A_{min} = 4,80 \text{ cm}^2$$

$$A > A_{max} = 5 \frac{B}{100}$$

$$A_{max} = 5 \frac{900}{100} = 45 \text{ cm}^2$$

$$\Rightarrow A = 8,04 \text{ cm}^2 < A_{max} = 45,00 \text{ cm}^2 \text{ O.K.}$$

3. FORCE PORTANTE

Le béton équilibre :

$$N_b = \theta \cdot \frac{B_r \cdot f_{bu}}{0,9}$$

$$B_r = (a - 2 \text{ cm})(b - 2 \text{ cm})$$

$$N_b = 1 \cdot \frac{(0,30 - 0,02)^2}{0,9} \cdot 14,2 = 1,237 \text{ MN}$$

Les aciers équilibrent :

$$N_s = 0,85 \cdot A \cdot f_{cd}$$

$$N_s = 0,85 \cdot 8,04 \cdot 10^{-4} \cdot 435 = 0,297 \text{ MN}$$

D'où la force portante :

$$\left. \begin{array}{l} \text{section} \\ \text{rectangulaire} \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda = \frac{l_f \sqrt{12}}{a}$$

$$\lambda = \frac{280 \sqrt{12}}{30} = 32,33$$

$$\lambda \leq 50 \rightarrow \beta = 1 + 0,2 \left(\frac{\lambda}{35} \right)^2$$

$$\beta = 1 + 0,2 \left(\frac{32,33}{35} \right)^2 = 1,171$$

k

k = 1 car moins de la moitié des charges est appliquée avant 90 jours,

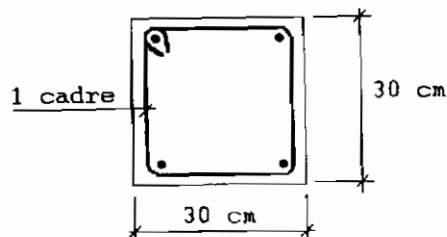
$$k \cdot \beta \cdot N_u = N_b + N_s$$

$$N_u = \frac{1,237 + 0,297}{1 \cdot 1,171} = 1,310$$

$$\Rightarrow N_u = 1\,310 \text{ kN}$$

4. ARMATURES TRANSVERSALES EN ZONE COURANTE

4.1. CHOIX DES ARMATURES TRANSVERSALES



1 cadre pour tenir les 4 barres :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{3} \Phi_t \approx \Phi_t \leq 12 \text{ mm} \\ \Phi_t \approx \frac{1}{3} 16 = 5,3 \text{ mm} \\ \Phi_t \leq 12 \text{ mm} \end{array} \right\} \Rightarrow \Phi_t = 6 \text{ mm}$$

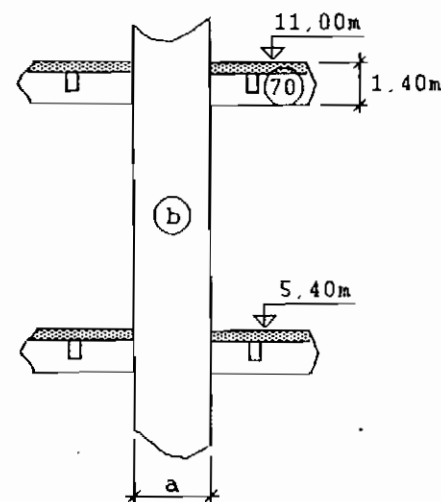
4.2. ESPACEMENT

$$s_t \leq \text{Min} \left\{ \begin{array}{l} 40 \text{ cm} \\ a + 10 \text{ cm} \\ 15 \cdot \Phi_{t \text{ min}} \text{ si } A > A_{\text{min}} \end{array} \right. \quad s_t \leq \text{Min} \left\{ \begin{array}{l} 40 \text{ cm} \\ 30 + 10 = 40 \text{ cm} \\ 15 \cdot 1,6 = 24 \text{ cm car } A > A_{\text{min}} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \text{cadres } \Phi 6 \text{ HA } s_t = 24 \text{ cm}$$

IV. EXERCICE N°3 : POTEAU – GRANDE DIMENSION IMPOSÉE

— ÉNONCÉ —



- Actions sous plancher niveau 11,00 m :
 - permanentes : $N_G = 2\,354,3 \text{ kN}$
 - variables : $N_Q = 533,4 \text{ kN}$
 - plus de la moitié des charges appliquée avant 90 jours,
 - durée d'application des charges supérieure à 24 heures.

■ Matériaux :

- béton : $f_{c28} = 25 \text{ MPa}$,
- aciers : Fe E 400 HA,
- enrobage des armatures = 3 cm.

■ On se propose :

- 1) de dimensionner le poteau,
- 2) de calculer les armatures longitudinales et transversales.

— CORRIGÉ —

1. CARACTÉRISTIQUES DES MATÉRIAUX

1.1. BÉTON

$$f_{bu} = 0,85 \cdot \frac{f_{c28}}{\theta \cdot \gamma_b}$$

$$f_{bu} = 0,85 \cdot \frac{25}{1 \cdot 1,5} = 14,2 \text{ MPa}$$

1.2. ACIERS

$$f_{cd} = \frac{f_c}{\gamma_s}$$

$$f_{cd} = \frac{400}{1,15} = 348 \text{ MPa}$$

2. SOLlicitATION À L'ÉTAT-LIMITE ULTIME

$$N_u = 1,35 N_G + 1,5 N_Q$$

$$N_u = 1,35 \cdot 2\,354,3 + 1,5 \cdot 533,4$$

$$N_u = 3\,978,4 \text{ kN} = 3,98 \text{ MN}$$

3. COFFRAGE

3.1. DIMENSION IMPOSÉE

Épaisseur de la poutre du plancher

$$b = 0,70 \text{ m}$$

3.2. DIMENSIONNEMENT DANS L'HYPOTHÈSE OÙ $b = 70 \text{ cm} < a$

Longueur de flambement :

en supposant le poteau plus raide que les poutres du plancher :

$$l_f = l_0$$

$$l_f = 11,00 - 5,40 = 5,60 \text{ m}$$

Élancement :

$$\left. \begin{array}{l} \text{section} \\ \text{rectangulaire} \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda = \frac{l_f \sqrt{12}}{a} \quad \lambda = \frac{560 \sqrt{12}}{70} = 27,7$$

Coefficient β :

$$\lambda \leq 50 \Rightarrow \beta = 1 + 0,2 \left(\frac{\lambda}{35} \right)^2 \quad \beta = 1 + 0,2 \left(\frac{27,7}{35} \right)^2 = 1,125$$

Section réelle calculée :

$$B_r \geq \frac{k \cdot \beta \cdot N_u}{0,9 \frac{f_{bu}}{100} + 0,85 \frac{f_{cd}}{100}}$$

$k = 1,10$ car plus de la moitié des charges est appliquée avant 90 jours.

$$B_r \geq \frac{1,10 \cdot 1,125 \cdot 3,98}{1 \cdot \frac{14,2}{0,9} + 0,85 \cdot \frac{348}{100}} = 0,2629 \text{ m}^2$$

Valeur de a :

$$B_r = (a - 2 \text{ cm})(b - 2 \text{ cm}) \quad a \geq \frac{0,2629}{(0,70 - 0,02)} + 0,02 = 0,407 \text{ m}$$

Conclusion :

$a < b$ et l'hypothèse faite pour le calcul de l'élancement est fautive.

3.3. DIMENSIONNEMENT DANS L'HYPOTHÈSE OÙ $b = 70 \text{ cm} > a$ Équation donnant a :

en supposant :

$$\lambda = \frac{l_f \sqrt{12}}{a} \leq 50$$

$$\Rightarrow \beta = 1 + 0,2 \left(\frac{\lambda}{35} \right)^2 = 1 + 0,2 \frac{12 \cdot l_f^2}{35^2 \cdot a^2}$$

$$\Rightarrow B_r \geq \frac{k \cdot \beta \cdot N_u}{0,9 \frac{f_{bu}}{100} + 0,85 \frac{f_{cd}}{100}}$$

soit avec : $B_r = (a - 0,02)(b - 0,02) \text{ m}^2$:

$$(a - 0,02)(b - 0,02) \geq \frac{k \cdot N_u}{0,9 \frac{f_{bu}}{100} + 0,85 \frac{f_{cd}}{100}} \left[1 + \frac{2,4 \cdot l_f^2}{35^2 \cdot a^2} \right]$$

soit l'inéquation du 3^e degré :

$$a^3 - a^2 \left[0,02 + \frac{k \cdot N_u}{(b - 0,02) \left(0,9 \frac{f_{bu}}{100} + 0,85 \frac{f_{cd}}{100} \right)} \right] \geq \frac{2,4 \cdot l_f^2 \cdot k \cdot N_u}{35^2 (b - 0,02) \left(0,9 \frac{f_{bu}}{100} + 0,85 \frac{f_{cd}}{100} \right)}$$

Calcul de a par itérations successives :

$$K = 0,9 \frac{f_{bu}}{100} + 0,85 \frac{f_{cd}}{100} \quad K = 1 \cdot \frac{14,2}{0,9} + 0,85 \cdot \frac{348}{100} = 18,736$$

$$\frac{k \cdot N_u}{(b - 0,02) K} = \frac{1,10 \cdot 3,98}{0,68 \cdot 18,736} = 0,3436$$

$$\frac{2,4 \cdot l_f^2 \cdot k \cdot N_u}{35^2 (b - 0,02) K} = \frac{2,4 \cdot 5,60^2}{35^2} \cdot 0,3436 = 0,0211$$

d'où l'inégalité à satisfaire :

$$a^3 - 0,3636 a^2 \geq 0,0211$$

a (m)	$a^3 - 0,3636 \cdot a^2$	λ	0,0211
0	0	<	0,0211
0,70	0,1648	>	0,0211
0,35	-0,0017	<	0,0211
0,525	0,0445	>	0,0211
0,4375	0,0141	<	0,0211
0,4813	0,0270	>	0,0211
0,4594	0,0202	<	0,0211
0,47	0,0235	>	0,0211
0,465	0,0219	>	0,0211
0,4625	0,0211	=	0,0211

$$\Rightarrow a = 0,4625 \text{ m}$$

Retenu :

Poteau 50 x 70

En vérifiant :

$$\lambda = \frac{560 \sqrt{12}}{50} = 38,80 < 50 \text{ O.K.}$$

4. ARMATURES LONGITUDINALES

4.1. EFFORT NORMAL ULTIME

Charges sur plancher niveau 11,00 m : $= 3\,978,40 \text{ kN}$

Poids propre poteau : $= 49,61 \text{ kN}$

$1,35(25 \text{ kN/m}^3 \cdot 0,70 \cdot 0,50 \cdot 4,20)$

$$N_u = 4\,028,01 \text{ kN}$$

$$\Rightarrow N_u = 4,03 \text{ MN}$$

4.2. SECTION RÉSISTANTE

Élancement :

$$\left. \begin{array}{l} \text{section} \\ \text{rectangulaire} \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda = \frac{l_f \sqrt{12}}{a} \quad \lambda = \frac{560 \sqrt{12}}{50} = 38,80$$

Coefficient β :

$$\lambda \leq 50 \Rightarrow \beta = 1 + 0,2 \left(\frac{\lambda}{35} \right)^2 \quad \beta = 1 + 0,2 \left(\frac{38,80}{35} \right)^2 = 1,246 \approx 1,25$$

Le béton équilibre :

$$N_b = \theta \frac{B_c \cdot f_{bu}}{0,9}$$

$$N_b = 1 \frac{(0,70 - 0,02)(0,50 - 0,02) 14,2}{0,9}$$

$$N_b = 5,15 \text{ MN}$$

Les aciers équilibrent :

$$N_s = k \cdot \beta \cdot N_u - N_b$$

$k = 1,10$ car plus de la moitié des charges est appliquée avant 90 jours.

$$N_s = 1,10 \cdot 1,25 \cdot 4,03 - 5,15$$

$$N_s = 0,391 \text{ MN}$$

D'où leur section :

$$A = \frac{N_s}{0,85 \cdot f_{cd}}$$

$$A = \frac{0,391}{0,85 \cdot 348} 10^4 = 13,22 \text{ cm}^2$$

4.3. SECTIONS EXTRÊMES

$$A_{\min} = \text{Max} \begin{cases} 4 \text{ cm}^2/\text{m} \\ \text{de périmètre} \\ 0,2 \frac{B}{100} \end{cases}$$

$$A_{\min} = \text{Max} \begin{cases} 4 \cdot 2 (0,7 + 0,5) = 9,60 \text{ cm}^2 \\ 0,2 \frac{50 \cdot 70}{100} = 7,00 \text{ cm}^2 \end{cases}$$

$$A_{\max} = 5 \frac{B}{100}$$

$$A_{\max} = 5 \frac{50 \cdot 70}{100} = 175 \text{ cm}^2$$

$$A_{\min} = 9,60 \text{ cm}^2 < A = 13,22 \text{ cm}^2 < A_{\max} = 175 \text{ cm}^2$$

4.4. RETENU

$$4\Phi 20 \text{ HA} \quad 4 \cdot 3,14 = 12,56 \text{ cm}^2$$

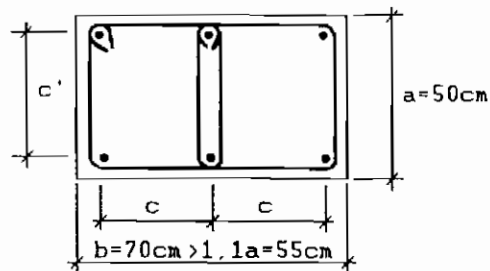
$$2\Phi 12 \text{ HA} \quad 2 \cdot 1,13 = 2,26 \text{ cm}^2$$

$$13,22 \text{ cm}^2 < A = 14,82 \text{ cm}^2$$

5. ARMATURES TRANSVERSALES

5.1. CHOIX DES ARMATURES TRANSVERSALES

$\lambda > 35 \Rightarrow$ on ne prend en compte que les aciers longitudinaux augmentant le plus efficacement la rigidité dans le plan de flambement :



$$\frac{1}{3} \Phi_t \approx \Phi_t \leq 12 \text{ mm}$$

$$\left. \begin{array}{l} \Phi_t = \frac{1}{3} 20 = 6,7 \text{ mm} \\ \Phi_t \leq 12 \text{ mm} \end{array} \right\} \Rightarrow \Phi_t = 8 \text{ mm}$$

$$c \text{ et } c' \leq \text{Min} \begin{cases} 40 \text{ cm} \\ a + 10 \text{ cm} \end{cases}$$

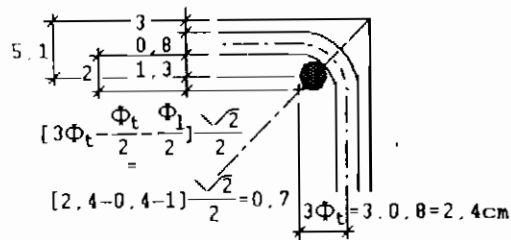
$$c \text{ et } c' \leq 40 \text{ cm} = \text{Min} \begin{cases} 40 \text{ cm} \\ 50 + 10 \end{cases}$$

Suivant b pour 3 cm d'enrobage avec
2 Φ 20 + 1 Φ 12 : 5,1 cm

$$\Rightarrow c = \frac{70 - 2 \cdot 5,1}{2} = 29,9 \text{ cm} < 40 \text{ cm}$$

Suivant a pour 3 cm d'enrobage avec
2 Φ 20 : 5,1 cm

$$\Rightarrow c' = 50 - 2 \cdot 5,1 = 39,8 \text{ cm} < 40 \text{ cm}$$



5.2. ESPACEMENT EN ZONE COURANTE

$$s_t \leq \text{Min} \begin{cases} 40 \text{ cm} \\ a + 10 \text{ cm} \\ 15 \cdot \Phi_{t \text{ min}} \text{ si } A > A_{\text{min}} \end{cases}$$

$$s_t \leq \text{Min} \begin{cases} 40 \text{ cm} \\ 50 + 10 = 60 \text{ cm} \\ 15 \cdot 1,2 = 18 \text{ cm} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{cadre} + \text{étrier } \Phi 8 \text{HA } s_t = 18 \text{ cm}$$

5.3. ZONES DE RECOUVREMENT

On arrête les aciers longitudinaux en deux temps :

- arrêt des 4 Φ 20HA,
- arrêt des 2 Φ 12HA.

Longueurs de recouvrement :

$$\text{barres HA Fe E 400} \Rightarrow l_s = 40 \Phi$$

$$\Phi 20 \Rightarrow l_s = 40 \cdot 2 = 80 \text{ cm}$$

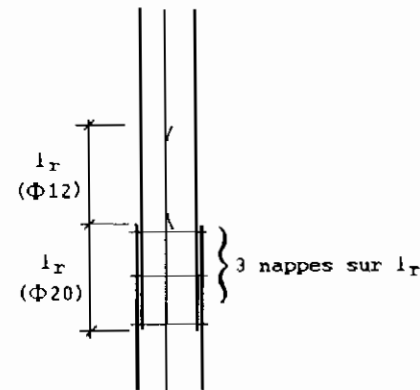
$$\Phi 12 \Rightarrow l_s = 40 \cdot 1,2 = 48 \text{ cm}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{aciers} \\ \text{comprimés} \end{array} \right\} \Rightarrow l_r = 0,6 \cdot l_s$$

$$\Phi 20 \Rightarrow l_r = 0,6 \cdot 80 = 48 \approx 50 \text{ cm}$$

$$\Phi 12 \Rightarrow l_r = 0,6 \cdot 48 = 28,8 \approx 30 \text{ cm}$$

Nappes sur recouvrements :



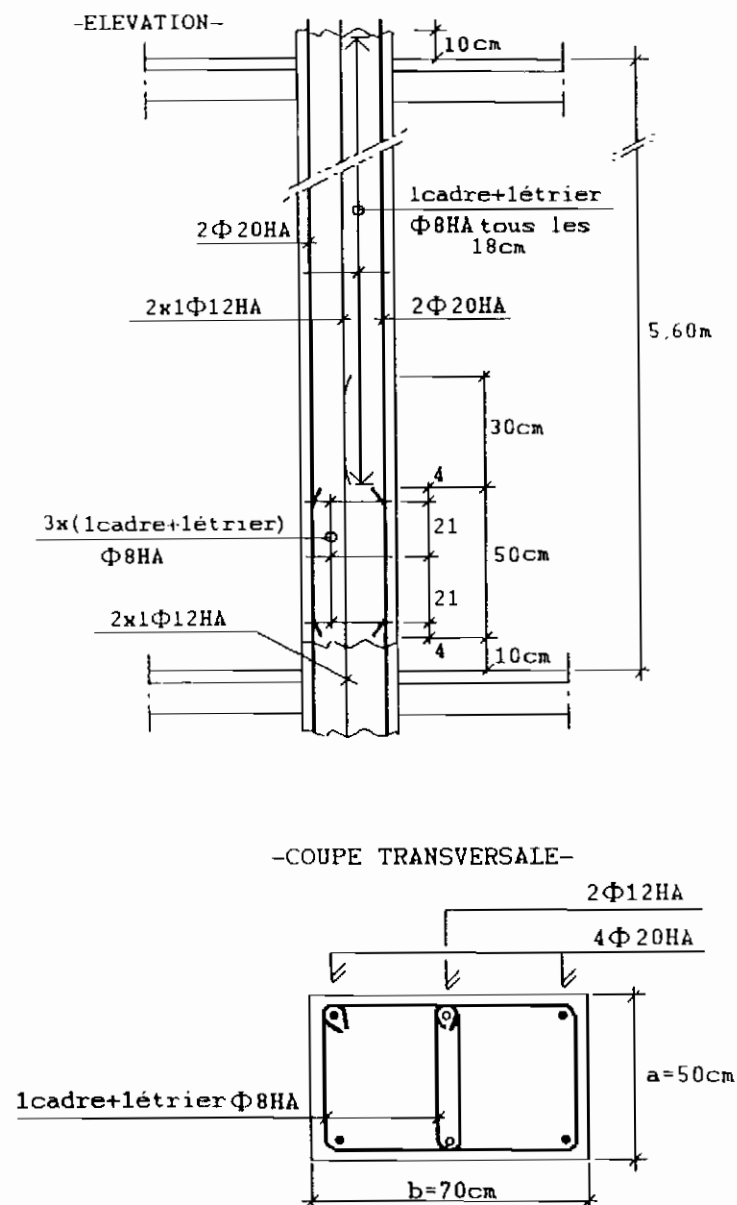
--> recouvrement des $\Phi 20$

$$3(1 \text{ cadre} + 1 \text{ étrier}) \Phi 8 \text{HA } s_t = \frac{50 - 2 \cdot 4}{2} = 21 \text{ cm}$$

==> recouvrement des $\Phi 12$

La proportion des barres résistantes arrêtées étant inférieure à 1/2 on conserve l'espacement de la zone courante, soit $s_t = 18 \text{ cm}$

6. SCHÉMA DE FERRAILLAGE



CHAPITRE 6

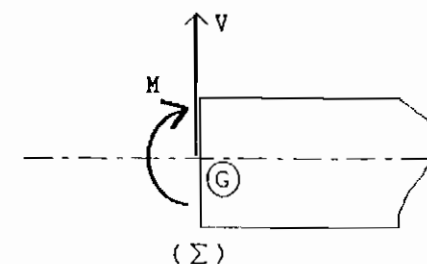
FLEXION SIMPLE

I. RAPPELS DE COURS

1. INTRODUCTION

Une poutre à plan moyen est sollicitée en FLEXION PLANE SIMPLE lorsque l'ensemble des forces ou couples appliqués à gauche d'une section droite Σ est réductible, au centre de gravité G de Σ , à :

- un couple M d'axe perpendiculaire au plan moyen (ou MOMENT FLÉCHISSANT),
- une force V située dans le plan de Σ et dans le plan moyen (ou EFFORT TRANCHANT)



Les effets du moment fléchissant M et ceux de l'effort tranchant V sont étudiés séparément. Le présent chapitre est consacré à l'étude des effets du moment fléchissant M. Pour l'étude de l'effort tranchant V, se reporter au chapitre 7 «EFFORT TRANCHANT».

2. SECTION RECTANGULAIRE - FISSURATION PEU PRÉJUDICIALE

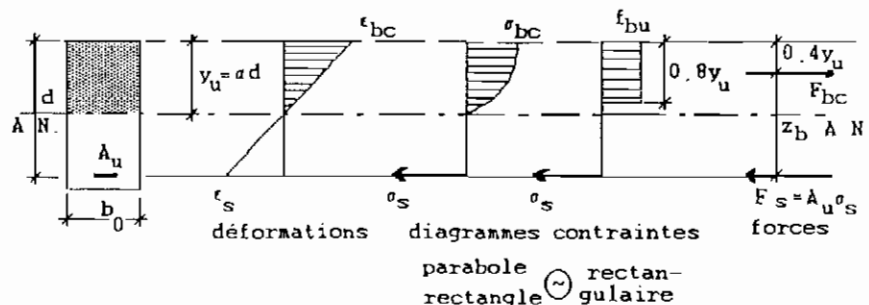
2.1. SECTION SANS ACIERS COMPRIMÉS

2.1.1. Dimensionnement à P.E.L.U.

On démontre que lorsque le pivot est A ou B (cf.paragraphe 3.3.3 et 4.3. chapitre 2 «BÉTON ARMÉ - GÉNÉRALITÉS»), le diagramme de contraintes parabole-rectangle est équiva-

lent à un diagramme de contraintes rectangulaire :

- de hauteur $0,8 \cdot y_u$.
- de largeur f_{bu} .



Équations d'équilibre :

$$F_{bc} = 0,8 \cdot b_0 \cdot y_u \cdot f_{bu}$$

$$z_b = (d - 0,4 \cdot y_u)$$

$$M_u = F_{bc} \cdot z_b \Rightarrow M_u = 0,8 \cdot b_0 \cdot y_u \cdot f_{bu} \cdot (d - 0,4 \cdot y_u)$$

$$M_u = A_u \cdot \sigma_s \cdot z_b$$

En posant :

$$\mu_{bu} = \frac{M_u}{b_0 \cdot d^2 \cdot f_{bu}} \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{y_u}{d}$$

on obtient :

$$\mu_{bu} = 0,8 \cdot \alpha (1 - 0,4 \cdot \alpha) \quad \text{et} \quad A_u = \frac{M_u}{z_b \cdot \sigma_s}$$

et par résolution de cette équation du deuxième degré en α :

$$\alpha = 1,25 \left(1 - \sqrt{1 - 2 \cdot \mu_{bu}} \right)$$

Méthode de calcul dans le cas d'un diagramme d'acier quelconque $\sigma_s = g(\epsilon_s, f_{ed})$:

$$\mu_{bu} = \frac{M_u}{b_0 \cdot d^2 \cdot f_{bu}} \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{y_u}{d}$$

$$\Rightarrow \alpha = 1,25 \left(1 - \sqrt{1 - 2 \cdot \mu_{bu}} \right)$$

$$\Rightarrow \alpha \leq 0,259 \Rightarrow \text{Pivot A} \Rightarrow \epsilon_s = 10/1000$$

$$\Rightarrow \alpha > 0,259 \Rightarrow \text{Pivot B} \Rightarrow \epsilon_{bc} = 3,5/1000$$

$$\Rightarrow \epsilon_s = \epsilon_{bc} \cdot \frac{1 - \alpha}{\alpha}$$

$$\Rightarrow \sigma_s \text{ par le diagramme de calcul des aciers}$$

$$\Rightarrow z_b = d(1 - 0,4 \cdot \alpha)$$

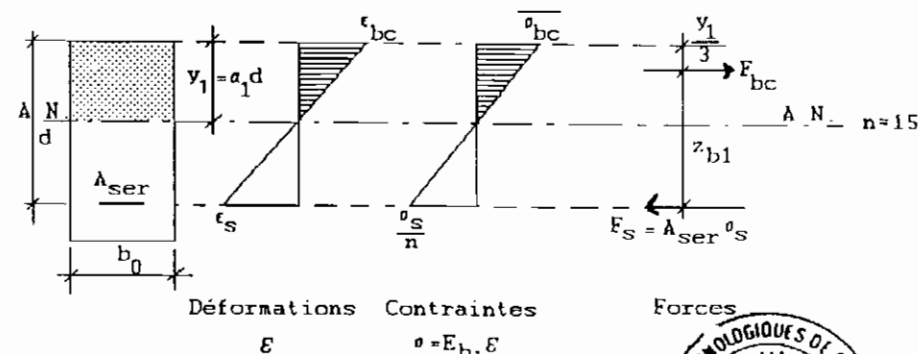
$$\Rightarrow A_u = \frac{M_u}{z_b \cdot \sigma_s}$$

2.1.2. Dimensionnement à l'E.L.S. par compression du béton

Hypothèse

La contrainte maximale de compression du béton est limitée à :

$$\sigma_{bc} = 0,6 \cdot f_{c28}$$



Équations d'équilibre :

$$F_{bc} = \frac{1}{2} \cdot b_0 \cdot y_1 \cdot \sigma_{bc}$$

$$z_{b1} = d - \frac{y_1}{3}$$

$$M_{ser} = F_{bc} \cdot z_{b1} = \frac{1}{2} \cdot b_0 \cdot y_1 \cdot \sigma_{bc} \left(d - \frac{y_1}{3} \right)$$

Connaissant M_{ser} , on pourrait tirer y_1 de cette équation, ce qui permettrait de calculer :

$$\sigma_s = 15 \cdot \sigma_{bc} \cdot \frac{d - y_1}{y_1}$$

$$z_{b1} = d - \frac{y_1}{3}$$

$$\text{puis} \quad A_{ser} = \frac{M_{ser}}{z_{b1} \cdot \sigma_s}$$

Mais en pratique, la considération du «moment limite ultime» rend inutile le calcul de A_{ser} , comme on va le voir ci-après.



2.1.3. Notion de moment limite

En principe, il faudrait retenir :

$$A = \text{Max} \begin{cases} A_u \\ A_{ser} \end{cases}$$

Mais, en pratique, les calculs montrent que l'on a $A_u > A_{ser}$ tant que le moment agissant ultime reste inférieur à une certaine limite M_{lu} , obtenue pour $A_u = A_{ser}$ et qui dépend de :

- f_{c28} ,

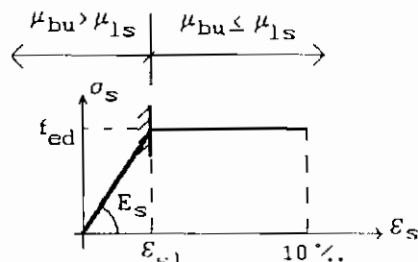
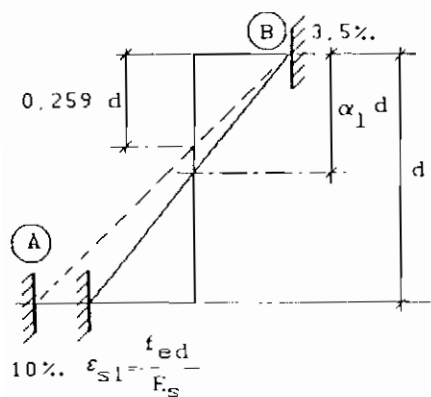
- f_e ,

$$\gamma = \frac{M_u}{M_{ser}}$$

- θ = facteur de durée d'application des charges.

La valeur numérique de μ_{lu} est elle-même bornée à la valeur μ_k pour laquelle l'allongement de l'acier tendu atteint (dans le cas du diagramme bilinéaire de l'acier visé par les Règles BAEL) $\epsilon_{sl} = f_{ed}/E_s$, car pour $\epsilon_s < \epsilon_{sl}$, on aurait $\sigma_s < f_{ed}$ et l'acier tendu serait mal utilisé à l'E.L.U. Pour obtenir cette borne, il suffit de calculer : $\mu_k = 0,8\alpha_1(1 - 0,4\alpha_1)$

avec :



$$\alpha_1 = \frac{\epsilon_k}{\epsilon_k + \epsilon_{sl}} = \frac{3,5/1\,000}{3,5/1\,000 + f_{ed}/E_s}$$

ce qui conduit aux valeurs suivantes

ACIERS	α_1	μ_{ls}
Fe E 215	0.789	0.4321
Fe E 400	0.668	0.3916
Fe E 500	0.617	0.3717

et on utilise toujours les aciers tendus au maximum de leur capacité lorsque $\mu_{bu} \leq \mu_{lu}$

La valeur numérique du moment réduit limite $\mu_{lu} = M_{lu}/b_0 d^2 f_{lu}$ dépend des paramètres f_{c28} , $\frac{f_{c28}}{\theta}$ et $\theta\gamma$ et ne résulte pas d'un calcul simple. Il existe des tables donnant les valeurs précises de μ_{lu} . On dispose également de formules approchées (cf. paragraphe 2.3.2.).

TABLEAU DES MOMENTS REDUITS $10^4 \mu_{lu}$

$f_{c28}(\text{MPa})$ Aciers Bêton	θ	0.85			0.90			1.00		
	γ	20	25	30	20	25	30	20	25	30
Fe E 215	1.35	2763	2960	3106	2940	3149	3304	3303	3538	3710
	1.40	2909	3110	3259	3097	3311	3468	3483	3723	3899
	1.45	3057	3262	3413	3256	3474	3634	3666	3912	4091
	1.50	3207	3416	3569	3417	3640	3802	3854	4106	4288
Fe E 400	1.35	2139	2372	2557	2275	2524	2721	2554	2835	3056
	1.40	2265	2506	2697	2410	2668	2871	2708	2999	3229
	1.45	2393	2643	2839	2548	2815	3024	2865	3168	3404
	1.50	2523	2782	2984	2688	2964	3180	3025	3340	3584
Fe E 500 TS 500	1.35	1903	2139	2330	2024	2275	2479	2270	2554	2784
	1.40	2019	2265	2463	2148	2410	2621	2412	2708	2947
	1.45	2138	2393	2598	2275	2548	2767	2556	2865	3113
	1.50	2258	2523	2735	2404	2688	2914	2704	3025	3283

TABLEAU DES MOMENTS REDUITS $10^4 \mu_{lu}$

$f_{c28}(\text{MPa})$ Aciers Bêton	θ	0.85			0.90			1.00		
	γ	40	50	60	40	50	60	40	50	60
Fe E 215	1.35	3307	3439	3531	3517	3655	3752	3946	4098	4204
	1.40	3462	3595	3687	3683	3822	3919	4137	4290	4321
	1.45	3619	3752	3844	3851	3991	4087	4321	4321	4321
	1.50	3777	3910	4002	4021	4161	4258	4321	4321	4321
Fe E 400	1.35	2829	3020	3160	3010	3213	3361	3382	3608	3774
	1.40	2977	3171	3313	3169	3375	3526	3564	3795	3916
	1.45	3126	3324	3469	3329	3539	3692	3749	3916	3916
	1.50	3277	3479	3625	3492	3706	3861	3916	3916	3916
Fe E 500 TS 500	1.35	2620	2829	2986	2788	3010	3492	3132	3382	3569
	1.40	2762	2977	3137	2940	3169	3339	3307	3564	3717
	1.45	2906	3125	3289	3095	3329	3503	3485	3717	3717
	1.50	3053	3277	3444	3253	3492	3669	3717	3717	3717

Les valeurs grisées correspondent à $\mu_{lu} = \mu_{ls}$.

2.1.4. Conclusion

Si $\mu_{bu} \leq \mu_{lu}$ on a $A = A_{lu}$ calculé à l'état-limite ultime comme indiqué au paragraphe 2.1.1. avec : $\sigma_s = f_{cd}$, le calcul de ϵ_s étant alors inutile.

Si $\mu_{bu} > \mu_{lu}$ il faut :

- ou changer les dimensions de la section,
- ou bien augmenter la résistance du béton lorsque c'est possible,
- ou enfin prévoir des aciers comprimés calculés suivant les indications du paragraphe 2.2. ci-après.

On peut retenir en **première approximation**, pour $f_{c28} = 25$ MPa, et en remarquant que pour f_{c28} et γ donnés μ_{lu} est sensiblement proportionnel à θ :

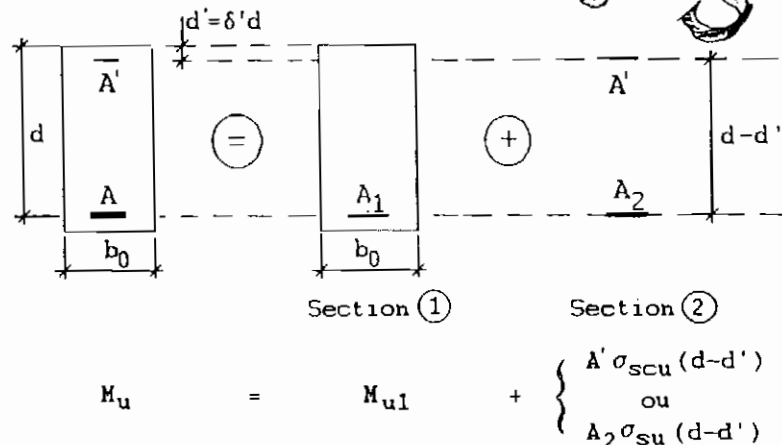
Fe E 400	$\mu_{lu} = 0,30 \cdot \theta$
Fe E 500	$\mu_{lu} = 0,27 \cdot \theta$

et, quel que soit $\gamma = M_u / M_{scr}$:

$$\mu_{AB} = 0,186 = 0,8 \cdot 0,259 \cdot (1 - 0,4 \cdot 0,259) < \mu_{lu}$$

2.2. SECTION AVEC ACIERS COMPRIMÉS

2.2.1. Hypothèses



La section fictive 2 doit équilibrer $M_{u2} \leq 0,4 M_u$ à l'E.L.U.

2.2.2. Calcul des aciers comprimés

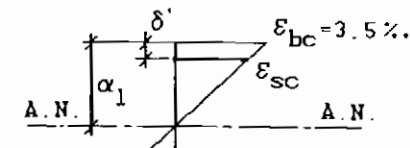
a) Dimensionnement à l'E.L.U.

$M_{u1} = M_{lu}$ = Moment maximal que peut équilibrer la section 1

$$\mu_{lu} = \frac{M_{lu}}{b_0 \cdot d^2 \cdot f_{bu}}$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = 1,25 (1 - \sqrt{1 - 2 \cdot \mu_{lu}})$$

$$\Rightarrow \epsilon_{sc} = \frac{3,5}{1000} \frac{\alpha_1 - \delta'}{\alpha_1}$$



$\Rightarrow \sigma_{scu}$ par le diagramme de calcul des aciers

$$\Rightarrow A'_u = \frac{M_u - M_{lu}}{(d-d') \cdot \sigma_{scu}} \quad \text{dans la section 2 qui équilibre } M_{u2} = M_u - M_{u1} = M_u - M_{lu} \text{ avec un bras de levier } z = d-d'$$

b) Dimensionnement à l'E.L.S.

Au moment limite ultime M_{lu} correspond :

$$M_{lser} = \frac{M_{lu}}{\gamma} = M_{scr1} = \text{moment maximal équilibré par la section 1}$$

Par la méthode exposée en 2.1.2., il serait possible de calculer la hauteur y_1 de l'axe neutre correspondant à $M_{scr} = M_{lser}$ d'où l'on tirerait :

$$\alpha_1 = \frac{y_1}{d}$$

$$\Rightarrow \sigma_{sc} = n \cdot \sigma_{bc} \frac{\alpha_1 - \delta'}{\alpha_1} = 15 \cdot \sigma_{bc} \frac{\alpha_1 - \delta'}{\alpha_1}$$

$$\Rightarrow A'_{ser} = \frac{M_{ser} - M_{lser}}{(d - d') \cdot \sigma_{sc}} \quad \begin{array}{l} \text{dans la section 2} \\ \text{qui équilibre} \\ M_{ser2} = M_{ser} - M_{ser1} = M_{ser} - M_{lser} \\ \text{avec un bras de levier} \\ z = d - d' \end{array}$$

c) Conclusion-Méthode de calcul

En multipliant haut et bas par γ l'expression de A'_{ser} que l'on vient de trouver, on aurait :

$$A'_{ser} = \frac{M_u - M_{lu}}{(d - d') \cdot (\gamma \cdot \sigma_{sc})}$$

Puis, en posant :

$$\sigma_{scc} = \text{Min}[\gamma \cdot \sigma_{sc}, \sigma_{scu}]$$

on peut retenir pour la valeur de A' strictement requise :

$$A' = \frac{M_u - M_{lu}}{(d - d') \cdot \sigma_{scc}}$$

La valeur approchée donnée en 2.3.3. pour σ_{scc} évite tout calcul fastidieux de $\gamma \cdot \sigma_{sc}$ et de σ_{scu} et évite le double calcul de A'_u et A'_{ser} , en donnant directement $A' = \text{Max}[A'_u \text{ et } A'_{ser}]$.

2.2.3. Calcul des aciers tendus

a) Cas où la section A' des aciers comprimés est imposée

A' étant imposée :

- soit à la suite du calcul précédent (cf. paragraphe 2.2.2.),
- soit à la suite d'autres considérations,

on commence par vérifier que :

$$A' \geq \frac{M_u - M_{lu}}{(d - d') \cdot \sigma_{scc}}$$

sinon A' doit être augmentée.

On a dans la section fictive 1 sans aciers comprimés :

$$M_{u1} = M_u - A' \cdot \sigma_{scc} (d - d')$$

avec la valeur approchée de σ_{scc} donnée au paragraphe 2.3.3.

Les aciers tendus sont alors calculés par la méthode ci-après (cf. paragraphe 2.2.3.b).

b) Cas où la section A' des aciers comprimés n'est pas imposée

La section fictive 1 sans aciers comprimés équilibre au plus M_{lu}

D'où :

μ_{lu} étant donné

$$\Rightarrow \alpha = 1,25 \cdot (1 - \sqrt{1 - 2 \cdot \mu_{lu}}) \quad \left. \begin{array}{l} \text{ou formules approchées si } \mu_{lu} \leq 0,275 \text{ pour } z_{bl} \text{ et } \mu_{lu} \\ \Rightarrow z_{bl} = d \cdot (1 - 0,4 \cdot \alpha) \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{(cf. paragraphes 2.3.1 et 2.3.2.)} \end{array}$$

d'où la section totale d'aciers tendus :

$$A = A_1 + A_2$$

$$\Rightarrow A = \frac{M_{lu}}{z_{bl} \cdot f_{ed}} + A' \cdot \frac{\sigma_{scc}}{f_{ed}}$$

z_{bl} correspond à μ_{lu} ,

σ_{scc} déterminé lors du calcul de A' (cf. paragraphes 2.2.2.c ou 2.3.3.)

c) Cas des sections à armatures symétriques

Voir annexe 1 en fin d'ouvrage et diagrammes d'interaction du § 5 au chapitre Flexion composée.

2.3. FORMULES APPROCHÉES POUR L'E.L.U.

2.3.1. Bras de levier z_b à l'E.L.U.

La courbe $z_b/d = f(\mu_{bu})$ est peu concave et sa concavité est tournée vers le bas. On peut la remplacer par une corde, ce qui va dans le sens de la sécurité. Cette corde peut être définie par deux points :

$$z_b = d \text{ quand } \mu_{bu} = 0,$$

$$z_b = z_{bl} \text{ quand } \mu_{bu} = \mu_{lu}.$$

En adoptant $\mu_{lu} = 0,275$ qui correspond sensiblement à $f_c = 500 \text{ MPa}$, $f_{ctk} = 25 \text{ MPa}$, $\theta = 1$ et $\gamma = 1,4$, on trouve :

$$z_{bl} = 0,835d$$

d'où l'équation de la droite cherchée :

$$\frac{z_b}{d} = 1 - 0,165 \frac{\mu_{bu}}{0,275} = 1 - 0,6 \mu_{bu}$$

Par conséquent on peut adopter comme valeur approchée par léger défaut :

$$\mu_{bu} \leq 0,275 \Rightarrow z_b = d \cdot (1 - 0,6 \cdot \mu_{bu})$$

2.3.2. Moment réduit limite μ_{lu}

En supposant que pour les valeurs courantes de f_{c28} , la variation de μ_{lu} est linéaire relativement aux trois quantités : $\frac{f_{c28}}{\theta}$, f_c et $\theta\gamma$, on pose :

$$\mu_{lu} = A \cdot (\theta\gamma) + B \cdot \frac{f_{c28}}{\theta} + C \cdot f_c$$

On obtient pour Fe E 500 :

$$\left. \begin{array}{l} f_{c28} = 25 \text{ MPa} \\ \theta = 1 \\ \gamma = 1,5 \end{array} \right\} \Rightarrow A \cdot 1,5 + B \cdot 25 + C \cdot 500 = 0,3025$$

$$\left. \begin{array}{l} f_{c28} = 25 \text{ MPa} \\ \theta = 1 \\ \gamma = 1,45 \end{array} \right\} \Rightarrow A \cdot 1,45 + B \cdot 25 + C \cdot 500 = 0,2865$$

$$\left. \begin{array}{l} f_{c28} = 30 \text{ MPa} \\ \theta = 1 \\ \gamma = 1,5 \end{array} \right\} \Rightarrow A \cdot 1,5 + B \cdot 30 + C \cdot 500 = 0,3283$$

système linéaire admettant pour solution :

$$A = 0,3220$$

$$B = 0,0051$$

$$C = -0,000613$$

d'où une formule approchée pour Fe E 500 et $f_{c28} \leq 30$ MPa :

$$C \cdot 500 = -6,13 \cdot 10^{-4} \cdot 500 = -0,3065$$

$$10^4 \mu_{lu} = 3220 \theta \gamma + 51 \frac{f_{c28}}{\theta} - 3100 \quad (\text{MPa})$$

Pour Fe E 400 et $f_{c28} \leq 30$ MPa un calcul du même type conduit à :

$$10^4 \mu_{lu} = 3440 \theta \gamma + 49 \frac{f_{c28}}{\theta} - 3050 \quad (\text{MPa})$$

Si $f_{c28} > 30$ MPa, il faut utiliser les valeurs tirées du tableau du paragraphe 2.1.3. car la variation de μ_{lu} n'est plus linéaire en $\theta\gamma$ et $\frac{f_{c28}}{\theta}$.

2.3.3. Contrainte équivalente des aciers comprimés à l'ELU

Dans les cas courants (aciers Fe E 400 ou Fe E 500) la quantité $9 \cdot \gamma \cdot f_{c28} / \alpha_1$ est sensiblement constante pour f_{c28} donné :

$\frac{9 \gamma f_{c28}}{\alpha_1}$		Fe E 400			Fe E 500		
		$f_{c28} = 25$	30	35	25	30	35
$\theta = 0,85$	$\gamma = 1,35$	658,29	719,82	781,54	745,52	807,33	868,96
	1,40	667,29	730,73	794,47	754,18	817,92	881,58
	1,45	675,84	741,43	806,76	762,75	828,37	893,97
	1,50	684,24	751,58	819,12	771,23	838,64	905,73
	écart (%)	3,9	4,3	4,8	3,4	3,8	4,2
$\theta = 0,90$	$\gamma = 1,35$	654,31	715,31	776,71	741,56	802,61	863,80
	1,40	662,80	725,79	788,92	749,78	812,92	875,85
	1,45	670,92	735,81	800,60	757,64	822,41	887,37
	1,50	678,96	745,38	812,06	765,49	832,19	898,74
	écart (%)	3,8	4,2	4,6	3,2	3,7	4,0
$\theta = 1,00$	$\gamma = 1,35$	645,68	705,69	765,54	732,52	792,23	852,27
	1,40	653,39	714,68	776,35	739,78	801,16	862,77
	1,45	660,36	723,67	786,80	746,87	809,85	872,95
	1,50	667,12	731,83	796,32	753,76	817,96	882,49
	écart (%)	3,3	3,6	4,0	2,9	3,2	3,5

Dans ce tableau :

l'écart est mesuré entre les valeurs extrêmes pour f_{c28} et 0 donnés lorsque γ varie ;

les cases grisées correspondent à $\gamma \sigma_{sc} > f_{cd}$.

On en déduit pour $\theta = 1$:

$$\begin{aligned} \sigma_{sc} &= 9 \cdot \gamma \cdot f_{c28} \cdot \left(1 - \frac{\delta'}{\alpha_1} \right) = 9 \cdot \gamma \cdot f_{c28} - \delta' \cdot \frac{9 \cdot \gamma \cdot f_{c28}}{\alpha_1} \\ &= 9 \cdot \gamma \cdot f_{c28} - \delta' \cdot \Delta \end{aligned}$$

avec pour valeur de la constante Δ :

$$\Delta = \alpha \cdot f_{c28} + \beta$$

En adoptant une valeur moyenne de Δ pour γ compris entre 1,35 et 1,50, on trouve dans le cas des aciers Fe E 500 :

$$\text{pour } f_{c28} = 25 \text{ MPa : } \frac{9 \cdot \gamma \cdot f_{c28}}{\alpha_1} = 740$$

– pour $f_{c28} = 35 \text{ MPa}$: $\frac{9 \cdot \gamma \cdot f_{c28}}{\alpha_1} = 870$

ce qui conduit à :

$$\alpha \cdot 25 + \beta = 740$$

$$\alpha \cdot 35 + \beta = 870$$

système linéaire admettant pour solution :

$$\alpha = 13$$

$$\beta = 415$$

Le facteur correcteur à appliquer à $9 \cdot \gamma \cdot f_{c28} / \alpha_1$ pour tenir compte de la durée d'application des charges peut être pris égal à :

$$k = 1,02 \text{ si } \theta = 0,9$$

$$k = 1,04 \text{ si } \theta = 0,85$$

d'où :

$$\sigma_{sce} = 9 \cdot \gamma \cdot f_{c28} - \delta' \cdot (13 \cdot f_{c28} + 415) K \leq 435 \text{ MPa}$$

avec :

$$K = \begin{cases} 1,00 & \text{si } \theta = 1 \\ 1,02 & \text{si } \theta = 0,9 \\ 1,04 & \text{si } \theta = 0,85 \end{cases}$$

pour Fe E 500

Par ailleurs, pour les aciers Fe E 400, on trouve :

$$\sigma_{sce} = 9 \cdot \gamma \cdot f_{c28} - 0,9 \cdot \delta' \cdot (13 \cdot f_{c28} + 415) K \leq 348 \text{ MPa}$$

avec :

$$K = \begin{cases} 1,00 & \text{si } \theta = 1 \\ 1,02 & \text{si } \theta = 0,9 \\ 1,04 & \text{si } \theta = 0,85 \end{cases}$$

pour
Fe E 400

3. SECTION RECTANGULAIRE – FISSURATION PRÉJUDICIABLE OU TRÈS PRÉJUDICIABLE

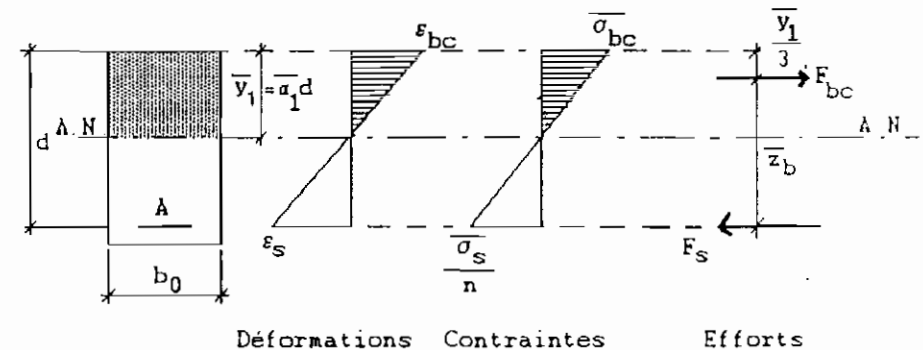
3.1. ÉTATS-LIMITES D'OUVERTURE DES FISSURES

En plus de la limite imposée à la contrainte maximale du béton comprimé, on limite la contrainte de traction des aciers à l'E.L.S. aux valeurs suivantes :

* Fissuration préjudiciable : $\bar{\sigma}_s = \text{Min} \begin{cases} \frac{2}{3} f_e \\ \text{Max} \begin{cases} 240 \text{ MPa} \\ 110 \sqrt{\eta f_{tj}} \text{ (MPa)} \end{cases} \end{cases}$

* Fissuration très préjudiciable : $\bar{\sigma}_s = \text{Min} \begin{cases} \frac{1}{2} f_e \\ \text{Max} \begin{cases} 200 \text{ MPa} \\ 90 \sqrt{\eta f_{tj}} \text{ (MPa)} \end{cases} \end{cases}$

3.2. NOTION DE MOMENT RÉSISTANT BÉTON : M_{rb}



MOMENT RÉSISTANT BÉTON = moment pour lequel on atteint l'état-limite de service par compression du béton ($\sigma_{bc} = \sigma_{lc}$) lorsque la contrainte de l'acier tendu σ_s est invariable et égale à sa valeur à l'état-limite d'ouverture des fissures : $\bar{\sigma}_s$.

On a donc pour $n = 15$:

$$\alpha_1 = \frac{y_1}{d} = \frac{15 \cdot \sigma_{bc}}{15 \cdot \sigma_{bc} + \bar{\sigma}_s}$$

$$F_{bc} = \frac{1}{2} \cdot b_0 \cdot y_1 \cdot \sigma_{lc}$$

$$z_b = d - \frac{y_1}{3}$$

$$M_{rb} = F_{bc} \cdot \bar{z}_b = \frac{1}{2} \cdot b_0 \cdot \bar{y}_1 \cdot \bar{\sigma}_{bc} \cdot \left(d - \frac{\bar{y}_1}{3} \right)$$

D'où le moment résistant béton réduit :

$$\mu_{rb} = \frac{M_{rb}}{b_0 \cdot d^2 \cdot \bar{\sigma}_{bc}} = \frac{1}{2} \bar{\alpha}_1 \left(1 - \frac{\bar{\alpha}_1}{3} \right)$$

3.3. CALCUL DES ARMATURES

3.3.1. Cas où $M_{ser} \leq M_{rb}$

On a $\sigma_{bc} \leq \bar{\sigma}_{bc}$ avec $\sigma_s = \bar{\sigma}_s$ d'où $A' = 0$.

Les équations pour le calcul des armatures tendues sont :

$$M_{ser} = \frac{1}{2} \alpha_1 \left(1 - \frac{\alpha_1}{3} \right) b_0 d^2 \sigma_{bc}$$

avec :

$$\sigma_{bc} = \frac{\bar{\sigma}_s}{15} \cdot \frac{\alpha_1}{1 - \alpha_1} \quad (\text{relation dans les triangles semblables})$$

$$z_b = d \left(1 - \frac{\alpha_1}{3} \right)$$

On en déduit :

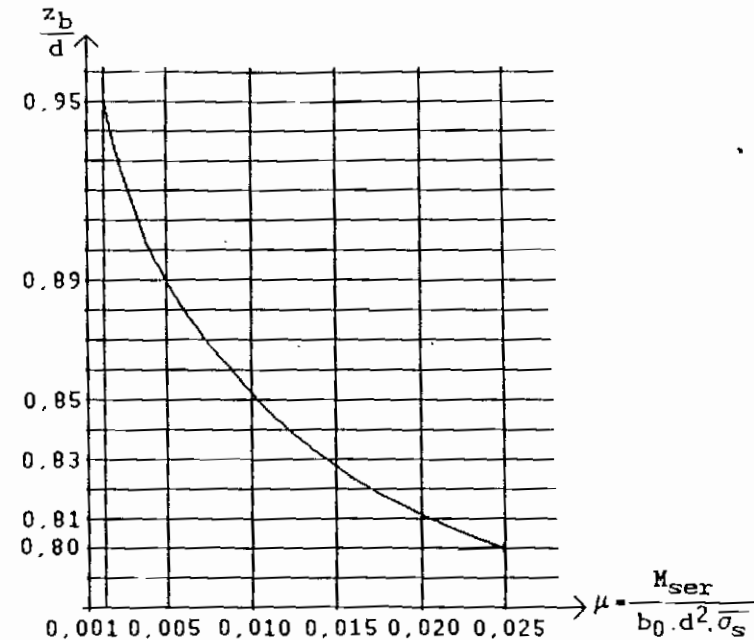
$$M_{ser} = \frac{\bar{\sigma}_s}{30} \cdot \frac{\alpha_1^2 (1 - \alpha_1/3)}{1 - \alpha_1} b_0 d^2 \Rightarrow \frac{M_{ser}}{b_0 d^2 \bar{\sigma}_s} = \frac{1}{30} \cdot \frac{\alpha_1^2 (1 - \alpha_1/3)}{1 - \alpha_1} = \mu_s$$

$\Rightarrow \alpha_1$ par résolution de cette équation du troisième degré en α_1

$$\Rightarrow z_b = d \left(1 - \frac{\alpha_1}{3} \right)$$

$$\Rightarrow A_{ser} = \frac{M_{ser}}{z_b \bar{\sigma}_s}$$

La représentation graphique de $z_b/d = f(\mu_s)$ est la suivante :



En pratique, à défaut d'une évaluation plus précise (cf. organigramme du § 8.3.), on utilise une valeur approchée par défaut de z_b qui conduit à une section A_{ser} par excès (pouvant atteindre, dans les limites du graphique ci-dessus, 10 % en moyenne) :

$$\bar{\alpha}_1 = \frac{15 \cdot \bar{\sigma}_{bc}}{15 \cdot \bar{\sigma}_{bc} + \bar{\sigma}_s} \Rightarrow \bar{z}_b = d \left(1 - \frac{\bar{\alpha}_1}{3} \right) \Rightarrow A_{ser} = \frac{M_{ser}}{\bar{z}_b \cdot \bar{\sigma}_s}$$

3.3.2. Cas où $M_{ser} > M_{rb}$

On a $\sigma_{bc} > \bar{\sigma}_{bc}$ d'où il faut des aciers comprimés A' .

On décompose la section réelle en deux sections fictives (voir paragraphe 2.2.1.) :

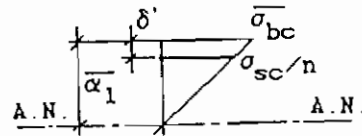
- une section fictive 1, de largeur b_0 , sans aciers comprimés,
- une section fictive 2, sans béton, munie de la section A' d'aciers comprimés.

a) Section A' d'aciers comprimés

La section fictive 1 équilibrant M_{rb} , on a :

$$\bar{\alpha}_1 = \frac{15 \cdot \bar{\sigma}_{bc}}{15 \cdot \bar{\sigma}_{bc} + \bar{\sigma}_s}$$

$$\alpha_s = 15 \cdot \bar{\sigma}_{bc} \cdot \frac{\bar{\alpha}_1 - \delta'}{\bar{\alpha}_1}$$



n=15

$$A' = \frac{M_{ser} - M_{rb}}{(d - d') \cdot \sigma_{sc}} \quad \text{dans la section 2 avec } A'$$

1. Section A_{ser} d'aciers tendus

Dans la section fictive 1 sans aciers comprimés :

$$A_1 = \frac{M_{rb}}{z_b \cdot \bar{\sigma}_s} \quad \text{avec} \quad \bar{z}_b = d \left(1 - \frac{\bar{\alpha}_1}{3} \right)$$

Dans la section fictive 2 avec aciers comprimés :

$$A_2 = A' \cdot \frac{\sigma_s}{\sigma_s}$$

Pour au total :

$$A_{ser} = A_1 + A_2 = \frac{M_{rb}}{z_b \cdot \bar{\sigma}_s} + A' \cdot \frac{\sigma_s}{\sigma_s}$$

$$\bar{z}_b = d \cdot \left(1 - \frac{\bar{\alpha}_1}{3} \right)$$

4. CONCLUSION

En cas de fissuration préjudiciable ou très préjudiciable, A_{ser} étant la section calculée au § 3.3., la section des armatures longitudinales tendues est obtenue comme suit :

fissuration préjudiciable :

$$\begin{cases} \text{Fe E 500 : } A = A_{ser} \\ \text{Fe E 400 : } A = \text{Max}[A_u, A_{ser}] \\ \Phi \geq 6 \text{ mm dans tous les cas} \end{cases}$$

fissuration très préjudiciable :

$$\begin{cases} A = A_{ser} \text{ quel que soit } f_c \\ \Phi \geq 8 \text{ mm} \end{cases}$$

4. COFFRAGE DES SECTIONS RECTANGULAIRES

Indépendamment d'autres conditions (relatives à la contrainte tangente, à la flèche, etc.), il est obtenu en écrivant qu'il ne faut pas d'aciers comprimés.

4.1. FISSURATION PEU PRÉJUDICIALE

$$M_u \leq M_{lu} \implies b_0 \cdot d^2 \geq \frac{M_u}{\mu_{lu} \cdot f_{bu}}$$

4.2. FISSURATION PRÉJUDICIALE OU TRÈS PRÉJUDICIALE

$$\begin{cases} M_u \leq M_{lu} \\ M_{ser} \leq M_{rb} \end{cases} \implies b_0 \cdot d^2 \geq \text{Max} \left\{ \begin{array}{l} \frac{M_u}{\mu_{lu} \cdot f_{bu}} \\ \frac{M_{ser}}{\mu_{rb} \cdot \sigma_{bc}} \end{array} \right.$$

4.3. REMARQUE

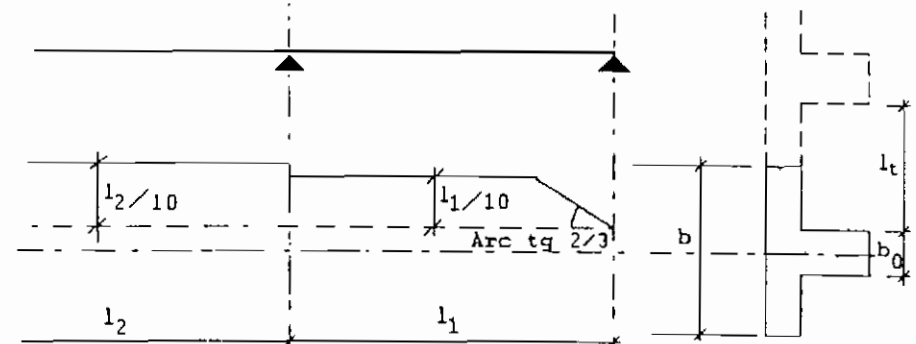
Pour déterminer la seconde inconnue du problème, une règle de bonne construction consiste à prendre :

$$0,3 \cdot d \leq b_0 \leq 0,5 \cdot d$$

5. SECTIONS EN T

5.1. LARGEUR DE TABLE À PRENDRE EN COMPTE

Il faut considérer :



De plus, on ne doit pas attribuer la même zone de table à deux nervures parallèles différentes. D'où en travée :

$$\frac{b-b_0}{2} = \text{Min} \left\{ \begin{array}{l} \frac{l_i}{10} \\ \frac{l_t}{2} \end{array} \right.$$

l_i = entre nus des nervures de poutres,

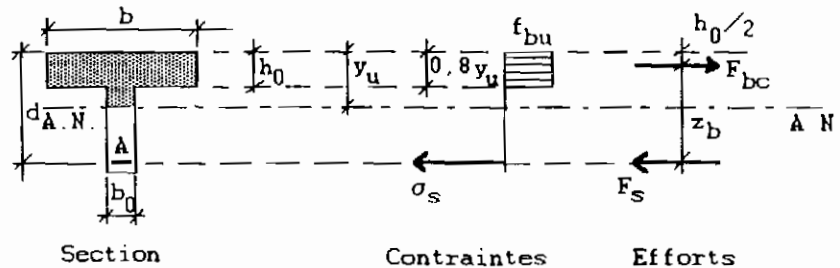
l_t = portée de la travée considérée.

5.2. DIMENSIONNEMENT À L'E.L.U.

Lorsque la fissuration est peu préjudiciable pour les aciers Fe E 500.

Comme la table est le plus souvent surabondante vis-à-vis de la compression, on n'a généralement nul besoin d'aciers comprimés. Nous ne nous intéresserons donc qu'aux sections en T sans aciers comprimés.

5.2.1. Moment de référence



Moment équilibré par la seule table uniformément comprimée sur toute sa hauteur sous f_{bu} :

$$F_{bc} = b \cdot h_0 \cdot f_{bu}$$

$$z_b = d - \frac{h_0}{2}$$

$$M_{Tu} = F_{bc} \cdot z_b$$

D'où :

$$M_{Tu} = b \cdot h_0 \left(d - \frac{h_0}{2} \right) f_{bu}$$

5.2.2. Calcul des armatures

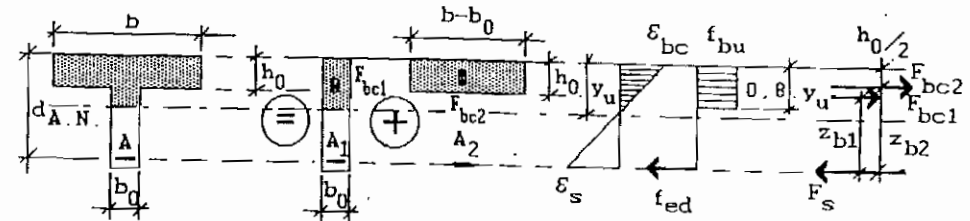
a) Cas où $M_u \leq M_{Tu}$

La table est surabondante et $0,8 \cdot y_u \leq h_0$.

⇒ Le béton tendu étant négligé, calcul en section rectangulaire de largeur b.

b) Cas où $M_u > M_{Tu}$

La table est insuffisante pour équilibrer à elle seule M_u et $0,8 \cdot y_u > h_0$. Une partie de la nervure est donc comprimée. On opère par décomposition de la section réelle en deux sections fictives.



$$M_u = M_{u1} + M_{u2}$$

Section fictive 2 :

$$F_{bc2} = (b - b_0) \cdot h_0 \cdot f_{bu} = A_2 \cdot f_{ed}$$

$$z_{b2} = d - \frac{h_0}{2}$$

$$M_{u2} = F_{bc2} \cdot z_{b2} = (b - b_0) \cdot h_0 \left(d - \frac{h_0}{2} \right) \cdot f_{bu} = M_{Tu} \cdot \frac{b - b_0}{b}$$

Section fictive 1 :

$$M_{u1} = M_u - M_{u2} = M_u - M_{Tu} \cdot \frac{b - b_0}{b} \Rightarrow \mu_{bu} = \frac{M_{u1}}{b_0 \cdot d^2 \cdot f_{bu}}$$

$$\Rightarrow \alpha = 1,25 \cdot \left(1 - \sqrt{1 - 2 \cdot \mu_{bu}} \right)$$

$$\Rightarrow \sigma_s = f_{ed}$$

$$\Rightarrow z_{b1} = d \left(1 - 0,4 \cdot \alpha \right)$$

$$\Rightarrow A_1 = \frac{M_{u1}}{z_{b1} \cdot f_{ed}}$$

ou formule approchée pour $z_{b1} \approx 1$ et $\mu_{bu} \leq 0,275$ (cf. paragraphe 2.3.1.)

Total :

$$A_u = A_1 + A_2$$

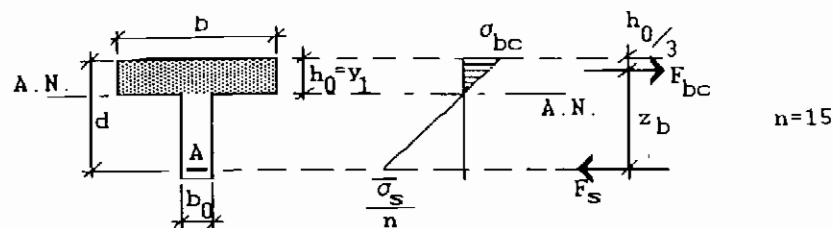
$$A_u = \frac{M_u - M_{Tu} \cdot \frac{b - b_0}{b}}{z_{b1} \cdot f_{ed}} + \frac{(b - b_0) \cdot h_0 \cdot f_{bu}}{f_{ed}}$$

5.3. DIMENSIONNEMENT À L'E.L.S.

Lorsque la fissuration est :

- préjudiciable (y compris pour $f_{ec} \leq 400$ MPa),
- ou très préjudiciable.

5.3.1. Moment de référence



Moment équilibré par la seule table entièrement comprimée pour atteindre $\bar{\sigma}_s$ dans les aciers tendus :

$$M_{Tser} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_0 \cdot \sigma_{bc} \cdot \left(d - \frac{h_0}{3} \right)$$

$$\text{avec } \sigma_{bc} = \frac{\bar{\sigma}_s}{15} \cdot \frac{h_0}{d - h_0}$$

D'où :

$$M_{Tser} = \frac{\bar{\sigma}_s}{30} \cdot \frac{d - \frac{h_0}{3}}{d - h_0} \cdot b \cdot h_0^2$$

Cette valeur est environ huit à quinze fois plus faible que M_{Tu} . On a donc, le plus souvent : $M_{ser} > M_{Tser}$, même lorsque $M_u < M_{Tu}$.

5.3.2. Calcul de A_{ser}

a) Cas où $M_{ser} \leq M_{Tser}$

La table est surabondante.

Considérer la section rectangulaire de largeur b mais prendre ici, comme valeur approchée

de z_b : $z_b = d - \frac{h_0}{3}$ (cf. page 123).

b) Cas où $M_{ser} > M_{Tser}$

La table est insuffisante pour équilibrer seule M_{ser} . Une partie de la nervure est comprimée. Le calcul exact exige des itérations.

Le bras de levier est donné par des expressions approchées :

$$\left. \begin{aligned} z_b &= 0,99 \cdot d - 0,4 \cdot h_0 \\ \text{ou } z_b &= d - \frac{h_0}{2} \\ z_b &= 0,93 \cdot d \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Planchers des bâtiments} \\ \text{Ouvrages d'art} \end{array}$$

D'où :

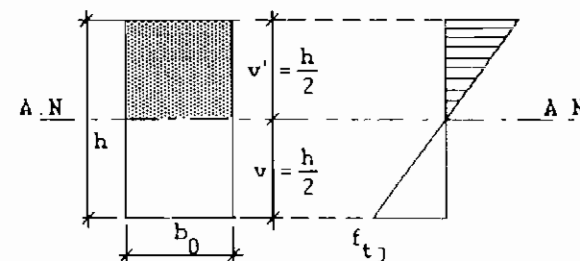
$$A_{ser} = \frac{M_{ser}}{z_b \cdot \bar{\sigma}_s} \quad \text{avec : } \left\{ \begin{array}{l} \text{fissuration préjudiciable :} \\ \phi \geq 6 \text{ mm} \\ \text{fissuration très préjudiciable :} \\ \phi \geq 8 \text{ mm} \end{array} \right.$$

6. POURCENTAGE MINIMAL D'ARMATURES

La sollicitation provoquant la fissuration du béton ($\sigma_t = f_{t28}$) de la section supposée non armée et non fissurée doit entraîner dans les aciers tendus de la section réelle une contrainte au plus égale à f_e .

6.1. CAS DES SECTIONS RECTANGULAIRES

Contrainte de traction du béton dans la section supposée non armée et non fissurée :



$$f_{t28} = \frac{M_t \cdot v}{I} = \frac{6 \cdot M_t}{b_0 \cdot h^2} \Rightarrow M_t = \frac{1}{6} \cdot f_{t28} \cdot b_0 \cdot h^2$$

Armature équilibrant ce moment sous une contrainte égale à f_e :

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{M_t}{z_b \cdot f_e} \\ z_b &= 0,9 \cdot d \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} A &= \frac{1}{6} \cdot \frac{f_{t28} \cdot b_0 \cdot h^2}{0,9 \cdot d \cdot f_e} \\ d &= 0,9 \cdot h \end{aligned} \right\} \Rightarrow A = \frac{1}{6 \cdot 0,9^3} \cdot \frac{f_{t28} \cdot b_0 \cdot d}{f_e}$$

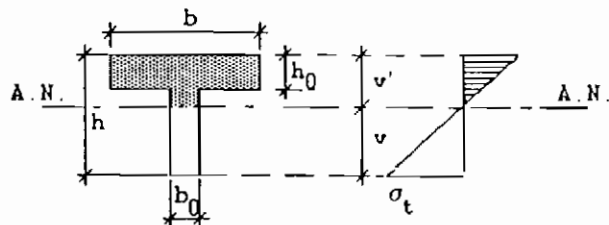
Pourcentage minimal d'armatures :

$$\frac{A_{\min}}{b_0 \cdot d} = 0,23 \cdot \frac{f_{t28}}{f_e}$$

6.2. CAS DES SECTIONS EN T

Que ces sections aient été assimilées ou non à des sections rectangulaires pour le calcul des armatures.

6.2.1. Caractéristiques géométriques de la section



$$v' = \frac{b_0 \cdot h^2 + (b - b_0) \cdot h_0^2}{2 [b_0 \cdot h + (b - b_0) \cdot h_0]}$$

$$v = h - v'$$

$$I = b_0 \cdot \frac{h^3}{3} + (b - b_0) \cdot \frac{h_0^3}{3} + [b_0 \cdot h + (b - b_0) \cdot h_0] v'^2$$

6.2.2. Sollicitation de fissuration

$$\sigma_t = \frac{M_f \cdot v}{I} = f_{t28} \Rightarrow M_f = f_{t28} \cdot \frac{I}{v}$$

6.2.3. Section minimale d'armatures

En prenant : $z_b = d - \frac{b_0}{3}$

On a : $A_{\min} = \frac{M_f}{z_b \cdot f_e}$

$$A_{\min} = \frac{I}{0,81 \cdot h \cdot v} \cdot \frac{f_{t28}}{f_e}$$

6.2.4. Remarque

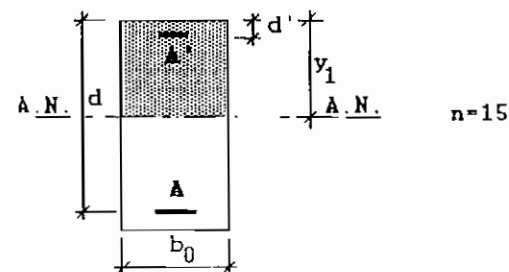
Dans le cas où \$M < 0\$ la formule du paragraphe 6.1 ne convient pas.

Il faut prendre : $A_{\min} = \frac{I}{0,81 \cdot h \cdot v'} \cdot \frac{f_{t28}}{f_e}$ (ici \$z_b = 0,9d\$ et \$d = 0,9h\$)

7. VÉRIFICATION DES CONTRAINTES À L'E.L.S.

7.1. POSITION DE L'AXE NEUTRE

Considérons une section rectangulaire \$b_0 d\$:



L'équation d'équilibre des forces conduit à :

$$f(y_1) = \frac{b_0 \cdot y_1^2}{2} + n \cdot A' \cdot (y_1 - d') - n \cdot A \cdot (d - y_1) = 0$$

dite « équation des moments statiques ».

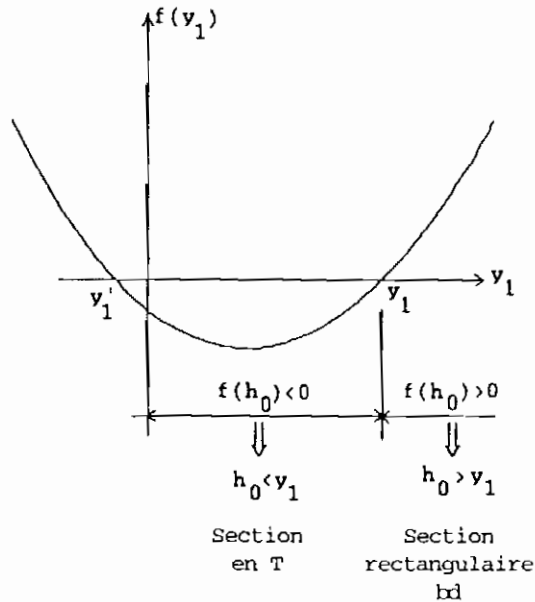
$$f(y_1) = 0 \Rightarrow y_1$$

Soit une équation du second degré en \$y_1\$ (\$y_1^2 - S y_1 + P = 0\$) avec :

\$P = y_1 y'_1 < 0 \Rightarrow\$ deux racines \$y_1\$ et \$y'_1\$ de signes contraires,

\$f'(y_1) = b_0 > 0 \Rightarrow\$ concavité vers les \$f(y_1) > 0\$.

D'où, pour une section en T, on commence par regarder si elle se comporte ou non comme une section rectangulaire de largeur b (équation des moments statiques avec $b_0 = b$) :



$f(h_0) < 0 \Rightarrow h_0 < y_1$ et l'axe neutre tombe dans la nervure $\Rightarrow$ comportement en section en T,

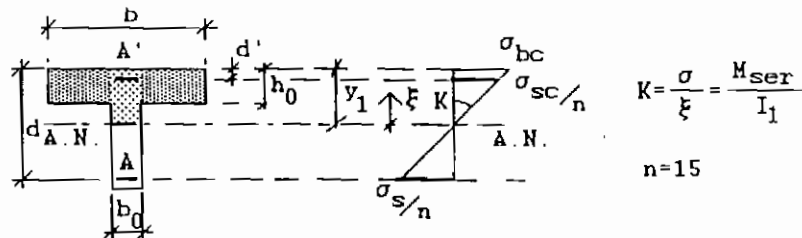
$f(h_0) \geq 0 \Rightarrow h_0 \geq y_1$ et l'axe neutre tombe dans la table $\Rightarrow$ comportement en section rectangulaire de largeur b .

7.2. CALCUL DES CONTRAINTES

7.2.1. Cas des sections en T avec $f(h_0) < 0$

$h_0 < y_1$ et section en T.

L'axe neutre est défini par :



$$\frac{b_0 \cdot y_1^2}{2} + [(b - b_0) h_0 + n(A + A')] y_1 - \left[(b - b_0) \frac{h_0^2}{2} + nAd + nA' d' \right] = 0$$

Le moment d'inertie par rapport à l'axe neutre (zone comprimée considérée comme différence de rectangles ayant tous un côté commun avec l'axe neutre) vaut :

$$I_1 = \frac{b \cdot y_1^3}{3} - (b - b_0) \frac{(y_1 - h_0)^3}{3} + nA' (y_1 - d')^2 + nA (d - y_1)^2$$

D'où les contraintes en posant :

$$K = \frac{M_{ser}}{I_1}$$

$$\sigma_{bc} = K \cdot y_1 \leq \bar{\sigma}_{bc}$$

$$\sigma_{sc} = n \cdot K (y_1 - d')$$

$$\sigma_{sc} = 15 \cdot K (y_1 - d')$$

$$\sigma_s = n \cdot K (d - y_1)$$

$$\sigma_s = 15 \cdot K (d - y_1)$$

$\left. \begin{array}{l} \sigma_{sc} = n \cdot K (y_1 - d') \\ \sigma_s = 15 \cdot K (d - y_1) \end{array} \right\} \leq \bar{\sigma}_s$ si fissuration préjudiciable ou très préjudiciable.

7.2.2. Cas des sections en T avec $f(h_0) \geq 0$

$h_0 \geq y_1$ et section rectangulaire de largeur b .

Faire $b_0 = b$ dans les formules ci-dessus.

7.2.3. Cas des sections rectangulaires

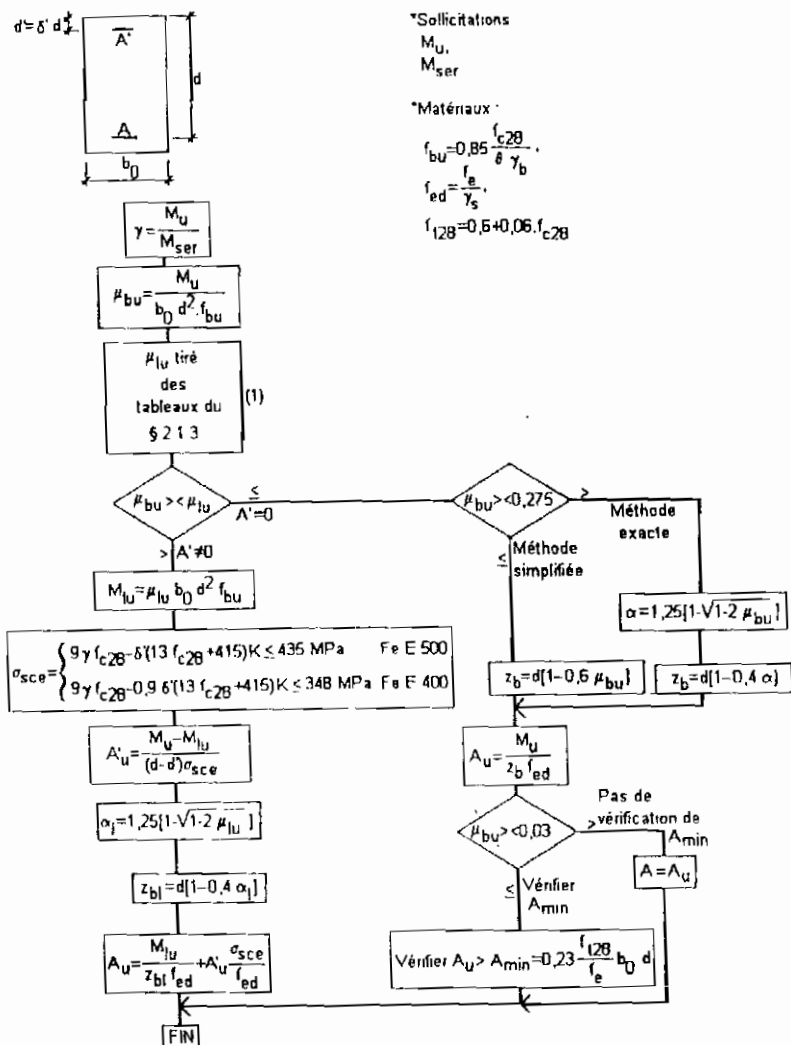
Dans ce cas $b = b_0$ et les formules du § 7.2.1 deviennent :

$$\frac{b_0 \cdot y_1^2}{2} + n(A + A') y_1 - n(Ad + A'd') = 0$$

$$I_1 = \frac{b_0 \cdot y_1^3}{3} + nA' (y_1 - d')^2 + nA (d - y_1)^2$$

8. ORGANIGRAMMES RÉCAPITULATIFS POUR LE DIMENSIONNEMENT DES ARMATURES

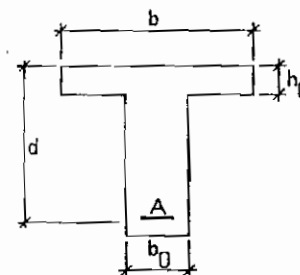
8.1. SECTION RECTANGULAIRE – DIMENSIONNEMENT À L'E.L.U.



(1) ou si $f_{c28} \leq 30 \text{ MPa}$

$$10^4 \mu_{lu} = \begin{cases} 3220,8\gamma + 51 \frac{f_{c28}}{\theta} - 3100 & \text{Fe E 500} \\ 3440,8\gamma + 49 \frac{f_{c28}}{\theta} - 3050 & \text{Fe E 400} \end{cases}$$

8.2. SECTION EN T – DIMENSIONNEMENT À L'E.L.U.



*Sollicitations :

$$M_u,$$

$$M_{ser}$$

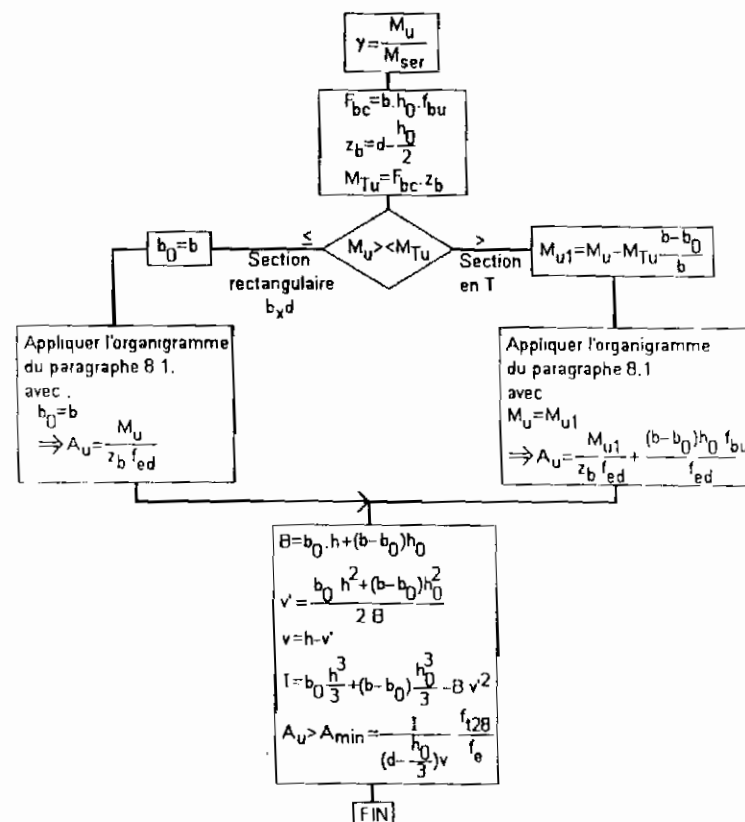
*Matériaux :

$$f_{bu} = 0,85 \frac{f_{c28}}{\theta \gamma_b}$$

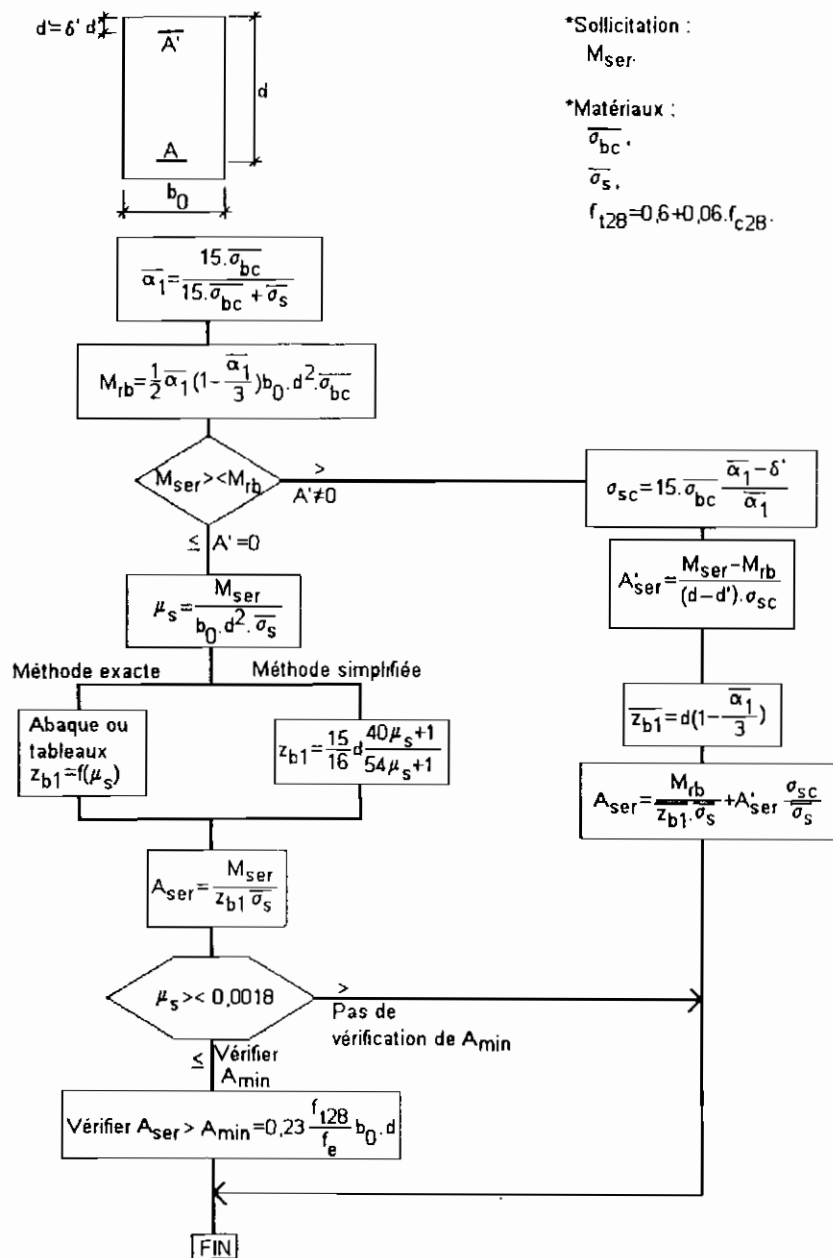
$$f_{ed} = \frac{f_e}{\gamma_s}$$

$$\varepsilon_{bc} = 3,5\%$$

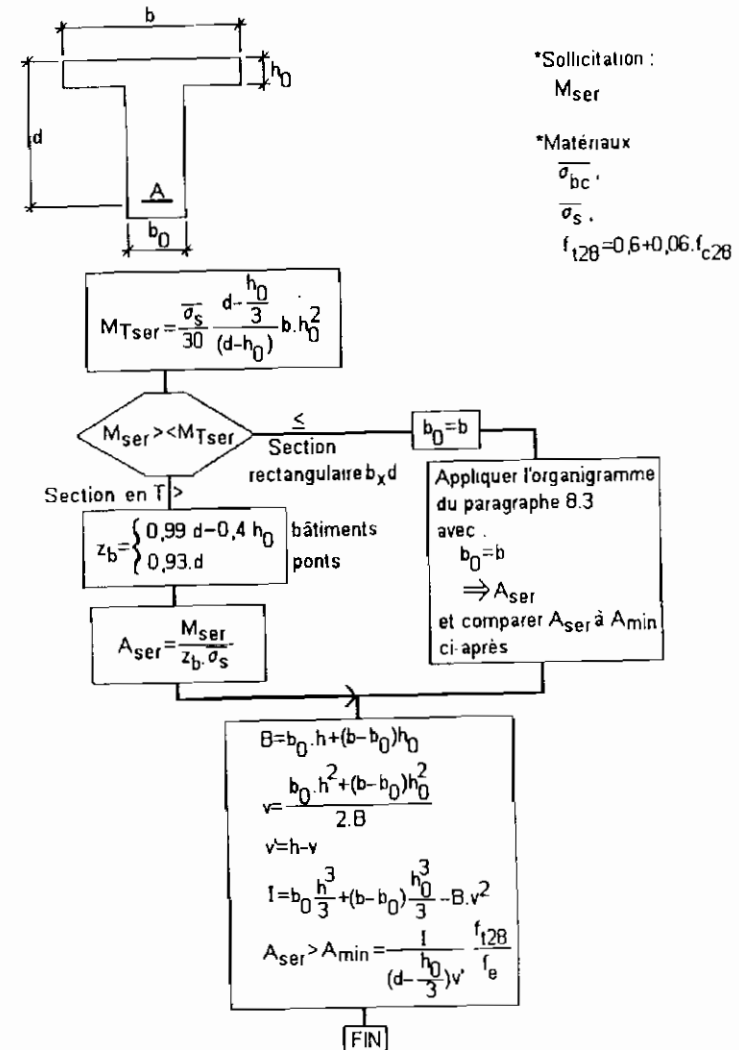
$$f_{t28} = 0,6 + 0,06 f_{c28}$$



8.3. SECTION RECTANGULAIRE - DIMENSIONNEMENT À L'E.L.S.



8.4. SECTION EN T - DIMENSIONNEMENT À L'E.L.S.

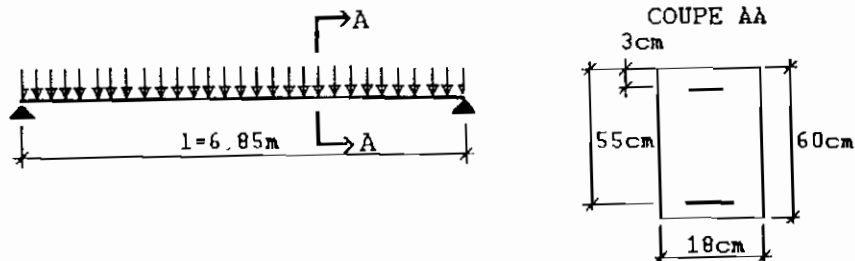


9. VÉRIFICATION À L'E.L.U. D'UNE SECTION RECTANGULAIRE DONT ON CONNAÎT LES ARMATURES

Voir annexe 2 en fin d'ouvrage.

II. EXERCICE N°1 : FISSURATION PEU PRÉJUDICIABLE — SECTION RECTANGULAIRE AVEC ACIERS COMPRIMÉS

— ÉNONCÉ —



■ Actions uniformément réparties de durée d'application supérieure à 24 heures :

– permanentes : $g_0 = 5.30 \text{ kN/m}$ (hors poids propre),

– variables : $q = 22 \text{ kN/m}$.

■ Fissuration peu préjudiciable.

■ Matériaux :

– béton : $f_{c28} = 25 \text{ MPa}$,

– aciers : Fe E 500 IIA.

■ On se propose :

- 1) de déterminer le ferrailage de la section médiane,
- 2) de calculer les contraintes à l'état-limite de service

— CORRIGÉ —

1. CARACTÉRISTIQUES DES MATÉRIAUX

1.1. BÉTON

$$f_{bu} = 0.85 \cdot \frac{f_{c28}}{\theta \cdot \gamma_b}$$

$$f_{bu} = 0.85 \cdot \frac{25}{1 \cdot 1.5} = 14.2 \text{ MPa}$$

$$\bar{\sigma}_{bc} = 0.6 \cdot f_{c28}$$

$$\bar{\sigma}_{bc} = 0.6 \cdot 25 = 15 \text{ MPa}$$

1.2. ACIERS

$$f_{ed} = \frac{f_c}{\gamma_s}$$

$$f_{ed} = \frac{500}{1.15} = 435 \text{ MPa}$$

2. SOLLICITATIONS

2.1. ÉTAT-LIMITE ULTIME DE RÉSISTANCE

Actions au ml :

ϖ = poids volumique du béton armé $\varpi = 25 \text{ kN/m}^3$

$$g = g_0 + \varpi \cdot b_0 \cdot h$$

$$g = 5.30 + 25 \cdot 0.18 \cdot 0.60 = 8 \text{ kN/m}$$

$$p_u = 1.35 \cdot g + 1.5 \cdot q$$

$$p_u = 1.35 \cdot 8 + 1.5 \cdot 22$$

$$p_u = 43.80 \text{ kN/m}$$

Moment fléchissant :

$$M_u = p_u \cdot \frac{l^2}{8}$$

$$M_u = 43.80 \cdot \frac{6.85^2}{8}$$

$$M_u = 256.90 \text{ m kN}$$

2.2. ÉTAT-LIMITE DE COMPRESSION DU BÉTON EN SERVICE

Actions au ml :

$$p_{ser} = g + q$$

$$p_{ser} = 8.00 + 22$$

$$p_{ser} = 30.00 \text{ kN/m}$$

Moment fléchissant :

$$M_{ser} = p_{ser} \cdot \frac{l^2}{8}$$

$$M_{ser} = 30.00 \cdot \frac{6.85^2}{8}$$

$$M_{ser} = 175.96 \text{ m kN}$$

2.3. COEFFICIENT γ

$$\gamma = \frac{M_u}{M_{ser}}$$

$$\gamma = \frac{256.90}{175.96} = 1.46$$

3. MOMENT LIMITE ULTIME

Par la formule approchée valable pour Fe E 500 et $f_{c28} \leq 30 \text{ MPa}$:

$$10^4 \mu_{lu} = 3220.0\gamma + 51. \frac{f_{c28}}{\theta} - 3100 \quad 10^4 \mu_{lu} = 3220 \cdot 1 \cdot 1,46 + 51 \cdot \frac{25}{1} - 3100$$

$$(MPa) \quad 10^4 \mu_{lu} = 2876,2$$

$$\mu_{lu} = 0,288$$

4. CALCUL DES ARMATURES TENDUES ET DES ARMATURES COMPRIMÉES ÉVENTUELLES

4.1. NÉCESSITÉ D'ACIERS COMPRIMÉS

$$\mu_{bu} = \frac{M_u}{b_0 \cdot d^2 \cdot f_{bu}} \quad \mu_{bu} = \frac{0,2569}{0,18 \cdot 0,55^2 \cdot 14,2} = 0,332$$

$$\mu_{bu} > \mu_{lu}$$

$\mu_{bu} = 0,332 > \mu_{lu} = 0,288$
 $\Rightarrow$ Il faut des aciers comprimés si on ne peut pas changer b_0 , d ou f_{c28} .

4.2. CALCUL DES ACIERS COMPRIMÉS

Contrainte des aciers comprimés :

$$f_{ce} \leq 500 \text{ et } 0 = 1 \Rightarrow$$

$$\sigma_{scc} = 9 \cdot \gamma \cdot f_{c28} - \delta' (13 \cdot f_{c28} + 415) \text{ K}$$

$$\delta' = \frac{d'}{d}$$

$$\sigma_{scc} = 9 \cdot 1,46 \cdot 25 - \frac{3}{55} (13 \cdot 25 + 415) \text{ K}$$

$$\sigma_{scc} = 288,1 = 288 \text{ MPa} < 435 \text{ O.K.}$$

Aciers comprimés :

$$M_{lu} = \mu_{lu} \cdot b_0 \cdot d^2 \cdot f_{bu}$$

$$M_{lu} = 0,288 \cdot 0,18 \cdot 0,55^2 \cdot 14,2$$

$$M_{lu} = 0,223 \text{ mMN}$$

$$A' = \frac{M_u - M_{lu}}{(d - d') \cdot \sigma_{scc}}$$

$$A' = \frac{0,2569 - 0,223}{(0,55 - 0,03) \cdot 288} 10^4 = 2,26 \text{ cm}^2$$

Retenons **2Φ12HA** :

$$A' = 2 \cdot 1,13 = 2,26 \text{ cm}^2$$

4.3. CALCUL DES ACIERS TENDUS

Dans la section fictive 1 sans aciers comprimés :

$$\mu_{bu} = \mu_{lu} > 0,275 \Rightarrow \text{Méthode} \quad \mu_{bu} = 0,288 > 0,275 \Rightarrow \text{Formules exactes}$$

$$\Rightarrow \alpha_l = 1,25 \left(1 - \sqrt{1 - 2 \cdot \mu_{lu}} \right) \quad \Rightarrow \alpha_l = 1,25 \left(1 - \sqrt{1 - 2 \cdot 0,288} \right)$$

$$\alpha_l = 0,436$$

$$\Rightarrow z_{bt} = d(1 - 0,4 \cdot \alpha_l)$$

$$z_{bt} = 0,55(1 - 0,4 \cdot 0,436)$$

$$z_{bt} = 0,454 \text{ m}$$

$$\Rightarrow A = \frac{M_{lu}}{z_{bt} \cdot f_{cd}} + A' \cdot \frac{\sigma_{scc}}{f_{cd}}$$

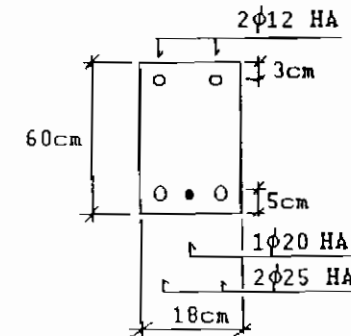
$$\Rightarrow A = \frac{0,223 \cdot 10^4}{0,454 \cdot 435} + 2,26 \cdot \frac{288}{435}$$

$$A = 12,79 \text{ cm}^2$$

4.4. CONCLUSION

En prenant trois files verticales :

$$2\Phi 25 \text{ HA} + 1\Phi 20 \text{ IIA} : A = 2 \cdot 4,91 + 3,14 = 12,96 \text{ cm}^2$$



4.5. SECTION MINIMALE D'ARMATURES

$$f_{t28} = 0,6 + 0,06 \cdot f_{c28} \text{ (MPa)}$$

$$f_{t28} = 0,6 + 0,06 \cdot 25 = 2,10 \text{ MPa}$$

$$A_{min} = 0,23 \frac{f_{t28}}{f_e} b_0 \cdot d$$

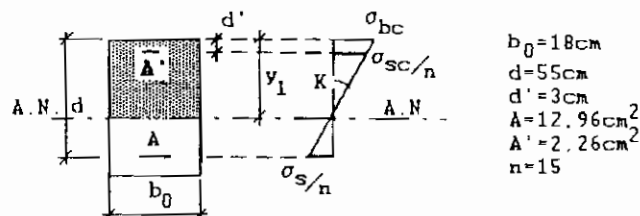
$$A_{min} = 0,23 \frac{2,1}{500} \cdot 18 \cdot 55 = 0,96 \text{ cm}^2$$

$$A_{min} = 0,96 \text{ cm}^2 < A = 12,79 \text{ cm}^2 \text{ O.K.}$$

5. CALCUL DES CONTRAINTES À L'E.L.S.

5.1. POSITION DE L'AXE NEUTRE'

Pour éviter les risques d'erreurs dues à un nombre élevé de décimales, on commence par exprimer les longueurs en cm et les aires d'aciers en cm².



$$\begin{aligned} b_0 &= 18 \text{ cm} \\ d &= 55 \text{ cm} \\ d' &= 3 \text{ cm} \\ A &= 12.96 \text{ cm}^2 \\ A' &= 2.26 \text{ cm}^2 \\ n &= 15 \end{aligned}$$

$$\frac{b_0}{2} \frac{y_1^2}{2} + n(A + A') y_1 - n(Ad + A'd') = 0$$

$$\frac{18}{2} \frac{y_1^2}{2} + 15(12.96 + 2.26) y_1 - 15(12.96 \cdot 55 + 2.26 \cdot 3) = 0$$

$$9.00 \cdot y_1^2 + 228.30 \cdot y_1 - 10\,793.70 = 0$$

$$\Delta = 663.85$$

$$y_1 = \frac{-228.30 + 663.85}{2 \cdot 9.00} = 24.20 \text{ cm}$$

5.2. MOMENT D'INERTIE

$$I_1 = b_0 \frac{y_1^3}{3} + nA'(y_1 - d')^2 + nA(d - y_1)^2$$

$$I_1 = 18 \cdot \frac{24.20^3}{3} + 15 \cdot 2.26(24.20 - 3)^2 + 15 \cdot 12.96(55 - 24.20)^2$$

$$I_1 = 284\,687 \text{ cm}^4$$

5.3. CONTRAINTES

$$K = \frac{M_{ser}}{I_1}$$

$$K = \frac{0.17596}{284\,687 \cdot 10^{-8}} = 61.81 \text{ MN/m}^3$$

$$\sigma_{bc} = K \cdot y_1$$

$$\sigma_{bc} = 61.81 \cdot 0.2420 = 14.96$$

$$\sigma_{bc} = 14.96 \text{ MPa} < 15 \text{ MPa O.K.}$$

$$\sigma_s = n \cdot K(d - y_1)$$

$$\sigma_s = 15 \cdot 61.81(0.55 - 0.242) = 286 \text{ MPa}$$

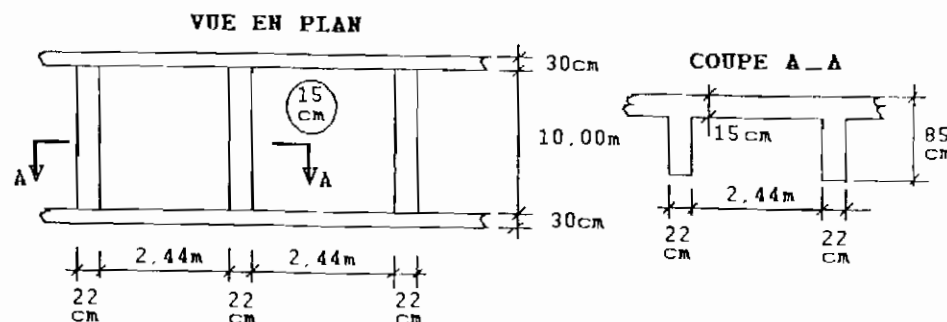
$$\sigma_{sc} = n \cdot K(y_1 - d')$$

$$\sigma_{sc} = 15 \cdot 61.81(0.242 - 0.03) = 197 \text{ MPa}$$

Nota : on remarque que $\gamma \sigma_{sc} = 1.46 \times 197 = 288 \text{ MPa} = \sigma_{scc} = 288 \text{ MPa}$ obtenu par la formule approchée.

III. EXERCICE N°2 : FISSURATION PRÉJUDICIABLE – SECTION À TABLE DE COMPRESSION

— ÉNONCÉ —



■ Actions uniformément réparties de durée d'application supérieure à 24 heures :
– variables : $q = 10 \text{ kN/m}^2$.

■ Fissuration préjudiciable.

■ Enrobage = 3 cm.

■ Matériaux :

– béton : $f_{c28} = 25 \text{ MPa}$,

– aciers : FeE 500 HA,

– grosseur du granulat : $c_g = 2.5 \text{ cm}$.

■ On se propose :

- 1) de déterminer les armatures en travée dans les poutrelles,
- 2) de calculer les contraintes à l'état-limite de service.

— CORRIGÉ —

1. CARACTÉRISTIQUES DES MATÉRIAUX

1.1. BÉTON

$$f_{bu} = 0.85 \cdot \frac{f_{c28}}{\theta \cdot \gamma_b}$$

$$f_{bu} = 0.85 \cdot \frac{25}{1 \cdot 1.5} = 14.2 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{bc} = 0.6 \cdot f_{c28}$$

$$\sigma_{bc} = 0.6 \cdot 25 = 15 \text{ MPa}$$

$$f_{t28} = 0.6 + 0.06 f_{c28} \text{ (MPa)}$$

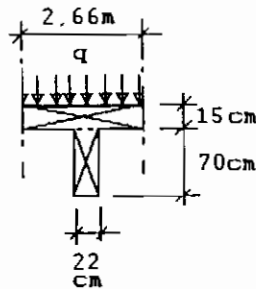
$$f_{t28} = 0.6 + 0.06 \cdot 25 = 2.10 \text{ MPa}$$

1.2. ACIERS

$$\left. \begin{array}{l} \text{fissuration} \\ \text{préjudiciable} \end{array} \right\} \Rightarrow \bar{\sigma}_s = \min \left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{3} f_c \\ \max \left\{ \begin{array}{l} 240 \text{ MPa} \\ 110 \sqrt{\eta \cdot f_{tj}} \text{ (MPa)} \end{array} \right. \end{array} \right. \quad \bar{\sigma}_s = \min \left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{3} 500 = 333 \text{ MPa} \\ \max \left\{ \begin{array}{l} 240 \text{ MPa} \\ 110 \sqrt{1,6 \cdot 2,10} = 202 \text{ MPa} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\bar{\sigma}_s = 240 \text{ MPa}$$

2. SOLLICITATION DANS LES POUTRELLES



2.1. ACTIONS PERMANENTES

Poids propre dalle :

$$25 \text{ kN/m}^3 \cdot 0,15 \cdot 2,66 = 9,98 \text{ kN/m}$$

Poids propre retombée :

$$25 \text{ kN/m}^3 \cdot 0,70 \cdot 0,22 = 3,85 \text{ kN/m}$$

$$g = 13,83 \text{ kN/m}$$

2.2. ACTIONS VARIABLES

$$10 \text{ kN/m}^2 \cdot 2,66 = 26,6 \text{ kN/m} = q$$

2.3. ÉTAT-LIMITE DE SERVICE

Charge :

$$p_{ser} = g + q$$

$$p_{ser} = 13,83 + 26,6$$

$$p_{ser} = 40,43 \text{ kN/m}$$

Moment fléchissant :

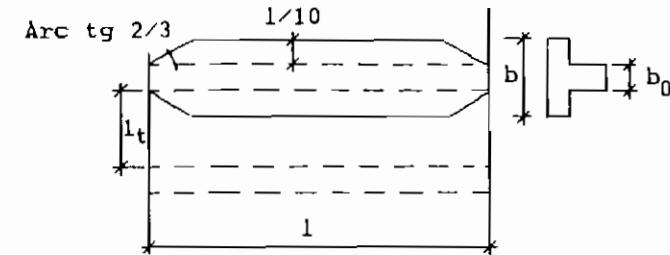
$$M_{ser} = p_{ser} \cdot \frac{l^2}{8}$$

$$M_{ser} = 40,43 \cdot \frac{10,00^2}{8}$$

$$M_{ser} = 505,38 \text{ m kN} = 0,505 \text{ mMN}$$

3. ARMATURES

3.1. LARGEUR DE TABLE À PRENDRE EN COMPTE


 $l = \text{portée des poutrelles} \quad l_t = \text{entre nus des nervures}$

$$\frac{b - b_0}{2} = \min \left\{ \begin{array}{l} \frac{l}{10} \\ \frac{l_t}{2} \end{array} \right.$$

$$\frac{b - b_0}{2} = \min \left\{ \begin{array}{l} \frac{10,00}{10} = 1,00 \text{ m} \\ \frac{2,44}{2} = 1,22 \text{ m} \end{array} \right.$$

$$b = 2,1,00 + 0,22 = 2,22 \text{ m}$$

3.2. DIMENSIONNEMENT DE L'ARMATURE À L'E.L.S.

a) Moment de référence

$$M_{Tser} = \frac{\bar{\sigma}_s}{30} \cdot \frac{d - \frac{h_0}{3}}{d - h_0} \cdot b \cdot h_0^2$$

$$M_{Tser} = \frac{240}{30} \cdot \frac{0,80 - \frac{0,15}{3}}{0,80 - 0,15} \cdot 2,22 \cdot 0,15^2$$

$$M_{Tser} = 0,461 \text{ mMN}$$

b) Armatures à l'E.L.S.

Type de section à considérer :

$$M_{ser} > M_{Tser}$$

$$M_{ser} = 0,505 \text{ mMN} > M_{Tser} = 0,461 \text{ mMN}$$

⇒ A.N. tombe dans la nervure

⇒ Calcul en section en T

Armatures :

$$z_b = 0,99d - 0,4h_0$$

$$z_b = 0,99 \cdot 0,80 - 0,4 \cdot 0,15 = 0,732 \text{ m}$$

$$\Rightarrow A_{ser} = \frac{M_{ser}}{z_b \cdot \sigma_s}$$

$$A_{ser} = \frac{0,505 \cdot 10^4}{0,732 \cdot 240} = 28,75 \text{ cm}^2$$

Remarque :

À l'E.L.S. les aciers Fe E 400 et Fe E 500 conduisent à la même section d'acier A_{ser} car :

$$\bar{\sigma}_s = \max \left\{ \begin{array}{l} 240 \text{ MPa} \\ 110 \sqrt{\eta \cdot f_{tj}} \text{ (MPa)} \end{array} \right. < \frac{2}{3} f_c$$

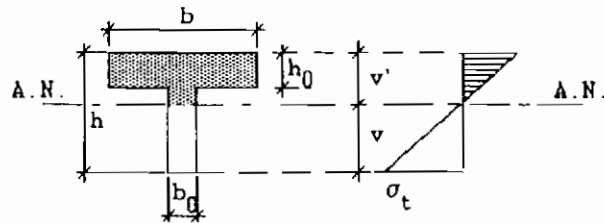
3.3. CONCLUSION – ARMATURES À RETENIR

a) Section calculée

$$\Lambda = \Lambda_{\text{ser}}$$

$$\Lambda = 28,75 \text{ cm}^2$$

b) Pourcentage minimal d'armatures



$$\begin{aligned} b &= 2,22 \text{ m} \\ b_0 &= 0,22 \text{ m} \\ b - b_0 &= 2,00 \text{ m} \\ h &= 0,85 \text{ m} \\ h_0 &= 0,15 \text{ m} \end{aligned}$$

$$B = b_0 \cdot h + (b - b_0) h_0$$

$$B = 0,22 \cdot 0,85 + 2,00 \cdot 0,15 = 0,487 \text{ m}^2$$

$$v' = \frac{b_0 \cdot h^2 + (b - b_0) h_0^2}{2 \cdot B}$$

$$v' = \frac{0,22 \cdot 0,85^2 + 2,00 \cdot 0,15^2}{2 \cdot 0,487} = 0,209 \text{ m}$$

$$v = h - v'$$

$$v = 0,85 - 0,209 = 0,641 \text{ m}$$

$$I = b_0 \frac{h^3}{3} + (b - b_0) \frac{h_0^3}{3} - B \cdot v'^2$$

$$I = 0,22 \frac{0,85^3}{3} + 2,00 \frac{0,15^3}{3} - 0,487 \cdot 0,209^2$$

$$I = 0,0260 \text{ m}^4$$

$$A_{\text{min}} = \frac{1}{d - \frac{h_0}{3}} \cdot \frac{1}{v} \cdot \frac{I_{28}}{f_t}$$

$$A_{\text{min}} = \frac{1}{0,80 - \frac{0,15}{3}} \cdot \frac{0,0260}{0,641} \cdot \frac{2,1}{500} 10^4$$

$$\Lambda_{\text{min}} = 2,27 \text{ cm}^2 < \Lambda = 28,75 \text{ cm}^2 \text{ O.K.}$$

$$\Lambda = 28,75 \text{ cm}^2$$

c) Retenu

A

Retenons deux files verticales

Pas plus de deux barres superposées dans chaque file verticale.

$$\text{Lit 1 : } 2\Phi 25\text{HA} \Rightarrow 2 \cdot 4,91 = 9,82 \text{ cm}^2$$

$$\text{Lit 2 : } 2\Phi 25\text{HA} \Rightarrow 2 \cdot 4,91 = 9,82 \text{ cm}^2$$

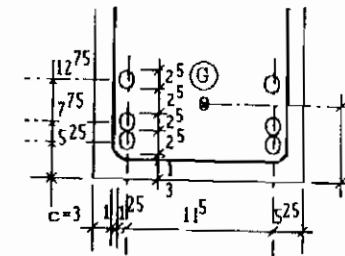
$$\text{Lit 3 : } 2\Phi 25\text{HA} \Rightarrow 2 \cdot 4,91 = 9,82 \text{ cm}^2$$

$$\Lambda = 29,46 \text{ cm}^2$$

$$c = \text{Max} \begin{cases} e \\ \Phi \\ 1 \text{ cm} \end{cases}$$

$$c = 3 \text{ cm} = \text{Max} \begin{cases} e = 3 \text{ cm} \\ 2,5 \text{ cm} \\ 1 \text{ cm} \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Fissuration} \\ \text{préjudiciable} \end{array} \right\} \Rightarrow \Phi \geq 6 \text{ mm} \quad \Phi_{\text{min}} = 25 \text{ mm} > 6 \text{ mm O.K.}$$

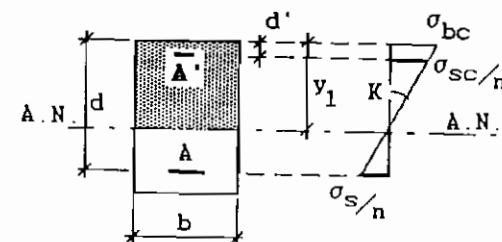


$$x = \frac{5,25 + 7,75 + 12,75}{3} = 8,58 \text{ cm}$$

$$d = h - x = 85 - 8,58 = 76,42 \text{ cm} (> 75 \text{ cm pris en compte dans le calcul O.K.})$$

4. CALCUL DES CONTRAINTES À L'E.L.S.

4.1. POSITION DE L'AXE NEUTRE



$$b = 2,22 \text{ m}$$

$$h_0 = 0,22 \text{ m}$$

$$d = 76,42 \text{ cm}$$

$$h_0 = 15 \text{ cm}$$

$$A = 29,46 \text{ cm}^2$$

$$n = 15$$

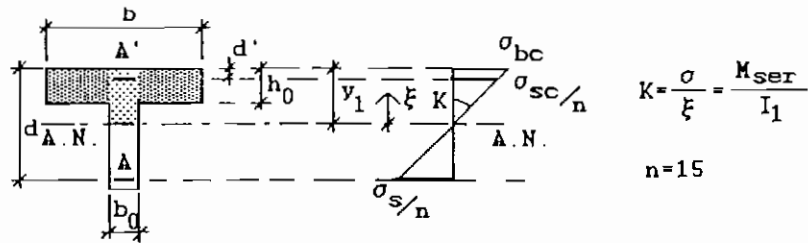
Pour la section rectangulaire bd avec $y_1 = h_0$:

$$f(h_0) = \frac{b \cdot h_0^2}{2} + n(A + A')h_0 - n(Ad + A'd') > < 0$$

$$f(h_0) = \frac{222}{2} 15^2 + 15 \cdot 29,46 \cdot 15 - 15 \cdot 29,46 \cdot 76,42$$

$$f(h_0) = -2166,50 < 0$$

 $\Rightarrow$ A.N. dans la nervure $\Rightarrow$ Section en T.



$$K = \frac{\sigma}{\xi} = \frac{M_{ser}}{I_1}$$

$$n = 15$$

$$\frac{b_0 y_1^2}{2} + [(b - b_0) l_0 + nA] y_1 - \frac{22}{2} y_1^2 + [200 \cdot 15 + 15 \cdot 29,46] y_1 - \dots \left[(b - b_0) \frac{l_0^2}{2} + nAd \right] = 0$$

$$\dots \left[200 \frac{15^2}{2} + 15 \cdot 29,46 \cdot 76,42 \right] = 0$$

$$11 y_1^2 + 3 441,90 y_1 - 56 270,00 = 0$$

$$\Delta = 3 784,52^2$$

$$y_1 = \frac{-3 441,90 + 3 784,52}{2 \cdot 11} = 15,57 \text{ cm}$$

4.2. MOMENT D'INERTIE

$$I_1 = b \frac{y_1^3}{3} - (b - b_0) \frac{(y_1 - h_0)^3}{3} + \dots nA(d - y_1)^2$$

$$I_1 = 222 \frac{15,57^3}{3} - 200 \frac{(15,57 - 15)^3}{3} + \dots 15 \cdot 29,46 (76,42 - 15,57)^2$$

$$I_1 = 1 915 538 \text{ cm}^4$$

4.3. CONTRAINTES

$$K = \frac{M_{ser}}{I_1}$$

$$\sigma_{bc} = K \cdot y_1$$

$$\sigma_s = n \cdot K(d - y_1)$$

$$K = \frac{0,505}{1 915 538 \cdot 10^{-8}} = 26,36 \text{ MN/m}^3$$

$$\sigma_{bc} = 26,36 \cdot 0,1557 = 4,1 \text{ MPa} < 15 \text{ MPa O.K.}$$

$$\sigma_s = 15 \cdot 26,36 (0,7642 - 0,1557) = 240$$

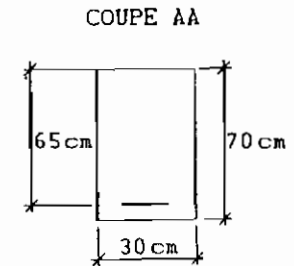
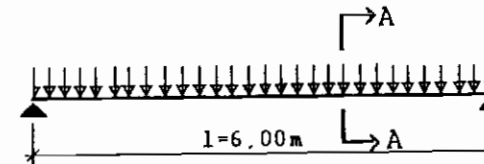
$$\sigma_s = 240 \text{ MPa} = 240 \text{ MPa O.K.}$$

Remarque :

$$z = \frac{M_{ser}}{A \cdot \sigma_s} = \frac{0,505 \cdot 10^4}{29,46 \cdot 240} = 0,714 \text{ m} \quad (d - \frac{h_0}{2} = 0,69 \text{ m})$$

IV. EXERCICE N°3 : FISSURATION TRÈS PRÉJUDICIABLE – SECTION RECTANGULAIRE

— ÉNONCÉ —



■ Actions uniformément réparties :

– permanentes : $g_0 = 24,75 \text{ kN/m}$ (bors poids propre),

– variables : $q = 20 \text{ kN/m}$.

■ Fissuration très préjudiciable.

■ Matériaux :

– béton : $f_{c28} = 25 \text{ MPa}$,

– aciers : Fe E 500 HA.

■ On se propose de calculer les armatures.

— CORRIGÉ —

1. CARACTÉRISTIQUES DES MATÉRIAUX

1.1. BÉTON

$$\sigma_{bc} = 0,6 \cdot f_{c28}$$

$$\sigma_{bc} = 0,6 \cdot 25 = 15 \text{ MPa}$$

$$f_{t28} = 0,6 + 0,06 \cdot f_{c28} \text{ (MPa)}$$

$$f_{t28} = 0,6 + 0,06 \cdot 25 = 2,10 \text{ MPa}$$

1.2. ACIERS

$$\left. \begin{array}{l} \text{fissuration} \\ \text{très} \\ \text{préjudiciable} \end{array} \right\} \Rightarrow \bar{\sigma}_s = \text{Min} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} f_e \\ \text{Max} \left\{ \begin{array}{l} 200 \text{ MPa} \\ 90 \sqrt{\eta \cdot f_{tj}} \text{ (MPa)} \end{array} \right. \end{array} \right. \quad \bar{\sigma}_s = \text{Min} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} 500 \cdot 250 \text{ MPa} \\ \text{Max} \left\{ \begin{array}{l} 200 \text{ MPa} \\ 90 \sqrt{1,6 \cdot 2,10} = 165 \text{ MPa} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\bar{\sigma}_s = 200 \text{ MPa}$$

2. SOLLICITATION À L'E.L.S.

Actions au ml :

$$\varpi = \text{poids volumique du béton armé} \quad \varpi = 25 \text{ kN/m}^3$$

$$g = g_0 + \varpi \cdot b_0 \cdot h$$

$$p_{\text{ser}} = g + q$$

$$g = 24,75 + 25 \cdot 0,30 \cdot 0,70 = 30 \text{ kN/m}$$

$$p_{\text{ser}} = 30 + 20 = 50 \text{ kN/m}$$

Moment fléchissant :

$$M_{\text{ser}} = p_{\text{ser}} \cdot \frac{l^2}{8}$$

$$M_{\text{ser}} = 50 \cdot \frac{6,00^2}{8}$$

$$M_{\text{ser}} = 225 \text{ m kN} = 0,225 \text{ mMN}$$

3. DIMENSIONNEMENT DE L'ARMATURE À L'E.L.S.

3.1. MOMENT RÉSISTANT BÉTON RÉDUIT

$$\bar{\alpha}_1 = \frac{15 \cdot \bar{\sigma}_{bc}}{15 \cdot \bar{\sigma}_{bc} + \bar{\sigma}_s}$$

$$\bar{\alpha}_1 = \frac{15 \cdot 15}{15 \cdot 15 + 200} = 0,529$$

$$\mu_{rb} = \frac{1}{2} \bar{\alpha}_1 \left(1 - \frac{\bar{\alpha}_1}{3} \right)$$

$$\mu_{rb} = \frac{1}{2} 0,529 \left(1 - \frac{0,529}{3} \right)$$

$$\mu_{rb} = 0,218$$

3.2. NÉCESSITÉ D'ACIERS COMPRIMÉS

$$\mu_{\text{ser}} = \frac{M_{\text{ser}}}{b_0 \cdot d^2 \cdot \sigma_{bc}}$$

$$\mu_{\text{ser}} = \frac{0,225}{0,30 \cdot 0,65^2 \cdot 15} = 0,118$$

$$\mu_{\text{ser}} > \mu_{rb}$$

$$\mu_{\text{ser}} = 0,118 < 0,218 = \mu_{rb} \Rightarrow \Lambda' = 0$$

3.3. CALCUL DES ACIERS TENDUS

$$\bar{z}_b = d \left(1 - \frac{\bar{\alpha}_1}{3} \right)$$

$$\bar{z}_b = 0,65 \left(1 - \frac{0,529}{3} \right) = 0,536 \text{ m}$$

$$A_{\text{ser}} = \frac{M_{\text{ser}}}{\bar{z}_b \cdot \sigma_s}$$

$$A_{\text{ser}} = \frac{0,225}{0,536 \cdot 200} 10^4 = 20,99 \text{ cm}^2$$

Remarque : en adoptant la formule du § 8.3. des rappels de cours, on trouve $z_b = 0,558 \text{ m}$ et $A_{\text{ser}} = 20,0 \text{ cm}^2$.

3.4. CONCLUSION

En prenant trois files verticales

$$\left. \begin{array}{l} \text{Fissuration très} \\ \text{préjudiciable} \end{array} \right\} \Rightarrow \Phi \geq 8 \text{ mm} \quad \text{Prenons } \Phi_{\text{min}} = 20 \text{ mm} > 8 \text{ mm}$$

lit 1 : 2Φ25HA + 1Φ20HA :

$$2 \cdot 4,91 + 3,14 = 12,96 \text{ cm}^2$$

lit 2 : 3Φ20HA :

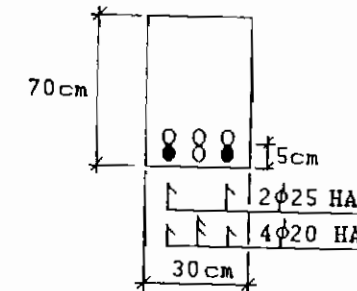
$$3 \cdot 3,14 = 9,42 \text{ cm}^2$$

$$A = 22,38 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{min}} = 0,23 \cdot \frac{f_{t28}}{f_c} b_0 \cdot d$$

$$A_{\text{min}} = 0,23 \cdot \frac{2,1}{500} 30 \cdot 65 = 1,88 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{min}} = 1,88 \text{ cm}^2 < A = 22,38 \text{ cm}^2 \text{ O.K.}$$



CHAPITRE 7

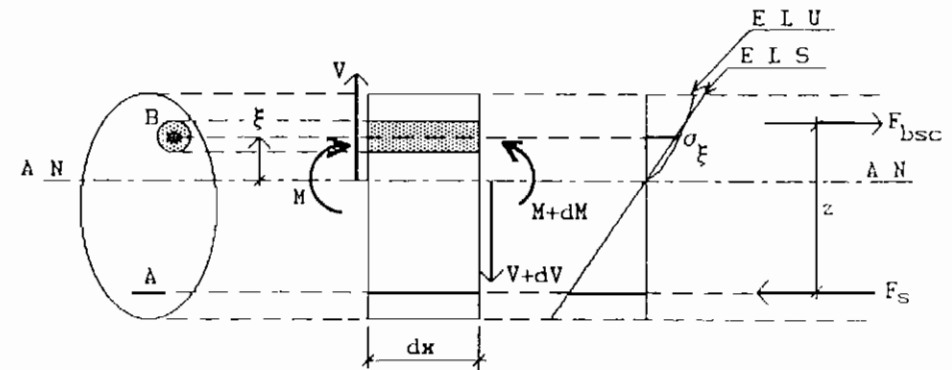
EFFORT TRANCHANT

I. RAPPELS DE COURS

I. VÉRIFICATION DU BÉTON

1.1. INTRODUCTION

1.1.1. Effort de glissement



Contrainte normale à l'E.L.S. à la distance ξ de l'axe neutre :

$$\sigma_{\xi} = \frac{M}{I_1} \cdot \xi$$

I_1 = moment d'inertie par rapport à l'axe neutre de la section réduite homogène (béton comprimé seul et avec des armatures multipliées par 15).

Résultante des forces élastiques agissant sur l'aire homogène B idéalement découpée dans la section droite :

$$F_B = \int_B \sigma_x \cdot dB = \frac{M}{I_1} \int_B x \cdot dB = \frac{M}{I_1} \cdot S_B$$

S_B = moment statique par rapport à l'axe neutre de l'aire homogène B.

On appelle EFFORT DE GLISSEMENT PAR UNITÉ DE LONGUEUR DE POUTRE la quantité :

$$g = \frac{dF_B}{dx} = \frac{dM}{dx} \cdot \frac{S_B}{I_1}$$

Or :

$$V = \frac{dM}{dx}$$

D'où :

$$g = \frac{V}{I_1} \cdot S_B$$

1.1.2. Contraintes tangentes

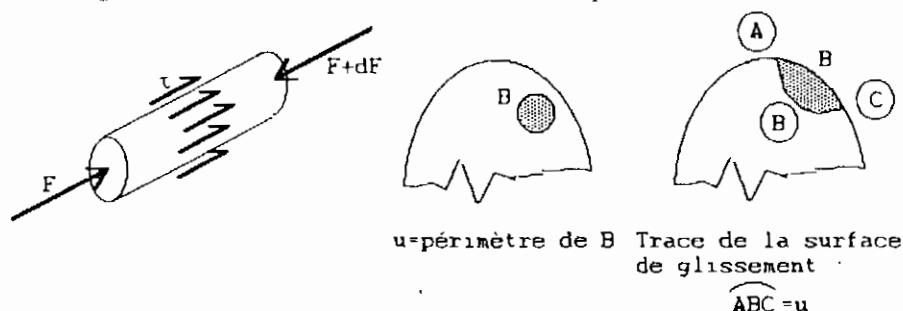
Sous l'effet de g , le prisme Bdx a tendance à se déplacer par rapport à la poutre, le long d'une surface de glissement dont la trace sur le plan de la section a pour longueur u .

L'équilibre du prisme de base B et de longueur dx est assuré par des CONTRAINTES TANGENTES qui se développent sur la surface de glissement du prisme Bdx par rapport à la poutre :

En posant :

τ = valeur supposée constante de la contrainte tangente en tout point de la surface latérale du prisme,

u = longueur de la trace de la surface de glissement sur le plan de section,



il vient :

$$\tau \cdot u \cdot dx = dF_B \Rightarrow \tau = \frac{1}{u} \cdot \frac{dF_B}{dx} = \frac{g}{u}$$

soit :

$$\tau = \frac{V}{I_1} \cdot \frac{S_B}{u}$$

1.1.3. Bras de levier des forces élastiques

En prenant la zone comprimée homogène de la section comme aire B (F_{bsc} = résultante des compressions sur cette zone) :

$$\begin{cases} F_B = \frac{M}{I_1} \cdot S_B \\ F_B = F_{bsc} \\ M = z \cdot F_{bsc} \\ S_B = S_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_{bsc} = \frac{M}{I_1} \cdot S_1 \\ F_{bsc} = \frac{M}{z} \end{cases}$$

D'où par identification :

$$z = \frac{I_1}{S_1}$$

S_1 = moment statique par rapport à l'axe neutre de la zone comprimée homogène de la section.

Si l'aire B considérée précédemment est délimitée par une parallèle à l'axe neutre, on a sur le plan correspondant :

$$g = \frac{V}{I_1} \cdot S_B = \frac{V}{z} \cdot \frac{S_B}{S_1}$$

Sous l'axe neutre $S_B = S_1$ (béton tendu négligé) et $g = \frac{V}{z} = \text{Cste.}$

1.2. PRESCRIPTIONS RÉGLEMENTAIRES

1.2.1. Contrainte tangente conventionnelle

D'après ce qui précède, on a : $\tau = \frac{g}{u} = \frac{V}{z \cdot u}$

Pour $u = b_0$ = épaisseur minimale de l'âme sous l'axe neutre, la contrainte tangente vaut :

$$\left. \begin{aligned} \tau_b &= \frac{V}{b_0 \cdot z} \\ z &\approx 0,9 \cdot d \end{aligned} \right\} \Rightarrow \tau_b = \frac{V}{0,9 \cdot b_0 \cdot d}$$

On considère à l'E.L.U. la contrainte tangente conventionnelle :

$$\tau_u = \frac{V_u}{b_0 \cdot d}$$

avec :

b_0 = épaisseur minimale de l'âme,

d = hauteur utile,

V_u = effort tranchant ultime à prendre en compte à l'E.L.U.,

$V_u = 1,35 \cdot V_G + 1,5 \cdot V_Q$ en général.

2.2. Effort tranchant à prendre en compte au voisinage des appuis

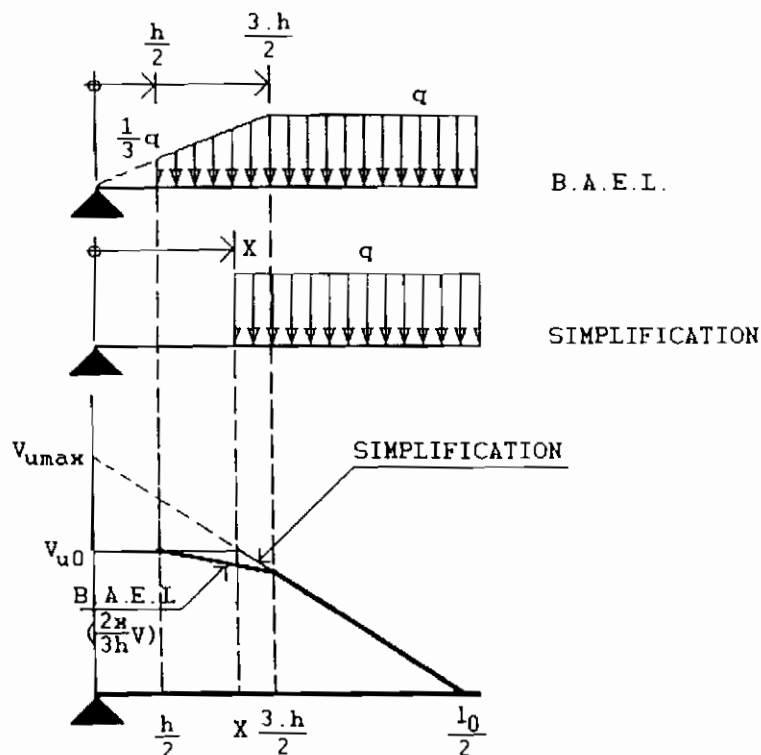
Pour tenir compte de la transmission directe des charges aux appuis, les efforts tranchants sont calculés comme indiqué ci-dessous :

- pour le calcul des armatures d'âme,
- pour la vérification de la compression des bielles.

a) Charges réparties

Les charges réparties situées à moins de $h/2$ du nu d'appui sont négligées et les charges situées entre $h/2$ et $3h/2$ développent un effort tranchant égal à :

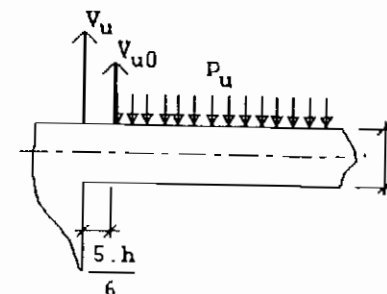
$$\frac{2 \cdot x}{3 \cdot h} V \text{ (mise en charge progressive).}$$



$$\text{B.A.E.L.} \Rightarrow V_{u0} = V_{u\max} - q \cdot \frac{3}{2} h + \frac{q}{2} h = V_{u\max} - \frac{3}{2} q h + \frac{1}{2} q h = V_{u\max} - q h$$

$$\text{SIMPLIFICATION} \Rightarrow V_{u0} = V_{u\max} \cdot q \cdot X \Rightarrow X = \frac{5}{6} h$$

D'où il revient au même et il est plus simple de considérer l'effort tranchant V_{u0} dans la section d'abscisse $X = 5h/6$ et de le supposer constant entre $x = 0$ et $x = X$.



b) Charges concentrées

Il convient de réduire la valeur de l'effort tranchant développé par toute charge concentrée au voisinage du nu d'appui. Il revient au même de prendre pour valeur de cette charge :

$$Q_u = \begin{cases} 0 & \text{si } a < \frac{h}{2} \\ \frac{2 \cdot a}{3 \cdot h} Q_u & \text{si } \frac{h}{2} \leq a \leq \frac{3h}{2} \end{cases}$$

1.3. VÉRIFICATION DU BÉTON

1.3.1. Flexion composée avec compression

Lorsque toutes les sections sont entièrement comprimées :

$$\text{si } \tau_u \leq \text{Min} \left\{ \begin{array}{l} 0,06 \cdot \frac{f_{cj}}{\gamma_b} \\ 1,5 \text{ MPa} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Pas de vérification et} \\ \text{armatures transversales} \\ \text{calculées comme pour} \\ \text{les poteaux} \end{array} \right.$$

1.3.2. Autres cas

a) Armatures d'âme droites (associées ou non à des barres relevées à 45°)

Armatures contenues dans des plans perpendiculaires à la fibre moyenne des poutres.

FISSURATION	$\tau_{u0} \leq \tau_{lim}$
Peu préjudiciable	$\text{Min} \left\{ \begin{array}{l} 0,2 \cdot \frac{f_{cj}}{\gamma_b} \\ 5 \text{ MPa} \end{array} \right.$
Préjudiciable ou très préjudiciable	$\text{Min} \left\{ \begin{array}{l} 0,15 \cdot \frac{f_{cj}}{\gamma_b} \\ 4 \text{ MPa} \end{array} \right.$

b) Armatures d'âme inclinées à 45°

Cadres ou étriers contenus dans des plans faisant un angle de 45° avec la fibre moyenne de la poutre.

$$\tau_{u0} \leq \tau_{lim} = \text{Min} \left\{ \begin{array}{l} 0,27 \cdot \frac{f_{cj}}{\gamma_b} \\ 7 \text{ MPa} \end{array} \right.$$

Dans ce cas, les barres relevées sont exclues (voir § 2.3).

c) Armatures d'âme inclinées à $\alpha^\circ > 45^\circ$ (cas rare)

α° étant exprimé en degrés. Par interpolation linéaire entre les valeurs limites correspondant à $\alpha^\circ = 45^\circ$ et à $\alpha^\circ = 90^\circ$.

FISSURATION	$\tau_{u0} \leq \tau_{lim}$
Peu préjudiciable	$\text{Min} \left\{ \begin{array}{l} (0,34 - 0,07 \frac{\alpha^\circ}{45}) \cdot \frac{f_{cj}}{\gamma_b} \\ (9 - 2 \frac{\alpha^\circ}{45}) \text{ MPa} \end{array} \right.$
Préjudiciable ou très préjudiciable	$\text{Min} \left\{ \begin{array}{l} (0,39 - 0,12 \frac{\alpha^\circ}{45}) \cdot \frac{f_{cj}}{\gamma_b} \\ (10 - 3 \frac{\alpha^\circ}{45}) \text{ MPa} \end{array} \right.$

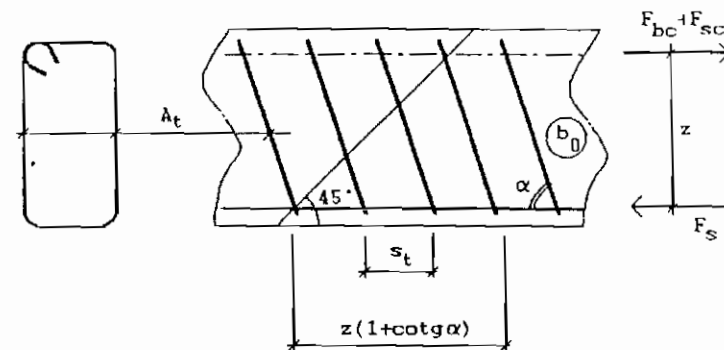
CALCUL DES ARMATURES D'ÂME

2.1. EFFORT TRANCHANT À PRENDRE EN COMPTE

Au voisinage des appuis, on tient compte de la transmission directe des charges aux appuis comme pour la vérification du béton.

2.2. DÉTERMINATION DES ARMATURES D'ÂME

2.2.1. Formules générales



Pour couvrir la fissure, nous avons $\frac{z(1 + \cotg \alpha)}{s_t}$ armatures de section A_t .

Elles peuvent équilibrer un effort vertical :

$$V_s = \frac{z(1 + \cotg \alpha)}{s_t} A_t \cdot \sigma_{st} \cdot \sin \alpha = z \frac{A_t}{s_t} \sigma_{st} (\sin \alpha + \cos \alpha)$$

D'où pour équilibrer un effort tranchant V_u quelconque :

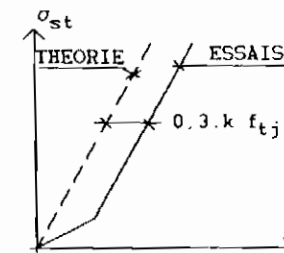
$$V_s = V_u$$

$$\frac{A_t}{s_t} \sigma_{st} = \frac{V_u}{z(\sin \alpha + \cos \alpha)}$$

Or nous avons : $\tau_{bu} = \frac{V_u}{b_0 \cdot z} = \frac{V_u}{0,9 \cdot b_0 \cdot d} = \frac{\tau_u}{0,9}$ et $\sigma_{st} = \frac{f_{et}}{\gamma_s}$ à l'E.L.U.

$$\text{D'où l'équation s'écrit : } \frac{A_t}{b_0 s_t} \cdot \frac{f_{et}}{\gamma_s} = \frac{\tau_u}{0,9(\sin \alpha + \cos \alpha)}$$

La comparaison entre la théorie et les résultats des essais conduit à réduire la valeur de V_u (ou de τ_u), l'écart sur τ_u étant fixé réglementairement à $0,3 \cdot k \cdot f_{tj}$



D'où l'équation :

$$\frac{A_t}{b_0 \cdot s_t} \frac{f_{et}}{\gamma_s} \geq \frac{\tau_u - 0,3 \cdot k \cdot f_{tj}}{0,9(\sin \alpha + \cos \alpha)}$$

avec :

f_{tj} bornée supérieurement à 3,3 MPa,

$$k = \begin{cases} 0 & \text{si reprise de bétonnage sans indentations,} \\ 0 & \text{si fissuration très préjudiciable,} \\ 1 & \text{si surface de reprise à indentations de saillie} \geq 5 \text{ mm,} \\ 1 & \text{en flexion simple,} \\ 1 + 3 \frac{N_u}{B \cdot f_{c28}} & \text{en flexion composée avec compression,} \\ 1 - 10 \frac{|N_u|}{B \cdot f_{c28}} & \text{en flexion composée avec traction,} \end{cases}$$

τ_u = contrainte tangente conventionnelle tenant compte des transmissions directes de charges aux appuis si on est près des appuis.

2.2.2. Diamètre des aciers transversaux

$$\Phi_t \leq \text{Min} \left\{ \begin{array}{l} \Phi_1 \\ \frac{h}{35} \\ \frac{b_0}{10} \end{array} \right.$$

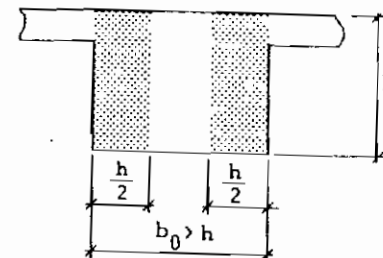
2.2.3. Pourcentage minimal d'armatures

$$\frac{A_t}{b_0 \cdot s_t} \frac{f_{et}}{\gamma_s} \geq 0,4 \text{ MPa}$$

2.2.4. Espacement maximal

$$s_t \leq \text{Min} \left\{ \begin{array}{l} 0,9 \cdot d \\ 40 \text{ cm} \\ 15 \cdot \Phi_{1\text{min}} \end{array} \right. \quad \text{si } A' \neq 0 \text{ réalisé avec des aciers de diamètre } \Phi_1.$$

2.2.5. Poutres en T à nervure épaisse

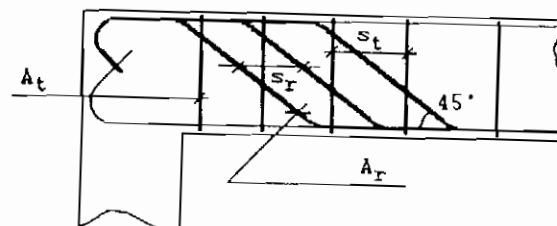


Le pourcentage minimal et l'espacement maximal peuvent ne pas être respectés dans la zone qui n'est pas grisée.

2.3. BARRES RELEVÉES À 45°

Une part θV_{u0} de l'effort tranchant au voisinage d'un appui avec $\theta \leq 1/2$ peut être équilibrée par des barres de la membrure tendue relevées à 45° et ancrées sur appuis.

Le complément $(1 - \theta) V_{u0}$ est toujours équilibré par des armatures d'âme droites ($\alpha = 90^\circ$, voir figure page suivante).



On pose :

A_r = section d'une nappe de barres relevées,

A_t = section d'une nappe d'armatures d'âme,

s_r, s_t = espacements respectifs de ces nappes.

2.3.1. Vérification du béton

Si la fissuration est peu préjudiciable :

$$\tau_{u0} = \frac{V_{u0}}{b_0 d} \leq \text{Min} \left\{ \begin{array}{l} 0,2 \cdot f_{cj} \\ \gamma_b \\ 5 \text{ MPa} \end{array} \right.$$

Si la fissuration est préjudiciable ou très préjudiciable :

$$\tau_{u0} = \frac{V_{u0}}{b_0 d} \leq \text{Min} \left\{ \begin{array}{l} 0,15 \cdot f_{cj} \\ \gamma_b \\ 4 \text{ MPa} \end{array} \right.$$

2.3.2. Armatures

Armatures d'âme droites :

$$\frac{A_t}{b_0 s_t} \frac{f_{et}}{\gamma_s} \geq (1-\theta) \frac{\tau_u - 0.3 \cdot k \cdot f_{tj}}{0.9} \quad \theta \leq \frac{1}{2}$$

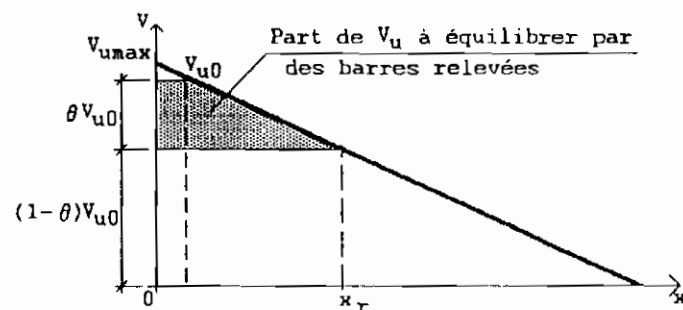
Armatures relevées :

$$\frac{A_r}{b_0 s_r} \frac{f_e}{\gamma_s} \geq \theta \frac{\tau_u - 0.3 \cdot k \cdot f_{tj}}{0.9 \sqrt{2}} \quad \theta \leq \frac{1}{2}$$

Il faut en outre vérifier :

- le pourcentage minimal d'armatures (cf. paragraphe 2.2.3.),
- l'espacement maximal (cf. paragraphe 2.2.4.).

Les barres relevées doivent être conservées jusqu'à l'abscisse x_r où l'équilibre peut à nouveau être assuré par les seules armatures d'âme droites :



Il n'est pas de bonne construction de prévoir une seule nappe de barres relevées traversant la section du nu d'appui.

3. RÉPARTITION DES ARMATURES D'ÂME (MÉTHODE CAQUOT)

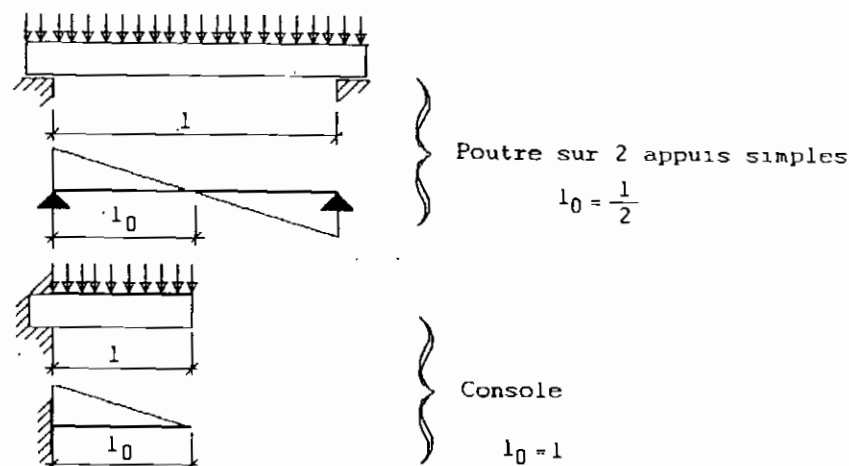
3.1. HYPOTHÈSES

Méthode applicable uniquement aux poutres de section constante supportant des charges uniformément réparties.

3.2. NOTATIONS

l_0 = distance du nu d'appui à la section où l'effort tranchant V_u s'annule.

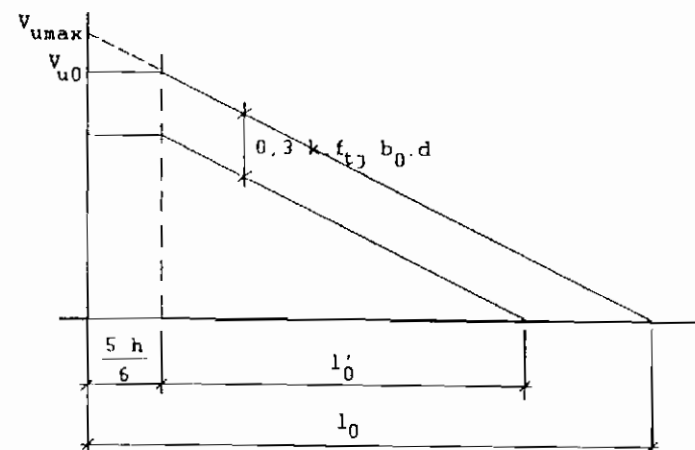
Pour des travées complètement chargées, on a :



Pour tenir compte :

- de la réduction d'effort tranchant pour transmission directe des charges aux appuis,
- de la réduction de τ_u pour les poutres coulées sans reprise ou avec une reprise spécialement traitée (voir page 160),

on considère la longueur l'_0 suivante :



On a :

$$\frac{l'_0}{l_0 - \frac{5h}{6}} = \frac{V_{u0} - 0.3 \cdot k \cdot f_{tj} \cdot b_0 \cdot d}{V_{u0}}$$

avec :

$$\tau_{u0} = \frac{V_{u0}}{b_0 \cdot d} = \frac{V_{u\max} - p_u \cdot 5 \cdot h/6}{b_0 \cdot d}$$

$$l'_0 = \left(l_0 - \frac{5 \cdot h}{6} \right) \left(1 - \frac{0.3 \cdot k \cdot f_{tj}}{\tau_{u0}} \right)$$

$$\tau_{u0} = \frac{V_{u\max} - p_u \cdot 5 \cdot h/6}{b_0 \cdot d}$$

La répartition des armatures d'âme s'effectue donc de la manière suivante :

- 1) répartition sur $5 \cdot h/6$ pour l'espacement initial s_{i0} calculé pour V_{u0} .
- 2) au-delà de la section à $5 \cdot h/6$, répartition suivant la règle de Caquot avec un nombre de répétitions égal à l'_0 (m).

3.3. MÉTHODE CAQUOT

1) L'écartement initial s_{i0} est calculé suivant les indications du paragraphe 2 pour l'effort tranchant V_{u0} .

2) L'écartement de départ des armatures d'âme ($s_{i1} \leq s_{i0}$) est choisi dans la suite :

7, 8, 9, 10, 11, 13, 16, 20, 25, 35 et 40 cm

3) Depuis l'abscisse $s_{i0}/2$, on répète les espacements successifs $s_{ii+1} \geq s_{ii}$ (de la suite) avec un nombre de répétitions :

$$\left. \begin{array}{l} l'_0 + \frac{5 \cdot h}{6 \cdot s_{i0}} \text{ pour le 1er espacement} \\ l'_0 \text{ pour les espacements suivants} \end{array} \right\} \text{ avec } l'_0 \text{ en mètres}$$

4) Si le nombre de répétitions n'est pas entier, le nombre de répétitions totalisé depuis l'origine est arrondi à l'entier le plus voisin.

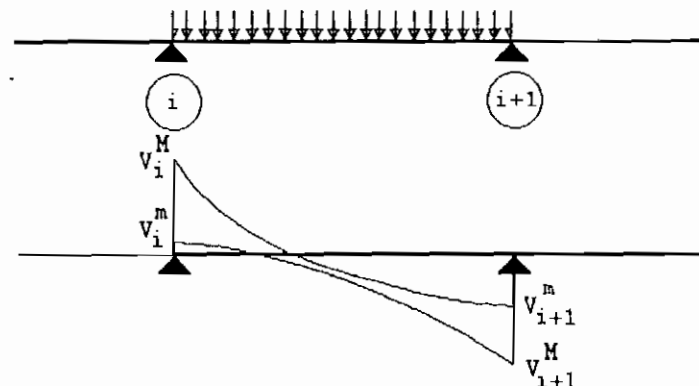
5) Présentation des calculs :

s_t	$\frac{s_{t0}}{2}$	s_{t1}	s_{t2}	
nombre de répétitions		$l'_0 + \frac{5 \cdot h}{6 \cdot s_{t0}}$	l'_0	
nombre cumulé		$l'_0 + \frac{5 \cdot h}{6 \cdot s_{t0}}$	$2l'_0 + \frac{5 \cdot h}{6 \cdot s_{t0}}$	
nombre arrondi		m_1	m_2	
nombre de répétitions		$n_1 = m_1$	$n_2 = m_2 - m_1$	
abscisses	$\frac{s_{t0}}{2}$	$\frac{s_{t0}}{2} + n_1 s_{t1}$	$\frac{s_{t0}}{2} + n_1 s_{t1} + n_2 s_{t2}$	

3.4. CAS DES TRAVÉES CONTINUES

3.4.1. Rappels de Résistance des Matériaux

La ligne enveloppe de l'effort tranchant dans une travée de poutre continue soumise à la seule action de charges réparties (hypothèse de la méthode Caquot) a l'allure suivante :



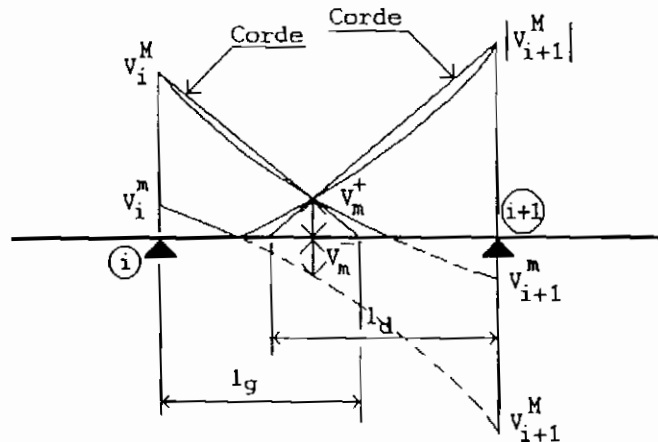
On pose pour tout appui j :

$$V_j^M = |V_j|^{Max}$$

$$V_j^m = |V_j|^{min}$$

3.4.2. Répartition des armatures d'âme

Pour l'étude de l'effort tranchant, on s'intéresse aux valeurs absolues de la ligne enveloppe :



$V_m = V_m^+ = |V_m^-|$ = valeur minimale de l'effort tranchant.

Par simplification, on remplace cette ligne théorique par la ligne enveloppe simplifiée constituée par les cordes :

- reliant V_i^M à V_m pour la partie gauche de la travée.
- reliant V_m à V_{i+1}^M pour la partie droite de la travée.

On définit ainsi les deux longueurs l_g et l_d .

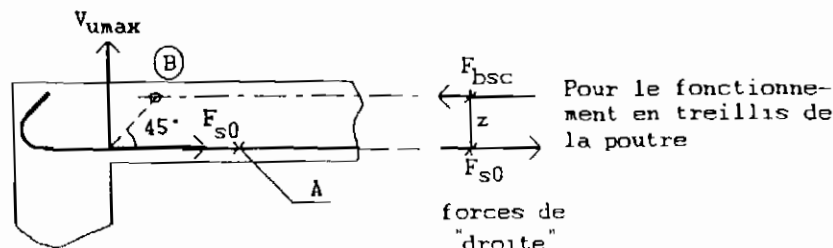
On peut alors appliquer la méthode de répartition de Caquot en considérant les poutres fictives :

- de portée $2.l_g$ associée à l'appui i ,
- de portée $2.l_d$ associée à l'appui $i+1$,

On fait la répartition en partant des deux extrémités de la travée continue.

4. ZONES D'APPLICATION DES EFFORTS

4.1. ARMATURE INFÉRIEURE TENDUE SUR APPUI D'ABOUT



L'équilibre des moments en B donne :

$$V_{umax} \cdot z = F_{s0} \cdot z \Rightarrow F_{s0} = V_{umax}$$

Comme :

$$F_{s0} = A \cdot \frac{f_e}{\gamma_s} \text{ avec } : \gamma_s = 1,15$$

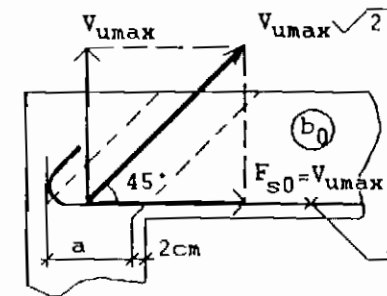
il vient :

$$A \geq \frac{1,15 \cdot V_{umax}}{f_e}$$

A ancrée au-delà du nu d'appui pour V_{umax} (et non pour V_{u0} réduit).

4.2. ÉQUILIBRE DE LA BIELLE DE BÉTON SUR APPUI SIMPLE D'ABOUT

4.2.1. Vérification du béton



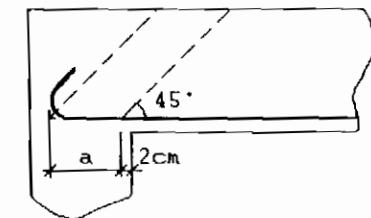
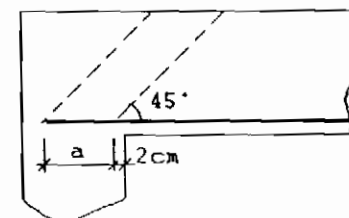
$$\sigma_{bc} = \frac{V_{umax} \sqrt{2}}{b_0 \frac{a}{\sqrt{2}}} \Rightarrow \sigma_{bc} = \frac{2 \cdot V_{umax}}{b_0 \cdot a} \leq 0,8 \frac{f_{cj}}{\gamma_b}$$

$\gamma_b = 1,5$

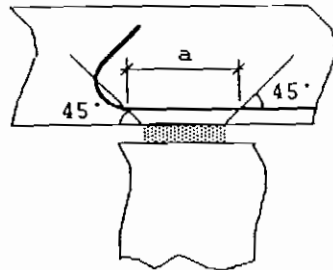
Le coefficient 0,8 tient compte du fait qu'à l'appui, l'inclinaison des bielles n'est pas exactement 45° et que leur compression peut ne pas être uniforme.

4.2.2. Largeur a de bielle à prendre en compte

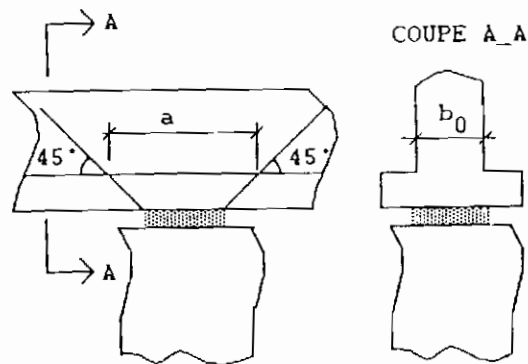
a) Poutre solidaire d'un poteau



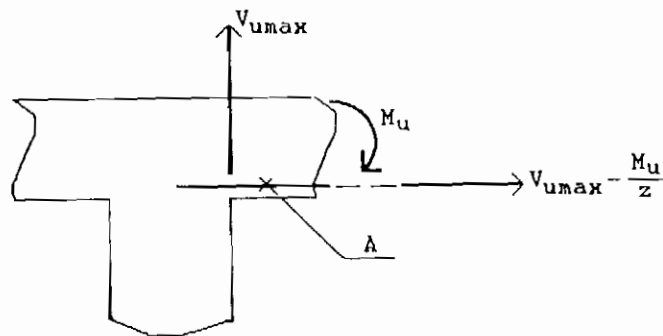
b) Poutre à nervure rectangulaire sur appareil d'appui



c) Poutre à talon sur appareil d'appui



4.3. ARMATURE INFÉRIEURE TENDUE SUR APPUI INTERMÉDIAIRE



Les aciers inférieurs doivent équilibrer :

$$\begin{cases} F_s = V_{u\max} - \frac{M_u}{z} \text{ avec } M_u \text{ en valeur absolue} \\ F_s = A \cdot f_{cd} \end{cases}$$

d'où leur section est donnée par : $A = \frac{F_s}{f_{cd}}$

et par suite : $A > 0 \Leftrightarrow F_s > 0 \Leftrightarrow V_{u\max} - \frac{M_u}{z} > 0 \Leftrightarrow M_u < V_{u\max} \cdot z$

D'où avec une valeur approchée z du bras de levier égale à $0,9 \cdot d$:

$$\text{si } M_u < 0,9 \cdot d \cdot V_{u\max} \\ A = \frac{V_{u\max} - \frac{M_u}{0,9 \cdot d}}{f_{cd}}$$

avec un ancrage au-delà du nu d'appui pour $V_{u\max} - \frac{M_u}{0,9 \cdot d}$

Nota : même si l'on trouve $A < 0$, il n'est pas de bonne construction de ne prévoir aucune armature inférieure traversant le nu d'appui.

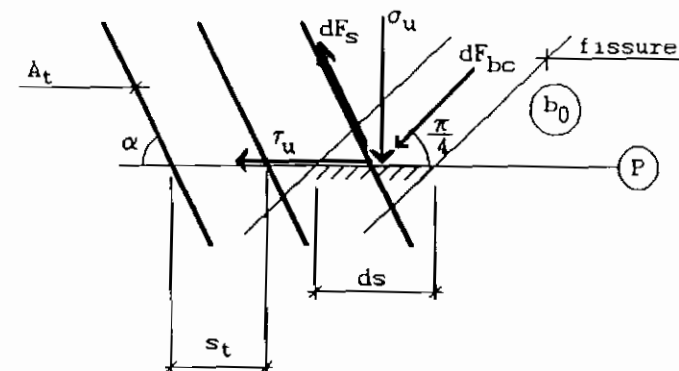
Les bielles de béton doivent vérifier, de part et d'autre de l'appui :

$$\frac{2 \cdot V_{u\max}}{b_0 \cdot a} \leq 0,8 \frac{f_{cj}}{\gamma_b}$$

$\gamma_b = 1,5$ en général

5. JONCTION HOURDIS – NERVURE

5.1. RÈGLE DES COUTURES



Sur l'épaisseur h_0 , il faut couler le plan P soumis à l'action de contraintes tangentes τ_u et de contraintes normales σ_u par des armatures transversales (aciers de couture) A_t inclinées d'un angle α sur le plan P en sens inverse de la fissuration probable.

Les aciers de couture sont soumis à une force de traction :

$$dF_s = \frac{A_t}{s_t} \cdot \frac{f_{et}}{\gamma_s} ds$$

Les projections des forces s'écrivent :

$$\tau_u b_0 ds = \frac{A_t}{s_t} \cdot \frac{f_{et}}{\gamma_s} ds \cdot \cos \alpha + dF_{bc} \cdot \cos \frac{\pi}{4}$$

$$\sigma_u b_0 ds = - \frac{A_t}{s_t} \cdot \frac{f_{et}}{\gamma_s} ds \cdot \sin \alpha + dF_{bc} \cdot \sin \frac{\pi}{4}$$

D'où par soustraction :

$$(\tau_u - \sigma_u) b_0 = \frac{A_t}{s_t} \cdot \frac{f_{et}}{\gamma_s} (\cos \alpha + \sin \alpha)$$

$$\frac{A_t}{b_0 s_t} \cdot \frac{f_{et}}{\gamma_s} (\sin \alpha + \cos \alpha) = \tau_u - \sigma_u$$

Le plus souvent, on choisit $\alpha = 90^\circ$:

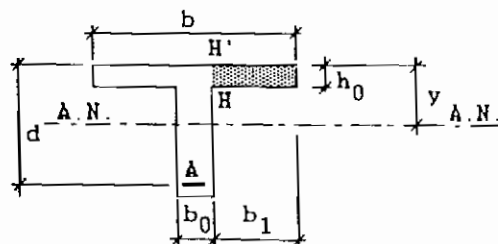
$$\frac{A_t}{s_t} \cdot \frac{f_{et}}{\gamma_s} = b_0 (\tau_u - \sigma_u)$$

et si $\sigma_u = 0$:

$$\frac{A_t}{s_t} \cdot \frac{f_{et}}{\gamma_s} = b_0 \tau_u = g_u$$

On peut donc retenir ce résultat simple "la force développée par unité de longueur par les aciers de couture doit équilibrer le glissement longitudinal ultime par unité de longueur".

2. VÉRIFICATION DU BÉTON



L'effort de glissement sur le plan HH' (variation d'effort normal par unité de longueur) correspondant à la saillie b_1 vaut :

$$g_{lu} = \frac{V_u}{I_1} \cdot b_1 \cdot h_0 \left(y - \frac{h_0}{2} \right)$$

I_1 = moment d'inertie par rapport à l'axe neutre de la section homogène réduite.

Or le moment statique S_1 de la partie comprimée de la section en T est tel que :

$$S_1 \geq b \cdot h_0 \left(y - \frac{h_0}{2} \right)$$

puisque l'axe neutre est dans la nervure.

$$\text{On en déduit : } h_0 \left(y - \frac{h_0}{2} \right) \leq \frac{S_1}{b}$$

$$\text{D'où : } g_{lu} \leq \frac{V_u}{I_1} S_1 \frac{b_1}{b} = \frac{V_u}{z} \cdot \frac{b_1}{b} \text{ car } z = \frac{I_1}{S_1}$$

D'où la contrainte tangente à la jonction nervure-saillie :

$$\tau = \frac{g_{lu}}{h_0}$$

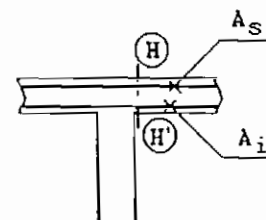
soit :

$$\tau = \frac{V_u}{z \cdot h_0} \cdot \frac{b_1}{b} \leq \tau_{lim} \quad \tau_{lim} \text{ donné au paragraphe 1.3.2.}$$

$$z = 0,9 \cdot d$$



5.3. ACIERS DE COUTURE



A_s et A_i étant les aciers supérieurs et inférieurs de la dalle espacés de s_t et ancrés totalement de part et d'autre des sections de jonction HH', ils équilibrent par unité de longueur un effort :

$$\frac{A_s + A_i}{s_t} \cdot \frac{f_e}{\gamma_s} \text{ avec } \gamma_s = 1,15$$

Cet effort devant être au moins égal à l'effort de glissement ultime dans la saillie de largeur b_1 :

$$\frac{A_s + A_1}{s_t} \cdot \frac{f_e}{\gamma_s} \geq g_{tu} = \frac{V_u}{z} \cdot \frac{b_1}{b}$$

il faut donc :

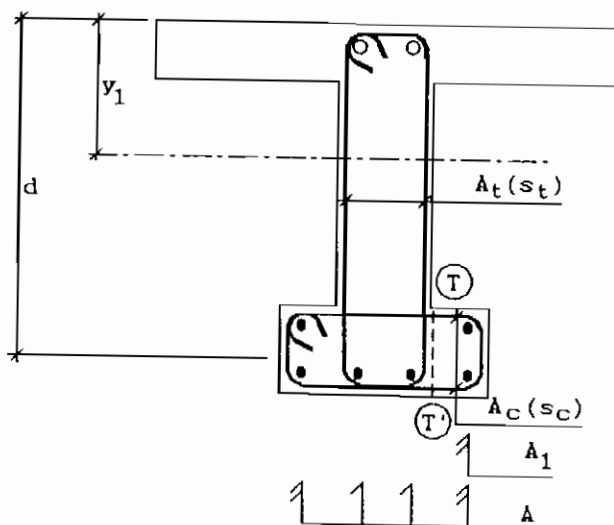
$$\boxed{\frac{A_s + A_1}{s_t} f_e \geq 1,15 \frac{V_u}{z} \frac{b_1}{b}}$$

$$z = 0,9 \cdot d$$

Nota : en général A_s et A_1 sont les armatures d'une dalle fléchie localement entre deux nervures parallèles. On admet qu'elles peuvent simultanément jouer le rôle d'armatures de couture et n'ont donc à être complétées que si l'inégalité précédente n'est pas vérifiée (voir remarque page 179).

6. POUTRES À TALON

Il s'agit de poutres en T dont l'âme est élargie au niveau des armatures tendues.



Notations :

- A_1 = section des barres longitudinales situées dans une saillie du talon,
- A = section de l'ensemble des barres longitudinales situées dans le talon,
- A_c = section d'une nappe d'aciers de couture (cadres de talon),
- s_c = équidistance de ces nappes.

L'effort de glissement par unité de longueur du plan TT' vaut :

$$g_u = \frac{V_u}{I_1} S_B = \frac{V_u}{z} \cdot \frac{S_B}{S_1}$$

avec :

- $S_B = -15A_1(d - y_1)$ = moment statique par rapport à l'axe neutre d'une saillie du talon,
- $S_1 = -15A(d - y_1)$ = moment statique des aciers tendus par rapport au même axe
- = - moment statique de l'aire homogène comprimée, d'après l'équation des moments statiques (cf. 7.1, chapitre 6 «FLEXION SIMPLE»).

Soit :

$$g_u = \frac{V_u}{z} \cdot \frac{A_1}{A} = \frac{V_u}{0,9d} \cdot \frac{A_1}{A}$$

D'après la règle des coutures, les armatures de couture sont obtenues en écrivant que l'effort unitaire équilibré par les aciers de couture est au moins égal à l'effort de glissement ultime sur le plan TT' :

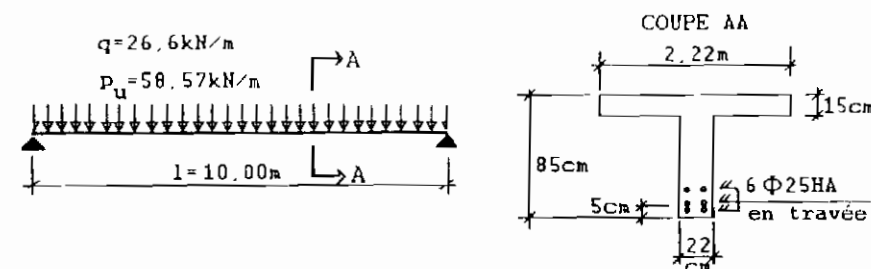
$$\frac{A_c}{s_c} \cdot \frac{f_{et}}{\gamma_s} \geq g_u = \frac{V_u}{0,9d} \cdot \frac{A_1}{A}$$

soit, si l'on adopte le même espacement pour les armatures de couture et les armatures d'âme ($s_c = s_t$) :

$$\boxed{\frac{A_c}{s_t} f_{et} \geq \gamma_s \frac{V_u}{0,9d} \cdot \frac{A_1}{A}} \quad \gamma_s = 1,15 \text{ en général}$$

II. EXERCICE N° 1 : POUTRE – EFFORT TRANCHANT

— ÉNONCÉ —



■ Exercice «fissuration préjudiciable – section à table de compression» traité au chapitre «FLEXION SIMPLE».

■ Fissuration préjudiciable. Pas de reprise de bétonnage.

■ Matériaux :

béton : $f_{c28} = 25 \text{ MPa}$, $f_{t28} = 2,10 \text{ MPa}$,

aciers : Fe E 500 HA.

■ On se propose :

1) de calculer les armatures transversales,

2) de vérifier les abouts de la poutrelle et la jonction hourdis-nervure.

— CORRIGÉ —

EFFORT TRANCHANT

EFFORT TRANCHANT MAXIMAL

$$V_{u\max} = \frac{p_u \cdot l}{2} \quad V_{u\max} = \frac{58,57 \cdot 10,00}{2} = 292,9 \text{ kN}$$

EFFORT TRANCHANT RÉDUIT

TRANSMISSION DIRECTE DES CHARGES AUX APPUIS)

charges uniformément réparties :

$$V_{u0} = V_{u\max} - p_u \frac{5 \cdot h}{6} \quad V_{u0} = 292,9 - 58,57 \frac{5 \cdot 0,85}{6} = 251,4 \text{ kN}$$

VÉRIFICATION DU BÉTON

CONTRAINTE TANGENTE CONVENTIONNELLE

$$\tau_{u0} = \frac{V_{u0}}{b_0 \cdot d} \quad \tau_{u0} = \frac{0,251}{0,22 \cdot 0,80} = 1,43 \text{ MPa}$$

VÉRIFICATION

$$\left. \begin{array}{l} \text{fissuration} \\ \text{préjudiciable} \end{array} \right\} \Rightarrow \tau_{lim} = \min \left\{ \begin{array}{l} 0,15 \frac{f_{ct}}{\gamma_b} \\ 4 \text{ MPa} \end{array} \right. \quad \tau_{lim} = \min \left\{ \begin{array}{l} 0,15 \frac{25}{1,5} = 2,5 \\ 4 \text{ MPa} \end{array} \right.$$

$$\tau_{u0} < \tau_{lim} \quad \tau_{u0} = 1,43 \text{ MPa} < 2,5 \text{ MPa} = \tau_{lim} \text{ O.K.}$$

⇒ ARMATURES D'ÂME DROITES

3. ARMATURES D'ÂME

3.1. ARMATURES CALCULÉES

$$\frac{A_t}{b_0 \cdot s_t} \cdot \frac{f_{ct}}{\gamma_s} \geq \frac{\tau_u - 0,3 \cdot k \cdot f_{tj}}{0,9 (\sin \alpha + \cos \alpha)}$$

avec :

 α = inclinaison des A_t , A_t droites $\Rightarrow \alpha = 90^\circ$ $\Rightarrow \sin \alpha + \cos \alpha = 1$ $f_{ct} \cdot \gamma_s$ Fe E 500 $\Rightarrow f_{ct} = 500 \text{ MPa}$, $\gamma_s = 1,15$

$$\tau_{u0} = \frac{V_{u0}}{b_0 \cdot d}$$

 $\tau_{u0} = 1,43 \text{ MPa}$

$$k = \begin{cases} 0 & \text{si reprise sans indentations,} \\ 0 & \text{si fissuration très préjudiciable,} \\ 1 & \text{sinon en flexion simple.} \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} - \text{pas de reprise,} \\ - \text{fissuration préjudiciable,} \\ - \text{flexion simple.} \end{array} \right\} \Rightarrow k = 1$$

 f_{t28} bornée supérieurement à 3,3 MPa $f_{t28} = 2,1 \text{ MPa} < 3,3 \text{ MPa}$ O.K.

$$\frac{A_t}{s_t} \geq \frac{22 (1,43 - 0,3 \cdot 2,1)}{0,9 \frac{500}{1,15}} = \frac{1}{22,23} \text{ cm}^2/\text{cm}$$

3.2. POURCENTAGE MINIMAL

$$\frac{A_t}{b_0 \cdot s_t} f_{ct} \geq 0,4 \text{ MPa}$$

$$\frac{A_t}{s_t} \geq \frac{22 \cdot 0,4}{500} = \frac{1}{56,82} \text{ cm}^2/\text{cm}$$

$$\frac{A_t}{s_t} = \frac{1}{22,23} \geq \frac{1}{56,82} \text{ O.K.}$$

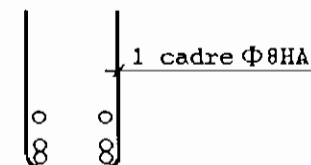
3.3. DIAMÈTRE DES ARMATURES D'ÂME

$$\Phi_t \leq \min \left\{ \begin{array}{l} \Phi_1 \\ h/35 \\ b_0/10 \end{array} \right.$$

$$\Phi_t \leq 22 \text{ mm} = \min \left\{ \begin{array}{l} 25 \text{ mm} \\ 850/35 = 24,3 \\ 220/10 = 22 \end{array} \right.$$

⇒ prenons $\Phi_t = 8 \text{ mm}$

d'où pour «coudre» deux files :



$$A_t = 2 \cdot 0,50 = 1,00 \text{ cm}^2$$

$$\Rightarrow s_{t0} = 1,00 \cdot 22,23 = 22,23 \text{ cm}$$

retenons : 1 cadre $\Phi 8\text{HA}$ $s_{t0} = 22 \text{ cm}$

4. ESPACEMENT MAXIMAL

$$s_t \leq \text{Min} \begin{cases} 0,9 \cdot d \\ 40 \text{ cm} \\ 15 \Phi'_{\text{min}} \text{ si } A' \neq 0 \end{cases}$$

$$s_t \leq 40 \text{ cm} = \text{Min} \begin{cases} 0,9 \cdot 80 = 72 \text{ cm} \\ 40 \text{ cm} \\ * \text{ car } A' = 0 \end{cases}$$

$$s_{t0} = 22 \text{ cm} < 40 \text{ cm} = s_t \text{ O.K.}$$



RÉPARTITION DES ARMATURES D'ÂME

Espacement initial s_{t1}

$$s_{t0} = 22 \text{ cm} \Rightarrow s_{t1} = 20 \text{ cm pris dans la suite des } s_t \text{ de Caquot}$$

Nombre de répétitions :

$$l'_0 = \left(l_0 - \frac{5h}{6} \right) \left(1 - \frac{0,3 \cdot k \cdot f_{tj}}{\tau_{u0}} \right) \quad l'_0 = \left(5 - \frac{5 \cdot 0,85}{6} \right) \left(1 - \frac{0,3 \cdot 1 \cdot 2,1}{1,43} \right) = 2,40 \text{ m}$$

$$n_1 = l'_0 + \frac{5h}{6s_{t0}} \text{ pour le 1}^{\text{er}} \text{ espacement} \quad n_1 = 2,40 + \frac{5 \cdot 0,85}{6 \cdot 0,22} = 5,62$$

$$n_i = l'_0 \text{ pour les suivants} \quad n_i = 2,40 \text{ pour } i > 1$$

1. TABLEAU DE CAQUOT

s_t	$\frac{s_{t0}}{2}$	20	25	35	40
nombre théorique	/	5,62	2,40	2,40	2,40
nombre cumulé	/	5,62	8,02	10,42	12,82
nombre arrondi	/	6	8	10	13
nombre de répétitions	/	6	2	2	$8 \approx 6,2 = \frac{500-250}{40}$
abscisses (cm)	10	130	180	250	370 490

la : le nombre de répétitions 3 ne convient pas car il ne permet pas d'atteindre le milieu de portée avec un espacement de 40 cm.

Il manque pour arriver à mi-portée : $500 - 490 = 10 \text{ cm}$.

Retenons sans mettre un cours d'armatures d'âme à mi-portée :

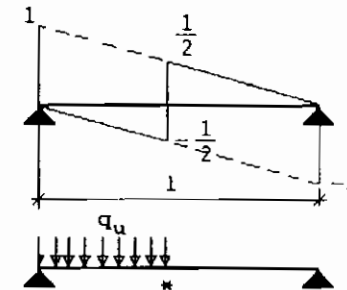
$$10 + 6 \times 20 + 2 \times 25 + 4 \times 35 + 4 \times 40$$

$$q_s \geq q_g$$

4.2. VÉRIFICATION DE s_t À 1/2

a) Effort tranchant

Compte tenu de la forme de la ligne d'influence de V :



Charges permanentes } $V_g = 0$

$$\text{Charges variables } \left. \begin{aligned} V_q &= \pm q_u \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{l}{2} \cdot \frac{1}{2} \right) = \pm \frac{q_u l}{8} \\ V_u &= \pm 1,5 \cdot 26,6 \cdot \frac{10,00}{8} = \pm 49,9 \text{ kN} \end{aligned} \right\}$$

b) Armatures transversales calculées

$$\tau_u = \frac{V_u}{b_0 \cdot d}$$

$$\frac{A_t}{b_0 \cdot s_t} \cdot \frac{f_{ct}}{\gamma_s} \geq \frac{\tau_u - 0,3 \cdot k \cdot f_{tj}}{0,9 (\sin \alpha + \cos \alpha)}$$

$$\tau_u = \frac{49,9 \cdot 10^{-3}}{0,22 \cdot 0,80} = 0,28 \text{ MPa}$$

$$\frac{A_t}{s_t} \geq \frac{22 (0,28 - 0,3 \cdot 1 \cdot 2,10)}{0,9 \cdot \frac{500}{1,15}}$$

$$\frac{A_t}{s_t} \geq - \frac{1}{50,82} < 0$$

$\Rightarrow s_t = 40 \text{ cm à } l/2 \text{ convient.}$

c) Pourcentage minimal

$$\frac{A_t}{b_0 \cdot s_t} \cdot f_{ct} \geq 0,4 \text{ MPa}$$

$$\left(\frac{A_t}{s_t} \right)_{\text{min}} \geq \frac{22 \cdot 0,4}{500} = 0,018 \text{ cm}^2 / \text{cm}$$

$$\frac{A_t}{s_t} = \frac{2 \cdot 0,50}{40} = 0,025 > 0,018 \text{ O.K.}$$

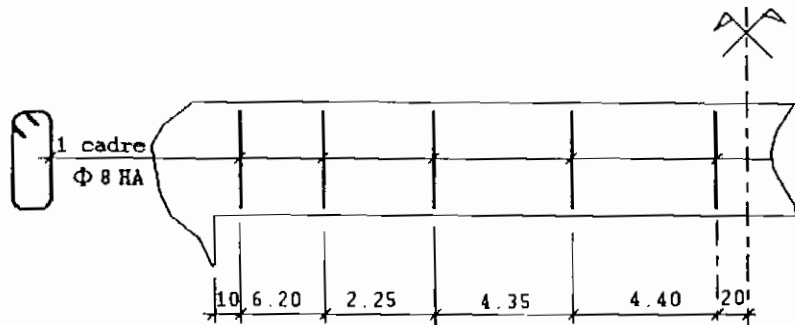
d) Espacement maximal

$$s_t = \text{Min} \begin{cases} 0,9 \cdot d \\ 40 \text{ cm} \end{cases}$$

$$s_t = 40 \text{ cm (cf. paragraphe 3.4.)}$$

$$s_t = 40 \text{ cm} = \bar{s}_t \text{ O.K.}$$

3.3. RETENU



VÉRIFICATIONS D'ABOUT

5.1. ARMATURES INFÉRIEURES TENDUES SUR APPUI D'ABOUT

$$\Lambda = \frac{V_{u\max}}{f_{ed}}$$

$$\Lambda = \frac{0,293}{435} \cdot 10^4 = 6,74 \text{ cm}^2$$

Comme on avait deux files de 3Φ25HA en travée, on garde :

$$2\Phi25HA \text{ inférieurs sur appui :} \\ \Lambda = 2 \cdot 4,91 = 9,82 \text{ cm}^2$$

ancrés au-delà du nu d'appui pour :

$$l = \frac{\Lambda_{cal}}{\Lambda_{réf}} l_s \geq 10\Phi$$

$$l = \frac{6,74}{2 \cdot 4,91} \cdot l_s = 0,69 \cdot l_s$$

$$Fe E 500 \Rightarrow l_s = 44\Phi$$

$$l = 0,69 \cdot 44 \cdot 2,5 = 75,9 \text{ cm}$$

(voir exercice chapitre Traction simple tirant § 5.1.a)

$$l = 75,9 \text{ cm} > 30 \text{ cm de largeur d'appui} \\ \Rightarrow \text{Crochet.}$$

5.2. VÉRIFICATION DU BÉTON DE LA BIELLE D'ABOUT

Largeur d'appui : 30 cm

Enrobage : e = 3 cm

$$c_t = \text{Max} \begin{cases} \Phi \\ e \\ 1 \text{ cm} \end{cases}$$

$$c_t = 3,0 = \text{Max} \begin{cases} 25 \text{ mm} \\ 3 \text{ cm} \\ 1 \text{ cm} \end{cases}$$

$$b_0 = 22 \text{ cm}$$

$$a = 30 - 2 - 3 = 25 \text{ cm}$$

On doit vérifier :

$$\sigma_{bc} = \frac{2 \cdot V_{u\max}}{b_0 \cdot a} \leq 0,8 \frac{f_{c28}}{\gamma_b}$$

$$\sigma_{bc} = \frac{2 \cdot 0,293}{0,22 \cdot 0,25} = 10,7 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{bc} = 10,7 \text{ MPa} < 13,3 \text{ MPa} = 0,8 \frac{25}{1,5} \text{ O.K.}$$

5.3. ANCRAGE DES ARMATURES INFÉRIEURES TENDUES

Voir exercice «Ancrage courbe» au chapitre 3 «Association acier – béton» pour la méthode de calcul.

6. LIAISON HOURDIS-NEURVE

6.1. VÉRIFICATION DU BÉTON

$$b_1 = \frac{b - b_0}{2}$$

$$b_1 = \frac{2,22 - 0,22}{2} = 1,00 \text{ m}$$

$$\tau = \frac{V_{u\max}}{z \cdot h_0} \cdot \frac{b_1}{b} < \tau_{lim} \\ z = 0,9 \cdot d$$

$$\tau = \frac{0,293}{0,90 \cdot 0,80 \cdot 0,15} \cdot \frac{1,00}{2,22} = 1,22 \text{ MPa}$$

$$\tau = 1,22 \text{ MPa} < 2,5 \text{ MPa} = \tau_{lim} \text{ O.K (cf. 2.2.)}$$

6.2. ARMATURES DE COUTURE

$$\begin{cases} \frac{\Lambda_s + \Lambda_i}{s_t} \cdot f_c \geq 1,15 \cdot \frac{V_u}{z} \cdot \frac{b_1}{b} \\ z = 0,9 \cdot d \end{cases}$$

$$\frac{\Lambda_s + \Lambda_i}{s_t} \geq \frac{1,15 \cdot 0,293}{500 \cdot 0,9 \cdot 0,80} \cdot \frac{1,00}{2,22}$$

$$\frac{\Lambda_s + \Lambda_i}{s_t} \geq \frac{1}{2 \cdot 371,87} \cdot \frac{1}{23,72} \text{ cm}^2/\text{cm}$$

d'où pour $s_t = 1,00 \text{ m}$:

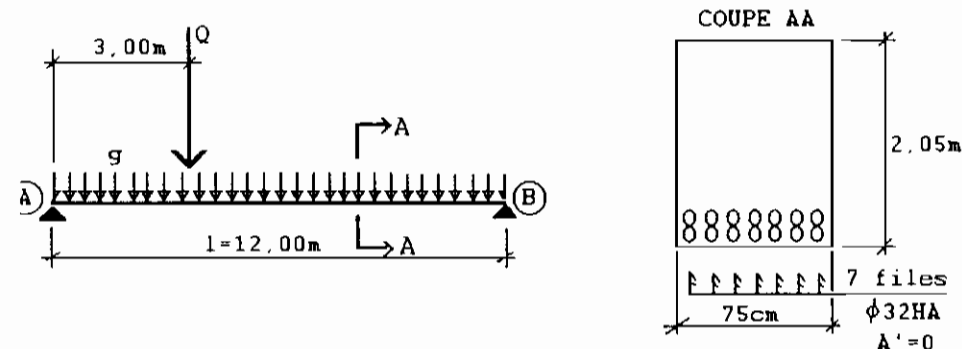
$$\Lambda_s + \Lambda_i = \frac{100}{23,72} = 4,22 \text{ cm}^2$$

$$\Rightarrow \Lambda_s + \Lambda_i > 4,22 \text{ cm}^2/\text{m}$$

Remarque : si la condition n'est pas vérifiée par les armatures existantes de la dalle, on peut, au lieu de rajouter des armatures, réduire proportionnellement la largeur b et reprendre le calcul des aciers longitudinaux (dont la section augmente, mais faiblement)

III. EXERCICE N° 2 : POUTRE À SECTION RECTANGULAIRE – ARMATURES D'ÂME INCLINÉES

— ÉNONCÉ —



■ Action variable :

$Q = 3,525\text{ MN}$.

■ Fissuration préjudiciable. Reprise de bétonnage sans indentations.

■ Matériaux :

– béton : $f_{c28} = 25\text{ MPa}$, $f_{t28} = 2,10\text{ MPa}$,

– aciers : Fe E 500 HA.

■ On se propose, au voisinage de l'appui A :

1) de vérifier le béton des bielles,

2) de calculer à titre indicatif les armatures d'âme inclinées d'un angle α° de telle sorte que

leur pourcentage $\rho_t = \frac{A_t}{b_0 \cdot s_t \sin \alpha}$ soit minimal,

3) de calculer les armatures d'âme inclinées d'un angle $\alpha^\circ = 45^\circ$,

4) de déterminer les armatures d'âme droites et les armatures horizontales associées réparties sur la hauteur de l'âme.

— CORRIGÉ —

1. EFFORT TRANCHANT

1.1. EFFORT TRANCHANT NON RÉDUIT

ϖ = poids volumique du béton armé

$\varpi = 25\text{ kN/m}^3$

$g = \varpi \cdot b_0 \cdot h$

$g = 25 \cdot 10^{-3} \cdot 2,05 \cdot 0,75 = 0,0384\text{ MN/m}$

$p_u = 1,35 \cdot g$

$p_u = 1,35 \cdot 0,0384 = 0,0518\text{ MN/m}$

$Q_u = 1,5 \cdot Q$

$Q_u = 1,5 \cdot 3,525 = 5,288\text{ MN}$

$$V_{u\max} = \frac{p_u \cdot l}{2} + Q_u \left(1 - \frac{a}{l}\right)$$

$$V_{u\max} = \frac{0,0518 \cdot 12}{2} + 5,288 \left(1 - \frac{3}{12}\right) = 4,277\text{ MN}$$

0,311 3,966

1.2. EFFORT TRANCHANT RÉDUIT

(TRANSMISSION DIRECTE DES CHARGES AUX APPUIS)

Charges uniformément réparties :

$$V_{u0}(p_u) = V_u - \frac{5h}{6} p_u$$

$$V_{u0}(p_u) = 0,311 - 0,0518 \cdot \frac{5 \cdot 2,05}{6} = 0,223\text{ MN}$$

Charge concentrée :

$$\frac{h}{2} \leq a \leq \frac{3h}{2}$$

$$\frac{2,05}{2} = 1,025\text{ m} < a = 3\text{ m} < 3,075\text{ m} = \frac{3 \cdot 2,05}{2}$$

$$V_{u0}(Q) = \frac{2a}{3h} V_u(Q)$$

$$V_{u0}(Q) = \frac{2 \cdot 3,00}{3 \cdot 2,05} \cdot 3,966 = 3,869\text{ MN}$$

Total :

$$V_{u0} = V_{u0}(p_u) + V_{u0}(Q)$$

$$V_{u0} = 0,223 + 3,869 = 4,092\text{ MN}$$

2. VÉRIFICATION DU BÉTON

2.1. CONTRAINTE TANGENTE CONVENTIONNELLE

$d = 0,9 \cdot h$

$d = 0,9 \cdot 2,05 = 1,845 \approx 1,85\text{ m}$

$$\tau_{u0} = \frac{V_{u0}}{b_0 \cdot d}$$

$$\tau_{u0} = \frac{4,092}{0,75 \cdot 1,85} = 2,95\text{ MPa}$$

SPACEMENT MAXIMAL

$$s_t = \text{Min} \begin{cases} 0,9 d \\ 40 \text{ cm} \\ 15 \Phi'_{\text{min}} \text{ si } \Lambda' \neq 0 \end{cases}$$

$$\bar{s}_t \leq 40 \text{ cm} = \text{Min} \begin{cases} 0,9 \cdot 185 = 166 \text{ cm} \\ 40 \text{ cm} \\ * \end{cases}$$

$$s_{t0} = 22 \text{ cm} < 40 \text{ cm} = \bar{s}_t \text{ O.K.}$$

ETENU

3 cadres + 1 étrier $\Phi 12\text{HA}$ inclinés de $\alpha = 45^\circ$: $s_{t0} = 22 \text{ cm}$

1 vérifie :

$$5^\circ \left[\frac{A_t}{b_0 \cdot s_t \sin \alpha} \right] = \frac{4 \cdot 2 \cdot 1,13}{75 \cdot 22 \cdot \sin 45^\circ} = 0,0077 = \rho_t(45)$$

$$7,5^\circ \left[\frac{A_t}{b_0 \cdot s_t \sin \alpha} \right] = \frac{4 \cdot 2 \cdot 1,13}{75 \cdot 20 \cdot \sin 67,5^\circ} = 0,0065 = \rho_t(67,5)$$

$$\rho_t(45) > \rho_t(67,5)$$

MATURES D'ÂME DROITES ET ARMATURES PARALLÈLES
IGNE MOYENNE

RODUCTION

réalisant les armatures d'effort tranchant au moyen :

matures d'âme droites d'une part,

matures parallèles à l'axe de la poutre, réparties sur la hauteur de l'âme et dont le pourcentage soit au moins égal à celui des armatures d'âme droites d'autre part,

contrainte tangente limite peut être prise égale à celle correspondant à des armatures

inclinées à $\alpha = 45^\circ$.

ÉRIFICATION DU BÉTON

$$\tau_{\text{lim}} = \text{Min} \begin{cases} 0,27 \frac{f_{ct}}{\gamma_b} \\ 7 \text{ MPa} \end{cases} \quad \tau_{\text{lim}} = 4,5 \text{ MPa} = \text{Min} \begin{cases} 0,27 \frac{2,5}{1,5} = 4,5 \\ 7 \text{ MPa} \end{cases}$$

$$\tau_u < \tau_{\text{lim}}$$

$$\tau_{u0} = 2,95 \text{ MPa} < 4,5 \text{ MPa} = \tau_{\text{lim}} \text{ O.K.}$$

MATURES D'ÂME DROITES

$$\frac{A_t}{b_0 \cdot s_t} \cdot \frac{f_{ct}}{\gamma_s} \geq \frac{\tau_u - 0,3 \cdot k \cdot f_{tj}}{0,9 (\sin \alpha + \cos \alpha)}$$

avec :

$\alpha =$ inclinaison des A_t ,

f_{ct}, γ_s ,

$$\tau_{u0} = \frac{V_{u0}}{b_0 \cdot d}$$

$$k = \begin{cases} 0 \text{ si reprise sans indentations,} \\ 0 \text{ si fissuration très préjudiciable,} \\ 1 \text{ sinon en flexion simple.} \end{cases}$$

f_{t28} bornée supérieurement à 3,3 MPa

A_t droites $\Rightarrow \alpha = 90^\circ$

$$\Rightarrow \sin \alpha + \cos \alpha = 1$$

Fe E 500 $\Rightarrow f_{ct} = 500 \text{ MPa}$, $\gamma_s = 1,15$

$$\tau_{u0} = 2,95 \text{ MPa}$$

$$\left. \begin{array}{l} - \text{reprise non traitée,} \\ - \text{fissuration préjudiciable,} \\ - \text{flexion simple.} \end{array} \right\} \Rightarrow k = 0$$

$$f_{t28} = 2,1 \text{ MPa} < 3,3 \text{ MPa O.K.}$$

$$\frac{A_t}{s_t} \geq \frac{75 \cdot 2,95}{0,9 \cdot \frac{500}{1,15}} = \frac{1}{1,77} \text{ cm}^2/\text{cm}$$

b) Pourcentage minimal

$$\frac{A_t}{b_0 \cdot s_t} f_{ct} \geq 0,4 \text{ MPa}$$

$$\frac{A_t}{s_t} \geq \frac{75 \cdot 0,4}{500} = \frac{1}{16,67} \text{ cm}^2/\text{cm}$$

$$\frac{A_t}{s_t} = \frac{1}{1,77} > \frac{1}{16,67} \text{ O.K.}$$

c) Diamètre des A_t

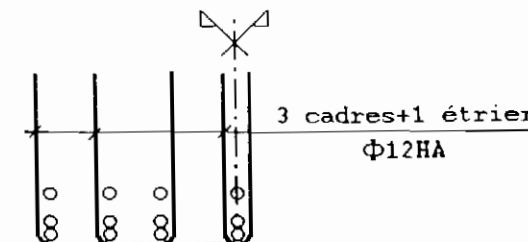
$$\Phi_t \leq \text{Min} \begin{cases} \Phi_l \\ h/35 \\ b_0/10 \end{cases}$$

$$\Phi_t \leq 32 \text{ mm} = \text{Min} \begin{cases} 32 \text{ mm} \\ 2050/35 = 58,6 \\ 750/10 = 75 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{prenons } \Phi_t = 12 \text{ mm}$$

$$(> \Phi_t/3 = 32/3 = 10,7 \text{ mm})$$

d'où pour «coudre» 7 files :



$$\Lambda_t = 8 \cdot 1,13 = 9,04 \text{ cm}^2$$

$$\Rightarrow s_t = 9,04 \cdot 1,77 = 16,00 \text{ cm}$$

retenons : **3 cadres + 1 étrier $\Phi 12\text{HA}$**

$$s_{t0} = 16 \text{ cm}$$

') Espacement maximal

$$\bar{s}_t = \text{Min} \begin{cases} 0,9d \\ 40 \text{ cm} \\ 15 \Phi'_{\text{min}} \text{ si } A' \neq 0 \end{cases}$$

$$\bar{s}_t \leq 40 \text{ cm} = \text{Min} \begin{cases} 0,9 \cdot 185 = 166 \text{ cm} \\ 40 \text{ cm} \\ * \end{cases}$$

$$s_{t0} = 16 \text{ cm} < 40 \text{ cm} = \bar{s}_t \text{ O.K.}$$

) Retenu

3 cadres + 1 étrier $\Phi 12\text{HA}$ droits
 $s_{t0} = 16 \text{ cm}$

4. ARMATURES HORIZONTALES ASSOCIÉES

) Calcul

$$\rho_h = \frac{\Sigma A_h}{z} \geq \frac{A_t}{s_t}$$

$$\rho_h = \frac{\Sigma A_h}{z} \geq \frac{1}{1,77} \text{ cm}^2/\text{cm}$$

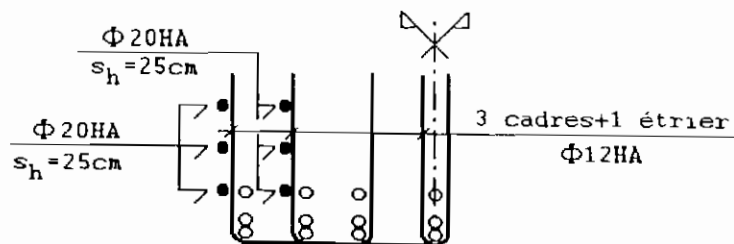
ΣA_h = Somme des brins composant les armatures horizontales associées sur la hauteur de l'âme,

$z = 0,9d$ = hauteur du treillis de Mörsch.

$$\Sigma A_h \geq \frac{0,9 \cdot 185}{1,77} = 94,07 \text{ cm}^2$$

$$\Rightarrow 2 \times 8 \Phi 20\text{HA} \quad s_h = \frac{205}{8} = 25 \text{ cm}$$

$$A_h = 4 \cdot 8 \cdot 3,14 = 100,48 \text{ cm}^2$$



) Répartition des armatures horizontales associées

On arrêtera le double système d'armatures à l'abscisse x , depuis le nu d'appui, où :

$$\tau_u = \tau_{lm} (\alpha = 90^\circ)$$

d'où:

$$\bar{V}_u = \tau_{lm} \cdot b_0 \cdot d$$

$$\bar{V}_u = 2,5 \cdot 0,75 \cdot 1,85 = 3,469 \text{ MN}$$

■ Diagramme de l'effort tranchant :

- pour $0 \leq x \leq a - \epsilon$

$$V_u = V_{u\text{max}} - 1,35 g x$$

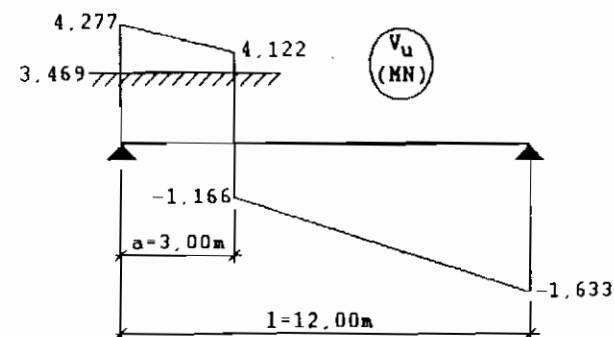
$$x = 0 : V_u = 4,277 \text{ MN (cf. § 1.1.)}$$

$$x = a : V_u = 4,277 - 0,0518 \cdot 3,00 = 4,122 \text{ MN}$$

- pour $a + \epsilon \leq x \leq l$

$$V_u = V_{u\text{max}} - 1,35 g x - 1,5 Q \quad x = a : V_u = 4,277 - 0,0518 \cdot 3,00 - 5,288 = -1,166 \text{ MN}$$

$$x = l : V_u = 4,277 - 0,0518 \cdot 12,00 - 5,288 = -1,633 \text{ MN}$$

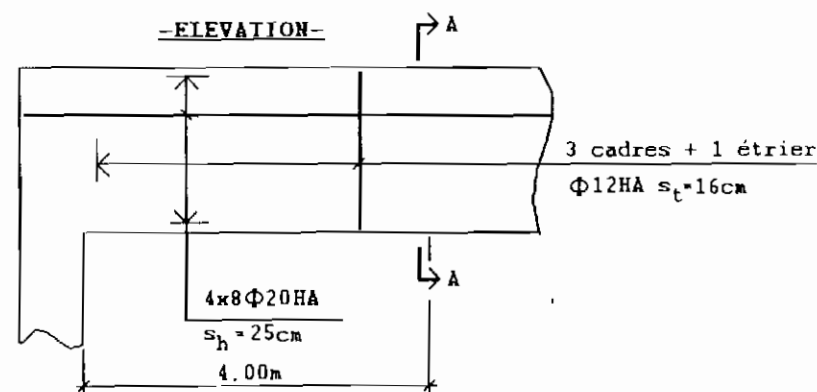


■ Les armatures d'accompagnement doivent donc régner jusqu'à la section d'abscisse $a = 3,00 \text{ m}$ depuis l'appui de gauche, c'est-à-dire, compte tenu de leur ancrage au-delà de cette section jusqu'à l'abscisse :

$$a + l_a = a + 50\Phi$$

$$a + l_a = 3,00 + 50 \cdot 0,02 = 4,00 \text{ m}$$

5.5. SCHÉMA DE FERRAILLAGE D'EFFORT TRANCHANT



VÉRIFICATION

$$\left. \begin{array}{l} \text{Fissuration} \\ \text{préjudiciable} \end{array} \right\} \Rightarrow \tau_{lim} = \min \left\{ \begin{array}{l} 0,15 \frac{f_{cj}}{\gamma_b} \\ 4 \text{ MPa} \end{array} \right. \quad \tau_{lim} = \min \left\{ \begin{array}{l} 0,15 \frac{25}{1,5} = 2,5 \\ 4 \text{ MPa} \end{array} \right.$$

$$\tau_{u0} > \tau_{lim} \quad \tau_{u0} = 2,95 \text{ MPa} > 2,5 \text{ MPa} = \tau_{lim}$$

$\Rightarrow$ Armatures d'âme inclinées de $45^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$

MINIMUM D'ARMATURES D'ÂME INCLINÉES

PRODUCTION

Pourcentage d'armatures d'âme inclinées :

$$\frac{A_t}{b_0 \cdot s_t \sin \alpha} = \frac{\tau_u - 0,3 \cdot k \cdot f_{tj}}{0,9 \cdot f_{ctd} (\sin \alpha + \cos \alpha) \sin \alpha}$$

Pourcentage est minimal pour :

$(\alpha) = (\sin \alpha + \cos \alpha) \sin \alpha$ maximal

$$\text{où : } f'(\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \sin 2\alpha + \cos 2\alpha = 0$$

$$\Rightarrow 2\alpha = -\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi \Rightarrow \alpha = -\frac{\pi}{8} + k \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$k=0 \Rightarrow \alpha = -\frac{\pi}{8} < 0 < 45^\circ \text{ donc inacceptable,}$$

$$k=1 \Rightarrow \alpha = \frac{3\pi}{8} = 67,5^\circ \text{ compris entre } 45^\circ \text{ et } 90^\circ \text{ O.K.,}$$

$$k=2 \Rightarrow \alpha = \frac{7\pi}{8} = 157,5^\circ > 90^\circ \text{ donc inacceptable.}$$

Minimum est donc obtenu pour $\alpha = 67,5^\circ$ et on a :

α	45°	$67,5^\circ$	90°
$f'(\alpha)$	1	+	0
$f(\alpha)$	1	1,207	1

conséquent : $[p_t]_{min} \Leftrightarrow \alpha = 67,5^\circ$.

3.2. VÉRIFICATION DU BÉTON

$$\tau_{lim} = \min \left\{ \begin{array}{l} \left(0,39 - 0,12 \frac{\alpha}{45} \right) \frac{f_{cj}}{\gamma_b} \\ \left(10 - 3 \frac{\alpha}{45} \right) \text{ MPa} \end{array} \right.$$

$$\tau_{u0} > \tau_{lim}$$

$$\tau_{lim} = \min \left\{ \begin{array}{l} \left(0,39 - 0,12 \frac{67,5}{45} \right) \frac{25}{1,5} = 3,5 \\ \left(10 - 3 \frac{67,5}{45} \right) \text{ MPa} = 5,5 \end{array} \right.$$

$$\tau_{u0} = 2,95 \text{ MPa} < 3,5 \text{ MPa} = \tau_{lim} \text{ O.K.}$$

3.3. ARMATURES

$$\frac{A_t}{b_0 \cdot s_t} \cdot \frac{f_{ct}}{\gamma_s} \geq \frac{\tau_u - 0,3 \cdot k \cdot f_{tj}}{0,9 (\sin \alpha + \cos \alpha)}$$

avec :

α = inclinaison des A_t ,

f_{ct} , γ_s ,

$$\tau_{u0} = \frac{V_{u0}}{b_0 \cdot d}$$

$k = \begin{cases} 0 \text{ si reprise sans indentations,} \\ 0 \text{ si fissuration très préjudiciable,} \\ 1 \text{ sinon en flexion simple.} \end{cases}$

f_{t28} bornée supérieurement à 3,3 MPa

A_t inclinées $\Rightarrow \alpha = 67,5^\circ$

Fc E 500 $\Rightarrow f_{ct} = 500 \text{ MPa}$, $\gamma_s = 1,15$

$$\tau_{u0} = 2,95 \text{ MPa}$$

$\Rightarrow k = 0$ $\left. \begin{array}{l} \text{— reprise non traitée,} \\ \text{— fissuration préjudiciable,} \\ \text{— flexion simple.} \end{array} \right\}$

$$f_{t28} = 2,1 \text{ MPa} < 3,3 \text{ MPa O.K.}$$

$$\frac{A_t}{s_t} \geq \frac{75 \cdot 2,95}{0,9 \cdot \frac{500}{1,15} (\sin 67,5 + \cos 67,5)} = \frac{1}{2,31} \text{ cm}^2/\text{cm}$$

3.4. POURCENTAGE MINIMAL SELON LES RÈGLES BAEL

$$\frac{A_t}{b_0 \cdot s_t} \cdot f_{ct} \geq 0,4 \text{ MPa}$$

(sin α négligé)

$$\frac{A_t}{s_t} \geq \frac{75 \cdot 0,4}{500} = \frac{1}{16,67} \text{ cm}^2/\text{cm}$$

$$\frac{A_t}{s_t} = \frac{1}{2,31} > \frac{1}{16,67} \text{ O.K.}$$

3.5. DIAMÈTRE DES A_t

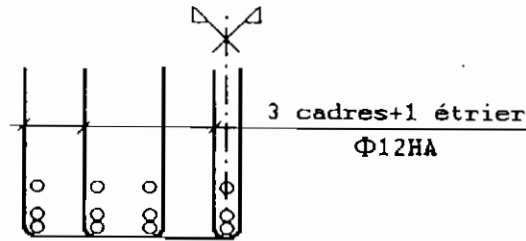
$$\Phi_t \leq \min \left\{ \begin{array}{l} \Phi_t \\ h/35 \\ b_0/10 \end{array} \right.$$

$$\Phi_t \leq 32 \text{ mm} = \min \left\{ \begin{array}{l} 32 \text{ mm} \\ 2050/35 = 58,6 \\ 750/10 = 75 \end{array} \right.$$

$\Rightarrow$ prenons $\Phi_t = 12 \text{ mm}$

($> \Phi_t/3 = 32/3 = 10,7 \text{ mm}$)

d'où pour «coudre» 7 files :



$$A_t = 8 \cdot 1,13 = 9,04 \text{ cm}^2$$

$$\Rightarrow s_t = 9,04 \cdot 2,31 = 20,88 \text{ cm}$$

retenons : 3 cadres + 1 étrier Φ12HA

$$s_{t0} = 20 \text{ cm}$$

1. ESPACEMENT MAXIMAL

$$\bar{s}_t = \text{Min} \begin{cases} 0,9 d \\ 40 \text{ cm} \\ 15 \Phi'_{\text{min}} \text{ si } A' \neq 0 \end{cases}$$

$$\bar{s}_t \leq 40 \text{ cm} = \text{Min} \begin{cases} 0,9 \cdot 185 = 166 \text{ cm} \\ 40 \text{ cm} \\ * \end{cases}$$

$$s_{t0} = 20 \text{ cm} < 40 \text{ cm} = \bar{s}_t \text{ O.K.}$$

3 cadres + 1 étrier Φ12HA inclinés de
 $\alpha = 67,5^\circ : s_{t0} = 20 \text{ cm}$

CADRES ET/OU ÉTRIERS INCLINÉS DE $\alpha = 45^\circ$

1. VÉRIFICATION DU BÉTON

$$\rightarrow \tau_{\text{lim}} = \text{Min} \begin{cases} 0,27 \frac{f_{ct}}{\gamma_b} \\ 7 \text{ MPa} \end{cases}$$

$$\tau_{u0} > < \tau_{\text{lim}}$$

$$\tau_{\text{lim}} = 4,5 \text{ MPa} = \text{Min} \begin{cases} 0,27 \frac{25}{1,5} = 4,5 \\ 7 \text{ MPa} \end{cases}$$

$$\tau_{u0} = 2,95 \text{ MPa} < 4,5 \text{ MPa} = \tau_{\text{lim}} \text{ O.K.}$$

ARMATURES

$$\frac{A_t}{b_0 \cdot s_t} \cdot \frac{f_{ct}}{\gamma_s} \geq \frac{\tau_u - 0,3 \cdot k \cdot f_{ij}}{0,9 (\sin \alpha + \cos \alpha)}$$

avec :

α = inclinaison des A_t ,

f_{ct} , γ_s ,

A_t inclinées $\Rightarrow \alpha = 45^\circ$

Fe E 500 $\Rightarrow f_{ct} = 500 \text{ MPa}$, $\gamma_s = 1,15$

$$\tau_{u0} = \frac{V_{u0}}{b_0 \cdot d}$$

$$\tau_{u0} = 2,95 \text{ MPa}$$

$$k = \begin{cases} 0 \text{ si reprise sans indentations,} \\ 0 \text{ si fissuration très préjudiciable,} \\ 1 \text{ sinon en flexion simple.} \end{cases} \Rightarrow k = 0$$

f_{t28} bornée supérieurement à 3,3 MPa

$$f_{t28} = 2,1 \text{ MPa} < 3,3 \text{ MPa O.K.}$$

$$\frac{A_t}{s_t} \geq \frac{75 \cdot 2,95}{0,9 \frac{500}{1,15} (\sin 45 + \cos 45)} = \frac{1}{2,50} \text{ cm}^2/\text{cm}$$

4.3. POURCENTAGE MINIMAL

$$\frac{A_t}{b_0 \cdot s_t} f_{ct} \geq 0,4 \text{ MPa}$$

$$\frac{A_t}{s_t} \geq \frac{75 \cdot 0,4}{500} = \frac{1}{16,67} \text{ cm}^2/\text{cm}$$

$$\frac{A_t}{s_t} = \frac{1}{2,5} > \frac{1}{16,67} \text{ O.K.}$$

4.4. DIAMÈTRE DES A_t

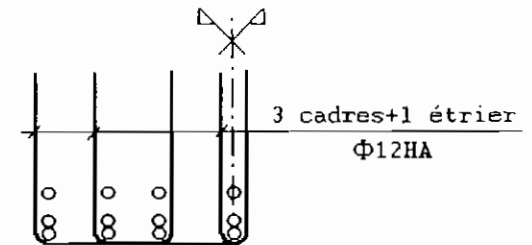
$$\Phi_t \leq \text{Min} \begin{cases} \Phi_1 \\ h/35 \\ b_0/10 \end{cases}$$

$$\Phi_t \leq 32 \text{ mm} = \text{Min} \begin{cases} 32 \text{ mm} \\ 2050/35 = 58,6 \\ 750/10 = 75 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{prenons } \Phi_t = 12 \text{ mm}$$

$$(> \Phi/3 = 32/3 = 10,7 \text{ mm})$$

d'où pour «coudre» 7 files :

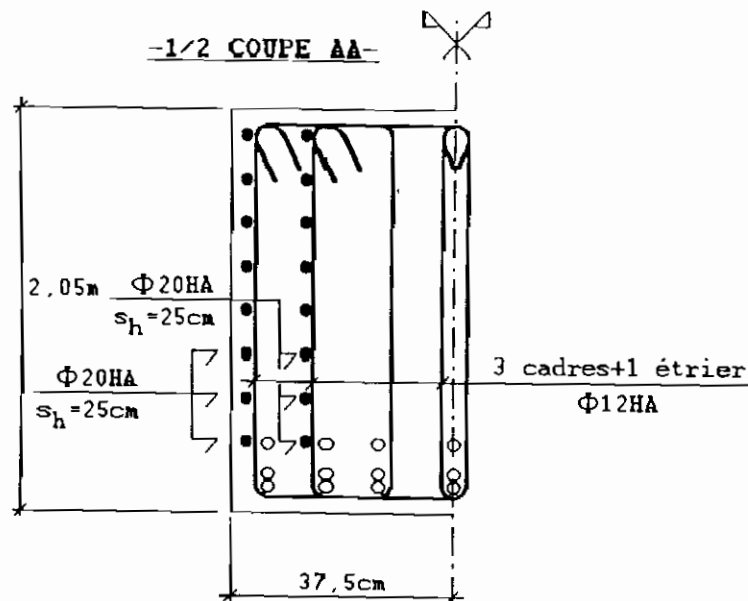


$$A_t = 8 \cdot 1,13 = 9,04 \text{ cm}^2$$

$$\Rightarrow s_t = 9,04 \cdot 2,50 = 22,60 \text{ cm}$$

retenons : 3 cadres + 1 étrier Φ12HA

$$s_{t0} = 22 \text{ cm}$$



REMARQUE

rapportant le volume des armatures d'âme au volume de béton associé :

pour $\alpha = 67,5^\circ$

$$\frac{A_t}{b_0 \cdot s_t \cdot \sin \alpha} = \frac{1}{75 \cdot 2,31 \cdot \sin 67,5} = \frac{1}{160,06}$$

pour $\alpha = 45^\circ$

$$\frac{A_t}{b_0 \cdot s_t \cdot \sin \alpha} = \frac{1}{75 \cdot 2,50 \cdot \sin 45} = \frac{1}{132,58}$$

pour $\alpha = 90^\circ$

$$\frac{A_t}{b_0 \cdot s_t} + \frac{\Sigma A_l}{b_0 \cdot z} = \frac{2 A_t}{b_0 \cdot s_t} = \frac{2}{75 \cdot 1,77} = \frac{1}{66,38}$$

Conclusion :

la solution $\alpha = 67,5^\circ$ est la plus économique (mais la plus compliquée et sa mise en place est peu réaliste),

la solution $\alpha = 90^\circ$ + armatures associées est la moins économique de beaucoup (mais la plus facile à mettre en œuvre).

Contrairement à une opinion assez répandue (la longueur sur laquelle la dépense nécessaire pour cette dernière solution est courte), cet exemple montre que, dans certains cas, une partie importante de la portée de la poutre peut être affectée.

CHAPITRE 8

FLEXION COMPOSÉE

I. RAPPELS DE COURS

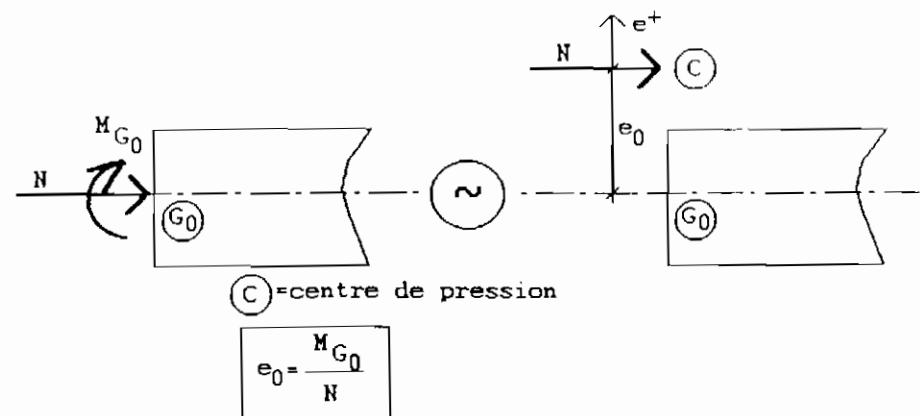
1. GÉNÉRALITÉS – INTRODUCTION

1.1. GÉNÉRALITÉS

On désigne par :

- M_{G0} le moment de flexion (ultime ou de service) par rapport au centre de gravité de la section de béton seul,
- N l'effort normal (ultime ou de service) ; par convention :
 - positif pour une compression,
 - négatif pour une traction.

Excentricité par rapport au centre de gravité de la section de béton seul (résultant des calculs de RdM)



2. PRISE EN COMPTE FORFAITAIRE DES EFFETS DU SECOND ORDRE 2.1. FLEXION-COMPRESSION À L'E.L.U.

l_f = longueur de flambement de la pièce (voir paragraphe 2.1. chapitre 5 «COMPRESSION SIMPLE».

h = hauteur de la section droite dans le plan de flambement,

l = longueur libre de la pièce,

$$e_a = \text{Max} \begin{cases} 2 \text{ cm} \\ \frac{l}{250} \end{cases} = \text{excentricité additionnelle},$$

$$e_1 = \frac{\sum \gamma_i M_{iG_0}}{\sum \gamma_i N_i} + e_a = \text{excentricité du 1}^{\text{er}} \text{ ordre à l'E.L.U.}$$

2.1.1. Cas où $l_f/h > \text{Max}[15 ; 20 \cdot e_1/h]$

Vérifier la pièce à l'état-limite ultime de stabilité de forme (voir chapitre 11 «FLAMBEMENT»).

2.1.2. Cas où $l_f/h \leq \text{Max}[15 ; 20 \cdot e_1/h]$

Faire le calcul en flexion composée pour les sollicitations ultimes :

$$\begin{cases} N_u = \sum \gamma_i N_i \\ M_{uG_0} = N_u (e_1 + e_2) = N_u e_0 \end{cases}$$

avec :

$$e_2 = \frac{3 \cdot l_f^2}{10^4 \cdot h} [2 + \alpha \cdot \Phi]$$

$$\text{où : } \begin{cases} \Phi = 2 \\ \alpha = \frac{M_1^L \left(G + \sum_{i \geq 1} \psi_{2i} \cdot Q_i \right)}{M_1 \left(G + Q_1 + \sum_{i \geq 2} \psi_{0i} \cdot Q_i \right)} \end{cases}$$

M_1 et M_1^L étant évalués sans les coefficients γ
(ce sont des moments de service), e_a n'intervient pas.

SECTIONS PARTIELLEMENT TENDUES

1. DÉFINITION

La section est partiellement tendue si :

2.1.1. À P.E.L.S.

$$c_{0ser} = \frac{M_{serG_0}}{N_{ser}}$$

a) N_{ser} est une compression ($N_{ser} > 0$) $\Rightarrow$ pour une section rectangulaire sans aciers comprimés, il faut $y_1 \leq h$, d'où :

$$M_{serA} \leq M_{serlim} = \frac{1}{2} \overline{\sigma}_{bc} b_0 h \left(d - \frac{h}{3} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{d} \left(1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{h}{d} \right) b_0 d^2 \overline{\sigma}_{bc}$$

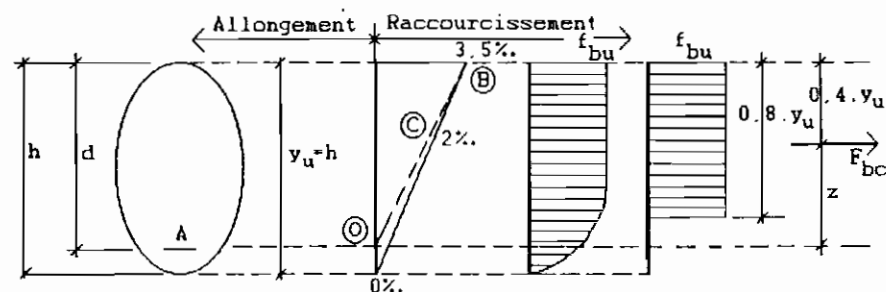
avec au moins une nappe d'aciers tendus ($y_1 \leq d$) si :

$$M_{serA} \leq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} \right) b_0 d^2 \overline{\sigma}_{bc} = 0,333 b_0 d^2 \overline{\sigma}_{bc}$$

b) N_{ser} est une traction ($N_{ser} < 0$) $\Rightarrow$ C est à l'extérieur des traces des armatures.

2.1.2. À P.E.L.U.

a) N_u est une compression (dans ce cas : $N_u > 0$ et $e_0 = e_1 + e_2 \neq e_{0ser}$ avec $y_u \leq h$).



$$\left. \begin{array}{l} \text{pour une section rectangulaire,} \\ \text{en l'absence d'aciers comprimés} \\ \text{si } y_u = h \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} F_{bc} = 0,8 \cdot b_0 \cdot h \cdot f_{bc} \\ z = d - 0,4 \cdot h \end{array} \right\} \Rightarrow M_{BC} = F_{bc} \cdot z$$

soit, en considérant les moments par rapport aux aciers tendus :

$$M_{BC} = 0,8 \cdot \frac{h}{d} \left(1 - 0,4 \cdot \frac{h}{d} \right) b_0 \cdot d^2 \cdot f_{bc}$$

$$\text{d'où : } \mu_{BC} = \frac{M_{BC}}{b_0 \cdot d^2 \cdot f_{bc}} = 0,8 \cdot \frac{h}{d} \left(1 - 0,4 \cdot \frac{h}{d} \right)$$

et la section est partiellement tendue tant que $y_u \leq h$ c'est-à-dire tant que :

$$\mu_{bu} = \frac{M_{uA}}{b_0 \cdot d^2 \cdot f_{bu}} \leq \mu_{BC} = 0,8 \cdot \frac{h}{d} \left(1 - 0,4 \cdot \frac{h}{d} \right)$$

avec :

M_{uA} = moment fléchissant ultime par rapport aux aciers tendus,

En remarquant que l'on a au moins une nappe d'aciers tendus si :

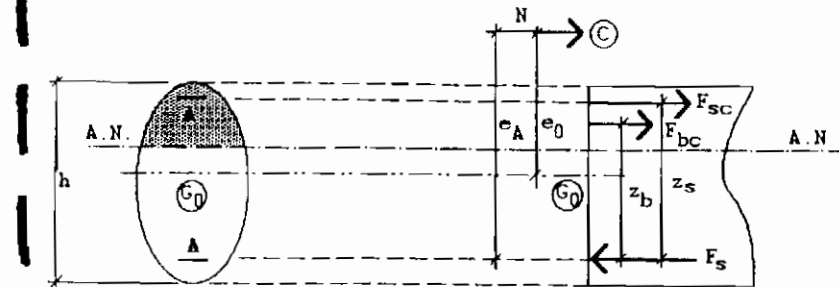
$$y_u \leq d \Rightarrow \mu_{bu} \leq \mu_{B0} = 0,8(1 - 0,4) = 0,480$$

N_u est une traction ($N_u < 0$) $\Rightarrow$ C est à l'extérieur des traces des armatures (dans ce cas :

$$e_0 = \frac{\sum \gamma_i M_{iG_0}}{\sum \gamma_i N_i} \neq e_{0ser} \text{ à moins que } M \text{ et } N \text{ proviennent d'une action unique auquel cas } e_0 = e_{0ser}.$$

ALCUL DES ARMATURES

Méthode de calcul



prenant les moments par rapport aux aciers tendus, les équations d'équilibre s'écrivent :

$$\begin{cases} M_A = N \cdot e_A = F_{sc} \cdot z_s + F_{bc} \cdot z_b \\ N = F_{bc} + F_{sc} - F_s \end{cases}$$

en tenant compte des sections A et A' d'armatures :

$$\begin{cases} M_A = N \cdot e_A = A' \cdot \sigma_{sc} \cdot z_s + F_{bc} \cdot z_b \\ N = F_{bc} + A' \cdot \sigma_{sc} - A \cdot \sigma_s \Leftrightarrow F_{bc} + A' \cdot \sigma_{sc} - \left(A + \frac{N}{\sigma_s} \right) \sigma_s = 0 \end{cases}$$

Les équations d'équilibre de la même section soumise en flexion simple au moment M_A et

mêmes déformations et munie des sections d'armatures A et A' s'écrivent :

$$\begin{cases} M_A = A' \cdot \sigma_{sc} \cdot z_s + F_{bc} \cdot z_b \\ 0 = F_{bc} + A' \cdot \sigma_{sc} - A \cdot \sigma_s \end{cases}$$

à par identification, il vient :

$$\begin{cases} A' = A' \\ A = A - \frac{N}{\sigma_s} \end{cases}$$

2. Technique du calcul

Calculer le moment M_A (M_{uA} ou M_{serA}) par rapport aux aciers tendus,

en déduire par le calcul en flexion simple les sections A et A' d'armatures,

$\Rightarrow$ revenir à la flexion composée avec les aciers :

$$\begin{cases} A' = A' \\ A = A - \frac{N}{\sigma_s} \end{cases}$$

où : N (N_u ou N_{ser}) en valeur algébrique, σ_s à l'état-limite déterminant pour A.

■ Dans le cas où A' préexiste, la méthode de calcul exposée ci-dessus s'applique :

1) en prenant à l'E.L.U. : $M_{BC} = 0,8 \frac{h}{d} \left(1 - 0,4 \frac{h}{d} \right) b_0 d^2 f_{bu} + A' f_{cd} (d - d')$

2) en prenant à l'E.L.S. :

$$M_{ser \lim} = \frac{1}{2} \frac{h}{d} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{h}{d} \right) b_0 d^2 \overline{\sigma_{bc}} + A' \sigma_{sc} (d - d') \quad \text{avec} \quad \sigma_{sc} = 15 \overline{\sigma_{bc}} \frac{h - d'}{h}$$

3) en vérifiant que $A'_{calculé} < A'_{réel}$

2.2.3. Remarques

N est une compression ($N > 0$) $\Rightarrow$ diminution de la section d'aciers tendus trouvée en flexion simple.

N est une traction ($N < 0$) $\Rightarrow$ augmentation de cette section.

2.2.4. Position des aciers tendus

	$M_{G0} > 0$	$M_{G0} < 0$
$N > 0$		
$N < 0$		

Si N est une compression ; C est à l'opposé de A (centre de gravité des aciers tendus) par rapport à G_0 .

Si N est une traction ; C et A sont du même côté par rapport à G_0 .

2.2.5. Section en T à l'E.L.U.

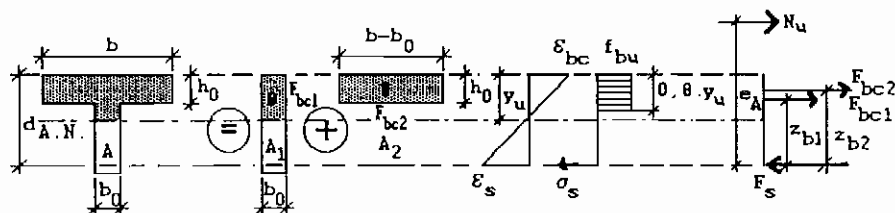
a) Cas où $M_{uA} \leq M_{Tu}$

Table surabondante pour équilibrer M_{uA} .

Donc calcul en section rectangulaire de largeur b en flexion composée soumise à (M_{uA} , N_u).

) Cas où $M_{uA} > M_{Tu}$

Calcul en section à table de compression. Décomposition de la section :



Les équations d'équilibre s'écrivent :

$$\begin{cases} M_{uA} = F_{bc1} \cdot z_{b1} + F_{bc2} \cdot z_{b2} \\ N_u = F_{bc1} + F_{bc2} - F_s \end{cases}$$

avec :

$$\begin{cases} F_{bc1} = 0,8 \cdot b_0 \cdot y_u \cdot f_{bu} \quad \text{et} \quad z_{b1} = d - 0,4 \cdot y_u \\ F_{bc2} = (b - b_0) h_0 \cdot f_{bu} \quad \text{et} \quad z_{b2} = d - \frac{b_0}{2} \\ F_s = A \cdot \sigma_s \end{cases}$$

donc :

$$\begin{cases} M_{uA} = 0,8 \cdot b_0 \cdot y_u \cdot f_{bu} (d - 0,4 \cdot y_u) + (b - b_0) h_0 \cdot f_{bu} \left(d - \frac{b_0}{2}\right) \\ N_u = 0,8 \cdot b_0 \cdot y_u \cdot f_{bu} + (b - b_0) h_0 \cdot f_{bu} - A \cdot \sigma_s \end{cases}$$

et en posant :

$$\begin{cases} M_{uR} = M_{uA} - (b - b_0) h_0 \cdot f_{bu} \left(d - \frac{b_0}{2}\right) \\ N_{uR} = N_u - (b - b_0) h_0 \cdot f_{bu} \end{cases}$$

il vient :

$$\begin{cases} M_{uR} = 0,8 \cdot b_0 \cdot y_u \cdot f_{bu} (d - 0,4 \cdot y_u) \\ N_{uR} = 0,8 \cdot b_0 \cdot y_u \cdot f_{bu} - A \cdot \sigma_s \end{cases}$$

soit les équations d'équilibre d'une section rectangulaire $b_0 d$ soumise à M_{uR} et N_{uR} .

Donc calcul en section rectangulaire $b_0 d$ soumise à :

$$\begin{cases} M_{uR} = M_{uA} - (b - b_0) \cdot h_0 \cdot f_{bu} \left(d - \frac{b_0}{2}\right) \\ N_{uR} = N_u - (b - b_0) h_0 \cdot f_{bu} \end{cases}$$

Il ne faut pas oublier de bien retrancher de A la quantité N_{uR}/σ_s (N_{uR} en valeur algébrique) et non pas N_u/σ_s seulement.

3. SECTION MINIMALE D'ARMATURES

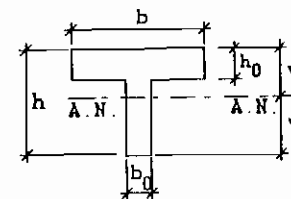
La sollicitation provoquant la fissuration du béton ($\sigma_t = f_{t28}$) de la section supposée non armée et non fissurée doit entraîner dans les aciers tendus de la section réelle une contrainte au plus égale à f_{t28} .

Le diagramme des contraintes est supposé linéaire.

Le point de passage de la résultante des contraintes normales est supposé identique à celui de la sollicitation de service la plus défavorable.

2.3.1. Cas des sections en T

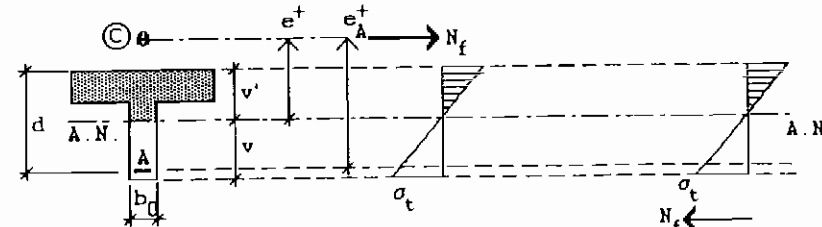
Caractéristiques géométriques de la section non fissurée et non armée :



$$\begin{aligned} B &= b_0 \cdot h + (b - b_0) h_0 \\ v' &= \frac{b_0 \cdot h^2 + (b - b_0) h_0^2}{2 \cdot B} \\ v &= h - v' \\ I &= b_0 \frac{h^3}{3} + (b - b_0) \frac{h_0^3}{3} - B v'^2 \end{aligned}$$

Effort normal de fissuration N_f :

Sous moment négatif, la section en T se comporte comme une section rectangulaire. Nous ne considérerons donc que le cas où $M_{G0} > 0$.



cas où
 $N_f > 0$

$$\sigma_t = \frac{N_f}{B} - \frac{N_f \cdot e \cdot v}{I}$$

avec :
 $N_f > 0$
 $e > 0$

cas où
 $N_f < 0$

$$\sigma_t = \frac{N_f}{B} - \frac{N_f \cdot e \cdot v}{I}$$

avec :
 $N_f < 0$
 $e < 0$

D'où :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_t &= \frac{N_f}{B} - \frac{N_f \cdot e \cdot v}{I} \\ c &= \frac{\left| \frac{M_{ser} G_0}{N_{ser}} \right|_{\max}}{N_{ser}} \\ \sigma_t &= -f_{t28} \end{aligned} \right\} \Rightarrow N_f = \frac{B \cdot I \cdot f_{t28}}{B \cdot e \cdot v - I}$$

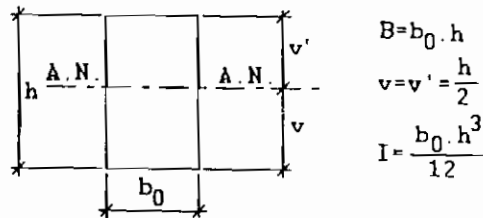
pourcentage minimal d'armatures :

$$A_{\min} = \frac{N_f \cdot e_A}{z_b \cdot f_e} - \frac{N_f}{f_e} \quad \left\{ \begin{array}{l} z_b = d - \frac{h_0}{3} \\ e_A = e + (d - v') \end{array} \right. \rightarrow A_{\min} = B \cdot \frac{f_{t28}}{f_e} \cdot \frac{I}{d - \frac{h_0}{3}} \cdot \frac{e - v' + \frac{h_0}{3}}{B \cdot e \cdot v - I}$$

où e et N_{ser} ont même signe

Cas des sections rectangulaires

caractéristiques géométriques de la section non fissurée et non armée :



pourcentage minimal d'armatures :

formule établie pour les sections en T avec :

$$z_b = 0,9 \cdot d \text{ au lieu de } z_b = d - \frac{h_0}{3}$$

rit, compte tenu du fait que :

$$c_A - z_b = e + (d - v') - 0,9d = e - v' + 0,1d$$

$$A_{\min} = B \cdot \frac{f_{t28}}{f_e} \cdot \frac{1}{0,9 \cdot d} \cdot \frac{e - v' + 0,1 \cdot d}{B \cdot e \cdot v - I}$$

$$A_{\min} = b_0 \cdot h \cdot \frac{f_{t28}}{f_e} \cdot \frac{b_0 \cdot h^3}{12 \cdot 0,9 \cdot d} \cdot \frac{e - 0,5 \cdot h + 0,1 \cdot d}{b_0 \cdot h \cdot e \cdot \frac{h}{2} - \frac{b_0 \cdot h^3}{12}}$$

$$A_{\min} = b_0 \cdot h \cdot \frac{f_{t28}}{f_e} \cdot \frac{h}{0,9 \cdot d} \cdot \frac{e - 0,5 \cdot h + 0,1 \cdot d}{6 \cdot e \cdot h - \frac{h^3}{6}}$$

omme en général : $d \approx 0,9 \cdot h$:

$$A_{\min} = b_0 \cdot d \cdot \frac{f_{t28}}{f_e} \cdot \left(\frac{1}{0,9^3 \cdot 6} \right) \cdot \frac{e - \frac{0,5}{0,9} \cdot d + 0,1 \cdot d}{e - \frac{d}{6 \cdot 0,9}}$$

0,23

$$A_{\min} = 0,23 \cdot \frac{f_{t28}}{f_e} \cdot b_0 \cdot d \cdot \frac{e - 0,45 \cdot d}{e - 0,185 \cdot d} \text{ avec } e \text{ et } N_{ser} \text{ de même signe}$$

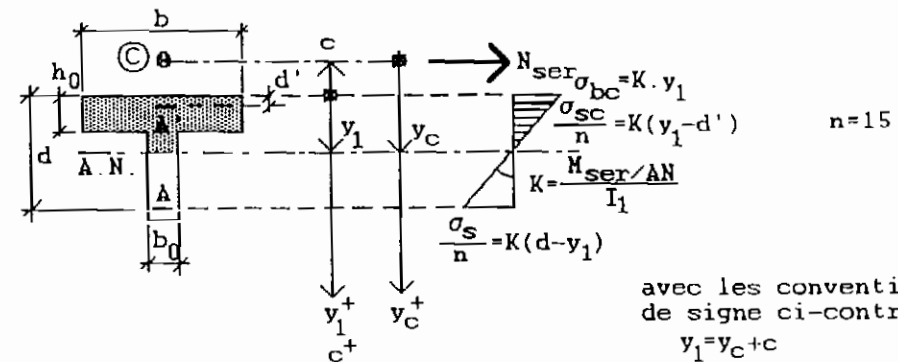
Remarque : dans le cas de la flexion simple :

$$\text{si } e \text{ tend vers l'infini, } A_{\min} \rightarrow 0,23 \cdot \frac{f_{t28}}{f_e} \cdot b_0 \cdot d$$

et on retrouve la section minimale en flexion simple (cf. paragraphe 6.1. chapitre 6 «Flexion simple»).

2.4. CALCUL DES CONTRAINTES À L'E.L.S.

2.4.1. Cas de la section en T



Position de l'axe neutre

Section	N/K	z/C	M/C
$b \cdot y_1$	$\frac{1}{2} b \cdot y_1^2$	$\frac{y_1}{3} - c$	$\frac{1}{2} b (y_c + c)^2 \left[\frac{y_c + c}{3} - c \right]$
à déduire	$-\frac{1}{2} (b - b_0) (y_1 - h_0)^2$	$\frac{y_1 - h_0}{3} + h_0 - c$	$-\frac{b - b_0}{2} (y_c + c - h_0)^2 \left[\frac{y_c + c + 2h_0}{3} - c \right]$
A'	$n \cdot A' (y_1 - d')$	$d' - c$	$n \cdot A' (y_c + c - d') (d' - c)$
A	$-n \cdot A (d - y_1)$	$d - c$	$n \cdot A (y_c + c - d) (d - c)$
	$\Sigma_1 = \frac{N}{K}$		$\Sigma_2 = M/C = 0$

En écrivant $\Sigma_2 = M_{IC} = 0$, on obtient l'équation du troisième degré en y_c :

$$y_c^3 + p \cdot y_c + q = 0$$

$$p = -3 \frac{b}{b_0} c^2 + 3 \left(\frac{b}{b_0} - 1 \right) (c - h_0)^2 + \frac{6nA'}{b_0} (d' - c) + \frac{6nA}{b_0} (d - c)$$

$$q = -2 \frac{b}{b_0} c^3 + 2 \left(\frac{b}{b_0} - 1 \right) (c - h_0)^3 - \frac{6nA'}{b_0} (d' - c)^2 - \frac{6nA}{b_0} (d - c)^2$$

La résolution de cette équation donne y_c :

$$\Rightarrow y_c \Rightarrow y_1 = y_c + c \geq h_0 \quad \text{sinon voir §2.4.2. avec } b_0 = b \quad \text{(section rectangulaire de largeur } b)$$

Moment d'inertie

$$I_1 = \frac{b y_1^3}{3} - \frac{(b - b_0)(y_1 - h_0)^3}{3} + nA' (y_1 - d')^2 + nA (d - y_1)^2$$

Calcul des contraintes

En écrivant que le moment des forces internes par rapport à l'axe neutre vaut :

$$M_{ser/AN} = N_{ser} \cdot y_c$$

il vient :

$$K = \frac{M_{ser/AN}}{I_1} \Rightarrow K = \frac{N_{ser} \cdot y_c}{I_1}$$

Les contraintes valent alors :

$$\sigma_{bc} = K \cdot y_1 \leq \overline{\sigma}_{bc} \quad \text{dans tous les cas}$$

$$\sigma_s = n \cdot K (d - y_1) \leq \overline{\sigma}_s \quad \text{si la fissuration est préjudiciable ou très préjudiciable}$$

$$\sigma_{sc} = n \cdot K (y_1 - d')$$

2. Cas de la section rectangulaire

Pour $b = b_0$, les équations précédentes s'écrivent :

Position de l'axe neutre

$$y_c^3 + p \cdot y_c + q = 0$$

$$p = -3c^2 + \frac{6nA'}{b_0} (d' - c) + \frac{6nA}{b_0} (d - c)$$

$$q = -2c^3 - \frac{6nA'}{b_0} (d' - c)^2 - \frac{6nA}{b_0} (d - c)^2$$

$$\Rightarrow y_1 = y_c + c$$

Moment d'inertie

$$I_1 = \frac{b_0 y_1^3}{3} + nA' (y_1 - d')^2 + nA (d - y_1)^2$$

Calcul des contraintes

$$K = \frac{M_{ser/AN}}{I_1} \Rightarrow K = \frac{N_{ser} \cdot y_c}{I_1}$$

$$\sigma_{bc} = K \cdot y_1 \leq \overline{\sigma}_{bc} \quad \text{dans tous les cas}$$

$$\sigma_s = n \cdot K (d - y_1) \leq \overline{\sigma}_s \quad \text{si la fissuration est préjudiciable ou très préjudiciable}$$

$$\sigma_{sc} = n \cdot K (y_1 - d')$$

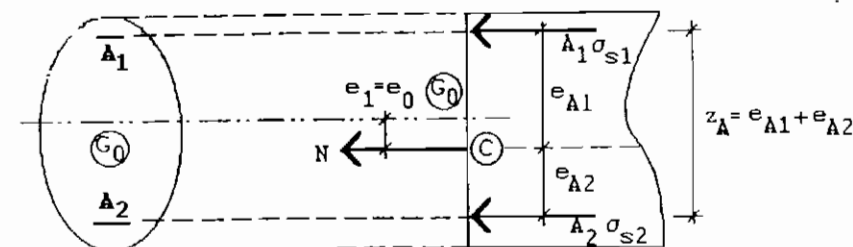
3. SECTIONS ENTIÈREMENT TENDUES

3.1. DÉFINITION

À l'E.L.U. comme à l'E.L.S. la section est entièrement tendue si :

- (N est une traction ($N < 0$),
- (C tombe entre les armatures.

3.2. CALCUL DES ARMATURES



L'équilibre des moments par rapport aux armatures donne :

$$A_1 = \frac{N \cdot e_{A2}}{(e_{A1} + e_{A2}) \sigma_{s1}}$$

$$A_2 = \frac{N \cdot e_{A1}}{(e_{A1} + e_{A2}) \sigma_{s2}}$$

Solution économique : avoir le centre de gravité des armatures en C, d'où :

calcul à l'E.L.U. : Pivot A $\Rightarrow \sigma_{s1} = \sigma_{s2} = f_{cd}$.

calcul à l'E.L.S. : $\sigma_{s1} = \sigma_{s2} = \sigma_s$.

3. SECTION MINIMALE

$$A_1 + A_2 = A \geq A_{\min} = B \frac{f_{t28}}{f_e}$$

SECTIONS ENTIÈREMENT COMPRIMÉES

DÉFINITION

Une section est entièrement comprimée si, la section A' des armatures les plus comprimées étant supposée connue (en cas contraire, faire $A' = 0$ dans les formules qui suivent) :

À l'E.L.S.

N_{ser} est une compression ($N_{ser} > 0$),

$M_{ser} - A' \sigma_{sc} (d - d') > \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{d} \left(1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{h}{d} \right) b_0 d^2 \overline{\sigma_{bc}}$ pour une section rectangulaire

avec $\sigma_{sc} = 15 \overline{\sigma_{bc}} \frac{h - d'}{h}$

À l'E.L.U.

N_u est une compression ($N_u > 0$),

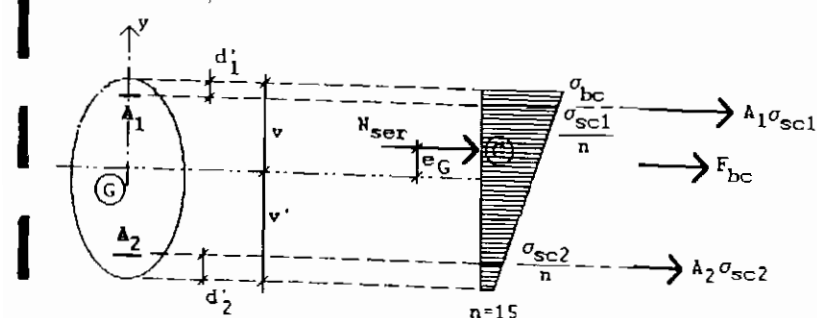
$M_{uA} - A' f_{cd} (d - d') > M_{DC} = 0,8 \frac{h}{d} \left(1 - 0,4 \frac{h}{d} \right) b_0 d^2 f_{bu}$ pour une section rectangulaire

CALCUL DES ARMATURES

1. Dimensionnement à l'E.L.U.

Calcul manuel au pivot C compliqué, on utilise des abaques (diagrammes d'interaction), voir paragraphe 5. Voir aussi chapitre 11 «FLAMBEMENT».

2. Dimensionnement à l'E.L.S.



On désigne par :

$M_{serG} = N_{ser} e_G$ = moment au centre de gravité G de la section homogène,

A_1 et A_2 = sections d'aciers comprimés (fixées en satisfaisant le pourcentage minimal en compression simple du paragraphe 4.3.).

Les caractéristiques géométriques de la section homogène sont :

$B_0 = B + 15(A_1 + A_2)$,

I_0 = moment d'inertie de la section B_0 par rapport à G.

On obtient la contrainte pour le béton :

$$(\sigma_{bc})_{\max} = \frac{N_{ser}}{B_0} + \frac{M_{serG} \cdot v}{I_0} \leq \overline{\sigma_{bc}}$$

Pour le dimensionnement, il faut se fixer a priori A_1 , A_2 et chercher par tâtonnements :

1) à ce que C reste dans le noyau central,

2) à ce que $(\sigma_{bc})_{\max} \leq \overline{\sigma_{bc}} = 0,6 f_{c28}$ avec $(\sigma_{bc})_{\max} = \overline{\sigma_{bc}}$.

4.3. SECTION MINIMALE

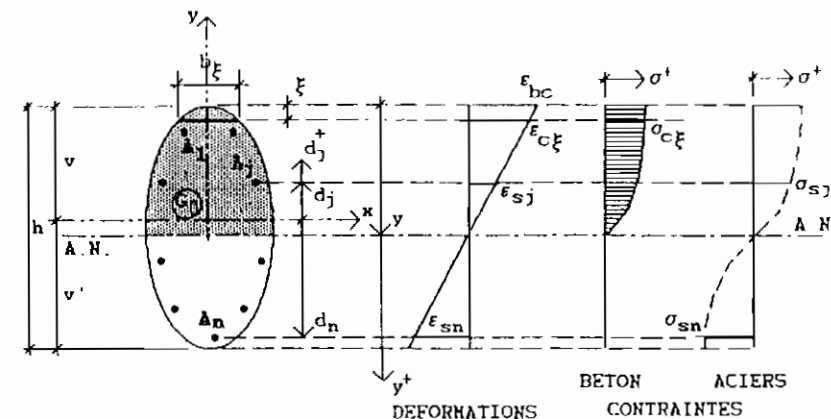
$$A_{\min} = \text{Max} \left\{ \begin{array}{l} 4 \text{ cm}^2/\text{m de périmètre} \\ 0,2 \frac{B}{100} \end{array} \right.$$

B = aire de la section de béton seul.

5. DIAGRAMMES D'INTERACTION

5.1. POSE DU PROBLÈME

Les diagrammes d'interaction sont établis uniquement pour l'état-limite ultime (rien n'empêche d'en établir à l'E.L.S. sur le même principe).



Section quelconque à plan moyen, symétrique par rapport à ce plan (aciers et béton) :

G_0 = centre de gravité de la section de béton seul,

G_0y = axe situé dans le plan de symétrie,

G_0x = axe normal au plan de symétrie,

d_j = distance de l'axe G_0x à l'armature de section A_j , comptée positivement dans le sens ascendant,

A_n = armature la plus éloignée de la fibre la plus comprimée,

B = aire de la section de béton seul,

v et v' = distances de G_0x aux fibres extrêmes, respectivement comprimée et tendue, de la section.

Pour une valeur de y , fixant la position de l'axe neutre, et prise arbitrairement, on a :

1) un diagramme des déformations passant par le pivot associé à y :

$$y \leq 0,259(v - d_n) \Rightarrow \text{Pivot A,}$$

$$0,259(v - d_n) < y \leq h \Rightarrow \text{Pivot B,}$$

$$y > h \Rightarrow \text{Pivot C,}$$

avec :

$\varepsilon_{c\xi}$ = raccourcissement de la fibre de béton à la profondeur ξ ,

ε_{sj} = déformation de l'armature A_j ,

2) un diagramme des contraintes dans le béton et dans l'acier, avec les conventions de signes précisées sur la figure ci-avant, donnant les contraintes :

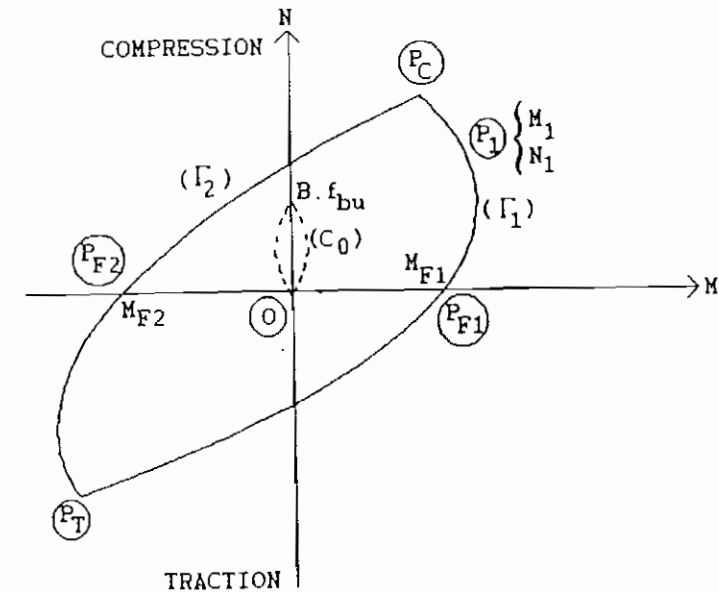
$\sigma_{c\xi}$ pour la fibre de béton à la profondeur ξ ,

σ_{sj} pour l'armature A_j .

La résultante et le moment résultant en G_0 des forces internes sont obtenus par les relations :

$$\left\{ \begin{array}{l} N_1(y) = N_1 = \int_0^y b_\xi \sigma_{c\xi} d\xi + \sum_1^n A_j \sigma_{sj} \\ M_1(y) = M_{1G_0} = \int_0^y b_\xi \sigma_{c\xi} (v - \xi) d\xi + \sum_1^n A_j \sigma_{sj} d_j \end{array} \right.$$

Dans le repère orthonormé plan (OM, ON), le point P_i de coordonnées $M_i(y)$ et $N_i(y)$ décrit, lorsque y varie, un arc de courbe généralement convexe (Γ_1), appelé : COURBE D'INTERACTION.



5.2. DISCUSSION

5.2.1. Cas où y est égal à moins l'infini

Le diagramme des déformations est constitué par la verticale du pivot A. On est donc en TRACTION SIMPLE.

Le point correspondant de la courbe d'interaction est le point P_T défini par

$$\left\{ \begin{array}{l} M_1(-\infty) = M_T = \sum_1^n A_j \cdot \sigma_{sj} \cdot d_j = -f_{ed} \sum_1^n A_j \cdot d_j \\ N_1(-\infty) = N_T = \sum_1^n A_j \cdot \sigma_{sj} = -f_{ed} \sum_1^n A_j \end{array} \right.$$

On remarque que :

$$M_1(-\infty) = M_T = 0 \Rightarrow \sum_1^n A_j \cdot d_j = 0 \Rightarrow G_0 = \text{centre de gravité des armatures } A_j.$$

5.2.2. Cas où y est égal à plus l'infini

Le diagramme des déformations est constitué par la verticale du pivot C. On est donc en COMPRESSION SIMPLE.

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{sj} = 2/1000 \Rightarrow \sigma_{sj} = f_{ed} \text{ si } f_{ed} \leq E_s \cdot \varepsilon_{sc} = 2 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \\ f_{ed} \leq 400 \text{ MPa (aciers Fe E 400),} \\ \sigma_{sj} = E_s \cdot \varepsilon_{sc} = 400 \text{ MPa dans le cas contraire,} \\ \sigma_{cs} = f_{bu} \text{ quel que soit } \xi. \end{array} \right.$$

Le point correspondant de la courbe d'interaction est le point P_C défini par :

$$\left\{ \begin{array}{l} M_1(+\infty) = M_C = f_{ed} \sum_1^n A_j \cdot d_j \quad (\text{ou } M_C = 400 \sum_1^n A_j \cdot d_j) \\ N_1(+\infty) = N_C = B \cdot f_{bu} + f_{ed} \sum_1^n A_j \quad (\text{ou } N_C = B \cdot f_{bu} + 400 \sum_1^n A_j) \end{array} \right.$$

remarque que :

$$M_1(+\infty) = M_C = 0 \Rightarrow \sum_1^n A_j \cdot d_j = 0 \Rightarrow G_0 = \text{centre de gravité des armatures } A_j.$$

2.3. Cas où $N_1 = 0$

Pour une certaine position de l'axe neutre, définie par y_{F1} , le point P_1 occupe sur (Γ_1) la position P_{F1} définie par :

$$\left\{ \begin{array}{l} M_1(y_{F1}) = M_{F1} \\ N_1(y_{F1}) = 0 \end{array} \right.$$

On est alors en FLEXION SIMPLE correspondant au sens de flexion considéré.

2.4. Cas de la flexion inverse

En changeant le sens des moments, on inverse le sens de la flexion et on décrit l'arc de courbe (Γ_2) limité par les points P_T et P_C .

Pour une certaine position de l'axe neutre définie par y_{F2} , le point représentatif occupe sur (Γ_2) la position P_{F2} définie par (bras de levier $v' = \xi$ au lieu de $v = \xi$) :

$$\left\{ \begin{array}{l} M_2(y_{F2}) = M_{F2} \text{ de sens contraire à } M_{F1} \\ N_2(y_{F2}) = 0 \end{array} \right.$$

3. COURBE D'INTERACTION

L'ensemble des deux courbes, (Γ_1) et (Γ_2) , constitue un contour continu et fermé (C_p) appelé COURBE D'INTERACTION.

Si la section présente un axe de symétrie :

- les points P_T et P_C sont situés sur l'axe ON,
- les deux courbes (Γ_1) et (Γ_2) sont symétriques par rapport à cet axe.

Le contour fermé (C_p) constitue la frontière du «DOMAINE DE SÉCURITÉ» de la section étudiée, munie de ses armatures de section totale ΣA_j . Le point représentatif de la sollicitation ultime agissante (de coordonnées M_{uG_0} , N_u) doit se trouver à l'intérieur ou sur la frontière du domaine de sécurité.

Si la section ne comporte aucune armature :

$$A_j = 0 \text{ quel que soit } j \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} P_T = \begin{cases} M_T = 0 \\ N_T = 0 \end{cases} \\ P_C = \begin{cases} M_C = 0 \\ N_C = B \cdot f_{bu} \end{cases} \end{array} \right.$$

En faisant varier y , on obtient le contour (C_0) «lenticulaire» définissant le domaine de sécurité sans armatures. En fait, un pourcentage minimal d'armatures est toujours exigé.

5.4. DIAGRAMMES D'INTERACTION

5.4.1. Tracé des diagrammes d'interaction

Pour une section donnée (béton, armatures, position des aciers) on définit à partir des efforts internes N_i et M_{iG_0} calculés en 5.1. les quantités sans dimensions :

$$v = \frac{N_i}{B \cdot f_{bu}} : \text{effort normal réduit}$$

B = aire totale de la section de béton seul

$$\mu = \frac{M_{iG_0}}{B \cdot h \cdot f_{bu}} : \text{moment fléchissant réduit en } G_0$$

h = hauteur totale de la section dans le plan de flexion

$$\rho = \frac{(\Sigma A_j) \cdot f_{ed}}{B \cdot f_{bu}} : \text{pourcentage mécanique d'armatures.}$$

Pour une position fixée des armatures à l'intérieur de la section, si l'on fait varier ρ – par pas de 0,1 par exemple ($\rho = 0,1-0,2-0,3-\dots$) – on obtient dans le repère orthonormé réduit (μ, v) un réseau de courbes C_p ($C_0-C_1-C_2-C_3-\dots$) appelé DIAGRAMME D'INTERACTION

1.2. Propriétés des diagrammes d'interaction

Les valeurs de ρ sont uniformément réparties (intervalle constant entre deux valeurs successives) suivant les droites rayonnantes correspondant soit à $y = Cste$ soit à des couples $(\epsilon_{bc}, \epsilon_{sn})$ constants. Il convient donc de conduire les interpolations dans les directions de ces droites.

Pour la section sans armatures on a :

$$A_j = 0 \text{ quel que soit } j \Rightarrow \begin{cases} P_T = \begin{cases} M_T = -f_{ed} \cdot \Sigma A_j \cdot d_j = 0 & \Rightarrow \mu = 0 \\ N_T = -f_{ed} \cdot \Sigma A_j = 0 & \Rightarrow v = 0 \end{cases} \\ P_C = \begin{cases} M_C = f_{ed} \cdot \Sigma A_j \cdot d_j = 0 & \Rightarrow \mu = 0 \\ N_C = Bf_{bu} + f_{ed} \cdot \Sigma A_j = Bf_{bu} & \Rightarrow v = 1 \end{cases} \end{cases}$$

Pour une section donnée, avec une position des armatures fixée, les diagrammes d'interaction sont établis, par ordinateur, en faisant varier proportionnellement toutes les sections A_j des armatures.

$$\sum_j k \cdot A_j = k \sum_j A_j$$

d'où les coordonnées des points P_T et P_C vérifient :

- pour P_T :

$$\begin{cases} M_T = -f_{ed} \Sigma A_j \cdot d_j \\ N_T = -f_{ed} \Sigma A_j \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu = -\frac{f_{ed}}{Bhf_{bu}} \Sigma A_j \cdot d_j \\ v = -\frac{f_{ed}}{Bf_{bu}} \Sigma A_j \end{cases} \Rightarrow \frac{\mu}{v} = \frac{\Sigma A_j \cdot d_j}{h \Sigma A_j} = K$$

d'où le point P_T se déplace sur une droite (Δ_T) passant par le point P_{T0} de coordonnées $(0, 0)$ et de pente K .

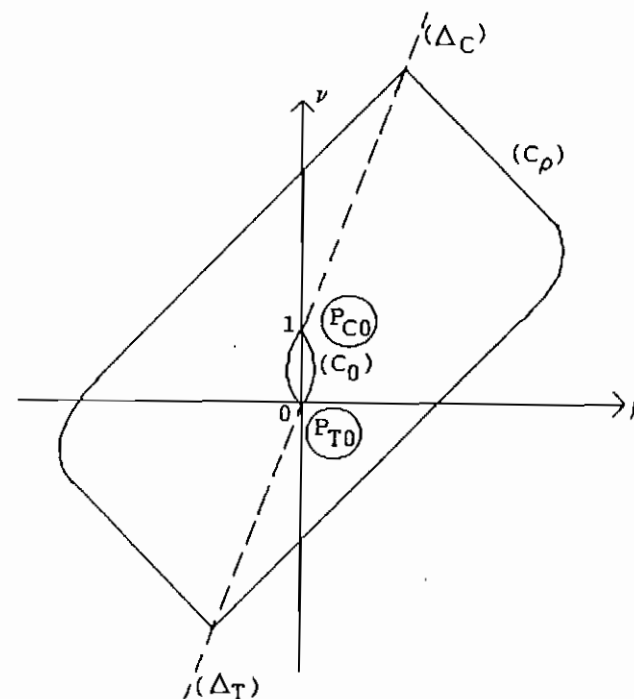
- pour P_C :

$$\begin{cases} M_C = f_{ed} \Sigma A_j \cdot d_j \\ N_C = Bf_{bu} + f_{ed} \Sigma A_j \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu = \frac{f_{ed}}{Bhf_{bu}} \Sigma A_j \cdot d_j \\ v = \frac{Bf_{bu} + f_{ed} \Sigma A_j}{Bf_{bu}} = 1 + \frac{f_{ed} \Sigma A_j}{Bf_{bu}} \end{cases}$$

d'où :

$$\frac{\mu}{v-1} = \frac{\Sigma A_j \cdot d_j}{h \Sigma A_j} = K \text{ et le point } P_C \text{ se déplace sur une droite } (\Delta_C) \text{ passant par le point } P_{C0}$$

de coordonnées $(0,1)$ et de pente K .



5.4.3. Application à la détermination des armatures pour les sections rectangulaires

Données :

$$f_{bu} = 0,85 \cdot \frac{f_{c28}}{\theta \cdot 1,5} \text{ et } f_{ed} = \frac{f_c}{1,15}$$

N_u et M_{uG0} ($M_{uG0} = N_u(e_1 + e_2)$ si N_u est une compression, comme indiqué au paragraphe 1.2.),

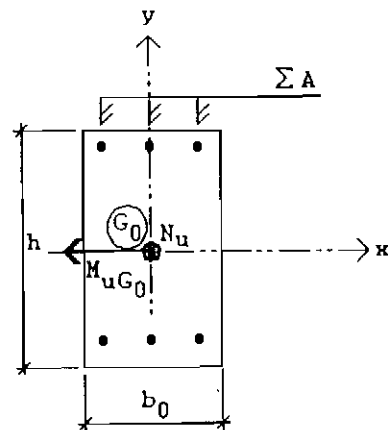
b_0 et h .

Mode opératoire :

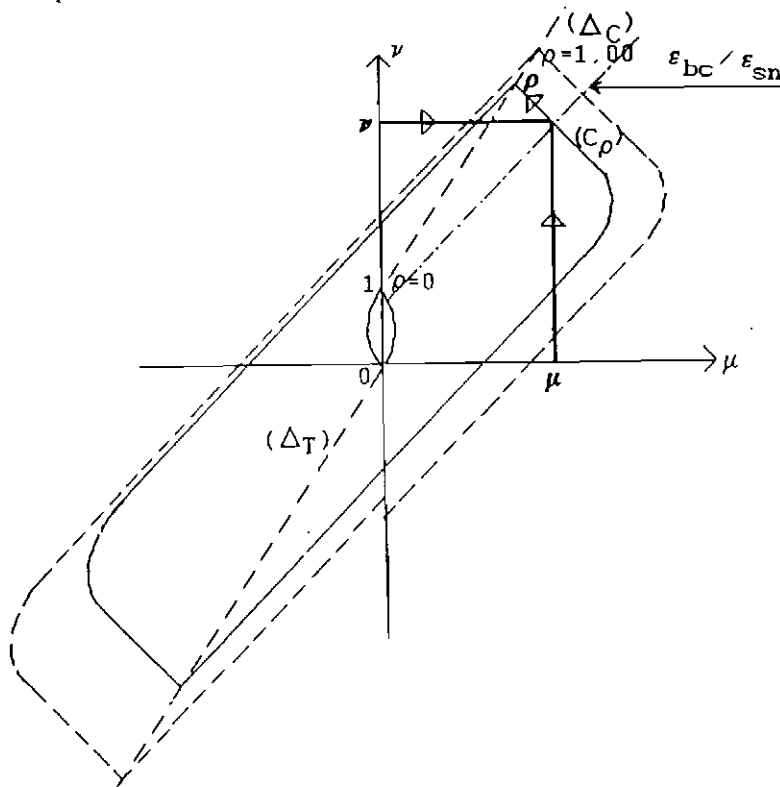
1) Calculer les quantités réduites d'entrée dans les diagrammes :

$$\nu = \frac{N_u}{b_0 \cdot h \cdot f_{bu}}$$

$$\mu = \frac{M_{uG_0}}{b_0 \cdot h^2 \cdot f_{bu}}$$



2) Déterminer, sur le diagramme d'interaction, par interpolation suivant les droites rayonnantes correspondant aux couples ε_{bc} , ε_{sn} , le pourcentage mécanique d'armatures ρ :



3) Calculer les armatures :

$$\rho = \frac{(\Sigma A) f_{ed}}{b_0 \cdot h \cdot f_{bu}} \Rightarrow \Sigma A = \rho \frac{f_{bu}}{f_{ed}} b_0 \cdot h$$

5.4.4. Application à la vérification des sections rectangulaires

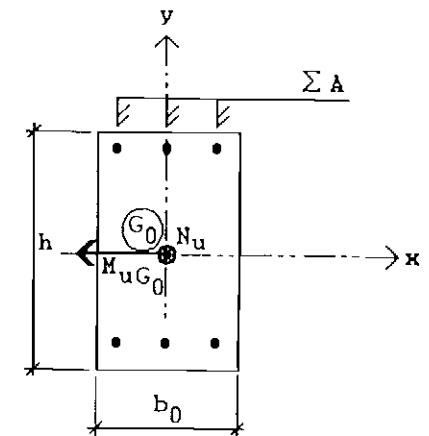
Données :

$$f_{bu} = 0.85 \frac{f_{c28}}{0.15} \text{ et } f_{ed} = \frac{f_e}{1.15}$$

N_u et M_{uG_0} ($M_{uG_0} = N_u(e_1 + e_2)$ si N_u est une compression)

b_0 et h

ΣA



Mode opératoire :

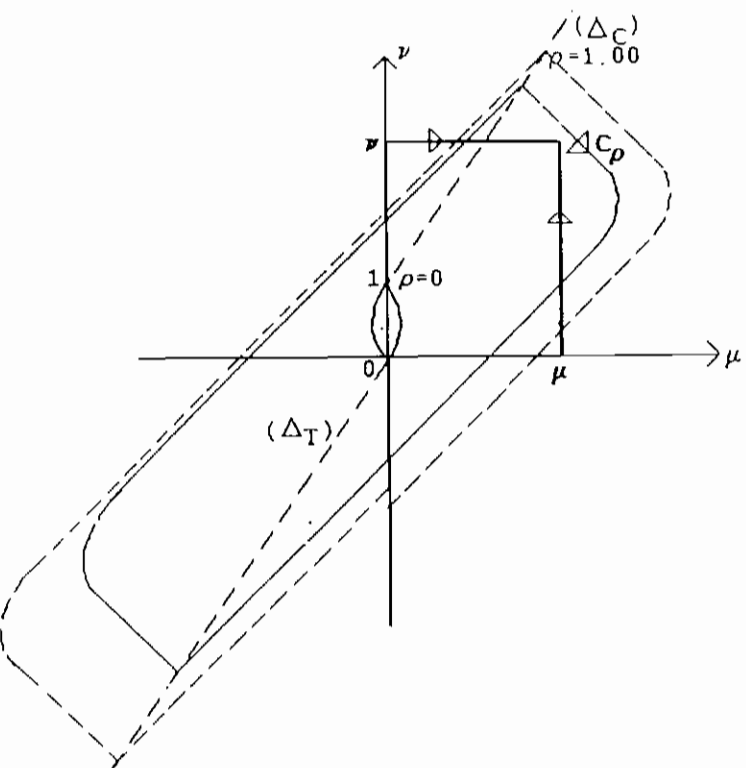
1) Calculer les quantités réduites d'entrée dans les diagrammes :

$$\nu = \frac{N_u}{b_0 \cdot h \cdot f_{bu}}$$

$$\mu = \frac{M_{uG_0}}{b_0 \cdot h^2 \cdot f_{bu}}$$

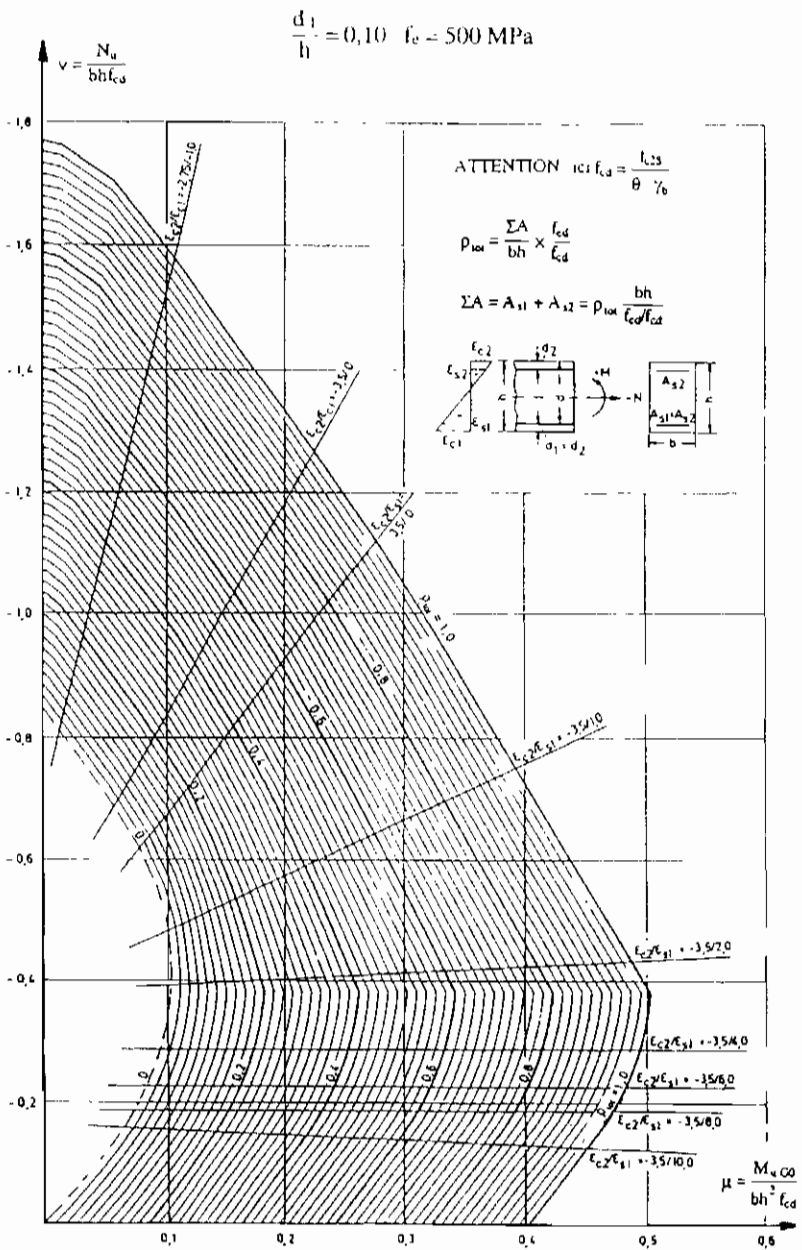
$$\rho = \frac{\Sigma A \cdot f_{ed}}{b_0 \cdot h \cdot f_{bu}}$$

2) Vérifier sur le diagramme d'interaction que le point de coordonnées (μ, ν) se trouve à l'intérieur ou sur la courbe (C_ρ) correspondant au pourcentage mécanique d'armatures ρ calculé :



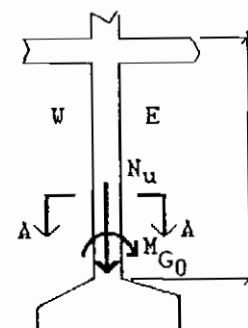
5.4.5. Exemples de diagrammes d'interaction

Section rectangulaire à armatures symétriques .

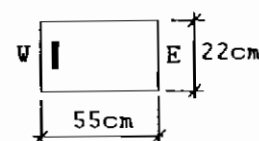


II. EXERCICE N° 1 : FLEXION – COMPRESSION – SECTION PARTIELLEMENT TENDUE

— ÉNONCÉ —



COUPE AA



■ Sollicitations ramenées au centre de gravité du béton seul :

– permanentes :

$$N_g = 85 \text{ kN}, M_g = 90 \text{ mkN}$$

– variables de durée d'application supérieure à 24 heures :

$$N_q = 75 \text{ kN}, M_q = 80 \text{ mkN}, \text{ avec } \psi_2 = 0.$$

■ Fissuration peu préjudiciable

■ Matériaux :

– béton : $f_{c28} = 25 \text{ MPa}$,

– aciers : Fe E 500 HA.

■ On se propose de calculer les armatures en pied de poteau.

— CORRIGÉ —

1. CARACTÉRISTIQUES DES MATÉRIAUX

1.1. BÉTON

a) Résistance de calcul

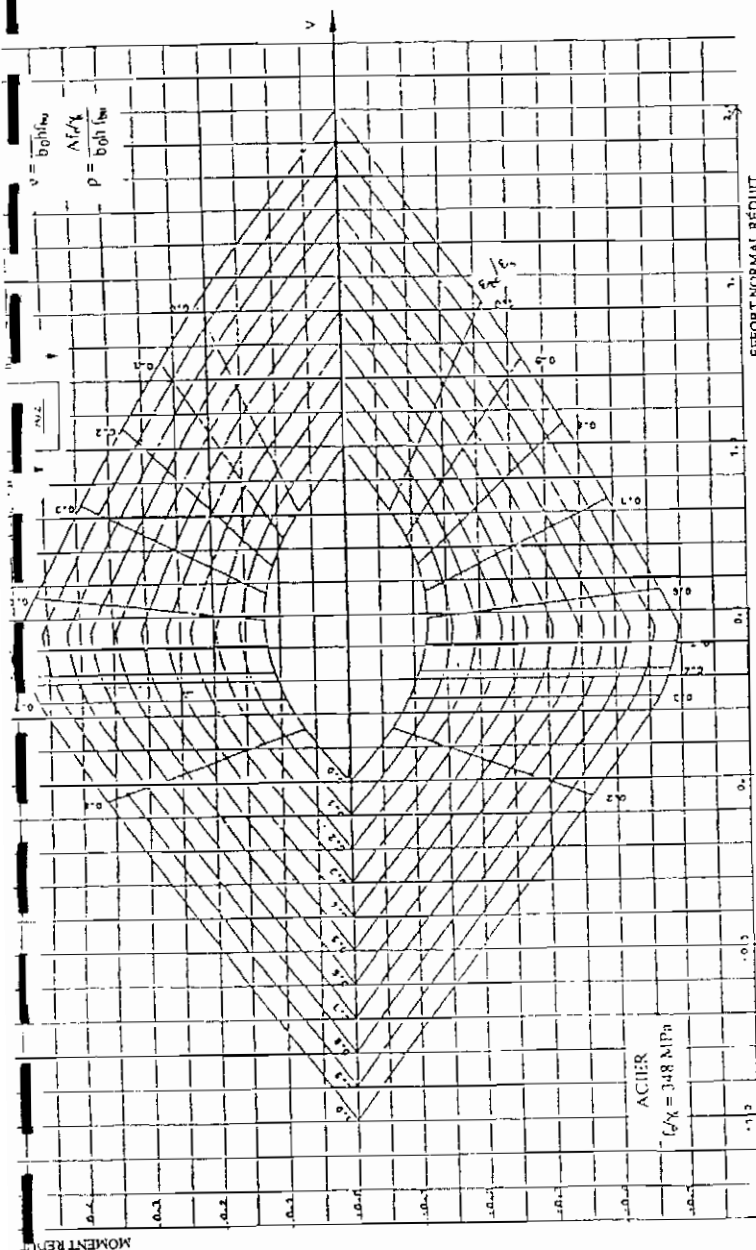
$$f_{bu} = 0,85 \cdot \frac{f_{c28}}{\theta \cdot \gamma_b}$$

$$f_{bu} = 0,85 \cdot \frac{25}{1 \cdot 1,5} = 14,2 \text{ MPa}$$

b) Résistance à la traction

$$f_{t28} = 0,6 + 0,06 f_{c28}$$

$$f_{t28} = 0,6 + 0,06 \cdot 25 = 2,10 \text{ MPa}$$



ABaque d'interaction

NOTA IMPORTANTE

L'abaque est valable seulement pour :

- acier 1cr75 = 348 MPa
- enlèvement des aciers $\frac{a}{h} = 0,75$
- sections d'armature égales sur chaque face

2. ACIERS

i) Résistance de calcul

$$f_{ed} = \frac{f_c}{\gamma_s}$$

$$f_{ed} = \frac{500}{1,15} = 435 \text{ MPa}$$

ii) Contrainte limite à l'E.L.S.

$$\left. \begin{array}{l} \text{fissuration peu} \\ \text{préjudiciable} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\text{pas de limitation de } \sigma_s \text{ en service}$$

3. SOLLICITATIONS EN PIED DE POTEAU

3.1. ÉTAT-LIMITE ULTIME

i) Sollicitations de calcul

$$\Sigma \gamma_j M_{jG0} = 1,35 M_g + 1,5 M_q$$

$$\Sigma \gamma_j N_i = 1,35 N_g + 1,5 N_q$$

$$e_a = \text{Max} \left\{ \begin{array}{l} 2 \text{ cm} \\ l/250 \end{array} \right.$$

$$e_1 = \frac{\Sigma \gamma_j M_{jG0}}{\Sigma \gamma_j N_i} + e_a$$

$$\Sigma \gamma_j M_{jG0} = 1,35 \cdot 90 + 1,5 \cdot 80 = 241,5 \text{ mkN}$$

$$\Sigma \gamma_j N_i = 1,35 \cdot 85 + 1,5 \cdot 75 = 227,25 \text{ kN}$$

$$e_a = 2,4 \text{ cm} = \text{Max} \left\{ \begin{array}{l} 2 \text{ cm} \\ 600/250 = 2,4 \text{ cm} \end{array} \right.$$

$$e_1 = \frac{241,50}{227,25} + 0,024 = 1,087 \text{ m}$$

ii) Sollicitations ultimes corrigées pour flambement

Puisque $N_u > 0$ est une compression.

Élancement géométrique :

poteau encastré dans un massif de fondation :

$$l_f = 0,7 \cdot l_0$$

$$l_f = 0,7 \cdot 6 = 4,20 \text{ m}$$

Type de calcul :

$$\left. \begin{array}{l} \text{pièce chargée} \\ \text{de façon} \\ \text{excentrée} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{l_f}{h} > < \text{Max} \left\{ \begin{array}{l} 15 \\ 20 \frac{e_1}{h} \end{array} \right.$$

$$\frac{4,20}{0,55} = 7,64 < 15 \leq \text{Max} \left\{ \begin{array}{l} 15 \\ 20 \frac{e_1}{h} \end{array} \right.$$

$\Rightarrow$ Calcul en flexion composée en tenant compte, de façon forfaitaire, de l'excentricité du second ordre.

Excentricité du second ordre :

$$\alpha = \frac{M_1^L \left(G + \sum_{i \geq 1} \psi_{2i} \cdot Q_i \right)}{M_1 \left(G + Q_1 + \sum_{i \geq 2} \psi_{0i} \cdot Q_i \right)}$$

$$M_1^L = 90 \text{ mkN}$$

$$M_1 = 90 + 80 = 170 \text{ mkN}$$

$$\alpha = \frac{90}{170} = 0,529$$

$$e_2 = - \frac{3 l_f^2}{10^4 h} (2 + \alpha \Phi)$$

$$e_2 = \frac{3 \cdot 4,20^2}{10^4 \cdot 0,55} (2 + 0,529 \cdot 2) = 0,029 \text{ m}$$

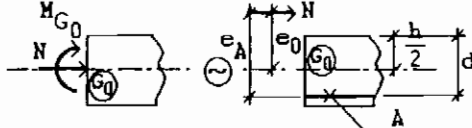
$$\text{avec : } \Phi = 2$$

Sollicitations corrigées pour le calcul en flexion composée:

$$\left\{ \begin{array}{l} N_u = \Sigma \gamma_j \cdot N_i \\ M_{uG0} = N_u (e_1 + e_2) \\ e_0 = e_1 + e_2 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} N_u = 227,25 \text{ kN} \\ M_{uG0} = 227,25 (1,087 + 0,029) \\ \quad = 253,61 \text{ mkN} \\ e_0 = 1,087 + 0,029 = 1,116 \text{ m} \end{array} \right.$$

Sollicitations ramenées au centre de gravité des aciers tendus :



$$\left\{ \begin{array}{l} e_A = e_0 + \left(d - \frac{h}{2} \right) \\ M_{uA} = N_u \cdot e_A \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} e_A = 1,116 + 0,50 - \frac{0,55}{2} = 1,341 \text{ m} \\ M_{uA} = 227,25 \cdot 1,341 = 304,74 \text{ mkN} \end{array} \right.$$

2.2. ÉTAT-LIMITE DE SERVICE

$$\left\{ \begin{array}{l} N_{ser} = N_g + N_q \\ M_{serG0} = M_g + M_q \\ e_{0ser} = \frac{M_{serG0}}{N_{ser}} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} N_{ser} = 85 + 75 = 160 \text{ kN} \\ M_{serG0} = 90 + 80 = 170 \text{ mkN} \\ e_{0ser} = \frac{170}{160} = 1,063 \text{ m} \end{array} \right.$$

On remarque que e_0 à l'E.L.U. $\neq e_{0ser}$ à l'E.L.S.

Sollicitations ramenées au centre de gravité des aciers tendus :

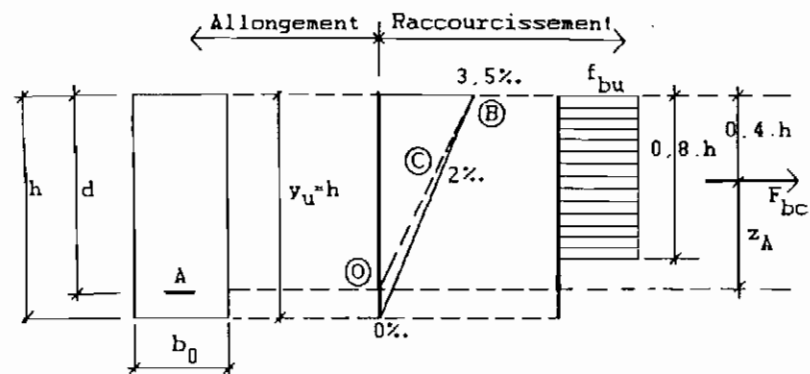
$$\left\{ \begin{array}{l} e_A = e_{0ser} + \left(d - \frac{h}{2} \right) \\ M_{serA} = N_{ser} \cdot e_A \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} e_A = 1,063 + 0,50 - \frac{0,55}{2} = 1,288 \text{ m} \\ M_{serA} = 160 \cdot 1,288 = 206,08 \text{ mkN} \end{array} \right.$$

ARMATURES

INTRODUCTION

Moment réduit de référence à l'E.L.U. :



$$\mu_{BC} = 0,8 \frac{h}{d} \left(1 - 0,4 \frac{h}{d} \right)$$

$$\mu_{BC} = 0,8 \frac{55}{50} \left(1 - 0,4 \frac{55}{50} \right) = 0,4928$$

Moment réduit agissant :

$$\mu_{bu} = \frac{M_{uA}}{b_0 \cdot d^2 \cdot f_{bu}}$$

$$\mu_{bu} = \frac{304,74 \cdot 10^{-3}}{0,22 \cdot 0,50^2 \cdot 14,2} = 0,390$$

Conclusion :

$$\mu_{bu} > \mu_{BC}$$

$$\mu_{bu} = 0,390 < \mu_{BC} = 0,4928$$

⇒ Section partiellement tendue.

CALCUL DES ACIERS EN FLEXION SIMPLE

Nécessité d'aciers comprimés

Moment réduit limite :

$$\gamma = \frac{M_{uA}}{M_{serA}}$$

$$\gamma = \frac{304,74}{206,08} = 1,479$$

La formule approchée valable pour Fe E 500 et $f_{c28} \leq 30$ MPa :

$$10^4 \mu_{lu} = 3 \cdot 220 \cdot \theta \gamma + 51 \cdot \frac{f_{c28}}{\theta} - 3 \cdot 100 \quad (MPa) \quad 10^4 \mu_{lu} = 3 \cdot 220 \cdot 1 \cdot 1,479 + 51 \cdot \frac{25}{1} - 3 \cdot 100$$

$$10^4 \mu_{lu} = 2 \cdot 937$$

$$\mu_{lu} = 0,294$$

Nota : en flexion composée, la valeur précise du moment ultime réduit est fonction, non seulement des trois paramètres f_c , f_{c28}/θ et $\theta \gamma$, mais également de l'effort normal réduit

$(N_u/b_0 h f_{bu})$ concomitant et du rapport N_u/N_{ser} . Cependant, adopter pour μ_{lu} les valeurs trouvées pour la flexion simple place généralement en sécurité. En tout état de cause, les écarts restent faibles et sont sans grandes conséquences pratiques.

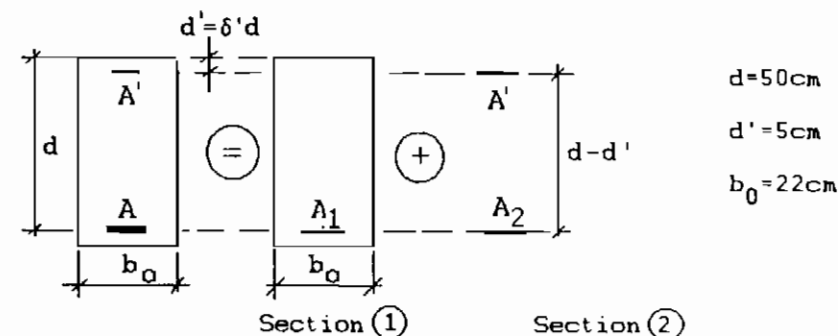
Nécessité d'aciers comprimés A' :

$$\mu_{bu} > \mu_{lu}$$

$$\mu_{bu} = 0,390 > \mu_{lu} = 0,294$$

⇒ A' nécessaires.

b) Section A' d'aciers comprimés



Contrainte σ_{scc} des aciers comprimés :

Fe E 500 ⇒

$$\sigma_{scc} = 9 \cdot \gamma \cdot f_{c28} - \delta' (13 \cdot f_{c28} + 415) \text{ K (MPa)}$$

$$\sigma_{scc} = 9 \cdot 1,479 \cdot 25 - \frac{5}{50} (13 \cdot 25 + 415) \cdot 1$$

$$\sigma_{scc} = 258,8 = 259 \text{ MPa}$$

Aciers comprimés :

$$M_{lu} = \mu_{lu} \cdot b_0 \cdot d^2 \cdot f_{bu}$$

$$M_{lu} = 0,294 \cdot 0,22 \cdot 0,50^2 \cdot 14,2 = 0,230 \text{ mMN}$$

$$A' = \frac{M_{uA} - M_{lu}}{(d - d') \cdot \sigma_{scc}}$$

$$A' = \frac{0,3047 - 0,230}{(0,50 - 0,05) \cdot 259} \cdot 10^4 = 6,41 \text{ cm}^2$$

c) Section A d'aciers tendus

Dans la section fictive 1 sans aciers comprimés :

$$\mu_{bu} = \mu_{lu} > 0,275 \Rightarrow \text{Méthode}$$

$$\mu_{bu} = 0,294 > 0,275 \Rightarrow \text{Formules exactes}$$

$$\alpha = 1,25 \left[1 - \sqrt{1 - 2 \mu_{bu}} \right]$$

$$\alpha = 1,25 \left[1 - \sqrt{1 - 2 \cdot 0,294} \right]$$

$$\alpha = 0,448$$

$$\Rightarrow z_b = d(1 - 0,4\alpha)$$

$$z_b = 0,50(1 - 0,4 \cdot 0,448)$$

$$z_b = 0,410 \text{ m}$$

$$\Rightarrow A = \frac{M_{lu}}{z_b \cdot f_{cd}} + A' \cdot \frac{\sigma_{sc}}{f_{cd}}$$

$$A = \frac{0,230 \cdot 10^4}{0,410 \cdot 435} + 6,41 \cdot \frac{259}{435} = 16,71 \text{ cm}^2$$

ARMATURES EN FLEXION COMPOSÉE

$$\begin{cases} A' = A' \\ A = A - \frac{N_u}{f_{cd}} \end{cases} \quad \begin{cases} A' = 6,41 \text{ cm}^2 \\ A = 16,71 - \frac{0,227}{435} 10^4 = 11,49 \text{ cm}^2 \end{cases}$$

En prenant 3 files verticales :

$\Rightarrow$ Aciers comprimés :

1Φ20HA + 2Φ16HA :

$$A' = 3,14 + 2 \cdot 2,01 = 7,16 \text{ cm}^2$$

$\Rightarrow$ Aciers tendus :

$$\text{lit 1 : } 3\Phi 20\text{HA} : 3 \cdot 3,14 = 9,42 \text{ cm}^2$$

$$\text{lit 2 : } 2\Phi 12\text{HA} : 2 \cdot 1,13 = 2,26 \text{ cm}^2$$

$$A = 11,68 \text{ cm}^2$$

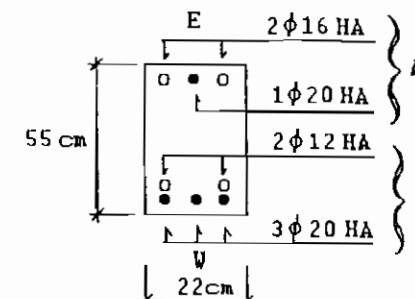
Section minimale

L'excentricité e à l'E.L.S. ayant même signe que N : $e = e_{0ser} = 1,063 \text{ m}$

$$A_{min} = 0,23 \frac{f_{t28}}{f_c} b_0 \cdot d \frac{e - 0,45 d}{e - 0,185 d}$$

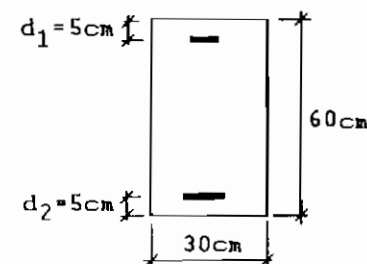
$$A_{min} = 0,23 \frac{2,10}{500} 22 \cdot 50 \frac{1,063 - 0,45 \cdot 0,50}{1,063 - 0,185 \cdot 0,50} = 0,92 \text{ cm}^2 < 11,68 \text{ cm}^2 \text{ O.K.}$$

3.4. SCHÉMA DE FERRAILLAGE



III. EXERCICE N° 2 : FLEXION – TRACTION – SECTION ENTIÈREMENT TENDUE

— ÉNONCÉ —



- Sollicitations ramenées au centre de gravité du béton seul :
 - permanentes : $N_g = -200 \text{ kN}$, $M_g = 20 \text{ m kN}$,
 - variables de durée d'application supérieure à 24 heures : $N_q = -200 \text{ kN}$, $M_q = 20 \text{ m kN}$

■ Fissuration peu préjudiciable.

■ Matériaux :

- béton : $f_{c28} = 25 \text{ MPa}$,
- aciers : Fe E 500 HA.

■ On se propose de calculer les armatures.

— CORRIGÉ —

1. CARACTÉRISTIQUES DES MATÉRIAUX

1.1. BÉTON

a) Résistance de calcul

$$f_{bu} = 0,85 \cdot \frac{f_{c28}}{0 \cdot \gamma_b}$$

$$f_{bu} = 0,85 \cdot \frac{25}{1 \cdot 1,5} = 14,2 \text{ MPa}$$

Résistance à la traction

$$f_{t28} = 0,6 + 0,06 f_{c28}$$

$$f_{t28} = 0,6 + 0,06 \cdot 25 = 2,10 \text{ MPa}$$

ACIERS

Distance de calcul

$$f_{ed} = \frac{f_c}{\gamma_s}$$

$$f_{ed} = \frac{500}{1,15} = 435 \text{ MPa}$$

Contrainte limite à l'E.L.S.

fissuration peu préjudiciable } $\Rightarrow$ pas de limitation de σ_s en service

SOLLICITATIONS ULTIMES

$$\begin{cases} M_u G_0 = 1,35 M_g + 1,5 M_q \\ N_u = 1,35 N_g + 1,5 N_q \\ e_{0u} = \frac{M_u G_0}{N_u} \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_u G_0 = 1,35 \cdot 20 + 1,5 \cdot 20 = 57 \text{ mkN} \\ N_u = -1,35 \cdot 200 - 1,5 \cdot 200 = -570 \text{ kN} \\ e_{0u} = \frac{57}{-570} = -0,10 \text{ m} \end{cases}$$

$$|e_{0u}| > < \frac{h}{2} - d_2$$

$$|e_{0u}| = 0,10 \text{ m} < \frac{0,60}{2} - 0,05 = 0,25 \text{ m}$$

$$\begin{aligned} &\left. \begin{array}{l} \text{Centre de pression} \\ \Rightarrow \text{entre les armatures} \\ \text{avec } N_u < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Section} \\ \text{entièrement} \\ \text{tendue} \end{array} \right. \end{aligned}$$

ARMATURES

INTRODUCTION

fissuration peu préjudiciable } $\Rightarrow$

Calcul à l'E.L.U.

EXCENTRICITÉS

$$e_{A1} = \frac{h}{2} - d_1 + |e_{0u}|$$

$$e_{A1} = \frac{0,60}{2} - 0,05 + 0,10 = 0,35 \text{ m}$$

$$e_{A2} = \frac{h}{2} - d_2 - |e_{0u}|$$

$$e_{A2} = \frac{0,60}{2} - 0,05 - 0,10 = 0,15 \text{ m}$$

$$e_{A1} + e_{A2} = 0,50 \text{ m}$$

3.3. ARMATURES

Nappe supérieure :

$$A_1 = \frac{N_u \cdot e_{A2}}{(e_{A1} + e_{A2}) f_{ed}}$$

$$A_1 = \frac{0,570 \cdot 0,15}{0,50 \cdot 435} 10^4 = 3,93 \text{ cm}^2$$

Nappe inférieure :

$$A_2 = \frac{N_u \cdot e_{A1}}{(e_{A1} + e_{A2}) f_{ed}}$$

$$A_2 = \frac{0,570 \cdot 0,35}{0,50 \cdot 435} 10^4 = 9,17 \text{ cm}^2$$

Total :

$$A_1 + A_2 = 13,10 \text{ cm}^2$$

3.4. SECTION MINIMALE

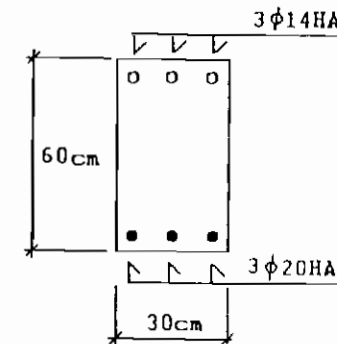
$$A_1 + A_2 \geq A_{\min} = \frac{B \cdot f_{t28}}{f_c}$$

$$13,10 \text{ cm}^2 > \frac{60 \cdot 30 \cdot 2,1}{500} = 7,56 \text{ cm}^2 \text{ O.K.}$$

3.5. SCHÉMA DE FERRAILLAGE

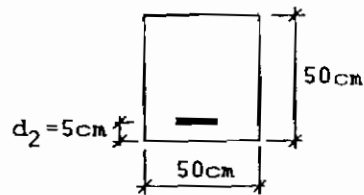
En prenant trois files verticales :

$\Rightarrow$ Aciers tendus inférieurs :
3 Φ 20HA : $A_2 = 3 \cdot 3,14 = 9,42 \text{ cm}^2$
 $\Rightarrow$ Aciers tendus supérieurs :
3 Φ 14HA : $A_1 = 3 \cdot 1,54 = 4,62 \text{ cm}^2$



IV. EXERCICE N° 3 : FLEXION – TRACTION – SECTION PARTIELLEMENT TENDUE

— ÉNONCÉ —



■ Sollicitations ramenées au centre de gravité du béton seul :

- permanentes : $N_g = -200$ kN, $M_g = 80$ mkN,
- variables de durée d'application supérieure à 24 heures : $N_q = -160$ kN, $M_q = 60$ mkN.

■ Fissuration peu préjudiciable.

■ Matériaux :

- béton : $f_{c28} = 25$ MPa,
- aciers : Fe E 500 HA.

■ On se propose de calculer les armatures longitudinales.

— CORRIGÉ —

1. CARACTÉRISTIQUES DES MATÉRIAUX

1.1. BÉTON

a) Résistance de calcul

$$f_{bu} = 0,85 \cdot \frac{f_{c28}}{0 \cdot \gamma_b}$$

$$f_{bu} = 0,85 \cdot \frac{25}{1 \cdot 1,5} = 14,2 \text{ MPa}$$

b) Résistance à la traction

$$f_{t28} = 0,6 + 0,06 f_{c28}$$

$$f_{t28} = 0,6 + 0,06 \cdot 25 = 2,10 \text{ MPa}$$

1.2. ACIERS

a) Résistance de calcul

$$f_{cd} = \frac{f_s}{\gamma_s}$$

$$f_{cd} = \frac{500}{1,15} = 435 \text{ MPa}$$

b) Contrainte limite à l'E.L.S.

fissuration peu préjudiciable } $\Rightarrow$ pas de limitation de σ_s en service

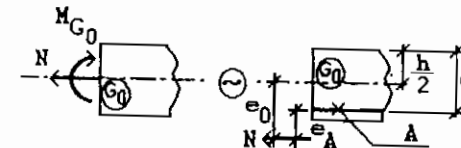
2. SOLLICITATIONS

2.1. ÉTAT-LIMITE ULTIME

Au centre de gravité du béton seul :

$$\begin{cases} M_{uG0} = 1,35 M_g + 1,5 M_q \\ N_u = 1,35 N_g + 1,5 N_q \\ e_{0u} = \frac{M_{uG0}}{N_u} \end{cases} \quad \begin{cases} M_{uG0} = 1,35 \cdot 80 + 1,5 \cdot 60 = 198 \text{ mkN} \\ N_u = -1,35 \cdot 200 - 1,5 \cdot 160 = -510 \text{ kN} \\ e_{0u} = \frac{198}{-510} = -0,388 \text{ m} \end{cases}$$

Sollicitations ramenées au centre de gravité des aciers tendus :



$$\begin{cases} e_A = |e_{0u}| - \left(d - \frac{h}{2}\right) \\ M_{uA} = N_u \cdot e_A \end{cases} \quad \begin{cases} e_A = 0,388 - 0,45 + \frac{0,50}{2} = 0,188 \text{ m} \\ M_{uA} = 510 \cdot 0,188 = 96 \text{ mkN} \end{cases}$$

2.2. ÉTAT-LIMITE DE SERVICE

Au centre de gravité du béton seul :

$$\begin{cases} M_{serG0} = M_g + M_q \\ N_{ser} = N_g + N_q \\ e_{0ser} = \frac{M_{serG0}}{N_{ser}} \end{cases} \quad \begin{cases} M_{serG0} = 80 + 60 = 140 \text{ mkN} \\ N_{ser} = -200 - 160 = -360 \text{ kN} \\ e_{0ser} = -\frac{140}{360} = -0,389 \text{ m} \end{cases}$$

Sollicitations ramenées au centre de gravité des aciers tendus :

$$\begin{cases} e_A = |e_{0ser}| - \left(d - \frac{h}{2}\right) \\ M_{serA} = N_{ser} \cdot e_A \end{cases} \quad \begin{cases} e_A = 0,389 - 0,45 + \frac{0,50}{2} = 0,189 \text{ m} \\ M_{serA} = 360 \cdot 0,189 = 68 \text{ mkN} \end{cases}$$

3. ARMATURES

3.1. INTRODUCTION

a) À l'état-limite ultime

$N_u < 0$ (traction)

$N_u = -510 \text{ kN} \Rightarrow$ Traction

$$|e_{0u}| > \frac{h}{2} - d_2$$

$$|e_{0u}| = 0,388 \text{ m} > \frac{0,50}{2} - 0,05 = 0,20 \text{ m}$$

⇒ Le centre de pression est à l'extérieur des armatures.

⇒ Section partiellement tendue.

CALCUL EN FLEXION SIMPLE

Nécessité d'aciers comprimés

Moment réduit limite :

$$\gamma = \frac{M_{uA}}{M_{serA}}$$

$$\gamma = \frac{96}{68} = 1,412$$

Par la formule approchée valable pour Fe E 500 et $f_{c28} \leq 30 \text{ MPa}$:

$$10^4 \mu_{lu} = 3220,0\gamma + 51 \cdot \frac{f_{c28}}{\theta} - 3100 \text{ (MPa)} \quad 10^4 \mu_{lu} = 3220 \cdot 1,412 + 51 \cdot \frac{25}{1} - 3100$$

$$10^4 \mu_{lu} = 2722$$

$$\mu_{lu} = 0,272$$

Nécessité d'aciers comprimés A' :

$$\mu_{bu} = \frac{M_{uA}}{b_0 \cdot d^2 \cdot f_{bu}}$$

$$\mu_{bu} = \frac{0,096}{0,50 \cdot 0,45^2 \cdot 14,2} = 0,067$$

$$\mu_{bu} > \mu_{lu}$$

$$\mu_{bu} = 0,067 < \mu_{lu} = 0,272$$

⇒ A' non nécessaires.

Section A d'aciers tendus

$$\mu_{bu} > 0,275 \Rightarrow \text{Méthode}$$

$$\Rightarrow z_n = d(1 - 0,6 \mu_{bu})$$

$$\mu_{bu} = 0,067 < 0,275 \Rightarrow \text{Formules simplifiées}$$

$$z_b = 0,45(1 - 0,6 \cdot 0,067)$$

$$z_b = 0,432 \text{ m}$$

$$\rightarrow A = \frac{M_{uA}}{z_b \cdot f_{ed}}$$

$$A = \frac{0,096 \cdot 10^4}{0,432 \cdot 435} = 5,11 \text{ cm}^2$$

3. ARMATURES EN FLEXION COMPOSÉE

$$A = A - \frac{N_u}{f_{ed}} \text{ (avec } N_u < 0)$$

$$A = 5,11 + \frac{0,510}{435} 10^4 = 16,83 \text{ cm}^2$$

En prenant quatre files verticales :

⇒ Aciers tendus inférieurs :

$$\text{lit 1 : } 4\Phi 20\text{HA : } 4 \cdot 3,14 = 12,56 \text{ cm}^2$$

$$\text{lit 2 : } 4\Phi 12\text{HA : } 4 \cdot 1,13 = 4,52 \text{ cm}^2$$

$$A = 17,08 \text{ cm}^2$$

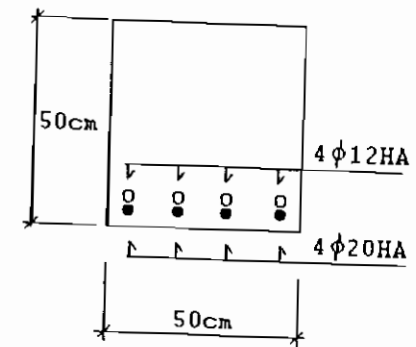
Section minimale

e à l'E.L.S. ayant même signe que N : $e = e_{0ser} = -0,389 \text{ m}$

$$A_{min} = 0,23 \frac{f_{t28}}{f_c} b_0 \cdot d \frac{e - 0,45 d}{e - 0,185 d}$$

$$A_{min} = 0,23 \frac{2,10}{500} 50 \cdot 45 \frac{-0,389 - 0,45 \cdot 0,45}{-0,389 - 0,185 \cdot 0,45} = 2,72 \text{ cm}^2 < 17,08 \text{ cm}^2 \text{ O.K.}$$

3.4. SCHÉMA DU FERRAILLAGE



CHAPITRE 9

ÉPURES DE RÉPARTITION DES ARMATURES LONGITUDINALES ET DES ARMATURES D'ÂME

Ce chapitre ne comporte pas d'exercices. Seul un rappel de cours est présenté.

I. RAPPELS DE COURS

1. INTRODUCTION

En pratique :

- on trace les courbes enveloppes du moment fléchissant M et de l'effort tranchant V ,
- on détermine les armatures longitudinales nécessaires dans les sections de moment extrême (en travée et sur appuis),
- on calcule les armatures d'âme correspondant aux efforts tranchants en certaines sections (au voisinage des appuis et de part et d'autre des points d'application des charges concentrées).

On proportionne ensuite, en chaque section de la poutre, les armatures longitudinales et les armatures d'âme aux efforts qui s'y développent au moyen d'ÉPURES DE RÉPARTITION.

2. RÉPARTITION DES ARMATURES LONGITUDINALES

2.1. MOMENT MAXIMAL ADMISSIBLE D'UN GROUPE DE BARRES LONGITUDINALES

C'est le moment maximal que peut équilibrer un groupe de i barres tendues :

- de section totale $A_i = \sum_{k=1}^i A_k$,

- pour une hauteur utile d_i .

On a deux cas possibles.

1.1. État-limite ultime

On suppose que la valeur du bras de levier z_b trouvée lors du calcul de la section d'armatures équilibrant le moment maximal (sur appui ou en travée) est constante sur la longueur de la poutre (cette simplification va dans le sens de la sécurité).

On a donc :

$$\begin{cases} \overline{M}_{ui} = A_i \cdot f_{ed} \cdot z_b \\ z_b \text{ valeur utilisée pour le calcul de } A_{max}, \text{ dans les sections de moment extrême en travée et sur appuis.} \end{cases}$$

Dans le cas de plusieurs groupes de barres :

$$\overline{M}_u = \sum \overline{M}_{ui}$$

2. État-limite de service

De même que pour l'état-limite ultime :

$$\begin{cases} \overline{M}_{ser} = A_i \cdot \sigma_s \cdot z_{bt} \\ z_{bt} = d_i \left(1 - \frac{\alpha_1}{3} \right) \text{ valeur utilisée pour le calcul de } A_{mix} \text{ en travée et sur appuis.} \end{cases}$$

Dans le cas de plusieurs groupes de barres :

$$\overline{M}_{ser} = \sum \overline{M}_{seri}$$

2. ARRÊT DES BARRES

Lorsque l'on arrête dans une même section toutes les barres d'un groupe (supposées de même diamètre), leur moment maximal admissible décroît linéairement de $\overline{M}$ ($\overline{M}_{ui}$ ou $\overline{M}_{ser}$) à 0 sur la longueur d'ancrage de ces barres.

Il suffit de remarquer que :

1°) $\overline{M}_i = A_i \cdot \sigma_s \cdot z_b$ est, pour A_i et z_b constants, proportionnel à σ_s .

2°) σ_s varie linéairement de 0 à sa valeur maximale sur la longueur d'ancrage l_a .

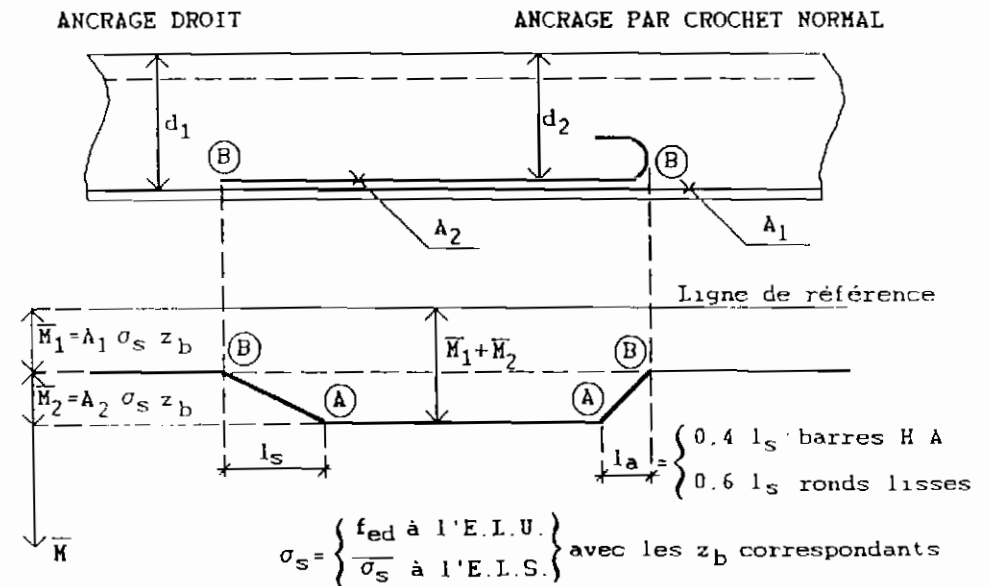
On a :

$$\begin{aligned} l_a &= l_s && \text{pour des ancrages droits,} \\ l_a &= 0,4 \cdot l_s && \text{pour les ancrages courbes des barres HA,} \\ l_a &= 0,6 \cdot l_s && \text{pour les ancrages courbes des ronds lisses.} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} l_a &= l_s \\ l_a &= 0,4 \cdot l_s \\ l_a &= 0,6 \cdot l_s \end{aligned}} \right\} \text{avec crochets normaux}$$

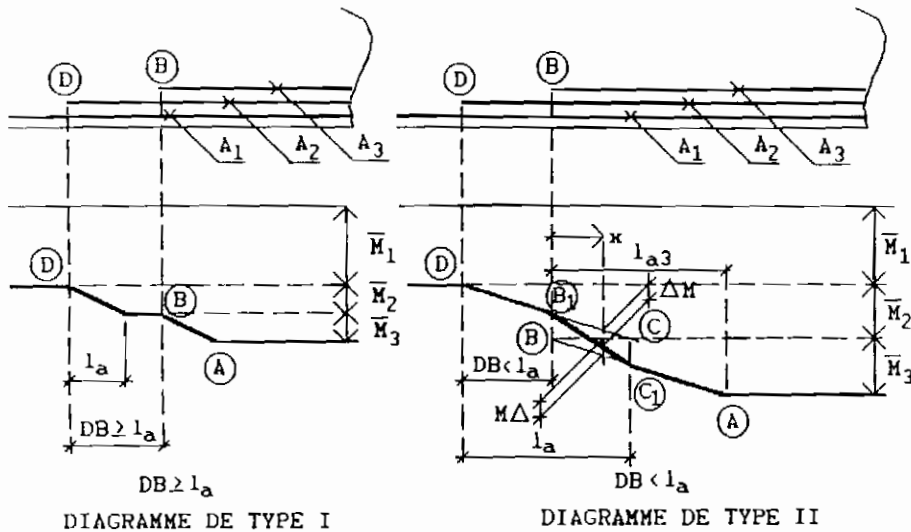
2.3. DIAGRAMME DES MOMENTS ADMISSIBLES

Dans une poutre de hauteur constante, le DIAGRAMME DU MOMENT ADMISSIBLE d'un groupe de barres arrêtées se compose donc :

- d'un segment de droite parallèle à l'axe de la poutre,
- de deux segments inclinés, aux extrémités du groupe de barres, de longueur l_a en projection sur l'axe de la poutre.



Pour deux groupes de barres arrêtées successivement en B et D en partant du point de moment extrême, le diagramme des moments admissibles peut être de l'un des deux types I ou II ci-dessous suivant que la distance BD est supérieure ou inférieure à la longueur d'ancrage l_a du groupe de barres arrêtées en D :



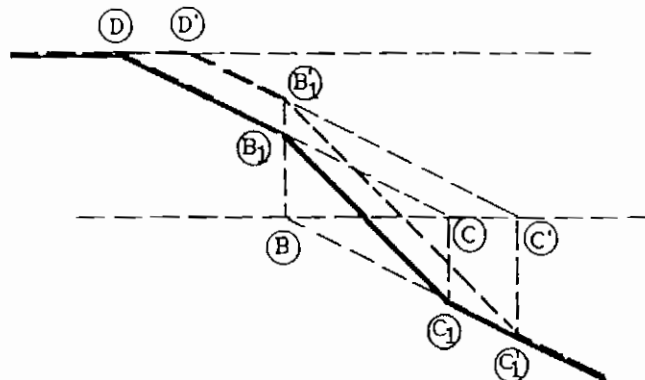
Pour le segment C₁B₁, il suffit de remarquer que la part de moment admissible des barres A₃ à rajouter au moment admissible des barres A₂ vaut :

$$\Delta M = \bar{M}_3 \cdot \frac{x}{l_{a3}}$$

cette quantité variant linéairement en fonction de l'abscisse x depuis le point B₁

Propriété importante pour les diagrammes du type II :

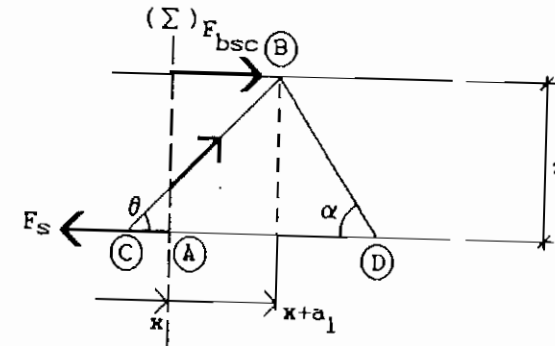
Si B étant fixe, D se rapproche de B, la droite B₁C₁ se déplace parallèlement à elle-même (triangles semblables multiples dont B est centre de similitude).



2.4. RÈGLE DU DÉCALAGE

Par suite de la fissuration oblique, l'effort de traction supporté par une armature dans une section A d'abscisse x correspond au moment dans une section B d'abscisse x + a₁.

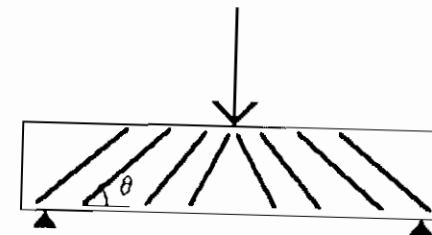
Ce résultat est évident pour un treillis simple :



$$M_B = M(x + a_1) = F_s \cdot z \Rightarrow F_s = \frac{M(x + a_1)}{z} \text{ différent de } \frac{M(x)}{z} = \frac{M_A}{z}$$

Dans un treillis multiple de Mörsch, le point A appartient à plusieurs treillis à la fois. Un calcul plus complexe montre que le «décalage» qui dépend à la fois :

- de l'inclinaison α des armatures d'âme et
 - de l'inclinaison réelle θ des bielles de béton,
- est compris entre z et z/2.

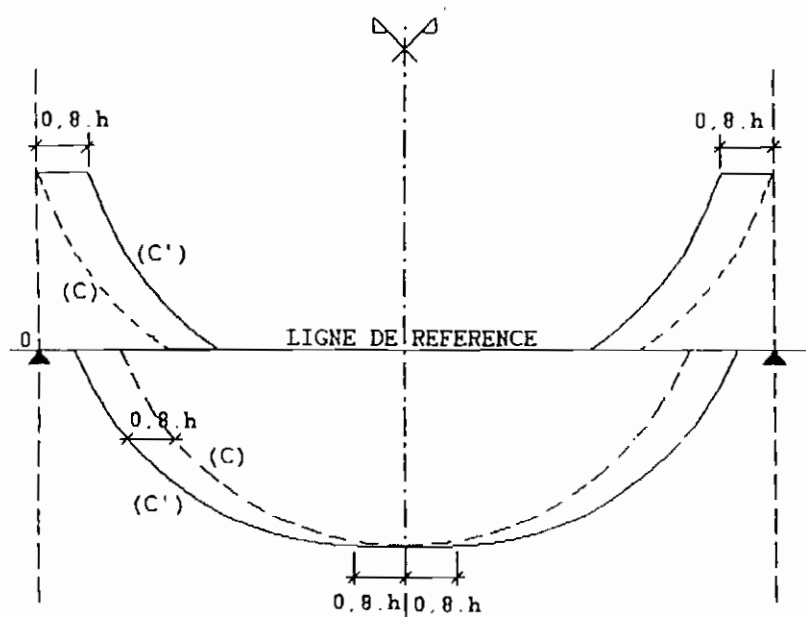


Par sécurité, on adopte : a₁ = z, c'est-à-dire, comme z ≈ 0,9d ≈ 0,8h :

$$a_1 = 0,8 \cdot h$$

h = hauteur totale de la poutre.

Il en résulte que le diagramme des moments admissibles des armatures longitudinales d'une travée doit envelopper non pas la courbe enveloppe des moments : (C), mais la courbe (C') obtenue en décalant de 0,8.h tous les points de (C) parallèlement à l'axe de la poutre dans le sens le plus défavorable.



ÉPURE D'ARRÊT DES ARMATURES LONGITUDINALES

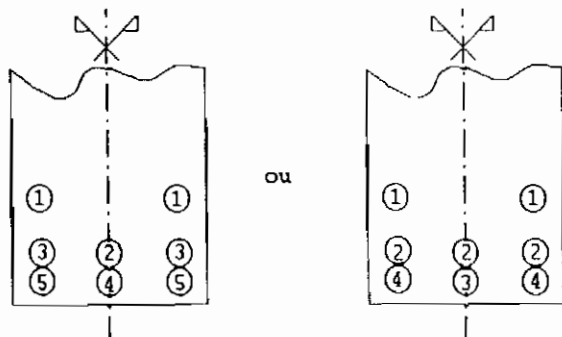
2.5.1. Principes

Arrêter toujours les armatures par groupes symétriques par rapport au plan moyen.

Pour les armatures inférieures :

commencer par celles de la nappe la plus haute,

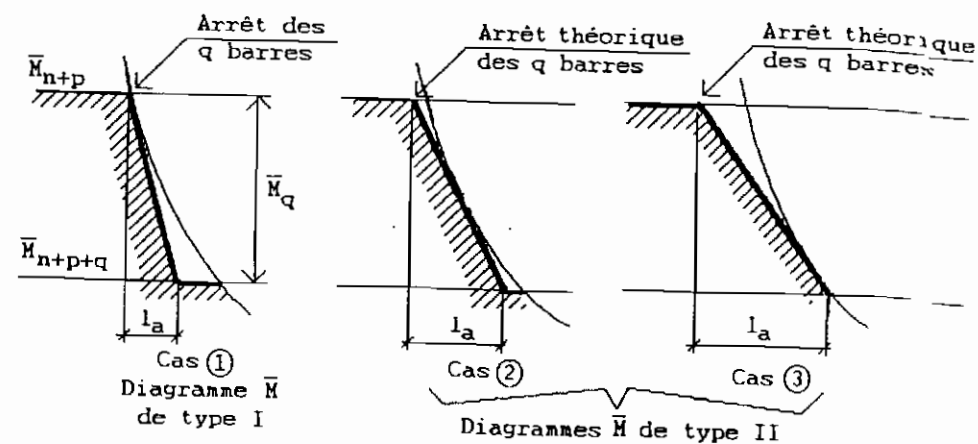
-- dans chaque nappe arrêter d'abord les barres les plus proches du plan moyen.



Pour les armatures supérieures : mêmes règles que ci-dessus, en commençant par les nappes les plus basses.

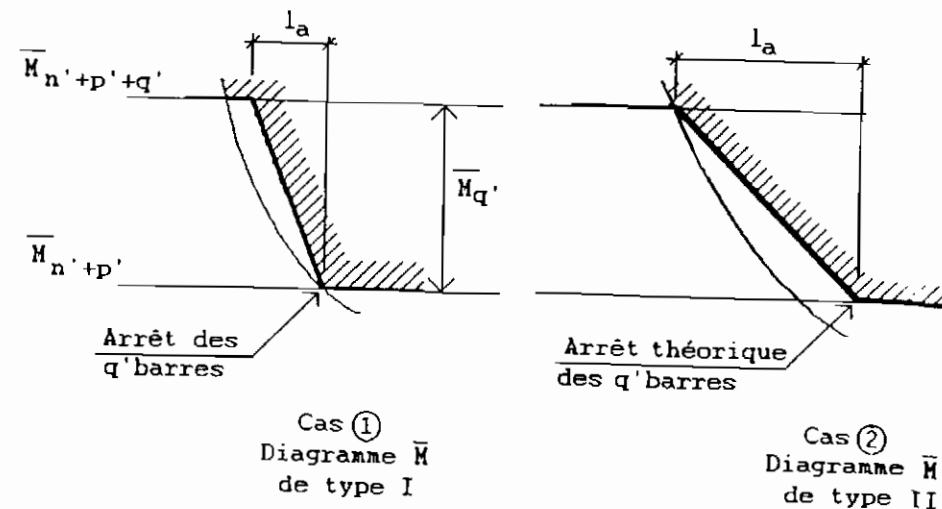
2.5.2. Arrêt des armatures inférieures

Suivant la position des segments inclinés du diagramme des moments admissibles $\bar{M}$ par rapport à la courbe enveloppe décalée, il y a trois cas possibles :



2.5.3. Arrêt des armatures supérieures

Suivant la position des segments inclinés du diagramme des moments admissibles $\bar{M}$ par rapport à la courbe enveloppe décalée, il y a deux cas possibles :



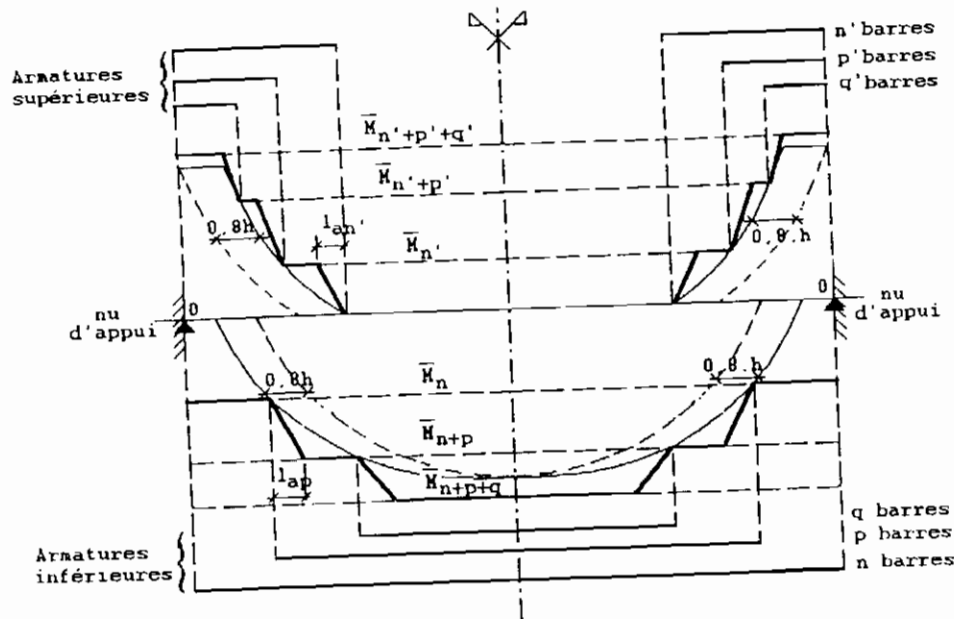
2.5.4. Remarques

L'épure se construit toujours en partant du moment maximal (positif ou négatif).

Pour les cas 1, correspondant au diagramme de type I, les arrêts sont toujours sur la courbe enveloppe décalée (C').

Pour les cas 2 ou 3, on se sert de la propriété des diagrammes de type II pour envelopper au mieux la courbe enveloppe décalée (C') et optimiser les longueurs des barres.

5.5. Exemple de diagramme de type I



2.5.6. Remarques complémentaires

Sur appuis, conserver et ancrer une section d'aciers inférieurs suffisante pour équilibrer :

- V_{unax} pour un appui simple d'extrémité (cf. paragraphe 4.1. chapitre 7 «EFFORT TRANCHANT»),
- $V_{unax} - \frac{M_u}{z}$ pour un appui intermédiaire (cf. paragraphe 4.3. chapitre 7 «EFFORT TRANCHANT»).

Les barres d'angle (5 ou 4, schémas page 234) ne sont donc généralement pas arrêtées.

Même lorsque l'épure d'arrêt des armatures supérieures n'exige plus de barres, prévoir des barres de montage pour tenir les armatures d'âme.

Dans une poutre de hauteur variable :

- porter en ordonnée les sections d'aciers calculées en quelques points en tenant compte de la variation de z ,
- le décalage de $0,8h$, variable le long de la poutre, est appliqué à la courbe des sections d'aciers.

3. RÉPARTITION DES ARMATURES D'ÂME

3.1. CAS DES POUTRES DE SECTION CONSTANTE SOUMISES À DES CHARGES UNIFORMES

Voir paragraphe 3, chapitre 7 «EFFORT TRANCHANT».

3.2. CAS GÉNÉRAL

Il s'agit de poutres :

- supportant des charges concentrées,
- et/ou de hauteur variable.

Méthode :

1°) calculer les espacements pour un tracé d'armatures d'âme donné :

– initial (au voisinage des appuis) et correspondant à l'effort tranchant réduit V_{u0} dans la section à $h/2$ du nu d'appui :

$$\frac{A_t}{s_t} \cdot \frac{f_{ct}}{\gamma_s} = \frac{b_0 (\tau_{u0} - 0,3 k f_{tj})}{0,9 (\sin \alpha + \cos \alpha)} \Rightarrow s_{t0} = \frac{0,9 A_t (\sin \alpha + \cos \alpha)}{b_0 (\tau_{u0} - 0,3 k f_{tj})} \cdot \frac{f_{ct}}{\gamma_s}$$

– intermédiaires immédiatement à gauche et à droite des sections où agissent les charges concentrées,

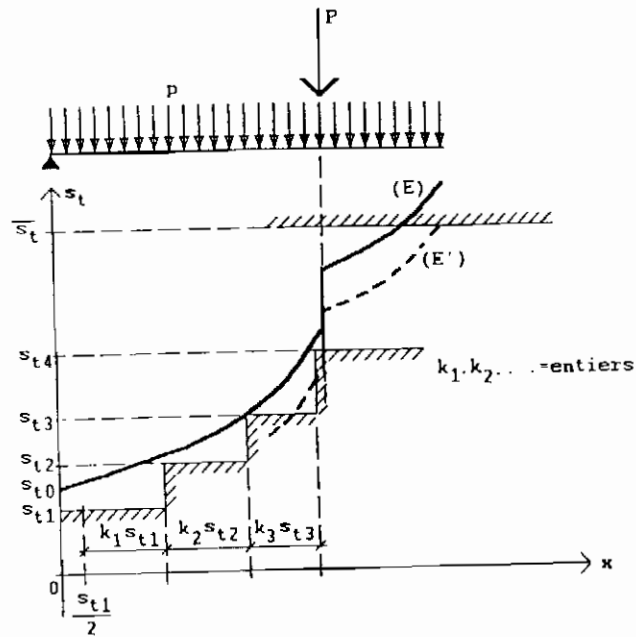
2°) tracer la courbe (E) représentative de $s_t(x)$,

3°) choisir $s_{ti} \leq s_{t0}$ (entier ≥ 7 cm),

4°) placer la première nappe d' A_t à $s_{ti}/2$ du nu d'appui et répéter s_{ti} un nombre entier de fois jusqu'à ce qu'il soit possible de passer à un espacement (entier) supérieur, et ainsi de suite, en enveloppant par dessous la courbe (E),

5°) arrêter le processus pour l'espacement s_{tm} immédiatement inférieur à :

$$s_t = \text{Min} \begin{cases} \frac{A_t \cdot f_{ct}}{0,4 \cdot b_0} \\ 40 \text{ cm} \\ 0,9 \cdot d \\ 15 \Phi'_{\min} \text{ si } A' \text{ non nul} \end{cases}$$



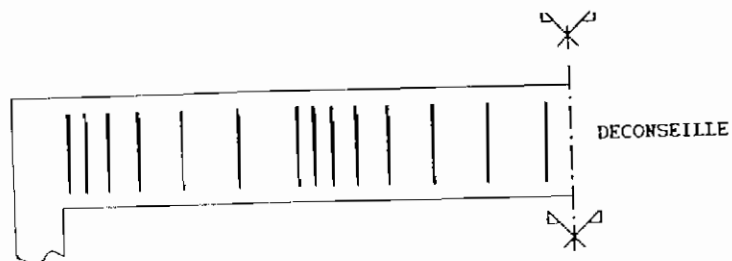
6°) lorsque $s_t > s_t$, diminuer A_t par :

- changement de tracé,
- ou diminution de Φ_t ,

d'où une nouvelle courbe (E') que l'on peut envelopper à nouveau par dessous au moyen des étapes 4°) et 5°). On a alors deux possibilités :

- soit adopter le nouveau tracé A_t et recommencer dès le début si $s_{t0} \geq 7$ cm, en enveloppant (E') par dessous,
- soit continuer en enveloppant (E') au-delà de la section où l'on a réduit A_t .

S'arranger pour que s_t soit toujours croissant de s_{ti} à s_t avec des hauteurs de marches $(s_{ti+1} - s_{ti})$ toujours plus grandes. En particulier, lorsque l'on change de tracé pour A_t , éviter de retomber à $s_{ti+1} < s_{ti}$ pour ne pas compliquer le ferrailage.



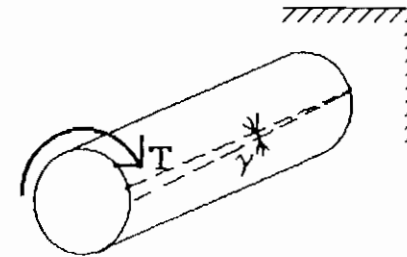
CHAPITRE 10

TORSION

I. RAPPELS DE COURS

1. RAPPELS DE RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

1.1. CONTRAINTES ENGENDRÉES PAR UN COUPLE DE TORSION



Un couple de torsion T appliqué à l'extrémité libre d'une barre encastrée produit une distorsion γ des génératrices de la barre.

Les contraintes développées par le couple de torsion T sont donc des contraintes de cisaillement (τ).

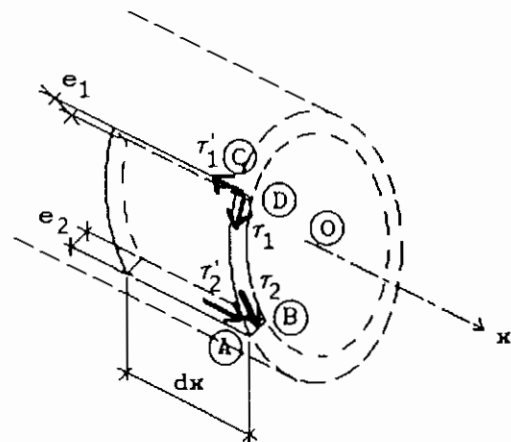
$$\tau = -G \cdot \gamma$$

G = module d'élasticité transversal du matériau constitutif de la barre.

1.2. TORSION DES PROFILS CREUX

1.2.1. Flux du vecteur contrainte

Considérons l'élément ABCD de longueur dx découpé dans l'épaisseur du profil.



Les contraintes tangentielles sur deux facettes orthogonales étant égales, on a :

$$\tau'_1 = \tau_1 \text{ et } \tau'_2 = \tau_2$$

La projection des forces élastiques suivant Ox donne, en l'absence de tout effort normal :

$$\int_A^B \tau_2 dx dy - \int_C^D \tau_1 dx dy = 0$$

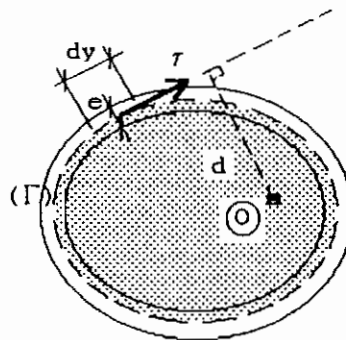
soit, en admettant que les contraintes de cisaillement τ sont constantes dans l'épaisseur e du tube mince :

$$\tau_2 \cdot e_2 - \tau_1 \cdot e_1 = 0$$

et comme les points A, B et C, D ont été choisis arbitrairement :

$$\tau \cdot e = \Phi = \text{Cste}$$

1.2.2. Valeur de la contrainte tangente



Γ étant la ligne moyenne de l'épaisseur constante du tube mince, l'équilibre de la section droite s'écrit (moments en O) :

$$T = \int_{(\Gamma)} \tau \cdot e \cdot d \cdot dy = \tau \cdot e \int_{(\Gamma)} d \cdot dy$$

$\Phi = \text{Cste}$

soit en remarquant que :

$$\int_{(\Gamma)} d \cdot dy = 2 \cdot \Omega$$

où Ω est le double de l'aire délimitée par la courbe Γ ,

$$T = \tau \cdot e \cdot 2 \cdot \Omega$$

D'où la contrainte tangente due au couple de torsion T_u à l'E.L.U. :

$$\tau_u = \frac{T_u}{2 \cdot e \cdot \Omega}$$

2. VÉRIFICATION DU BÉTON

2.1. CAS DES SECTIONS CREUSES

La contrainte tangente, pour des sections de forme convexe, a pour expression :

$$\tau_u = \frac{T_u}{2 \cdot b_0 \cdot \Omega}$$

où :

T_u = couple de torsion à l'état-limite ultime,

b_0 = épaisseur de la paroi au point considéré :

$$b_0 = \text{Min} \left\{ \begin{array}{l} \text{épaisseur réelle} \\ a/6 \end{array} \right.$$

a = diamètre maximal du plus grand cercle inscrit dans le contour extérieur de la section,

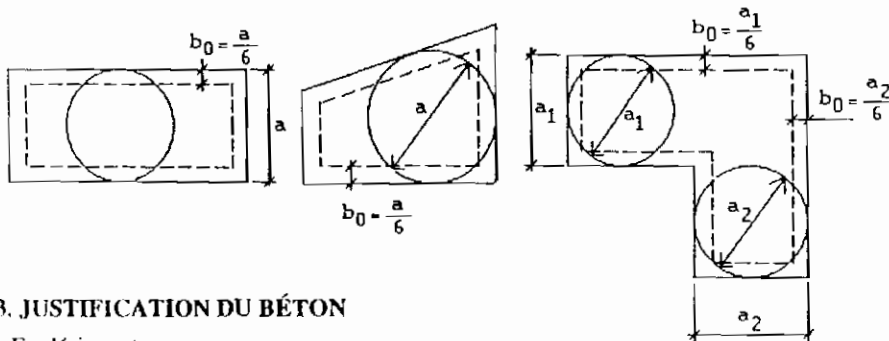
Ω = aire du contour tracé à mi-épaisseur des parois.

2.2. CAS DES SECTIONS PLEINES

On se ramène au cas précédent en remplaçant la section réelle par une section creuse équivalente d'épaisseur :

$$b_0 = \frac{a}{6}$$

a = diamètre maximal du plus grand cercle inscrit dans le contour extérieur de la section.



3. JUSTIFICATION DU BÉTON

En désignant par :

τ_{uV} = contrainte tangente due à l'effort tranchant V_u ,

$$\tau_{uV} = \frac{V_u}{bd} \text{ pour une section pleine de largeur } b,$$

$$\tau_{uV} = \frac{V_u}{(2b_0)d} \text{ pour une section creuse d'épaisseur réelle de paroi } b_0$$

τ_{uT} = contrainte tangente due au couple de torsion T_u ,

on doit vérifier :

$$\tau_{uT} + \tau_{uV} \leq \tau_{lim} : \text{Sections creuses.}$$

$$\tau_{uT}^2 + \tau_{uV}^2 \leq \tau_{lim}^2 : \text{Sections pleines}$$

avec pour des armatures d'âme droites (les seules à utiliser en torsion) :

FISSURATION	τ_{lim}
Peu préjudiciable	$\text{Min} \left\{ \begin{array}{l} 0,2 \cdot \frac{f_{ct}}{\gamma_b} \\ 5 \text{ MPa} \end{array} \right.$
Préjudiciable ou très préjudiciable	$\text{Min} \left\{ \begin{array}{l} 0,15 \cdot \frac{f_{ct}}{\gamma_b} \\ 4 \text{ MPa} \end{array} \right.$

Nota : b_0 n'a pas la même signification dans le calcul de τ_{uV} et dans celui de τ_{uT} (voir exercice).

3. ARMATURES

Les armatures pour la torsion se composent d'un double système :

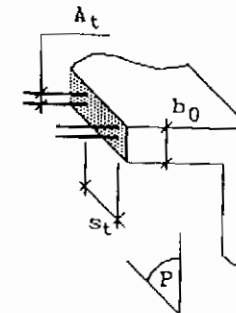
- armatures transversales droites,
- armatures longitudinales.

Elles ne sont nécessaires que dans les éléments où le couple de torsion ne diminue pas du fait de la fissuration du béton.

3.1. ARMATURES TRANSVERSALES

3.1.1. Calcul des armatures

En appliquant la règle des coutures aux plans perpendiculaires aux parois (voir paragraphe 5.1. chapitre 7 «EFFORT TRANCHANT») :



$$\left. \begin{array}{l} \frac{A_t}{b_0 s_t} f_{ed} (\sin 90^\circ + \cos 90^\circ) = \tau_u \\ \tau_u = \frac{T_u}{2 b_0 \Omega} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{A_t}{s_t} f_{ed} = \frac{T_u}{2 \cdot \Omega}$$

A_t = Somme des brins d'armatures transversales contenus dans l'épaisseur b_0

Les armatures ainsi déterminées (constituées obligatoirement de cadres fermés) sont à rajouter et à combiner avec celles équilibrant l'effort tranchant.

Nota : A_t a une signification différente dans le chapitre effort tranchant et dans le chapitre torsion

3.1.2. Pourcentage minimal

Comme pour l'effort tranchant et pour l'ensemble des armatures transversales (torsion + effort tranchant) :

$$\frac{A_t}{b \cdot s_t} f_{ed} \geq 0,4 \text{ MPa}$$

b = largeur de la section pour une section pleine.

$b = 2b_0$ pour une section creuse d'épaisseur de parois b_0

3.1.3. Espacement maximal

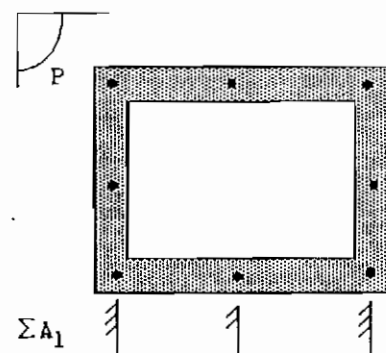
Comme pour l'effort tranchant :

$$s_t \leq \min \begin{cases} 0,9 d \\ 40 \text{ cm} \\ 15 \cdot \Phi_{1\text{min}} \end{cases} \quad \text{si } A' \neq 0 \text{ réalisé avec des aciers de diamètre } \Phi_1$$

3.2. ARMATURES LONGITUDINALES

3.2.1. Calcul des armatures

En appliquant la règle des coutures au plan de la section droite de la pièce (voir paragraphe 5.1. chapitre 7 «EFFORT TRANCHANT») :



$$\left. \begin{aligned} \frac{\Sigma A_1}{b_0 u} f_{ed} (\sin 90^\circ + \cos 90^\circ) &= \tau_u \\ \tau_u &= \frac{T_u}{2 \cdot b_0 \cdot \Omega} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\Sigma A_1}{u} f_{ed} = \frac{T_u}{2 \cdot \Omega}$$

avec :

ΣA_1 = section totale d'aciers longitudinaux à répartir sur le pourtour de la section droite,

u = périmètre de l'aire Ω .

La section ΣA_1 d'aciers longitudinaux est à prévoir en supplément de la section A d'aciers longitudinaux de flexion. Il faut au moins une barre dans chaque angle.

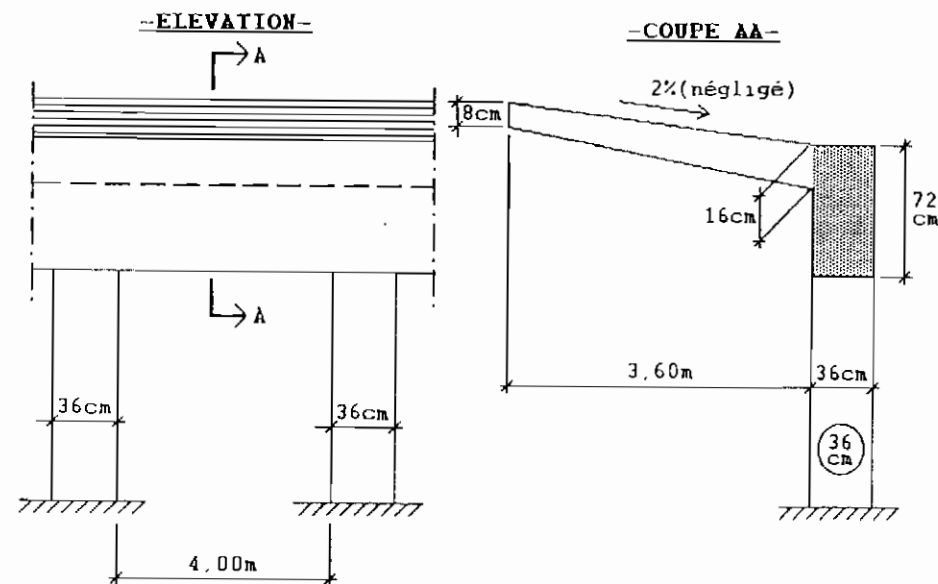
3.2.2. Pourcentage minimal

$$\frac{\Sigma A_1}{b_0 \cdot u} f_e \geq 0,4 \text{ MPa}$$

(pour b_0 voir nota page 242).

II. EXERCICE : AUVENT

— ÉNONCÉ —



■ Actions variables de durée d'application supérieure à 24 heures :

– $q = 1 \text{ kN/m}^2$ en projection verticale.

■ Matériaux :

– béton : $f_{c28} = 25 \text{ MPa}$,

– aciers : Fe E 500 HA,

■ Fissuration peu préjudiciable.

■ Pas de reprise de bétonnage dans la poutre $72 \times 36 \text{ cm}^2$.

■ On se propose :

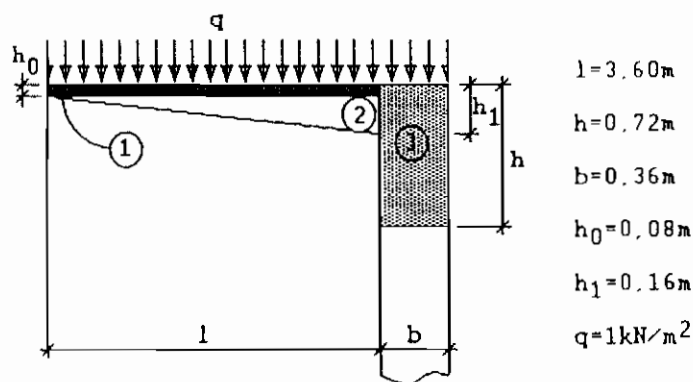
- 1) d'évaluer les sollicitations extrêmes dans la poutre $72 \times 36 \text{ cm}^2$,
- 2) de faire la vérification du béton,
- 3) de calculer les armatures longitudinales,
- 4) de déterminer les armatures transversales.

— CORRIGÉ —

1. SOLLICITATIONS DANS LA POUTRE D'APPUI DE L'AUVENT

1.1. DESCENTE DE CHARGES

En négligeant la pente de l'extrados de l'auvent, et en prenant les moments au centre de gravité de la poutre 72 x 36 cm², on obtient pour une bande d'auvent de largeur unité :



ELEMENT	p (kN/m)	x/0 (m)	px (mkN/m)
①	$25 \cdot 0.08 \cdot 3.60 = 7.20$	$\frac{3.60}{2} + \frac{0.36}{2} = 1.98$	14.26
②	$25 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0.08 \cdot 3.60 = 3.60$	$\frac{3.60}{3} + \frac{0.36}{2} = 1.38$	4.97
③	$25 \cdot 0.72 \cdot 0.36 = 6.48$	0	0
Total permanent	$g = 17.28$		$t_g = 19.23$
Total variable	$1 \cdot (3.60 + 0.36) = q = 3.96$	$\frac{3.96}{2} - \frac{0.36}{2} = 1.80$	$t_q = 7.13$

1.2. MOMENT FLÉCHISSANT

$$p_u = 1.35g + 1.5q$$

$$p_u = 1.35 \cdot 17.28 + 1.5 \cdot 3.96 = 29.3 \text{ kN/m}$$

La poutre étant encastree dans les poteaux, on obtient aux encastrements un moment (maximal en valeur absolue) :

$$M_u = - \frac{p_u \cdot l^2}{12}$$

$$M_u = - 29.3 \cdot \frac{4.00^2}{12} = - 39.07 \text{ mkN}$$

1.3. EFFORT TRANCHANT

Il est maximal sur appuis :

$$V_u = \frac{p_u \cdot l}{2}$$

$$V_u = 29.3 \cdot \frac{4.00}{2} = 58.6 \text{ kN}$$

1.4. COUPLE DE TORSION

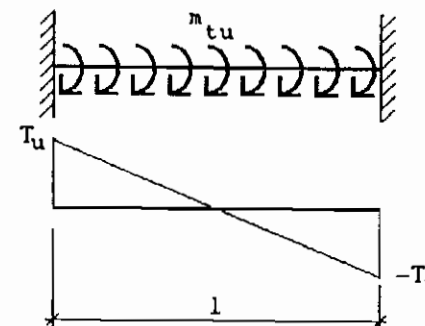
a) Couple de torsion réparti

$$m_{tu} = 1.35t_g + 1.5t_q$$

$$m_{tu} = 1.35 \cdot 19.23 + 1.5 \cdot 7.13 = 36.66 \text{ mkN/m}$$

b) Couple de torsion

La poutre soumise à un couple uniforme de torsion est considérée comme encastree dans les poteaux.



Par analogie avec l'effort tranchant le couple de torsion maximal est obtenu sur appui :

$$T_{u\max} = m_{tu} \cdot \frac{l}{2}$$

$$T_{u\max} = 36.66 \cdot \frac{4.00}{2} = 73.32 \text{ mkN}$$

2. VÉRIFICATION DU BÉTON

2.1. CONTRAINTE TANGENTE DUE À L'EFFORT TRANCHANT

$$\tau_{uv} = \frac{V_u}{b \cdot d}$$

$$\tau_{uv} = \frac{0.0586}{0.36 \cdot 0.65} = 0.25 \text{ MPa}$$

$V_u = V_{u0}$ (pas de transmission directe de charges aux appuis)

b = largeur totale de la section.

2.2. CONTRAINTE TANGENTE DUE AU COUPLE DE TORSION

$$\tau_{uT} = \frac{T_{u\max}}{2 \cdot b_0 \cdot \Omega}$$

b_0 = épaisseur de la paroi de la section creuse équivalente

avec :

$T_{u\max}$ = couple de torsion
(E.L.U.),

$$T_{u\max} = 0,0733 \text{ mMN}$$

a = plus petit diamètre du cercle
inscriptible dans le contour extérieur,

$$a = b = 36 \text{ cm} = \text{Min} \begin{cases} b = 0,36 \text{ m} \\ h = 0,72 \text{ m} \end{cases}$$

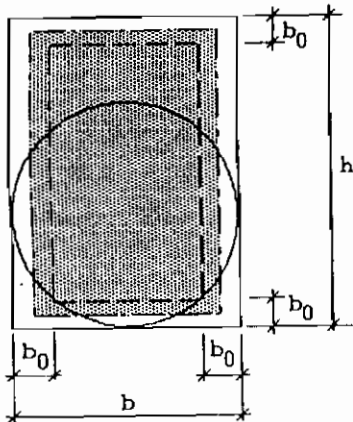
$$b_0 = \frac{a}{6}$$

$$b_0 = \frac{0,36}{6} = 0,06$$

Ω = aire grisée.

$$\Omega = (36 - 6)(72 - 6) = 1980 \text{ cm}^2$$

$$\tau_{uT} = \frac{0,0733}{2 \cdot 0,06 \cdot 0,198} = 3,09 \text{ MPa}$$



2.3. VÉRIFICATION DU BÉTON

On doit respecter :

$$\left. \begin{array}{l} \text{fissuration peu} \\ \text{préjudiciable} \end{array} \right\} \Rightarrow \tau_{um} = \text{Min} \left\{ \begin{array}{l} 0,20 \frac{f_{ct}}{\gamma_b} \\ 5 \text{ MPa} \end{array} \right. \quad \tau_{um} = \text{Min} \left\{ \begin{array}{l} 0,20 \frac{25}{1,5} = 3,33 \\ 5 \text{ MPa} \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{section pleine} \end{array} \right\} \Rightarrow \tau_u^2 = \tau_{uv}^2 + \tau_{uT}^2 < \tau_{um}^2 \quad \tau_u = \sqrt{0,25^2 + 3,09^2} = 3,10 \text{ MPa}$$

$$\tau_u = 3,10 \text{ MPa} < 3,33 \text{ MPa} = \tau_{um} \text{ O.K.}$$

3. ARMATURES LONGITUDINALES

3.1. ARMATURES LONGITUDINALES POUR LA FLEXION

$$f_{bu} = 0,85 \frac{f_{c28}}{\theta \cdot \gamma_b}$$

$$f_{bu} = 0,85 \frac{25}{1 \cdot 1,5} = 14,2 \text{ MPa}$$

$$\mu_{bu} = \frac{M_u}{b_0 \cdot d^2 \cdot f_{bu}}$$

$$\mu_{bu} = \frac{0,0391}{0,36 \cdot 0,65^2 \cdot 14,2} = 0,018$$

$$\mu_{bu} < \mu_{lu}$$

$$\mu_{bu} = 0,018 < 0,186 = \mu_{AB} < \mu_{lu}$$

$$\Rightarrow A' = 0$$

$$\mu_{bu} < 0,275 \Rightarrow \text{Méthode}$$

$$\mu_{bu} = 0,018 < 0,275 \Rightarrow \text{Formules simplifiées}$$

$$z_b = d(1 - 0,6\mu_{bu})$$

$$z_b = 0,65(1 - 0,6 \cdot 0,018) = 0,643 \text{ m}$$

$$f_{cd} = \frac{f_c}{\gamma_s}$$

$$f_{cd} = \frac{500}{1,15} = 435 \text{ MPa}$$

$$A = \frac{M_u}{z_b \cdot f_{cd}}$$

$$A = \frac{0,0391}{0,643 \cdot 435} 10^4 = 1,40 \text{ cm}^2$$

$$f_{t28} = 0,6 + 0,06 \cdot f_{c28}$$

$$f_{t28} = 0,6 + 0,06 \cdot 25 = 2,10 \text{ MPa}$$

$$A_{\min} = 0,23 \frac{f_{t28}}{f_c} b_0 \cdot d$$

$$A_{\min} = 0,23 \frac{2,1}{500} 36 \cdot 65 = 2,26 \text{ cm}^2 > A$$

$$\Rightarrow \text{Retenu : } A = 2,26 \text{ cm}^2.$$

3.2. ARMATURES LONGITUDINALES POUR LA TORSION

Calcul :

$$\frac{\Sigma A_1}{u} f_{cd} = \frac{T_u}{2 \cdot \Omega}$$

$$\frac{\Sigma A_1}{u} = \frac{0,0733}{2 \cdot 0,1980 \cdot 435} \cdot 10^2 = \frac{1}{23,50} \text{ cm}^2/\text{cm}$$

ΣA_1 = armatures longitudinales

$$\Rightarrow \Sigma A_1 = \frac{2[0,36 - 0,06 + 0,72 - 0,06] \cdot 10^2}{23,50}$$

u = périmètre de Ω

$$\Sigma A_1 = 8,17 \text{ cm}^2$$

$\Rightarrow$ Compte tenu des aciers de flexion :

$$\Sigma A_1 + A = 8,17 + 2,26 = 10,43 \text{ cm}^2$$

$$\Rightarrow 7\Phi 14\text{HA}$$

Pourcentage minimal :

$$\frac{\Sigma A_1}{b_0 \cdot u} f_c \geq 0,4 \text{ MPa}$$

$$\frac{\Sigma A_1}{u} = \frac{1}{23,50} > 0,40 \frac{6}{500} = \frac{1}{208,33} \text{ cm}^2/\text{cm O.K.}$$

4. ARMATURES TRANSVERSALES

4.1. ARMATURES D'ÂME POUR L'EFFORT TRANCHANT

Calculées :

$$\frac{A_t}{b \cdot s_t} \cdot \frac{f_{ct}}{\gamma_s} = \frac{\tau_u - 0,3 \cdot k \cdot f_{cj}}{0,9 (\sin \alpha + \cos \alpha)}$$

α = inclinaison des A_t $\alpha = 90^\circ$

$k = \begin{cases} 0 & \text{si reprise non traitée,} \\ 0 & \text{si fissuration très préjudiciable,} \\ 1 & \text{sinon en flexion simple.} \end{cases}$ $k = 1$

$\tau_u = 0,25 \text{ MPa} < 0,63 \text{ MPa} = 0,3 \cdot 1,2,1$
 $\Rightarrow$ % minimal.

$\frac{A_t}{b_0 s_t} \cdot f_{ct} \geq 0,4 \text{ MPa}$

$\frac{A_t}{s_t} = \frac{36 \cdot 0,4}{500} = \frac{1}{34,72} \text{ cm}^2/\text{cm}$

Espacement maximal :

$s_t \leq \text{Min} \begin{cases} 0,9 \cdot d \\ 40 \text{ cm} \\ 15 \Phi'_{\text{min}} \text{ si } A' \text{ non nul} \end{cases}$ $s_t = 40 \text{ cm} = \text{Min} \begin{cases} 0,9 \cdot 65 = 58,5 \text{ cm} \\ 40 \text{ cm} \end{cases}$

4.2. ARMATURES TRANSVERSALES POUR LA TORSION

Calcul :

$\frac{A_t}{s_t} \cdot f_{ct} = \frac{T_u}{2 \cdot \Omega}$

$\frac{A_t}{s_t} = \frac{1}{23,50} \text{ cm}^2/\text{cm/paroi } b_0$

(voir paragraphe 3.2.)

pour deux parois :

$\frac{A_t}{s_t} = \frac{2}{23,50} = \frac{1}{11,75} \text{ cm}^2/\text{cm}$

4.3. ARMATURES TRANSVERSALES

Le cumul des deux systèmes d'armatures transversales donne :

$\frac{A_t}{s_t} = \left[\frac{A_t}{s_t} \right]_v + \left[\frac{A_t}{s_t} \right]_T$

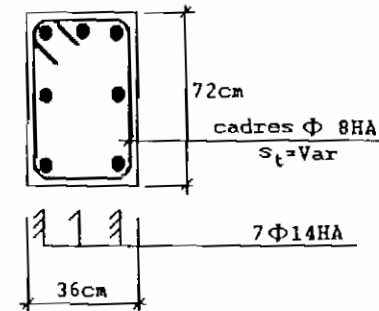
$\frac{A_t}{s_t} = \frac{1}{34,72} + \frac{1}{11,75} = \frac{1}{8,78} \text{ cm}^2/\text{cm}$

$\Rightarrow$ Pour les 7 Φ 14HA longitudinaux :

1 cadre Φ 8HA

$s_{t0} = 1 \cdot 8,78 = 8 \text{ cm}$

d'où la coupe sur appui :



Pourcentage minimal :

$\frac{A_t}{b \cdot s_t} \cdot f_{ct} \geq 0,4 \text{ MPa}$

$\frac{A_t}{s_t} = \frac{1}{8,78} \text{ cm}^2/\text{cm} > \frac{0,4 \cdot 36}{500} = \frac{1}{34,7} \text{ cm}^2/\text{cm} \text{ O.K.}$

4.4. RÉPARTITION DES ARMATURES TRANSVERSALES

Compte tenu du fait que le diagramme du moment de torsion est identique au diagramme de l'effort tranchant d'une poutre encastrée aux deux extrémités et uniformément chargée, on appliquera la méthode Caquot. Ici, du fait de la concomitance du moment de torsion, il n'y a ni terme de réduction ni transmission directe de charges aux appuis.

Nombre théorique de répétitions :

$n = \frac{l}{2}$

$n = \frac{4,00}{2} = 2$

Espacement de départ :

$s_{t1} \leq s_{t0}$

$s_{t1} = 8 \text{ cm}$

Répartition :

espacement (cm)	$\frac{s_{t0}}{2}$	8	9	10	11	13	16	20	25
nombre théorique de répétitions		2	2	2	2	2	2	2	2
nombre cumulé		2	4	6	8	10	12	14	16
nombre arrondi		2	4	6	8	10	12	14	16
nombre de répétitions		2	2	2	2	2	2	2	$\geq 0,9 = \frac{200-178}{25}$
x (cm)	4	20	38	58	80	106	138	178	228

$\Rightarrow$ restent à mi-portée : $200 - 178 = 22 \text{ cm}$

$\Rightarrow 4 + 2 \times 8 + 2 \times 9 + 2 \times 10 + 2 \times 11 + 2 \times 13 + 2 \times 16 + 2 \times 20 + 22$
 avec un cours d' A_t à mi-portée.

Nota : pour $s_t = 25 \text{ cm}$ le nombre de répétitions 2 ne convient pas car il ne permet pas d'atteindre le milieu de la portée avec un espacement de 25 cm.

CHAPITRE 11

FLAMBEMENT

I. RAPPELS DE COURS

Le flambement est un phénomène d'instabilité de forme qui peut survenir dans les éléments comprimés (de façon excentrée ou non) des structures, lorsque ces éléments sont «élancés», par suite de l'influence défavorable des déformations sur les sollicitations.

1. EXCENTRICITÉS

L'excentricité de la force extérieure par rapport au centre de gravité de la section de béton seul est la somme de trois termes

1.1. EXCENTRICITÉ STRUCTURALE

Due aux dispositions de la construction, donc connue et évaluée forfaitairement .

$$e_0 = \frac{M_{G_0}}{N} \quad (G_0 = \text{centre de gravité de la section de béton seul}).$$

1.2. EXCENTRICITÉ ADDITIONNELLE

Provenant des défauts d'exécution, donc inconnue ; elle est évaluée forfaitairement

1.2.1. Cas des éléments isolés

$$e_a = \text{Max} \begin{cases} 2 \text{ cm} \\ \frac{l}{250} \end{cases}$$

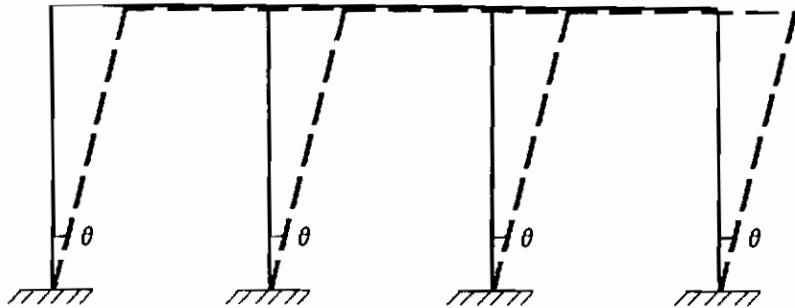
l = longueur de la pièce.

1.2.2. Cas des ossatures

Excentricité résultant d'une inclinaison initiale d'ensemble :

$$\bullet \theta = \frac{l}{100} \text{ rd pour les ossatures à un étage,}$$

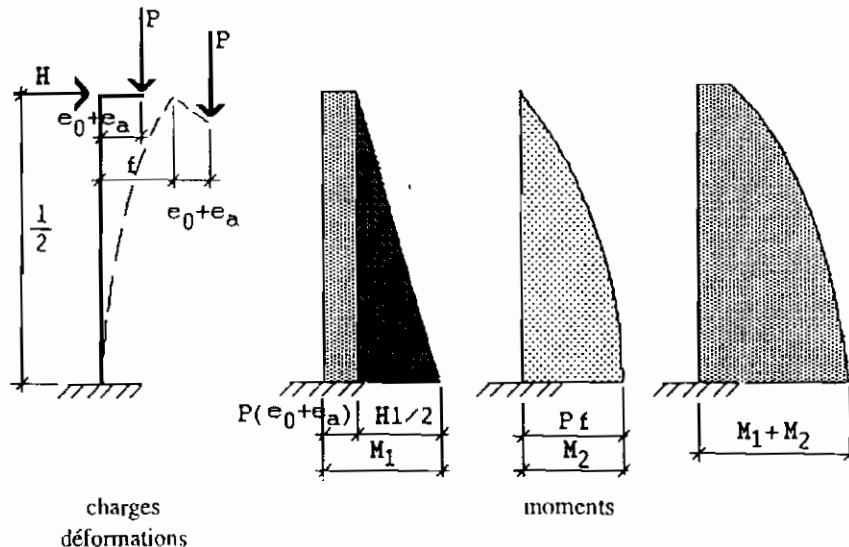
$$\bullet \theta = \frac{l}{200} \text{ rd pour les ossatures à plusieurs étages,}$$

3. FLÈCHE f DUE À LA FLEXION

Pour une potence verticale soumise à l'action :

– d'une force verticale P d'excentricité structurale e_0 en tête,

– d'une force horizontale H en tête,



le moment du second ordre résulte du supplément d'excentricité provenant de l'apparition de la flèche f .

Sollicitations en pied de poteau avant déformation (premier ordre) :

$$\begin{cases} N = P \\ M_1 = P[e_0 + e_a] + H \cdot \frac{l}{2} \\ e_1 = \frac{M_1}{N} = e_0 + e_a + \frac{H}{P} \cdot \frac{l}{2} \end{cases}$$

Sollicitations du second ordre dues à la déformation :

$$\begin{cases} N = P \\ M_2 = P \cdot f \\ e_2 = \frac{M_2}{N} = f \end{cases}$$

Sollicitations totales (1^{er} et 2^e ordres) :

$$\begin{cases} N = P \\ M = M_1 + M_2 = P[e_0 + e_a + f] + H \cdot \frac{l}{2} \\ e = \frac{M}{N} = \underbrace{e_0 + e_a + \frac{H}{P} \cdot \frac{l}{2}}_{e_1} + \underbrace{f}_{e_2} \end{cases}$$

2. ÉTAT-LIMITE ULTIME DE STABILITÉ DE FORME

2.1. JUSTIFICATION

La justification de la stabilité de forme consiste à démontrer qu'il existe, dans toute section de l'élément, un état de contraintes qui équilibre les sollicitations de calcul, y compris celles du second ordre, et qui soit compatible avec la déformabilité et la résistance de calcul des matériaux.

2.2. MÉTHODES DE CALCUL

On dispose des trois méthodes suivantes.

1°) Démontrer qu'il existe un état d'équilibre, en le déterminant de façon précise, par un calcul itératif dans chaque section du poteau (procédé utilisable seulement sur ordinateurs).

2°) Comparer les sollicitations de calcul à des sollicitations d'état-limite ultime de stabilité de forme données par des tables ou abaques :

- tables de MM. Faessel, Robinson et Morisset,
- abaques de M. Capra, etc.

3°) Démontrer qu'il existe un état d'équilibre, sans chercher à le déterminer de façon précise. Cette méthode est appelée «méthode de l'équilibre» et se présente sous deux aspects :

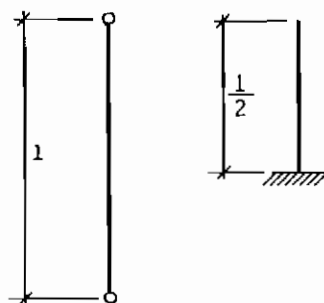
- méthode des déformations internes,
- méthode des rigidités.

3. ÉQUATIONS DU PROBLÈME

3.1. DOMAINE D'APPLICATION

Éléments satisfaisant toutes les conditions ci-après.

- Poteaux de section constante (béton et armatures).
- La ligne moyenne est symétrique par rapport à la section médiane.
- Poteaux articulés à leurs deux extrémités ou en console (mâts).



- Poteaux chargés de façon excentrée et d'élancement géométrique tel que :

$$\frac{l_f}{h} > \text{Max} \begin{cases} 15 \\ 20 \frac{e_1}{h} \end{cases} \quad \text{si } \frac{l_f}{h} > 10$$

h = hauteur de la section droite dans le plan de flambement, celui pour lequel l_f a été calculée. Sinon, voir calcul en flexion composée avec prise en compte de façon forfaitaire des déformations du second ordre.

- Poteaux qui sont sollicités, en plus de l'effort normal de compression, par des moments dont l'existence est prise en compte dans la justification de la stabilité et de la résistance des éléments qui lui sont liés et qui conduisent à des excentricités non négligeables de l'effort normal (poteaux de bâtiment non intégrés au contreventement).
- Poteaux soumis à un effort normal constant.
- Poteaux soumis à un moment du premier ordre de signe constant dont la valeur maximale se produit dans la section à $l/2$ du sommet.

3.2. HYPOTHÈSES COMPLÉMENTAIRES

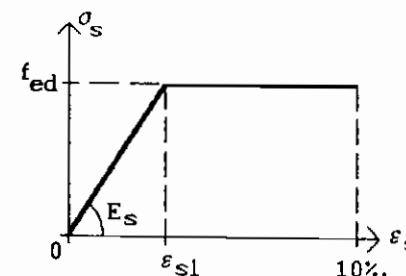
3.2.1. Hypothèses mécaniques

Les sections droites restent planes.

Il n'y a pas de glissement relatif entre l'acier et le béton.

On néglige le béton tendu.

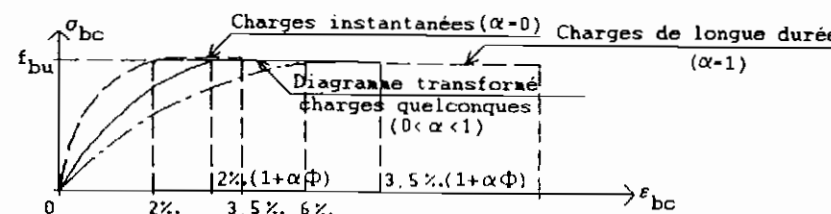
Les armatures sont caractérisées par leur diagramme contraintes-déformations de calcul ($\gamma_s = 1,15$).



Prise en compte du fluage en effectuant sur le diagramme parabole-rectangle une affinité parallèle à l'axe ϵ_b , de rapport $(1 + \alpha\Phi)$ avec :

$\Phi = 2$ coefficient de fluage,

$$\alpha = \frac{M_1^L}{M_1} = \frac{M_1^L \left(G + \sum_{i \geq 1} \psi_{2i} \cdot Q_i \right)}{M_1 \left(G + Q_1 + \sum_{i \geq 2} \psi_{0i} \cdot Q_i \right)}$$



3.2.2. Hypothèse géométrique supplémentaire

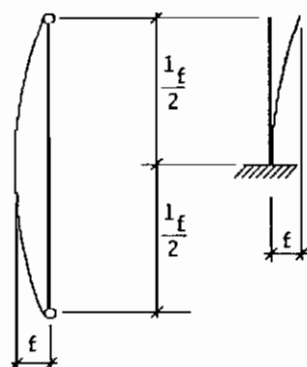
Cas général :

on se donne la déformée du poteau de façon arbitraire mais raisonnable.

Cas de base :

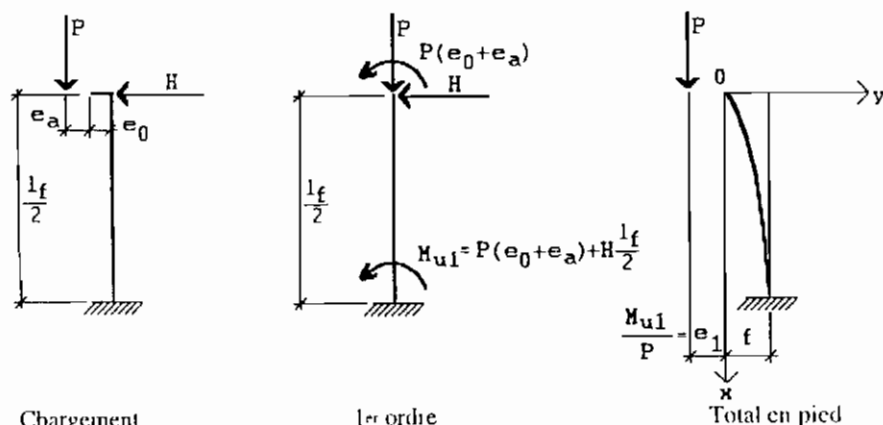
on assimile la déformée à :

- un quart d'onde de sinusoïde pour un poteau en console,
- une demi-onde de sinusoïde pour un poteau bi-articulé.



3.3. EXCENTRICITÉ « EXTERNE »

Pour un poteau encastré en pied et libre en tête (mât) :



Chargement

1^{er} ordre

Dans le repère Oxy lié à l'extrémité libre du poteau, la déformée a pour équation :

$$\begin{cases} y = f \cdot \sin \frac{\pi x}{l_f} \\ f = \text{flèche maximale en tête.} \end{cases}$$

La courbure est donnée par la relation :

$$\frac{1}{r} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} \approx y''$$

$$\frac{1}{r} = -f \frac{\pi^2}{l_f^2} \sin \frac{\pi x}{l_f}$$

soit, en pied du poteau et en valeur absolue :

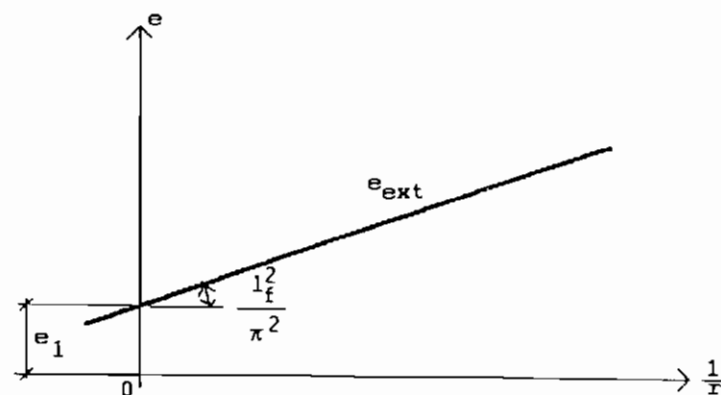
$$\frac{1}{r} = +f \frac{\pi^2}{l_f^2} \Rightarrow f = \frac{l_f^2}{\pi^2} \cdot \frac{1}{r}$$

L'excentricité « externe » ou excentricité de l'effort normal N_u dans la section la plus sollicitée (en pied de poteau) vaut donc :

$$e_{ext} = e_1 + f = e_1 + \frac{l_f^2}{\pi^2} \cdot \frac{1}{r} \quad (1)$$

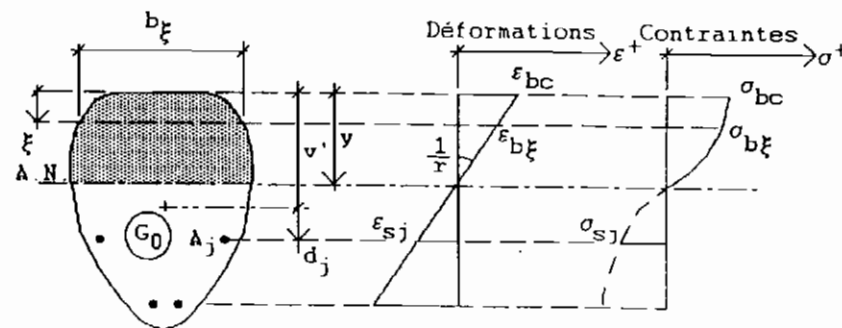
avec e_1 défini au § 1.2 chapitre « FLEXION COMPOSÉE » page 192.

D'où sa représentation dans le repère $(e, \frac{1}{r})$:



3.4. EXCENTRICITÉ « INTERNE »

Dans la section la plus sollicitée, tout état de déformation défini par sa courbure $1/r$ et une déformation relative ε en un point particulier de la section, conduit aux équations de compatibilité et d'équilibre (moments rapportés au centre de gravité G_0 du béton seul) :



$$\frac{1}{r} = \frac{\epsilon_{bc}}{y} = \frac{\epsilon_{sj}}{y - (v' + d_j)}$$

$$N_{int} = \int_0^y b_{\xi} \sigma_{b_{\xi}} d\xi + \sum_1^n A_j \sigma_{sj}$$

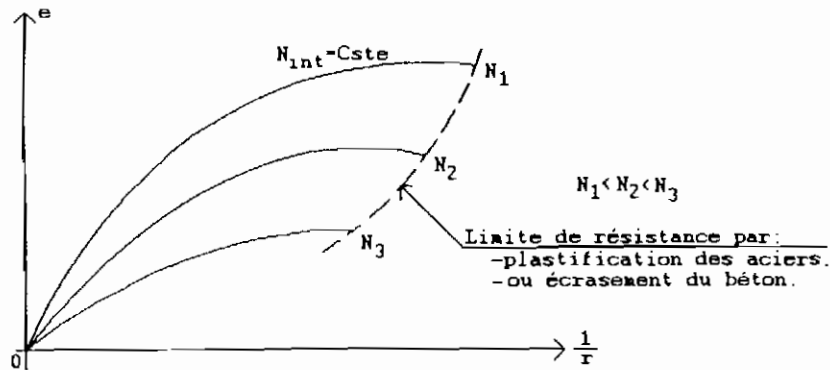
$$M_{int} = \int_0^y b_{\xi} \sigma_{b_{\xi}} (v' - \xi) d\xi + \sum_1^n A_j \sigma_{sj} d_j = N_{int} \cdot e_{int}$$

D'après les diagrammes contraintes-déformations de l'acier et du béton, les contraintes sont fonction des déformations relatives, donc de la courbure $1/r$ d'après les relations de compatibilité.

D'où, en éliminant les contraintes, puis les déformations, on obtient la relation :

$$\Phi \left[N_{int}, e_{int}, \frac{1}{r} \right] = 0 \quad (2)$$

Cette relation se traduit, dans le plan $(e, 1/r)$ par :



3.5. ÉTUDE DE L'ÉQUILIBRE

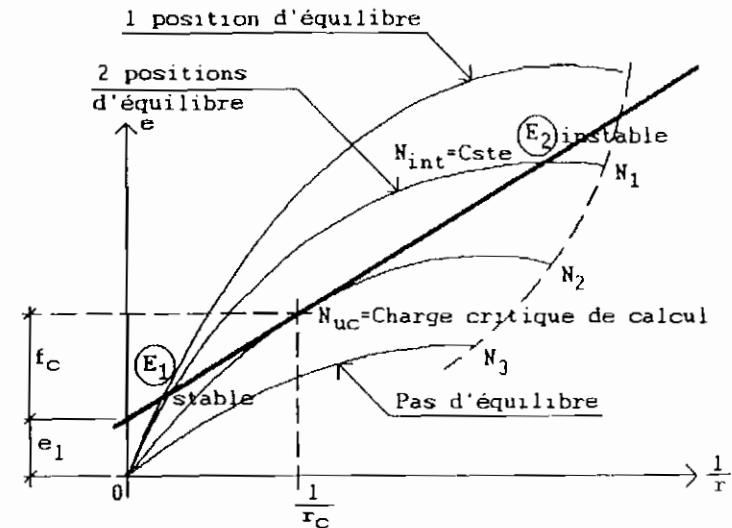
Dans le plan $(e, 1/r)$:

- la relation géométrique (1) est représentée par une droite,
- la relation mécanique (2) est représentée par un réseau de courbes correspondant à $N_{int} = Cste$.

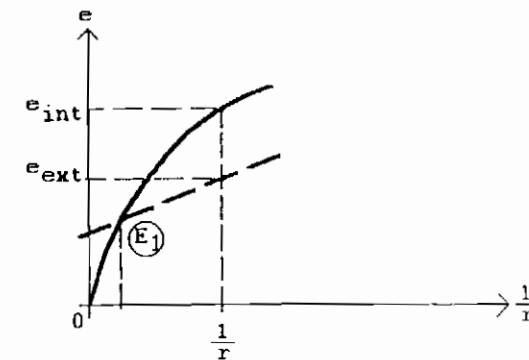
D'où, ces deux types de courbes peuvent :

- n'avoir aucun point commun $\Rightarrow$ il n'y a pas d'équilibre possible,
- avoir au moins un point commun $\Rightarrow$ il y a une position d'équilibre qui peut être stable ou instable.

La charge critique de calcul N_{uc} correspond à celle des courbes N_i qui est la tangente à la droite $e_{ext} = e_1 + f$.



Il suffit de remarquer que si, en E_1 , on écarte le poteau de sa position d'équilibre par augmentation de la courbure $1/r$:



e_{int} croît plus vite que e_{ext} d'où : la réaction du poteau à la déformation complémentaire tend à le ramener à la position d'équilibre E_1 qui est par conséquent une position d'équilibre stable ; c'est l'inverse qui se produit au point E_2 qui caractérise un équilibre instable.

4. MÉTHODE DE L'ÉQUILIBRE – MÉTHODE DES DÉFORMATIONS INTERNES

4.1. MÉTHODE GÉNÉRALE

Pour les poteaux dont la section a une forme quelconque, la stabilité est assurée, si l'on peut trouver dans chaque section, compte tenu de la déformée que l'on s'est donnée, un

état de déformations tel que l'on ait simultanément :

$$\begin{cases} N_{int}(\epsilon, l/r) \geq N_{ext} \\ \text{avec} \\ e_{int}(\epsilon, l/r) = \frac{M_{int}(\epsilon, l/r)}{N_{int}(\epsilon, l/r)} \geq e_{ext} = e_1 + f \end{cases}$$

avec :

N_{ext} = effort normal dû aux actions appliquées à la structure,

$\left. \begin{matrix} N_{int}(\epsilon, l/r) \\ M_{int}(\epsilon, l/r) \end{matrix} \right\} = \begin{matrix} \text{sollicitations internes, intégrales des contraintes développées par la} \\ \text{déformation.} \end{matrix}$

4.2. MÉTHODE SIMPLIFIÉE

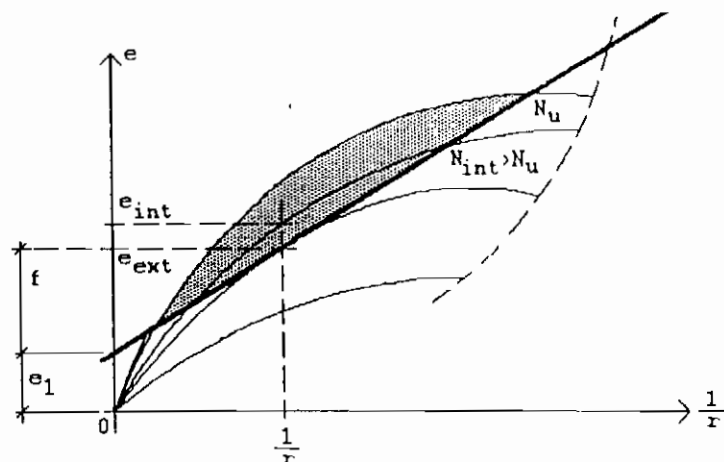
Dans le cas des poteaux articulés aux deux extrémités ou des mâts, l'étude de l'équilibre consiste à rechercher un point situé à l'intérieur de la zone grisée dans le plan $(e, l/r)$ pour la section la plus sollicitée (à mi-hauteur du poteau bi-articulé ou à l'encastrement du mât), c'est-à-dire, à vérifier simultanément :

$$\begin{cases} N_{int}(\epsilon, l/r) \geq N_{ext} \\ \text{avec} \\ e_{int}(\epsilon, l/r) = \frac{M_{int}(\epsilon, l/r)}{N_{int}(\epsilon, l/r)} \geq e_{ext} = e_1 + \frac{l_f^2}{\pi^2} \cdot \frac{1}{r} \end{cases}$$

avec :

M_{int} , N_{ext} et N_{int} définis en 4.1.,

l_f = longueur de flambement de la pièce,



4.3. REMARQUE

La méthode de l'équilibre présente des avantages et des inconvénients.

4.3.1. Avantages

Elle est valable quelle que soit la forme de la section.

Elle ne nécessite pas l'utilisation de tables.

4.3.2. Inconvénients

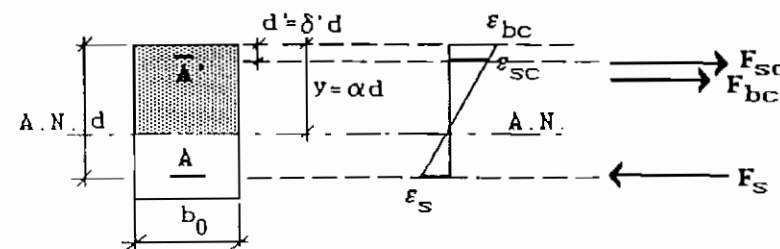
Le calcul est long car itératif, en particulier si l'effort normal de calcul est proche de l'effort normal ultime (réduction de l'aire grisée sur le diagramme d'où : l'état de déformation est plus difficile à trouver).

4.4. CAS DES SECTIONS RECTANGULAIRES À DEUX NAPPES D'ARMATURES

1°) On se donne, dans la section la plus sollicitée, un diagramme de déformations défini par :

$$\begin{cases} \epsilon_{bc} = \frac{2}{1000} (1 + \alpha \Phi) \\ \epsilon_s = \frac{f_{ed}}{E_s} = \epsilon_{sl} \end{cases}$$

2°) D'après l'hypothèse de la déformation plane :



$$y = d \cdot \frac{\epsilon_{bc}}{\epsilon_{bc} + \epsilon_s}$$

$$\epsilon_{sc} = \epsilon_{bc} \cdot \frac{y - d'}{y} \Rightarrow \sigma_{sc} \text{ par diagramme de calcul,}$$

$$\epsilon_s = \epsilon_{sl} \rightarrow \sigma_s = f_{ed}$$

3°) On en déduit la valeur de l'effort normal interne :

$$N_{int} = F_{bc} + F_{sc} - F_s$$

soit :

$$N_{int} = \psi b_0 y f_{bu} + A' \sigma_{sc} - A f_{ed}$$

avec :

$$\psi = \frac{2}{3} \left\{ \text{puisque l'on utilise la seule partie parabolique du diagramme } \sigma - \epsilon \text{ du béton.} \right.$$

4°) Si $N_{int} < N_{ext}$, on réduit ϵ_s en gardant

$$\epsilon_{bc} = \frac{2}{1000} (1 + \alpha \Phi)$$

et on recommence les étapes 2°) et 3°) (avec $\psi = 2/3$ et $F_s = A \cdot E_s \cdot \epsilon_s$) jusqu'à ce que $N_{int} > N_{ext}$ mais avec $N_{int} \approx N_{ext}$.

5°) Si $N_{int} \gg N_{ext}$, on réduit ϵ_{bc} en gardant $\epsilon_s = \epsilon_{sl} = \frac{f_{ed}}{E_s}$ pour l'armature tendue et on refait

les calculs des étapes 2°) et 3°) jusqu'à ce que $N_{int} > N_{ext}$ mais avec $N_{int} \approx N_{ext}$, en prenant cette fois :

$$\begin{cases} \eta = 10^3 \cdot \frac{\epsilon_{bc}}{1 + \alpha \Phi} \\ \psi = \frac{\eta (6 - \eta)}{12} \\ \delta_G = \frac{8 - \eta}{4 (6 - \eta)} \end{cases}$$

6°) On calcule le moment M_{int} des forces F_{bc} , F_{sc} et F_s au centre de gravité du béton seul. D'où l'on obtient l'excentricité interne :

$$e_{int} = \frac{M_{int}}{N_{int}}$$

avec :

– pour l'étape 4 :

$$M_{int} = \frac{2}{3} \cdot b_0 \cdot y \cdot f_{bu} \cdot \left(\frac{h}{2} - \frac{3}{8} \cdot y \right) + A' \sigma_{sc} \cdot \left(\frac{h}{2} - d' \right) + A \cdot E_s \cdot \epsilon_s \cdot \left(d - \frac{h}{2} \right)$$

– pour l'étape 5 :

$$M_{int} = \psi \cdot b_0 \cdot y \cdot f_{bu} \cdot \left(\frac{h}{2} - \delta_G \cdot y \right) + A' \sigma_{sc} \cdot \left(\frac{h}{2} - d' \right) + A \cdot f_{ed} \cdot \left(d - \frac{h}{2} \right)$$

7°) On cherche à réaliser, puisque $N_{int} > N_{ext}$:

$$\begin{cases} e_{int} > e_{ext} = \underbrace{(e_0 + e_a)}_{e_1} + \frac{l_f^2}{\pi} \cdot \frac{1}{r} \\ \frac{1}{r} = \frac{\epsilon_{bc} + \epsilon_s}{d} \end{cases}$$

S'il en est ainsi, l'équilibre du poteau est assuré.

8°) S'il n'en est pas ainsi ($e_{int} < e_{ext}$) il faut explorer d'autres couples ($1/r$, ϵ_{bc}) ou ($1/r$, ϵ_s) :

8.1.) Si e_1 est faible et l_f élevé (sans qu'il soit possible de quantifier les valeurs limites), on peut partir de :

$$\begin{cases} \epsilon_{bc} = \frac{2}{1000} (1 + \alpha \Phi) \\ \epsilon_s \text{ croissant jusqu'à } \frac{10}{1000} \end{cases}$$

en prenant $\delta_G = 3/8$ et $\psi = 2/3$,

8.2.) Si e_1 est élevé et l_f faible, on peut partir de :

$$\begin{cases} \epsilon_s = \frac{f_{ed}}{E_s} \\ \epsilon_{bc} \text{ croissant jusqu'à } \frac{3,5}{1000} (1 + \alpha \Phi) \end{cases}$$

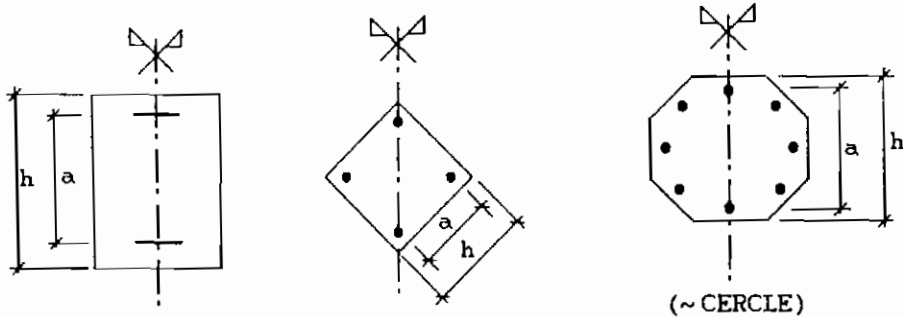
en prenant :

$$\begin{cases} \eta = 10^3 \cdot \frac{\epsilon_{bc}}{1 + \alpha \Phi} \\ \psi = 1 - \frac{2}{3 \eta} \\ \delta_G = \frac{3 \eta^2 - 4 \eta + 2}{2 \eta (3 \eta - 2)} \end{cases}$$

5. UTILISATION DES TABLES DE FAESSEL – ROBINSON – MORISSET

1. HYPOTHÈSES

Les tables s'appliquent aux poteaux bi-articulés ou aux mâts dont les sections sont de la forme :



5.2. ARGUMENTS D'ENTRÉE DANS LES TABLES

EO = excentricité relative du premier ordre :

$$EO = \frac{e_1}{h}$$

ELG = élancement géométrique :

$$ELG = \frac{l_f}{h}$$

ALPHA = distances relatives entre nappes d'aciers :

$$ALPHA = \frac{a}{h}$$

EPSU = raccourcissement du béton correspondant à la résistance réduite en flexion - f_{bu} - avec :

- pour $\Phi = 0$ (courte durée)
- pour $\Phi = 2$ (longue durée)

$$EPSU = 2/1\ 000$$

$$EPSU = 6/1\ 000$$

SIGE = résistance de calcul de l'acier en bars ($\approx 0,1\text{MPa}$) :

$$SIGE = \frac{f_c}{\gamma_s} = f_{cd}$$

PIMEC = pourcentage mécanique d'armatures :

$$PIMEC = \frac{A \cdot f_{cd}}{B \cdot f_{bu}}$$

$$\frac{1\ 000\ NU}{B \cdot SIGJ} = 1\ 000 \frac{N_{u,c}}{B \cdot f_{bu}} = 1\ 000\ v_u = \text{mille fois la charge critique de flambement relative :}$$

$$1\ 000\ v_u = 1\ 000 \frac{N_{u,c}}{B \cdot f_{bu}}$$

$$100 \frac{E - E_0}{E} = 100 \frac{f_c}{e_1} = \text{cent fois la flèche ultime relative } f_c \text{ (correspondant à } N_{u,c} \text{) :}$$

$$100 \frac{f_c}{e_1}$$

5.3. EXTRAIT DES TABLES

SECTION RECTANGULAIRE-FLAMBEMENT DANS UN PLAN MEDIAN

EO ELG

VALEURS DE $(1000 \cdot NU) / (B \cdot SIGJ)$ ET DE $100 \cdot (E - E_0) / E$

0,30 30

ALPHA	0,60	0,60	0,75	0,75	0,90	0,90
EPSU	0,002	0,006	0,002	0,006	0,002	0,006
SIGE PIMEC						
3000 0,0	57 22	19 22	57 22	19 22	57 22	19 22
3000 0,025	79 34	43 95	88 40	52 85	98 44	62 78
3000 0,050	101 56	65 107	117 54	80 98	138 76	96 91
3000 0,075	123 81	83 116	146 79	103 106	174 82	127 100
3000 0,100	143 98	99 123	172 90	125 112	206 86	152 106
3000 0,150	177 107	128 133	217 101	164 123	262 94	194 118
3000 0,200	206 111	155 142	256 108	195 133	313 101	230 129
3000 0,300	257 128	203 155	327 118	247 148	392 89	291 146
3000 0,600	388 149	312 125	493 101	379 93	580 74	442 101
3000 1,000	540 132	448 115	683 90	554 79	801 67	642 158
4000 0,0	57 22	19 22	57 22	19 22	57 22	19 22
4000 0,025	73 31	37 73	80 35	44 69	88 38	52 67
4000 0,050	90 45	56 128	102 44	68 117	118 59	82 105
4000 0,075	107 62	72 138	124 59	89 127	148 84	109 118
4000 0,100	123 87	86 145	147 85	107 133	174 83	133 124
4000 0,150	152 108	111 158	185 105	142 145	224 113	177 135
4000 0,200	177 121	134 169	219 118	173 154	268 120	212 145
4000 0,300	220 133	176 183	278 141	228 153	346 132	271 138
4000 0,600	325 155	284 191	432 153	359 128	533 112	427 93
4000 1,000	456 192	408 172	609 134	521 118	745 99	622 86
5000 0,0	57 22	19 22	57 22	19 22	57 22	19 22
5000 0,025	70 29	33 54	75 32	39 52	82 35	45 74
5000 0,050	83 39	49 145	94 45	59 136	106 50	72 127
5000 0,075	97 51	63 161	111 50	78 146	130 69	95 136
5000 0,100	110 63	76 169	128 60	95 153	153 89	117 143
5000 0,150	135 95	99 182	162 92	125 167	194 90	155 155
5000 0,200	157 111	119 195	192 108	153 177	234 136	193 164
5000 0,300	195 124	155 213	243 120	204 192	302 152	254 153
5000 0,600	285 145	253 246	374 179	333 178	477 153	407 129
5000 1,000	391 188	234 367	536 180	483 160	678 134	592 117

5.4. UTILISATION DES TABLES

5.4.1. Dimensionnement des armatures

$$\left. \begin{aligned}
 E0 &= \frac{e_1}{h} \\
 ELG &= \frac{l_f}{h} \\
 ALPHA &= \frac{a}{h} \\
 EPSU &= \epsilon_{bc} (1 + \alpha\Phi) \\
 SIGE &= f_{ed} \\
 1\,000\,v_u &= 1\,000 \frac{N_u}{B \cdot f_{bu}}
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow PIMEC = \frac{A \cdot f_{ed}}{B \cdot f_{bu}} \Rightarrow A = PIMEC \frac{B \cdot f_{bu}}{f_{ed}}$$

5.4.2. Vérification au flambement

$$\left. \begin{aligned}
 E0 &= \frac{e_1}{h} \\
 ELG &= \frac{l_f}{h} \\
 ALPHA &= \frac{a}{h} \\
 EPSU &= \epsilon_{bc} (1 + \alpha\Phi) \\
 SIGE &= f_{ed} \\
 PIMEC &= \frac{A \cdot f_{ed}}{B \cdot f_{bu}}
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} v_u = \frac{N_{u,c}}{B \cdot f_{bu}} \Rightarrow N_{u,c} = \frac{(1\,000\,v_u) B \cdot f_{bu}}{1\,000} \\ 100 \frac{f_c}{c_1} \Rightarrow f_c \end{cases}$$

5.5. INTERPOLATIONS

5.5.1. Interpolations sur NU et PIMEC

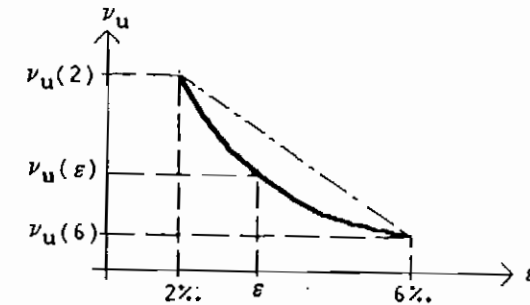
Les tables et abaques ont été établis pour deux valeurs de l'abscisse ϵ^* du sommet du diagramme contraintes-déformations du béton :

$\epsilon^* = 2/1\,000$ pour des charges instantanées,

$\epsilon^* = 6/1\,000$ pour des charges de longue durée d'application.

On doit donc interpoler entre ces deux cas lorsque les charges appliquées n'ont pas toutes la même durée d'application.

Le diagramme charge-raccourcissement du béton n'étant pas linéaire, une interpolation linéaire va dans le sens de l'insécurité.



Par conséquent, on interpolera paraboliquement pour les valeurs de la charge ultime N_u , ou ce qui revient au même pour les valeurs de v_u :

$$\Delta\epsilon = K(\Delta v_u)^2$$

On a donc :

$$\frac{v_u(\epsilon) - v_u(2)}{v_u(6) - v_u(2)} = \sqrt{\frac{\epsilon - 2}{6 - 2}}$$

soit :

$$\begin{cases} v_u(\epsilon) = v_u(2) + [v_u(6) - v_u(2)] \sqrt{\frac{\epsilon - 2}{4}} \\ \epsilon \text{ en millièmes} \end{cases}$$

Or, pour tenir compte de l'importance relative des charges de longue durée d'application, on a :

$$\begin{cases} \epsilon = \frac{2}{1\,000} (1 + \alpha\Phi) \\ \alpha = \frac{M_1^L}{M_1} = \frac{M_1^L \left(G + \sum_{i \geq 1} \psi_{2i} \cdot Q_i \right)}{M_1 \left(G + Q_1 + \sum_{i \geq 2} \psi_{\alpha i} \cdot Q_i \right)} \\ \Phi = 2 \end{cases}$$

on obtient ainsi :

$$\frac{\epsilon - 2}{4} = \frac{2(1 + \alpha\Phi) - 2}{4} = \frac{\alpha\Phi}{2} = \alpha$$

D'où les formules d'interpolation deviennent (en posant pour simplifier l'écriture $\bar{\omega} = \omega$) :

$$\begin{aligned} \nu_u(\varepsilon) &= \nu_u(2) + [\nu_u(6) - \nu_u(2)] \sqrt{\alpha} \\ \bar{\omega}(\varepsilon) &= \bar{\omega}(2) + [\bar{\omega}(6) - \bar{\omega}(2)] \sqrt{\alpha} \end{aligned}$$

Pour les flèches, on interpolera linéairement.

5.2. Interpolation simultanée sur SIGE et PIMEC

Pour les poteaux assez élancés et chargés avec des excentricités modérées, la charge ultime est indépendante de la limite d'élasticité de l'acier tant que celle-ci n'est pas trop faible.

Comparons les valeurs de ν_u obtenues pour deux valeurs f_{ed1} et f_{ed2} de SIGE et des valeurs de PIMEC valant respectivement $\bar{\omega}_1$ et $\bar{\omega}_2 = \bar{\omega}_1 \cdot \frac{f_{ed2}}{f_{ed1}}$:

$$\left. \begin{aligned} E_0 &= 0,30 \\ ELG &= 30 \\ ALPHA &= 0,75 \\ EPSU &= 0,002 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \text{SIGE} &= 3\,000 \\ \text{PIMEC1} &= 0,15 \\ \text{SIGE} &= 4\,000 \\ \text{PIMEC2} &= 0,15 \cdot \frac{4\,000}{3\,000} = 0,2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \nu_u = 0,217 \quad \text{écart 1 \%}$$

Par conséquent, il est inutile dans ce cas de considérer la valeur vraie de la contrainte de l'acier. Il suffit de considérer la valeur ronde la plus proche.

6. CORRECTIONS DIVERSES

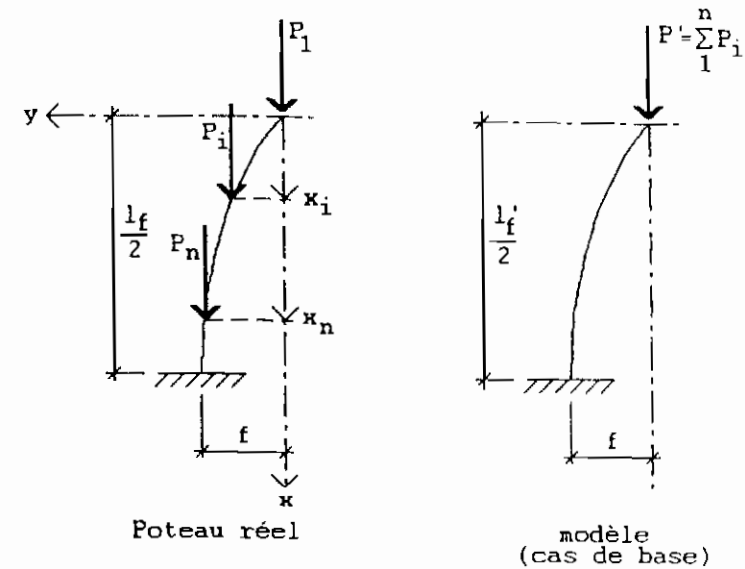
6.1. INTRODUCTION

Dans un certain nombre de problèmes, on peut se rapporter au cas de base (poteau en console) et n'étudier l'équilibre que dans une seule section en se conformant au principe suivant. Les deux sections les plus sollicitées (cas de base et cas réel) sont soumises :

- 1) au même effort normal N ,
- 2) au même moment du premier ordre M_1 ,
- 3) au même moment du second ordre pour une même courbure, à condition que le poteau ait une section constante (béton et armatures).

En écrivant ces différentes conditions, on arrive aux résultats ci-après.

6.2. MÂT DE SECTION CONSTANTE CHARGÉ À PLUSIEURS NIVEAUX



Sollicitations dans la section d'encastrement du poteau réel :

$$\begin{cases} N = \sum_{i=1}^n P_i \\ M = M_1 + \sum_{i=1}^n P_i \cdot f \left(1 - \sin \frac{\pi \cdot x_i}{l_f} \right) \\ = M_1 + \frac{l_f^2}{\pi^2} \cdot \frac{1}{r} \cdot \sum_{i=1}^n P_i \left(1 - \sin \frac{\pi \cdot x_i}{l_f} \right) \end{cases}$$

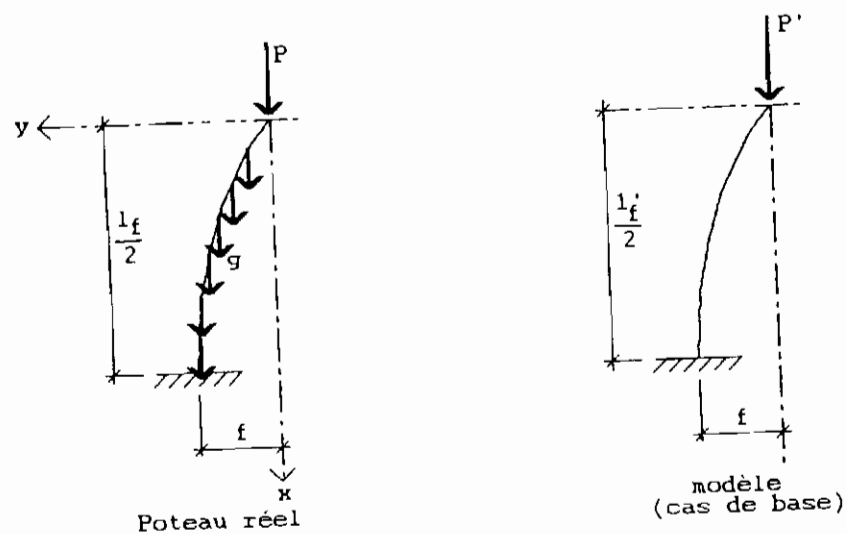
Sollicitations dans la section d'encastrement du modèle :

$$\begin{cases} N' = P' \\ M' = M'_1 + P' \cdot f = M'_1 + P' \cdot \frac{l_f^2}{\pi^2} \cdot \frac{1}{r} \end{cases}$$

Par identification, le modèle est parfaitement défini par :

$$\begin{aligned} P' &= \sum_1^n P_i \\ M'_1 &= M_1 \\ l'_f &= l_f \sqrt{\frac{\sum_1^n P_i (1 - \sin \frac{\pi x_i}{l_f})}{\sum_1^n P_i}} \end{aligned}$$

6.3. MÂT-EFFET DU POIDS PROPRE



Sollicitations dans la section d'encastrement du poteau réel :

$$\begin{aligned} N &= P + \int_0^{\frac{l_f}{2}} g dx \\ M &= M_1 + \frac{l_f^2}{\pi^2} \frac{1}{r} \left[P + \int_0^{\frac{l_f}{2}} g (1 - \sin \frac{\pi x}{l_f}) dx \right] \\ &= M_1 + \frac{l_f^2}{\pi^2} \frac{1}{r} \left[P + g l_f \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \right) \right] \end{aligned}$$

Sollicitations dans la section d'encastrement du modèle :

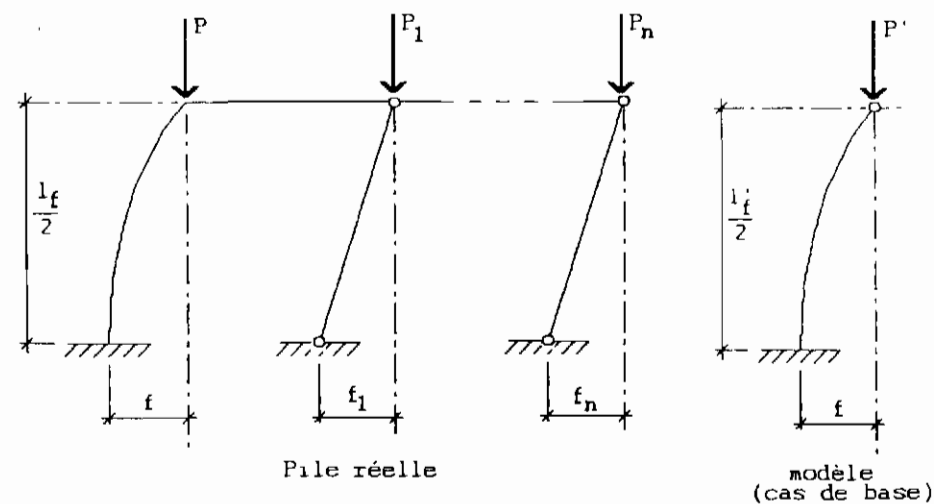
$$\begin{cases} N' = P' \\ M' = M'_1 + P' \cdot f = M'_1 + P' \cdot \frac{l_f^2}{\pi^2} \cdot \frac{1}{r} \end{cases}$$

Par identification, le modèle est parfaitement défini par :

$$\begin{aligned} P' &= P + \frac{g l_f}{2} \\ M'_1 &= M_1 \\ l'_f &= l_f \sqrt{1 - \frac{g l_f}{\pi (P + \frac{g l_f}{2})}} \end{aligned}$$

6.4. PILE DE CONTREVENTEMENT

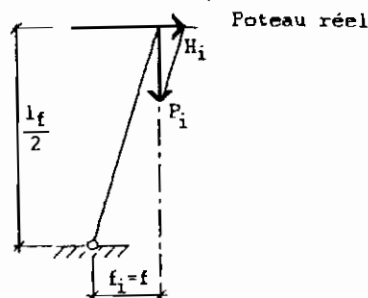
Une pile de contreventement est une console encastree en pied et liée en tête par un élément considéré comme indéformable à n poteaux sans stabilité propre, tous de même raideur.



Du fait de la traverse, les déplacements en tête des poteaux sont tous égaux :

$$f_i = f \text{ quel que soit } i.$$

L'effort horizontal en tête de chaque poteau vaut :



$$H_i = P_i \frac{f}{\frac{l_f}{2}}$$

D'où le moment partiel du second ordre :

$$M_{i2} = H_i \cdot \frac{l_f}{2} = P_i \cdot f$$

Puis le moment total du 2^e ordre au pied de la pile :

$$M_2 = f \left[P + \sum_i^n P_i \right]$$

Sollicitations en pied de la pile de contreventement :

$$\begin{cases} N = P \\ M = M_1 + f \left[P + \sum_i^n P_i \right] \\ = M_1 + \frac{l_f^2}{\pi^2} \cdot \frac{1}{r} \left[P + \sum_i^n P_i \right] \end{cases}$$

Sollicitations dans la section d'encastrement du modèle :

$$\begin{cases} N' = P' \\ M' = M'_1 + P' \cdot f = M'_1 + P' \cdot \frac{l_f^2}{\pi^2} \cdot \frac{1}{r} \end{cases}$$

Par identification, le modèle est parfaitement défini par :

$$\begin{cases} P' = P \\ M'_1 = M_1 \\ l'_f = l_f \sqrt{1 + \frac{\sum_i^n P_i}{P}} \end{cases}$$

Remarque

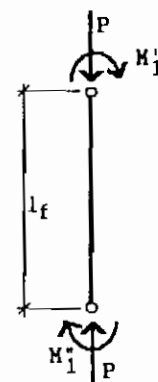
Dans le moment du premier ordre interviennent :

- 1) l'excentricité additionnelle due à l'inclinaison accidentelle de 1/100 rd,
- 2) les déplacements horizontaux en tête de chaque poteau dus au retrait et aux variations de température dans la traverse,

d'où, avec les indices L et C pour les charges de longue et de courte durée d'application :

$$\begin{cases} M^L = \left(P^L + \sum_i^n P_i^L \right) \frac{l_f}{2} \cdot \frac{1}{100} + \sum_i^n P_i^L \cdot \Delta_i^L \\ M^C = \left(P^C + \sum_i^n P_i^C \right) \frac{l_f}{2} \cdot \frac{1}{100} + \sum_i^n P_i^C \cdot \Delta_i^C \end{cases}$$

6.5. POTEaux ARTICULÉS SOUMIS À DES MOMENTS DIFFÉRENTS À LEURS DEUX EXTRÉMITÉS



M'_1 et M''_1 = moments appliqués aux deux extrémités, pouvant différer en signe, mais tels que :

$$|M''_1| > |M'_1|$$

Considérer un moment constant sur la longueur l_f :

$$M_1 = 0,4M'_1 + 0,6M''_1$$

avec M' et M'' en valeur algébrique.

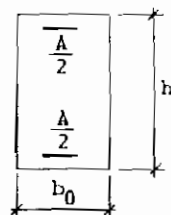
Faire les vérifications suivantes :

- 1) état-limite ultime de stabilité de forme du mât de hauteur $l_f/2$ soumis à M_1 et $N_u = P$,
- 2) vérifier la résistance de la section du poteau réel la plus sollicitée (soumise à M''_1 et $N_u = P$) sans tenir compte de l'excentricité du 2^e ordre e_2 pour le calcul en flexion composée.

7. UTILISATION DES ABAQUES DE CAPRA

7.1. DOMAINE D'APPLICATION

Sections rectangulaires à deux nappes d'armatures symétriques :



7.2. ARGUMENTS D'ENTRÉE DANS LES ABAQUES

ϵ_u = raccourcissement ultime du béton : $\epsilon_u = 2/1\ 000$: charges instantanées,
 $\epsilon_u = 6/1\ 000$: charges de longue durée.

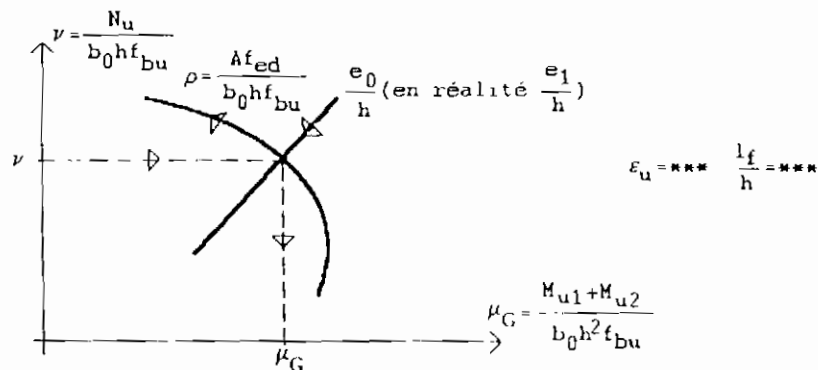
e_0 = excentricité relative du 1^{er} ordre, excentricité additionnelle incluse dans e_0 .

h = hauteur de la section dans le plan de flambement (h peut désigner la plus petite dimension).

$\nu = \frac{N_u}{b_0 \cdot h \cdot f_{bu}}$ = effort normal réduit.

l_1 = élancement géométrique.
 h

7.3. RÉSULTATS



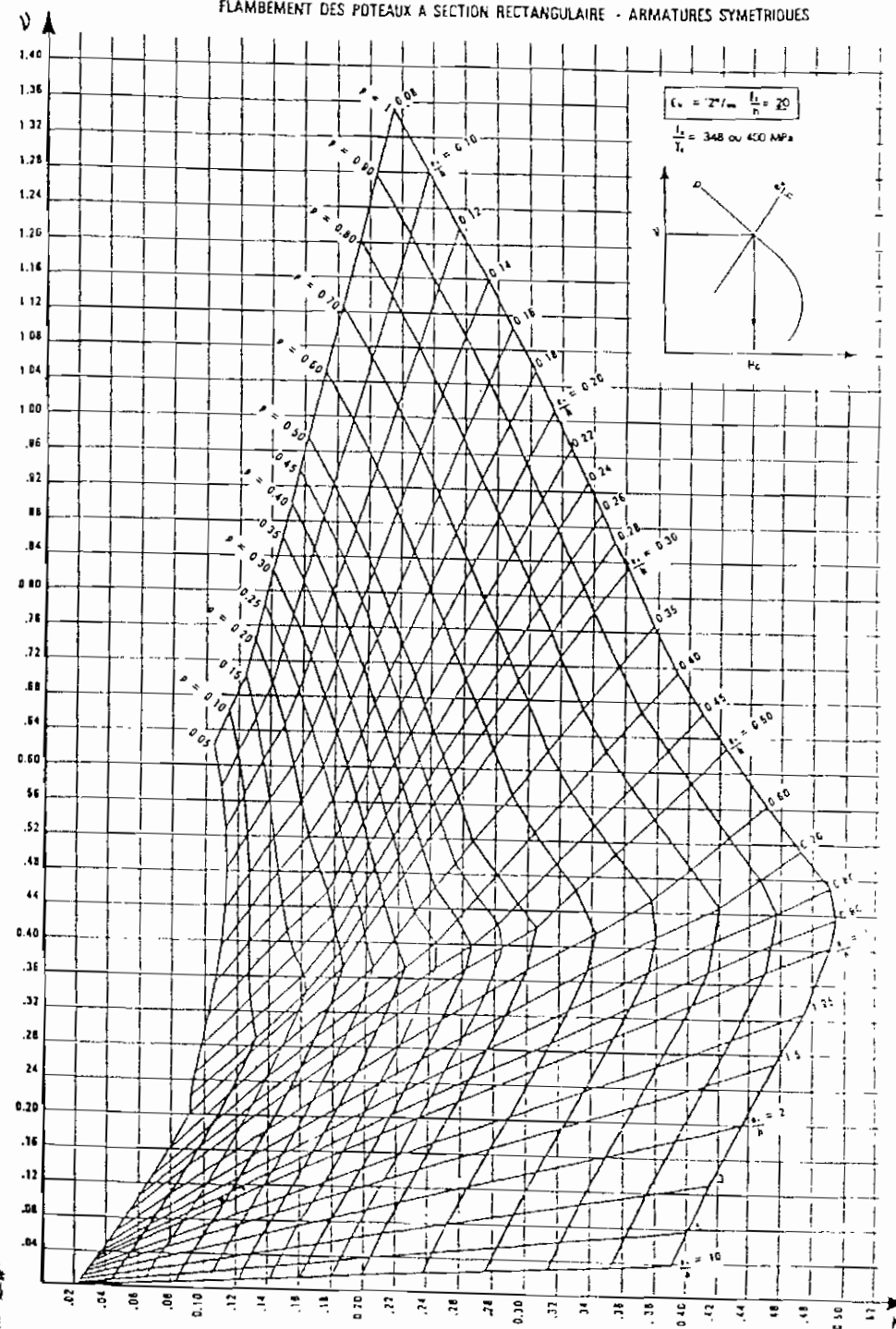
$\rho = \frac{A \cdot f_{ed}}{B \cdot f_{bu}}$ = pourcentage mécanique d'armatures,

$B = b_0 \cdot h$,

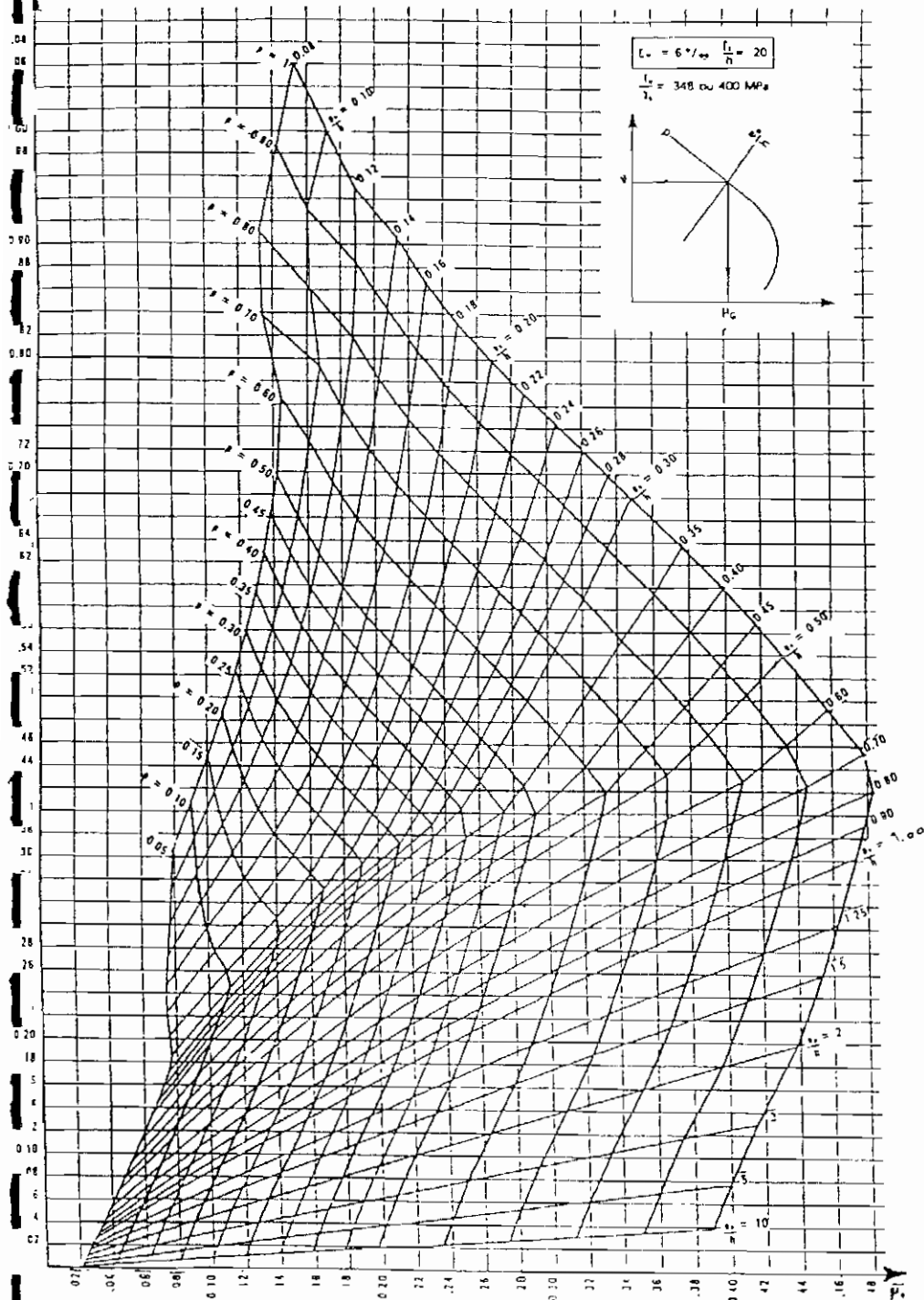
$\mu_G = \frac{M_{u1} + M_{u2}}{b_0 \cdot h^2 \cdot f_{bu}}$ = moment total réduit (1^{er} et 2^e ordre) au centre de gravité du béton seul

à l'E.L.U.

FLAMBEMENT DES POTEUX A SECTION RECTANGULAIRE - ARMATURES SYMETRIQUES

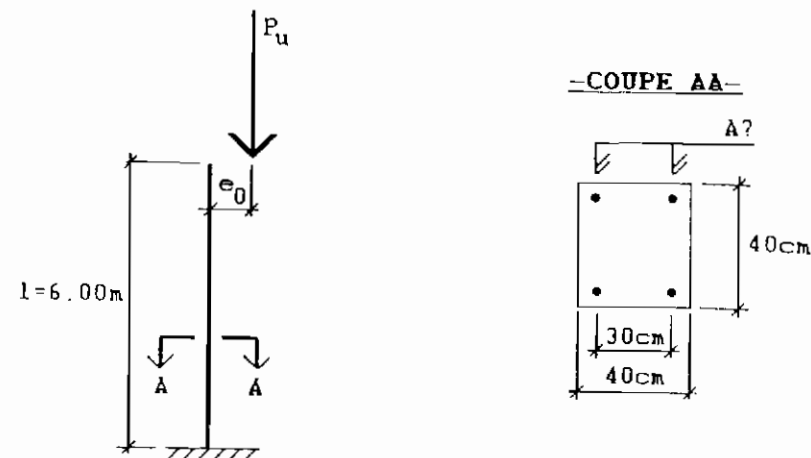


FLAMBEMENT DES POTEAUX A SECTION RECTANGULAIRE - ARMATURES SYMETRIQUES



II. EXERCICE N°1 : DIMENSIONNEMENT DE L'ARMATURE PAR LES TABLES (CHARGES DE LONGUE DURÉE)

— ÉNONCÉ —



■ Sollicitations de longue durée d'application uniquement (durée d'application supérieure à 24 heures) :

- $P_u = 0,54 \text{ MN}$,
- $e_0 = 0,096 \text{ m}$.

■ Matériaux :

- béton : $f_{c28} = 25 \text{ MPa}$,
- aciers : Fe E 500 HA.

■ On se propose de déterminer les armatures du poteau.

— CORRIGÉ —

I. NÉCESSITÉ DU CALCUL AU FLAMBEMENT

I.1. LONGUEUR DE FLAMBEMENT

$$\text{mât} \rightarrow l_1 = 2 \cdot l$$

$$l_1 = 2 \cdot 6,00 = 12,00 \text{ m}$$

1.2. EXCENTRICITÉ DU 1^{er} ORDRE

Pour un poteau chargé de façon excentrée :

$$e_a = \text{Max} \begin{cases} 2 \text{ cm} \\ \frac{l}{250} \end{cases} \quad e_a = 2,4 \text{ cm} = \text{Max} \begin{cases} 2 \text{ cm} \\ \frac{600}{250} = 2,4 \text{ cm} \end{cases}$$

Excentricité additionnelle :

$$e_a \quad e_a = 2,4 \text{ cm}$$

Excentricité structurale :

$$e_0 \quad e_0 = 9,6 \text{ cm}$$

Excentricité du 1^{er} ordre :

$$e_1 = e_0 + e_a \quad e_0 + e_a = e_1 = 12,00 \text{ cm}$$

1.3. NÉCESSITÉ DU CALCUL AU FLAMBEMENT

$$\frac{l_1}{h} > \text{Max} \begin{cases} 15 \\ 20 \frac{e_1}{h} \end{cases} \quad \frac{12}{0,40} = 30 > 15 = \text{Max} \begin{cases} 15 \\ 20 \frac{12}{40} = 6 \end{cases}$$

⇒ VÉRIFICATION AU FLAMBEMENT IMPOSÉE.

2. DIMENSIONNEMENT DE L'ARMATURE

2.1. ARGUMENTS D'ENTRÉE DANS LES TABLES

Excentricité relative du 1^{er} ordre :

$$E0 = \frac{e_1}{h} \quad E0 = \frac{0,12}{0,40} = 0,30$$

Élancement géométrique :

$$ELG = \frac{l_1}{h} \quad ELG = \frac{12,00}{0,40} = 30$$

Distance relative entre nappes d'armatures :

$$ALPHA = \frac{a}{h} \quad ALPHA = \frac{0,30}{0,40} = 0,75$$

Raccourcissement ultime du béton :

$$EPSU \quad \text{Charges de longue durée} \} EPSU = 0,006$$

Résistance de calcul des armatures :

$$SIGE = f_{cd} = \frac{f_c}{\gamma_s} \quad SIGE = \frac{500}{1,15} = 435 \text{ MPa} = 4 \text{ 350 bars}$$

Effort normal relatif :

$$f_{bu} = 0,85 \cdot \frac{f_{c28}}{0 \cdot \gamma_b} \quad f_{bu} = 0,85 \cdot \frac{25}{1 \cdot 1,5} = 14,2 \text{ MPa}$$

$$1 \text{ 000 } v_u = 1 \text{ 000 } \frac{N_u}{B \cdot f_{bu}} \quad 1 \text{ 000 } v_u = 1 \text{ 000 } \frac{0,54}{0,40 \cdot 0,40 \cdot 14,2} = 238$$

2.2. ARMATURES SORTIES DES TABLES

Les tables donnent :

	E0	ELG
	0,30	30
ALPHA	0,75	
EPSU	0,006	
SIGE PIMEC		
4000	0,30	← 228 153
4000	0,60	← 359 128
5000	0,30	← 204 192
5000	0,60	← 333 178

Par interpolation linéaire sur 1 000 v_u :

4000	0,323	← 238
5000	0,379	← 238

Par interpolation linéaire sur SIGE entre 4 000 et 5 000 :

4350	0,343	← 238
------	-------	-------

D'où le pourcentage mécanique d'armatures :

$$PIMEC = 0,343$$

Puis les aciers :

$$PIMEC = \frac{A \cdot f_{cd}}{B \cdot f_{bu}}$$

$$\Rightarrow A = PIMEC \cdot \frac{B \cdot f_{bu}}{f_{cd}}$$

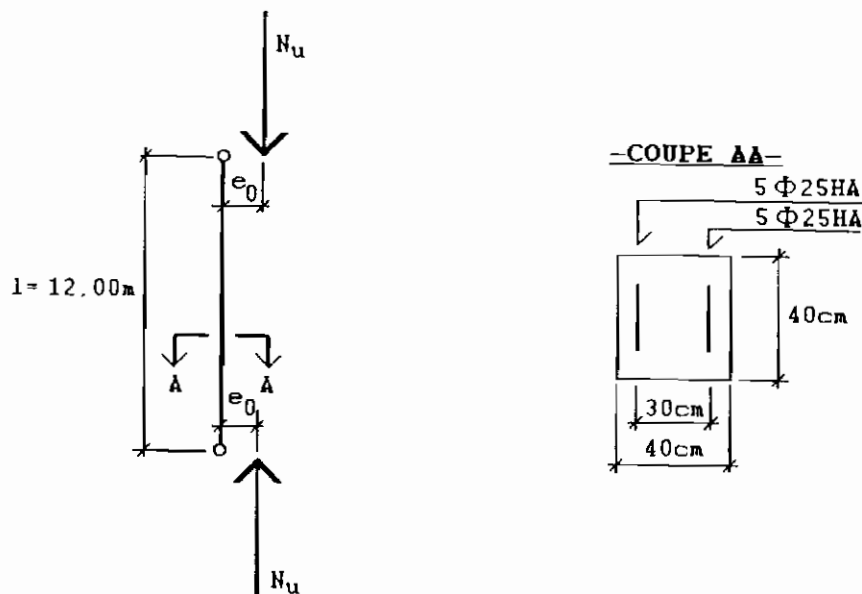
$$A = 0,343 \cdot \frac{0,40 \cdot 0,40 \cdot 14,2}{435} \cdot 10^4$$

$$A = 17,91 \text{ cm}^2$$

$$\Rightarrow 4\Phi 25 \text{ IIA} : A = 4 \cdot 4,91 = 19,64 \text{ cm}^2$$

III. EXERCICE N° 2 : VÉRIFICATION PAR LA MÉTHODE DE L'ÉQUILIBRE ET PAR LES TABLES

— ÉNONCÉ —



■ Sollicitations de durée d'application supérieure à 24 heures :

$$\left. \begin{array}{l} N_G = 298 \text{ kN} \\ N_Q = 298 \text{ kN} \end{array} \right\} \text{excentrées de } e_0 = 7,2 \text{ cm}$$

poids propre négligé.

$\psi_2 = 0$ pour les valeurs quasi permanentes de Q .

■ Matériaux :

béton : $f_{c28} = 25 \text{ MPa}$,

aciers : Fe E 500 HA.

■ On se propose de vérifier l'état-limite ultime de stabilité de forme :

- 1) en utilisant la méthode de l'équilibre,
- 2) en utilisant les tables de Faessel.

— CORRIGÉ —

1. NÉCESSITÉ DU CALCUL AU FLAMBEMENT

1.1. LONGUEUR DE FLAMBEMENT

$$\text{poteau bi-articulé} \Rightarrow l_f = l \quad l_f = 12,00 \text{ m}$$

1.2. EXCENTRICITÉ DU 1^{er} ORDRE

Pour un poteau chargé de façon excentrée :

$$e_a = \text{Max} \left\{ \begin{array}{l} 2 \text{ cm} \\ \frac{l}{250} \end{array} \right\} \quad e_a = 4,8 \text{ cm} = \text{Max} \left\{ \begin{array}{l} 2 \text{ cm} \\ \frac{1200}{250} = 4,8 \end{array} \right.$$

Excentricité additionnelle :

$$e_a \quad e_a = 4,8 \text{ cm}$$

Excentricité structurale :

$$e_0 \quad e_0 = 7,2 \text{ cm}$$

Excentricité du 1^{er} ordre :

$$e_1 = e_0 + e_a \quad e_0 + e_a = e_1 = 12,00 \text{ cm}$$

1.3. NÉCESSITÉ DU CALCUL AU FLAMBEMENT

$$\frac{l_f}{h} < \text{Max} \left\{ \begin{array}{l} 15 \\ 20 \frac{e_1}{h} \end{array} \right\} \quad \frac{12}{0,40} = 30 > 15 = \text{Max} \left\{ \begin{array}{l} 15 \\ 20 \frac{12}{40} = 6 \end{array} \right.$$

⇒ VÉRIFICATION AU FLAMBEMENT IMPOSÉE

2. MÉTHODE DE L'ÉQUILIBRE

2.1. PREMIÈRE ITÉRATION

a) Déformations de départ

Pour les aciers :

$$f_{ed} = \frac{f_e}{\gamma_s} \quad f_{ed} = \frac{500}{1,15} = 435 \text{ MPa}$$

$$\varepsilon_s = \frac{f_{ed}}{E_s} \quad \varepsilon_s = \frac{435}{200\,000} = 2,18/1\,000$$

Pour le béton :

Φ = coefficient de fluage

$\Phi = 2$

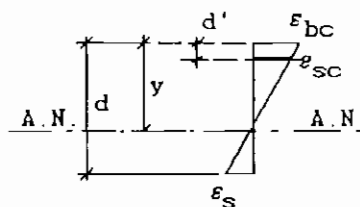
$$\alpha = \frac{M_1 \left(G + \sum_{i \geq 1} \psi_{2i} \cdot Q_i \right)}{M_1 \left(G + Q_1 + \sum_{i \geq 2} \psi_{0i} \cdot Q_i \right)} = \frac{N_G \cdot e_0}{N_G \cdot e_0 + N_Q \cdot e_0}$$

$$\alpha = \frac{298}{298 + 298} = 0,500$$

$$\epsilon_{bc} = \frac{2}{1\,000} (1 + \alpha \Phi)$$

$$\epsilon_{bc} = \frac{2}{1\,000} (1 + 0,5 \cdot 2) = 4/1\,000$$

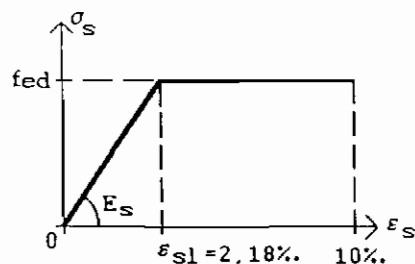
b) Contrainte des aciers comprimés



$$y = d \frac{\epsilon_{bc}}{\epsilon_{bc} + \epsilon_s} \quad y = (0,40 - 0,05) \frac{\frac{4}{1\,000}}{\frac{4}{1\,000} + \frac{2,18}{1\,000}} = 0,2265 \text{ m}$$

$$\epsilon_{sc} = \epsilon_{bc} \frac{y - d'}{y} \quad \epsilon_{sc} = \frac{4}{1\,000} \cdot \frac{0,2265 - 0,05}{0,2265} = 3,12/1\,000$$

σ_{sc} par diagramme de calcul des aciers



$$\epsilon_{sc} > \epsilon_{sl} \Rightarrow \sigma_{sc} = f_{ed} = 435 \text{ MPa}$$

c) Effort normal interne

Béton comprimé :

$$F_{bc} = \psi \cdot b_0 \cdot y \cdot f_{bu} \quad F_{bc} = \frac{2}{3} \cdot 0,40 \cdot 0,2265 \cdot 14,2 = 0,8577 \text{ MN}$$

$$\psi = \frac{2}{3} \text{ puisque } \epsilon_{bc} = \frac{2}{1\,000} (1 + \alpha \Phi)$$

Aciers comprimés :

$$F_{sc} = A' \cdot \sigma_{sc} \quad F_{sc} = 5 \cdot 4,91 \cdot 10^{-4} \cdot 435 = 1,0679 \text{ MN}$$

Aciers tendus :

$$-F_s = -A \cdot \sigma_s \quad -F_s = -5 \cdot 4,91 \cdot 10^{-4} \cdot 435 = -1,0679 \text{ MN}$$

Effort normal interne :

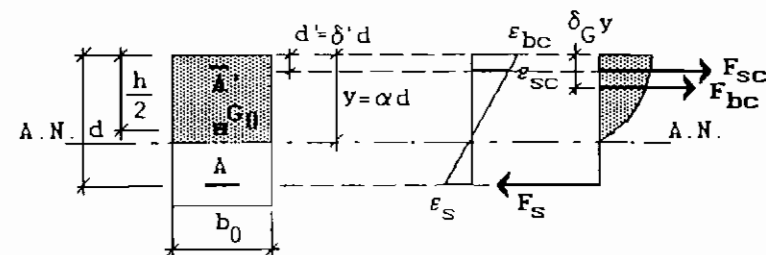
$$N_i = F_{bc} + F_{sc} - F_s \quad N_i = 0,8577 \text{ MN}$$

Effort normal externe :

$$N_{ext} = 1,35 N_G + 1,5 N_Q \quad N_{ext} = 1,35 \cdot 0,298 + 1,5 \cdot 0,298 = 0,849 \text{ MN}$$

$$N_i = 0,8577 \text{ MN} > 0,849 \text{ MN} = N_{ext} \text{ O.K.}$$

d) Moment fléchissant interne



Béton comprimé :

$$M_{bc} = F_{bc} \left(\frac{h}{2} - \delta_G \cdot y \right) \quad M_{bc} = 0,8577 \left(\frac{0,40}{2} - \frac{3}{8} \cdot 0,2265 \right) = 0,09869 \text{ mMN}$$

$$\delta_G = \frac{3}{8} \text{ puisque } \epsilon_{bc} = \frac{2}{1\,000} (1 + \alpha \Phi)$$

Aciers comprimés :

$$M_{sc} = F_{sc} \left(\frac{h}{2} - d' \right) \quad M_{sc} = 1,0679 \left(\frac{0,40}{2} - 0,05 \right) = 0,1602 \text{ mMN}$$

Aciers tendus :

$$M_s = F_s \left(d - \frac{h}{2} \right)$$

$$M_s = 1,0679 \left(0,40 - 0,05 - \frac{0,40}{2} \right) = 0,1602 \text{ mMN}$$

Total :

$$M_i = M_{bc} + M_{sc} + M_s \quad M_i = 0,4191 \text{ mMN}$$

e) Excentricité interne

$$e_{int} = \frac{M_i}{N_i} \quad e_{int} = \frac{0,4191}{0,8577} = 0,489 \text{ m}$$

f) Excentricité externe

Flèche ultime correspondant à la déformée en demi-onde de sinuséide :

$$\frac{l}{r} = \frac{\epsilon_{bc} + \epsilon_s}{d} \quad \frac{l}{r} = \frac{4,00 + 2,18}{0,35} \cdot 10^{-3} = 0,0177 \text{ m}^{-1}$$

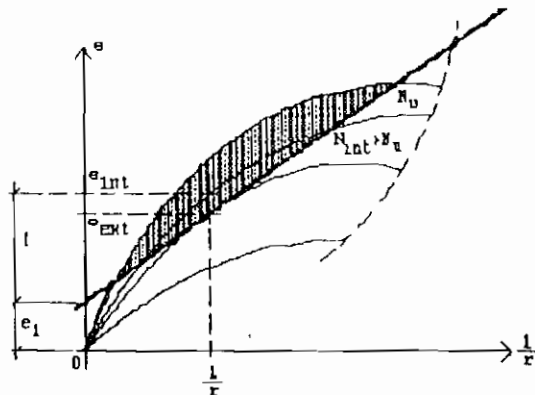
$$f = \frac{l_f^2}{\pi^2} \cdot \frac{1}{r} \quad f = \frac{12,00^2}{\pi^2} \cdot 0,0177 = 0,2582 \text{ m}$$

Excentricité externe :

$$e_{ext} = e_i + f \quad e_{ext} = 0,120 + 0,2582 = 0,3782 \text{ m}$$

g) Conclusion

L'équilibre est assuré si :



$$\left\{ \begin{array}{l} N_{int} > N_{ext} \\ e_{int} > e_{ext} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} N_{int} = 0,858 \text{ MN} > N_{ext} = 0,849 \text{ MN} \\ e_{int} = 0,489 \text{ m} > e_{ext} = 0,378 \text{ m} \end{array} \right. \quad \text{O.K.}$$

⇒ La stabilité est assurée.

3. TABLES DE FAESSEL

3.1. ARGUMENTS D'ENTRÉE DANS LES TABLES

Excentricité relative du 1^{er} ordre :

$$E0 = \frac{e_i}{h} \quad E0 = \frac{0,12}{0,40} = 0,30$$

Élancement géométrique :

$$ELG = \frac{l_f}{h} \quad ELG = \frac{12,00}{0,40} = 30$$

Distance relative entre nappes d'armatures :

$$ALPHA = \frac{a}{h} \quad ALPHA = \frac{0,30}{0,40} = 0,75$$

Raccourcissement ultime du béton :

$$\text{Charges} \begin{cases} \text{courte durée} \\ \text{longue durée} \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} EPSU = 0,002 \\ EPSU = 0,006 \end{array}$$

Résistance de calcul des armatures :

$$SIGE = f_{ed} = \frac{f_e}{\gamma_s} \quad SIGE = \frac{500}{1,15} = 435 \text{ MPa} = 4 \text{ 350 bars}$$

Pourcentage mécanique d'armatures :

$$PIMEC = \frac{A \cdot f_{ed}}{B \cdot f_{bu}} \quad PIMEC = \frac{2 \cdot 5 \cdot 4,91 \cdot 10^{-4} \cdot 435}{0,40 \cdot 0,40 \cdot 14,2} = 0,940$$

3.2. ARMATURES SORTIES DES TABLES

Les tables donnent :

		E0	ELG
		0,30	30
ALPHA	0,75	0,75	
EPSU	0,002	0,006	
SIGE PIMEC			
4000	0,60 →	432 153	359 128
4000	1,00 →	609 134	521 118
5000	0,60 →	374 179	333 178
5000	1,00 →	536 180	483 160

Par interpolation linéaire sur SIGE :

4350	0,600	→	412	162	350	146
4350	1,000	→	583	150	508	133

Par interpolation linéaire sur PIMEC :

4350	0,940	→	557	152	484	135
------	-------	---	-----	-----	-----	-----

Par interpolation parabolique sur EPSU :

$$v_u = v_u(2) + [v_u(6) - v_u(2)] \sqrt{\alpha} \quad 1\,000 v_u = 557 + [484 - 557] \sqrt{0,5} = 505$$

Effort normal relatif :

$$f_{bu} = 0,85 \frac{f_{c28}}{\theta \cdot \gamma_b} \quad f_{bu} = 0,85 \frac{25}{1 \cdot 1,5} = 14,2 \text{ MPa}$$

$$v_u = \frac{N_{uc}}{B \cdot f_{bu}} \Rightarrow N_{uc} = \frac{(1\,000 v_u)}{1\,000} B \cdot f_{bu} \quad N_{uc} = \frac{505}{1\,000} \cdot 0,40^2 \cdot 14,2 = 1,147 \text{ MN}$$

3.3. CONCLUSION

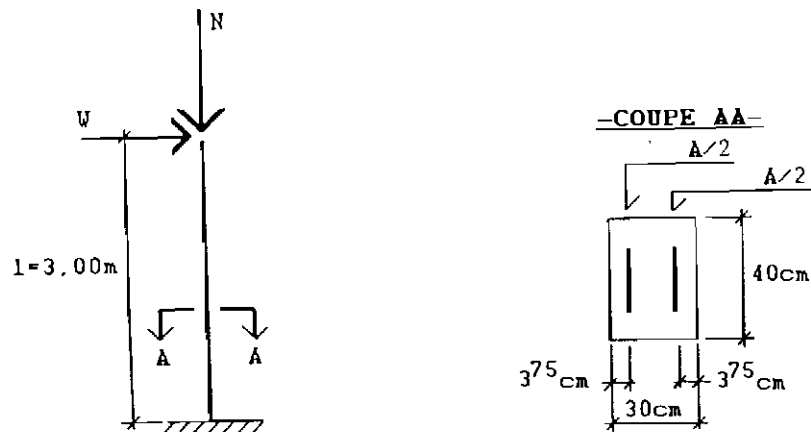
$$N_{uc} > N_u = N_{ext}$$

$$N_{uc} = 1,147 \text{ MN} > 0,849 \text{ MN} = N_u$$

⇒ LA STABILITÉ AU FLAMBEMENT
EST VÉRIFIÉE.

IV. EXERCICE N° 3 : DIMENSIONNEMENT DE L'ARMATURE PAR LES ABAQUES DE CAPRA

— ÉNONCÉ —



■ Sollicitations de durée d'application supérieure à 24 heures :

$$N_G = 383 \text{ kN},$$

$$N_Q = 175 \text{ kN},$$

$$\psi_2 = 0,4,$$

$$W = 1,2 \cdot 28,2 = 33,8 \text{ kN (pour un vent normal : 28,2 kN donné par les Règles NV),}$$

$$\psi_0 = 0,77,$$

poids propre négligeable.

■ Matériaux :

béton : $f_{c28} = 25 \text{ MPa},$

aciers : Fe E 400 HA.

■ On se propose pour la combinaison d'actions : $1,35 G + 1,5 Q + W :$

1) de déterminer les armatures du poteau par les abaques de Capra,

2) de calculer la flèche ultime du poteau.

— CORRIGÉ —

1. NÉCESSITÉ DU CALCUL AU FLAMBEMENT

1.1. LONGUEUR DE FLAMBEMENT

$$\text{mât} \Rightarrow l_f = 2 \cdot l$$

$$l_f = 2 \cdot 3,00 = 6,00 \text{ m}$$

1.2. NÉCESSITÉ DU CALCUL AU FLAMBEMENT

$$e_0 = \frac{W \cdot l}{1,35 N_G + 1,5 N_Q}$$

$$e_0 = \frac{33,8 \cdot 3,00}{1,35 \cdot 383 + 1,5 \cdot 175} = 0,130 \text{ m}$$

Pour un poteau chargé de façon excentrée :

$$e_a = \text{Max} \left\{ \begin{array}{l} 2 \text{ cm} \\ \frac{l}{250} \end{array} \right.$$

$$e_a = 2,0 \text{ cm} = \text{Max} \left\{ \begin{array}{l} 2 \text{ cm} \\ \frac{300}{250} = 1,2 \end{array} \right.$$

$$e_1 = e_0 + e_a$$

$$e_1 = 0,13 + 0,02 = 0,15 \text{ m}$$

$$\frac{l_f}{h} < \text{Max} \left\{ \begin{array}{l} 15 \\ 20 \frac{e_1}{h} \end{array} \right.$$

$$\frac{6,00}{0,30} = 20 > 15 = \text{Max} \left\{ \begin{array}{l} 15 \\ 20 \frac{0,15}{0,30} = 10 \end{array} \right.$$

⇒ VÉRIFICATION AU FLAMBEMENT
IMPOSÉE.

2. DIMENSIONNEMENT DE L'ARMATURE

2.1. ARGUMENTS D'ENTRÉE POUR LES ABAQUES

Élancement géométrique :

$$\frac{l_f}{h} = \frac{6,00}{0,30} = 20$$

Raccourcissement ultime du béton :

$$\epsilon_u = \begin{cases} 2/1\,000 : \text{courte durée} \\ 6/1\,000 : \text{longue durée} \end{cases}$$

Résistance de calcul des armatures :

$$f_{ed} = \frac{f_e}{\gamma_s} \quad f_{ed} = \frac{400}{1,15} = 348 \text{ MPa}$$

Effort normal relatif :

$$f_{bu} = 0,85 \frac{f_{c28}}{\theta \cdot \gamma_b} \quad f_{bu} = 0,85 \frac{25}{1 \cdot 1,5} = 14,2 \text{ MPa}$$

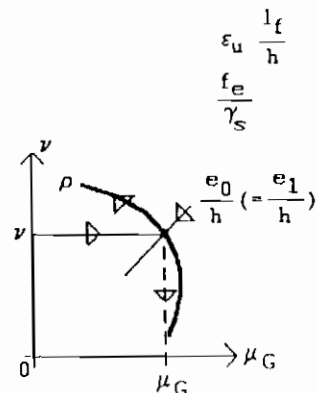
$$N_u = 1,35 \cdot N_G + 1,5 \cdot N_Q \quad N_u = 1,35 \cdot 383 + 1,5 \cdot 175 = 780 \text{ kN}$$

$$v = \frac{N_u}{B \cdot f_{bu}} \quad v = \frac{0,780}{0,40 \cdot 0,30 \cdot 14,2} = 0,458$$

Excentricité relative du 1^{er} ordre :

$$\frac{e_0}{h} \left(= \frac{e_1}{h} \right) \quad \frac{e_0}{h} = \frac{0,15}{0,30} = 0,500$$

2.2. VALEURS EXTRAITES DES ABAQUES



On obtient :

	$\epsilon_u = 2\%$	$\epsilon_u = 6\%$
ρ	0,60	0,77
μ_G	0,330	0,385

2.3. ARMATURES

Obtenues par interpolation parabolique :

$$M_1^L = 0$$

$$M_1^L = 0$$

$$M_1 = M_1^L + \psi_0 \cdot W \cdot l$$

$$M_1 = 0 + 0,77 \cdot 33,8 \cdot 3 = 78,08 \text{ mN}$$

$$\alpha = \frac{M_1^L \left(G + \sum_{i \geq 1} \psi_{2i} \cdot Q_i \right)}{M_1 \left(G + Q_1 + \sum_{i \geq 2} \psi_{0i} \cdot Q_i \right)}$$

$$\alpha = 0$$

D'où le pourcentage mécanique d'aciers :

$$\bar{\omega} = \rho = \frac{A \cdot f_{ed}}{b_0 \cdot h \cdot f_{bu}} = \rho_2 + (\rho_6 - \rho_2) \sqrt{\alpha}$$

$$\frac{A \cdot f_{ed}}{b_0 \cdot h \cdot f_{bu}} = 0,6 + (0,77 - 0,6) \sqrt{0} = 0,60$$

$$A = 0,6 \cdot 30 \cdot 40 \cdot \frac{14,2}{348} = 29,38 \text{ cm}^2$$

$$\text{soit } \frac{29,38}{2} = 14,69 \text{ cm}^2/\text{face}$$

3Φ20HA + 3Φ16HA/face :

$$A = 3 \cdot 3,14 + 3 \cdot 2,01 = 15,45 \text{ cm}^2/\text{face}$$

2.4. FLÈCHE ULTIME

Calcul fait à titre indicatif.

Moment total (1^{er} + 2^e ordre) :

$$\begin{cases} \mu_G = \frac{M_{u1} + M_{u2}}{b_0 \cdot h^2 \cdot f_{bu}} \\ \mu_G = \mu_G(2) + [\mu_G(6) - \mu_G(2)] \alpha \end{cases}$$

$$\mu_G = 0,330 + [0,385 - 0,330] 0 = 0,330$$

$$\Rightarrow M_{u1} + M_{u2} = 0,330 \cdot 0,40 \cdot 0,30^2 \cdot 14,2$$

$$= 0,169 \text{ mMN}$$

Moment du 2^e ordre :

$$M_{u1} = N_u(e_0 + e_a) \Rightarrow M_{u2}$$

$$M_{u1} = 0,780 \cdot 0,15 = 0,117 \text{ mMN}$$

$$M_{u2} = 0,169 - 0,117 = 0,052 \text{ mMN}$$

Flèche ultime :

$$M_{u2} = N_u \cdot f_u$$

$$f_u = \frac{M_{u2}}{N_u} = \frac{0,052}{0,780} = 0,067 \text{ m}$$

CHAPITRE 12

POUTRES CONTINUES – PLANCHERS

I. RAPPELS DE COURS

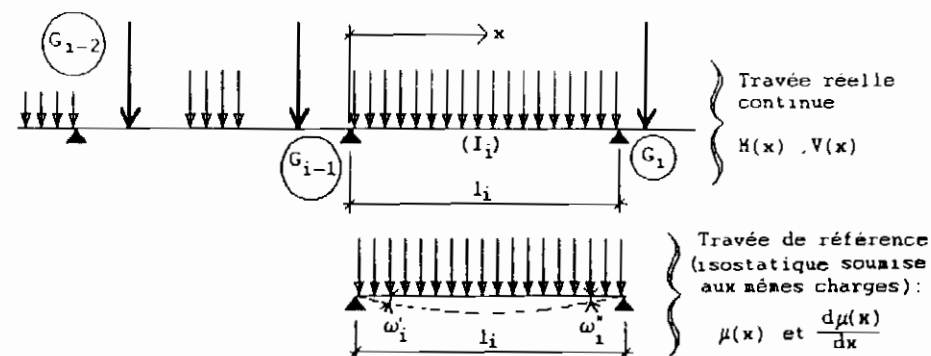
Les rappels de cours sont présentés ici en quatre parties :

- A : Poutres continues-Rappels-Adaptation,
- B : Planchers-Méthode forfaitaire
- C : Planchers-Méthode Caquot,
- D : Poutres continues-Dimensionnement.

A. POUTRES CONTINUES – RAPPELS – ADAPTATION

1. RAPPELS DE RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

Pour une travée quelconque $G_{i-1} - G_i$ d'une poutre continue, soumise à l'action d'un système quelconque de charges



On commence par déterminer les moments sur appuis :

$$\left. \begin{aligned} b_i \cdot M_{i-1} + (c_i + a_{i+1}) M_i + b_{i+1} \cdot M_{i+1} &= \omega'_{i+1} - \omega''_i \\ a_i &= 2 \cdot b_i = c_i = \frac{l_i}{3 EI_i} \quad \text{si } I_i = \text{Cste} \\ I_i &= \text{moment d'inertie de la travée } l_i \\ \omega'_i \text{ et } \omega''_i &= \text{rotations sur l'appui } G_i \\ &\quad \text{des travées de référence encadrant cet appui} \end{aligned} \right\} \text{autant d'équations que} \\ \text{d'appuis intermédiaires}$$

On obtient ensuite les moments et efforts tranchants dans la travée continue :

$$\boxed{\begin{aligned} M(x) &= \mu(x) + M_{i-1} \left(1 - \frac{x}{l_i}\right) + M_i \frac{x}{l_i} \\ V(x) &= \frac{d\mu(x)}{dx} + \frac{M_i - M_{i-1}}{l_i} \end{aligned}}$$

Pour un cas de charge donné (en tenant compte de la discontinuité due aux charges concentrées) le moment maximal en travée est obtenu en écrivant :

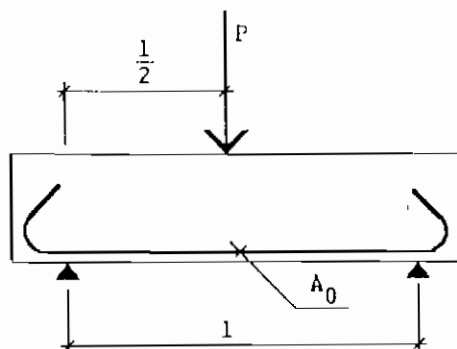
$$V(x_0) = \frac{dM}{dx} = 0 \Rightarrow x_0 = \text{abscisse du point où } M = M_{\max}$$

d'où :

$$M_{\max} = \mu(x_0) + M_{i-1} \left(1 - \frac{x_0}{l_i}\right) + M_i \frac{x_0}{l_i}$$

2. ESSAIS DE POUTRES EN BÉTON ARMÉ

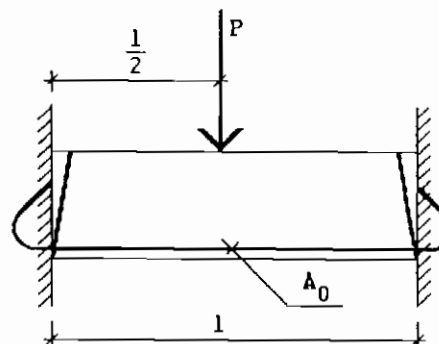
2.1. PHÉNOMÈNE D'ADAPTATION DES POUTRES EN BÉTON ARMÉ



*Pour la poutre isostatique sur deux appuis simples, soumise à l'action d'une charge concentrée variable P croissante placée à mi-portée, si A_0 est la section d'aciers en travée conduite jusqu'aux appuis,

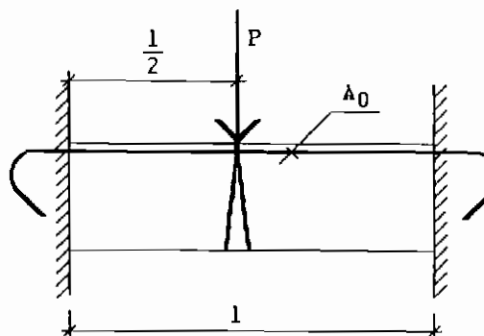
à la rupture :

$$P = P_u \Rightarrow M_u = \frac{P_u l}{4}$$



*Pour la même poutre encastree, munie d'une section A_0 d'armatures inférieures, après fissuration, on retrouve une poutre sur deux appuis simples et la charge de rupture P_u conduit, pour A_0 , à un moment de rupture :

$$M_u = \frac{P_u l}{4}$$

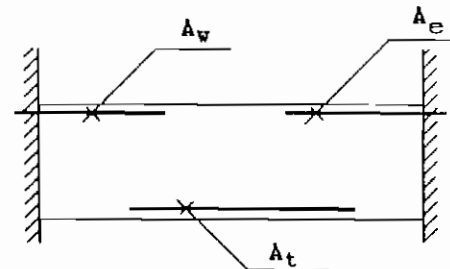


*Pour la même poutre encastree, munie d'une section A_0 d'armatures supérieures, après fissuration, on obtient deux consoles nez à nez et la charge de rupture P_u conduit, pour A_0 , à un moment de rupture :

$$M_u = \frac{P_u}{2} \cdot \frac{l}{2} = \frac{P_u l}{4}$$

Par conséquent, la charge de rupture, qui est identique pour les trois poutres, ne dépend que de la section d'aciers A_0 correspondant au fonctionnement isostatique (sur deux appuis simples), indépendamment de la position de ces aciers.

D'une manière plus générale, on est assuré d'avoir une marge permettant un transfert partiel de moment des appuis vers la travée, ou réciproquement, sans que ce transfert compromette la sécurité vis-à-vis de la rupture en adoptant :

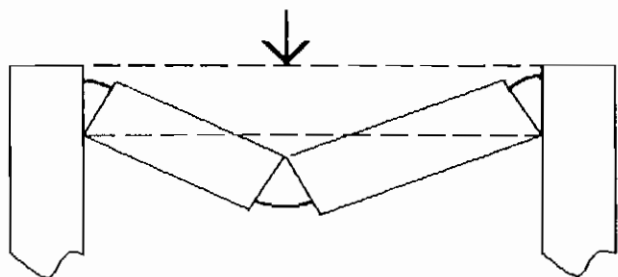


$$A_t + \frac{A_w + A_e}{2} \geq A_0$$

Si l'on multiplie cette inégalité par $z_b \cdot \sigma_s$, il vient puisque l'on a $M = A \cdot z_b \cdot \sigma_s$:

$$M_t + \frac{M_w + M_e}{2} \geq M_0$$

Dans la phase des grands allongements, la partie principale de la flèche a pour origine les rotations importantes des sections où se produira la rupture :



2.2. CONCLUSION

Une poutre en béton armé se comporte comme elle a été calculée. La fissuration des sections les moins armées permet une distribution des moments qui diffère de la distribution théorique. C'est ce que l'on appelle le PHÉNOMÈNE D'ADAPTATION ENTRE SECTIONS.

Il est possible d'appliquer aux planchers en béton armé des méthodes de calcul différentes des méthodes de continuité théoriques et de limiter l'influence des charges aux travées voisines de celle que l'on étudie.

En ce qui concerne la fissuration :

- sous l'action des charges variables, les éléments calculés par les méthodes de la continuité théorique classique se comportent mieux et ont une meilleure tenue dans le temps que les éléments calculés par les méthodes empiriques,
- ce phénomène est d'autant plus marqué que les charges variables surpassent davantage les charges permanentes.

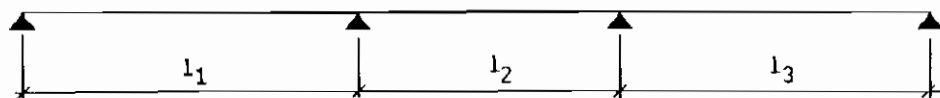
D'où les deux méthodes simplifiées de calcul des poutres continues de planchers :

- la MÉTHODE FORFAITAIRE pour les éléments supportant des charges d'exploitation modérées,
- la MÉTHODE CAQUOT pour les éléments supportant des charges d'exploitation élevées.

3. PORTÉES DES POUTRES ET PORTIQUES

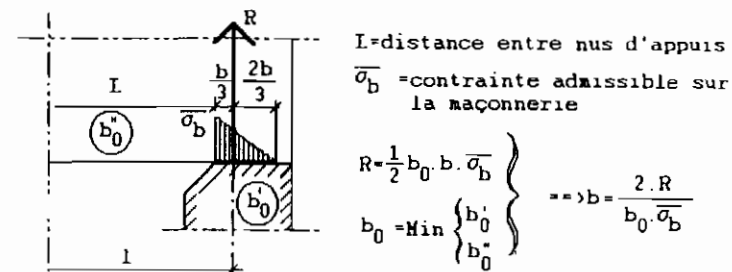
3.1. PORTÉES À PRENDRE EN COMPTE

3.1.1. Poutres sur appareils d'appui



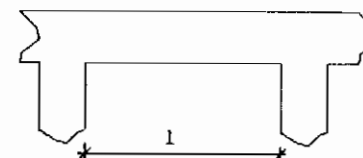
l_i = portée mesurée entre points d'application des résultantes des réactions d'appui (axes des appuis).

3.1.2. Poutres reposant sur un massif ou un mur en maçonnerie



$l = L + 2 \frac{b}{3}$ = portée mesurée entre points d'application des résultantes des réactions d'appui.

3.1.3. Autres cas



l = portée mesurée entre nus d'appui.

3.2. MOMENTS SUR APPUIS

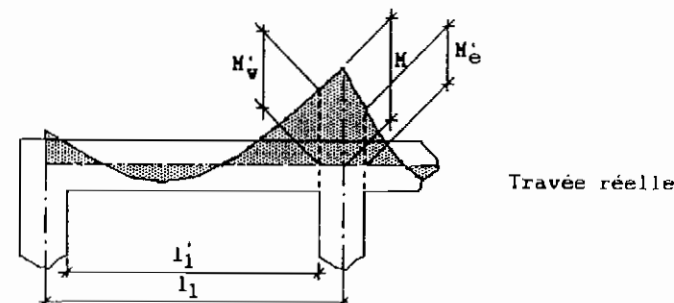
Les armatures équilibrant les moments sur appuis sont dites « armatures en chapeau » ou plus simplement « chapeaux ».

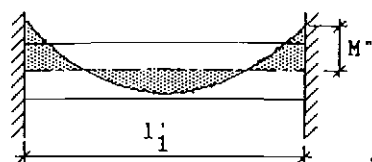
3.2.1. Hypothèses

- Les sollicitations sont évaluées par les méthodes classiques de la Résistance des Matériaux
- calculs en portiques,
- calculs en poutres continues, etc.

3.2.2. Moment d'encastrement sur appui à l'état-limite ultime

On doit prendre à l'E.L.U. :





Travée bi-encastree
soumise aux mêmes charges

$$M^m = \text{Min} \begin{cases} M \\ M' \end{cases}$$

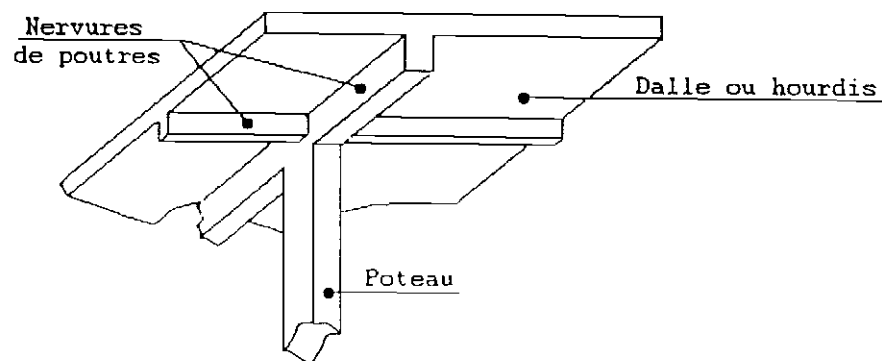
$$M_{uv} = \text{Max} \begin{cases} M_w' \\ M'' \end{cases}$$

1. POUTRES DE PLANCHERS

1.1. ÉLÉMENTS CONSTITUTIFS DES PLANCHERS

Les éléments constitutifs des planchers sont :

- les POTEAUX = éléments porteurs verticaux,
- les DALLES = plaques planes de faible épaisseur par rapport à leurs dimensions en plan,
- les POUTRES dont les nervures, en saillie sous les dalles, constituent les « retombées ».



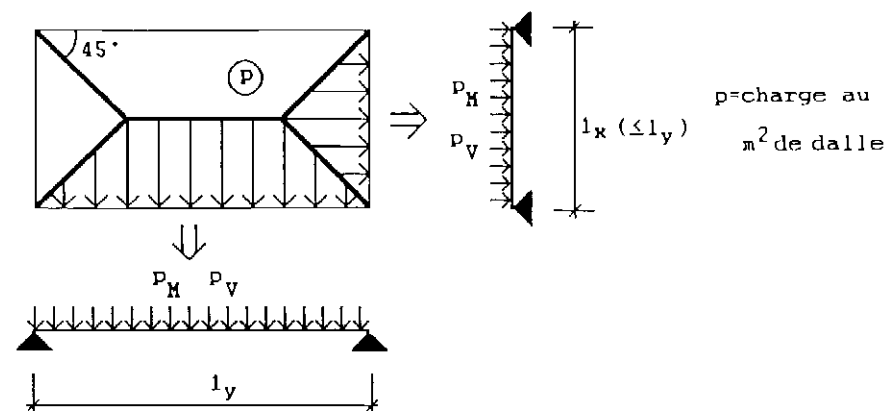
1.2. TRANSMISSION DES CHARGES DES DALLES AUX POUTRES

1.2.1. Méthode des lignes de rupture

a) Méthode

Les lignes de rupture d'un panneau de dalle encastré sur son contour :

- forment un angle de 45° avec les rives du panneau,
- sont parallèles à son grand côté



On définit des charges uniformément réparties équivalentes sur les travées des poutres :

p_V produisant le même effort tranchant sur appui de la poutre de référence que la charge apportée par la dalle,

p_M produisant le même moment fléchissant à mi-travée de la poutre de référence que la charge apportée par la dalle.

Pour un panneau de dalle, les expressions de p_V et p_M sont les suivantes :

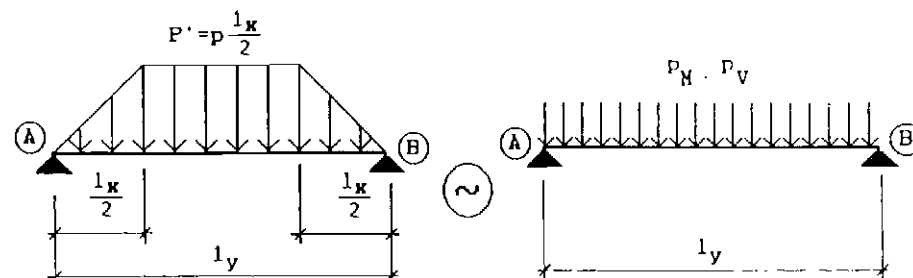
ELEMENT CHARGE	TRAPEZE	TRIANGLE
p_V	$(1 - \frac{\alpha}{2}) \frac{p \cdot l_x}{2}$	$\frac{p \cdot l_x}{4}$
p_M	$(1 - \frac{\alpha^2}{3}) \frac{p \cdot l_x}{2}$	$\frac{p \cdot l_x}{3}$

$$\alpha = \frac{l_x}{l_y} \leq 1$$

Remarque 1 : les formules des charges en trapèze deviennent celles des charges en triangle pour $\alpha = 1$.

Remarque 2 : pour deux panneaux, de part et d'autre de la poutre considérée, les charges réparties déterminées précédemment pour chacun des panneaux contigus s'additionnent

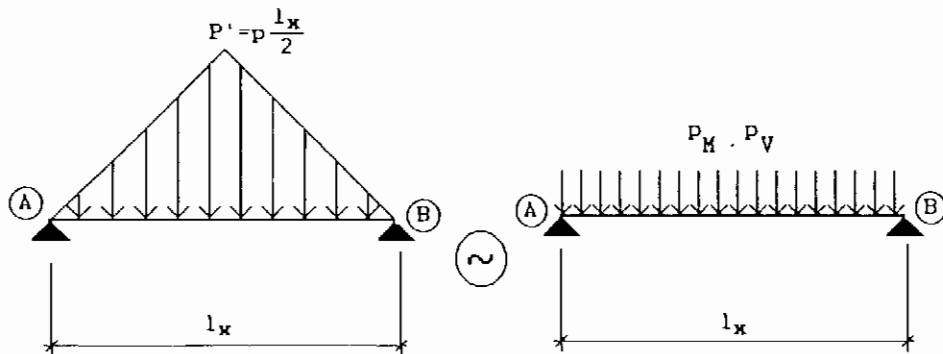
b) Démonstration pour les charges trapézoïdales



$$V_A = -V_B = \frac{P' l_y - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot P' \cdot \frac{l_x}{2}}{2} = \frac{P'}{2} \left[l_y - \frac{l_x}{2} \right] = \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) \cdot \frac{P' l_y}{2} = \underbrace{\left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) \cdot \frac{P l_x}{2} \cdot \frac{l_y}{2}}_{P_V}$$

$$\begin{aligned} M_0 &= V_A \cdot \frac{l_y}{2} - P' \cdot \frac{\left(\frac{l_y}{2} - \frac{l_x}{2} \right)^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot P' \cdot \frac{l_x}{2} \left(\frac{l_y}{2} - \frac{l_x}{2} \right) \\ &= P' \cdot \frac{l_y^2}{8} \cdot \left[(2 - \alpha) - (1 - 2\alpha + \alpha^2) - \alpha \left(\frac{3 - 2\alpha}{3} \right) \right] = \left(1 - \frac{\alpha^2}{3} \right) \cdot \frac{P' l_y^2}{8} \\ &= \underbrace{\left(1 - \frac{\alpha^2}{3} \right) \cdot \frac{P l_x}{2} \cdot \frac{l_y^2}{8}}_{P_M} \end{aligned}$$

c) Démonstration pour les charges triangulaires et des poutres de portée l_x



$$V_A = -V_B = \frac{\frac{1}{2} P' l_x}{2} = \frac{P' l_x}{4} = \underbrace{\frac{P l_x}{4} \cdot \frac{l_x}{2}}_{P_V}$$

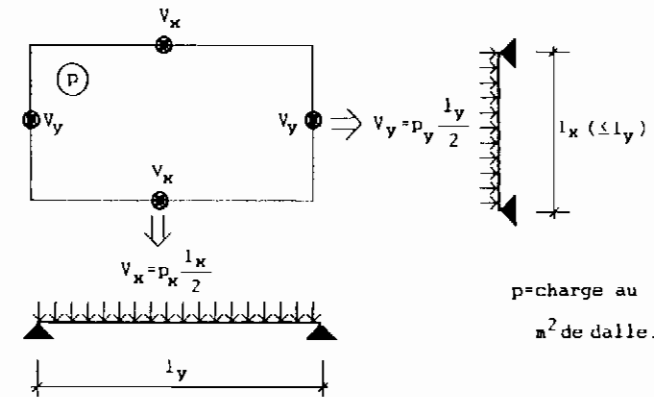
$$M_0 = \frac{P' l_x}{4} \cdot \frac{l_x}{2} - \frac{1}{2} \cdot P' \cdot \frac{l_x}{2} \cdot \frac{l_x}{6} = \frac{P' l_x^2}{8} \cdot \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{P' l_x^2}{12} = \underbrace{\frac{P l_x}{3} \cdot \frac{l_x^2}{8}}_{P_M}$$

Remarque : Pour une poutre de portée $L = n \cdot l_x$ supportant n charges triangulaires :

$$P_V = P_M = \frac{n P l_x^2}{4 L}$$

4.2.2. Méthode de Pigeaud

Pour une dalle appuyée sur ses quatre côtés, en supposant que la dalle ne se fissure pas, le calcul élastique donne (par égalisation des flèches au centre pour deux bandes unitaires de dalle fléchissant dans deux sens perpendiculaires) les efforts tranchants unitaires sur chaque côté.



p = charge au m^2 de dalle.

$$\begin{aligned} P_x &= \frac{1}{1 + \alpha^4} P \\ P_y &= \frac{\alpha^4}{1 + \alpha^4} P \\ \alpha &= \frac{l_x}{l_y} \leq 1 \end{aligned}$$

4.2.3. Choix de la méthode

La méthode Pigeaud correspond à un comportement de la dalle beaucoup plus théorique que réel. C'est pourquoi on lui préfère le plus souvent la méthode des lignes de rupture

B. PLANCHIERS – MÉTHODE FORFAITAIRE

1. DOMAINE DE VALIDITÉ

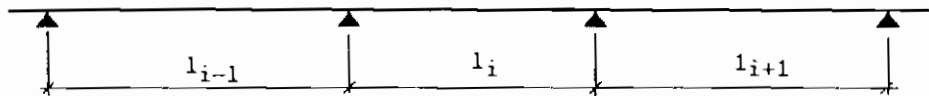
La méthode forfaitaire de calcul des planchers à charge d'exploitation modérée s'applique dans les cas où :

- 1) les charges d'exploitation sont modérées c'est-à-dire où :
 q_B = somme des charges variables,

g = somme des charges permanentes,

vérifient : ou $\begin{cases} q_B \leq 2 \cdot g \\ q_B \leq 5 \text{ kN/m}^2 \end{cases}$

- 2) la fissuration ne compromet pas la tenue des revêtements ni celle des cloisons,
- 3) les éléments de plancher ont une même inertie dans les différentes travées,
- 4) les portées vérifient :



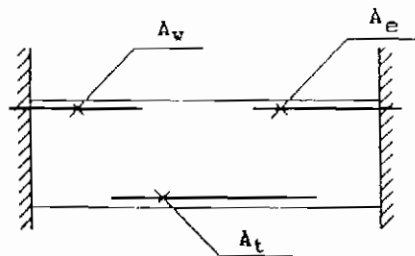
$$0,8 \leq \frac{l_i}{l_{i-1}} \leq 1,25$$

$$0,8 \leq \frac{l_i}{l_{i+1}} \leq 1,25$$

Dans le cas où l'une au moins des hypothèses 2) à 4) ci-dessus n'est pas vérifiée, se reporter au paragraphe 5.

2. PRINCIPE DE LA MÉTHODE – ADAPTATION

Les essais des poutres en béton armé (cf. paragraphe 2.1. partie A « POUTRES CONTINUES – RAPPELS – ADAPTATION ») montrent que :



$$A_t + \frac{A_v + A_e}{2} \geq A_0$$

$$M_t + \frac{M_w + M_e}{2} \geq k \cdot M_0$$

Le principe de la méthode forfaitaire consiste à autoriser des transferts de moment entre les sections sur appuis et en travée (et réciproquement), en adoptant $k > 1$ en fonction du rapport des charges variables et permanentes.

3. MOMENTS FLÉCHISSANTS

3.1. RÈGLE DES MOMENTS

M_0 = moment maximal dans la travée de référence (isostatique, soumise aux mêmes charges et de même portée que la travée étudiée),

M_w et M_e = valeurs absolues des moments respectivement sur l'appui de gauche et sur l'appui de droite de la travée continue,

M_t = moment maximal dans la travée continue,

$$\alpha = \frac{q_B}{g + q_B}$$

avec, pour la travée considérée :

q_B = somme des charges variables,

g = somme des charges permanentes,

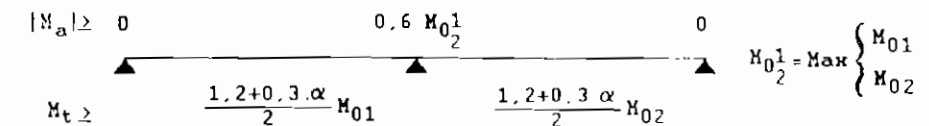
on doit avoir :

$$M_t + \frac{M_w + M_e}{2} \geq \text{Max} \begin{cases} (1 + 0,3 \cdot \alpha) M_0 \\ 1,05 \cdot M_0 \end{cases}$$

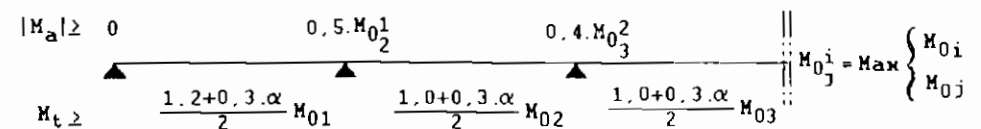
3.2. VALEURS MINIMALES DES MOMENTS M_t , M_e ET M_w

On doit respecter les valeurs minimales ci-dessous.

3.2.1. Cas d'une poutre à deux travées



3.2.2. Cas d'une poutre à plus de deux travées



Appui
de
rive

Appui
voisin de
rive

Appui
intermédiaire

3.2.3. Remarque

Dans le cas où l'appui de rive est solidaire d'un poteau ou d'une poutre, il convient de disposer sur cet appui des aciers supérieurs pour équilibrer un moment au moins égal à :

$$M_{a1} = -0,15 M_{01} \text{ (ou } M_{0n}).$$

3.3. MODE OPÉRATOIRE

Si on se fixe le moment en travée (valeurs minimales du paragraphe 3.2.), on obtient les moments sur appuis en appliquant la formule des moments du paragraphe 3.1. :

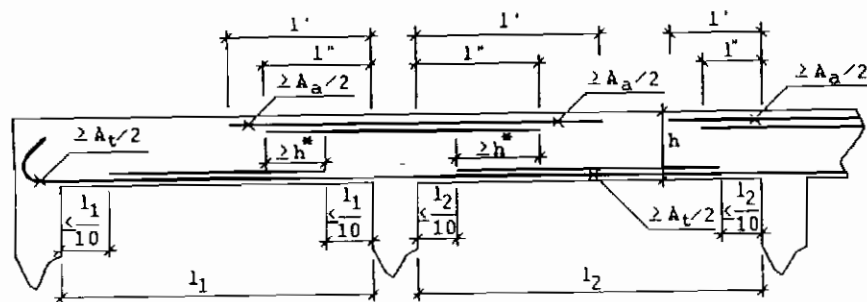
- soit en se donnant un des moments sur appui,
- soit en les prenant égaux.

Si on prend sur appuis M_e et M_w (valeurs minimales du paragraphe 3.2.), la formule des moments donne M_t . Le moment pris en compte pour un appui est le même que cet appui appartienne à la travée de gauche ou à la travée de droite qui l'encadrent.

3.4. ARRÊT DES BARRES

Par la courbe enveloppe des moments.

Forfaitairement si $q_B \leq g$ et si les charges sont uniformément réparties :



avec : $l_{ij} = \text{Max} [l_i, l_j]$,

• Travées de rive :

$$l' = \text{Max} \left[\frac{l_{12}}{4} ; l_s \right] \text{ ou } l' = \text{Max} \left[\frac{l_{n-1,n}}{4} ; l_s \right]$$

• Travées intermédiaires :

$$l' = \text{Max} \left[\frac{l_n}{5} ; l_s \right]$$

• Dans toutes les travées, quelle qu'en soit la nature :

$$l'' = \text{Max} \left[\frac{l'}{2} ; l_s \right]$$

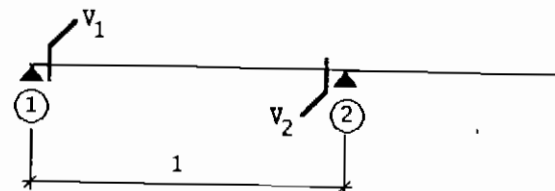
* = seulement si crochets d'extrémité pour ces barres,

A_a, A_t = armatures calculées respectivement sur appui et en travée

4. EFFORTS TRANCHANTS

4.1. REMARQUE PRÉLIMINAIRE

Efforts tranchants dans une travée de rive :



V_0 = valeur absolue de l'effort tranchant sur appui 1 ou 2 dans la travée de référence,

$$\left. \begin{array}{l} M_2 < 0 \\ M_1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{M_2 - M_1}{l} < 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} V_1 = V_0 + \frac{M_2 - M_1}{l} < V_0 \\ V_2 = -V_0 + \frac{M_2 - M_1}{l} < -V_0 \end{array} \right. \Rightarrow |V_2| > |V_0|$$

Donc l'effort tranchant réel est :

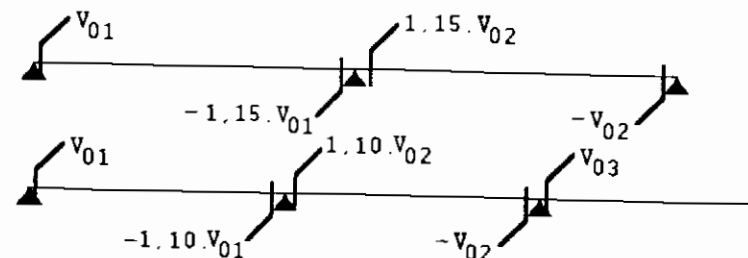
- supérieur en valeur absolue à l'effort tranchant isostatique sur l'appui continu dans la travée de rive,
- au plus égal à V_0 ailleurs.

4.2. CALCUL DES EFFORTS TRANCHANTS

Calculs en faisant abstraction de la continuité.

Sauf sur l'appui voisin de rive où :

- soit on tient compte des moments de continuité évalués,
- soit on majore forfaitairement les efforts tranchants de la poutre de référence :
 - de 15 % pour les poutres à deux travées,
 - de 10 % pour les poutres à plus de deux travées.



MÉTHODE «CAQUOT MINORÉE»

Dans le cas où l'une des hypothèses 2, 3 ou 4 faites au paragraphe 1 de ce sous-chapitre ne serait pas vérifiée : appliquer la méthode Caquot pour les planchers à charge d'exploitation élevée ($q_B > 2 \cdot g$) en multipliant la part des moments sur appui provenant des seules charges permanentes par un coefficient variant entre 1 et 2/3.

PLANCHERS – MÉTHODE CAQUOT

1. DOMAINE DE VALIDITÉ

La méthode de calcul des planchers à charge d'exploitation relativement élevée, due à A. Caquot, s'applique dans les cas où :

– les charges d'exploitation sont susceptibles de variations rapides dans le temps et en position et où :

q_B = somme des charges variables,

g = somme des charges permanentes,

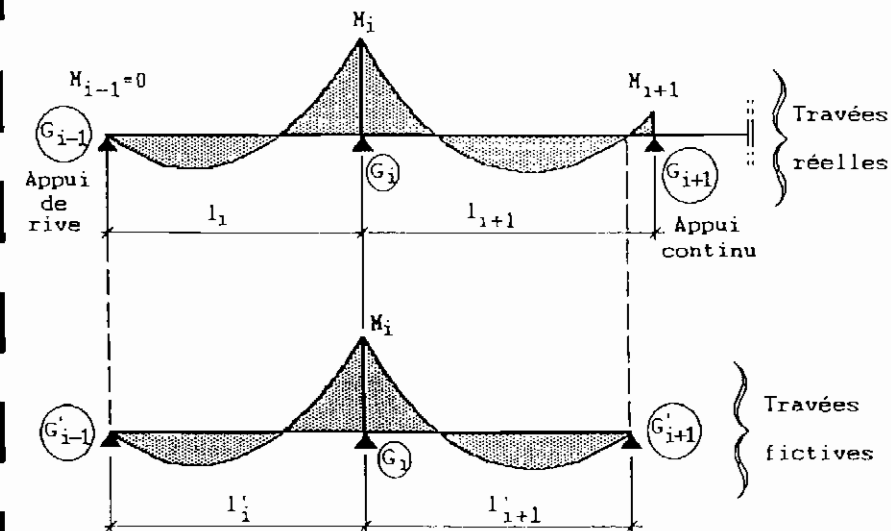
vérifient :

$$\text{ou } \begin{cases} q_B > 2 \cdot g \\ q_B > 5 \text{ kN/m}^2 \end{cases}$$

– les poutres sont associées à une dalle générale (sections en T en travée).

2. ÉVALUATION DES MOMENTS

PRINCIPE DE LA MÉTHODE – MOMENTS SUR APPUIS



On retient :

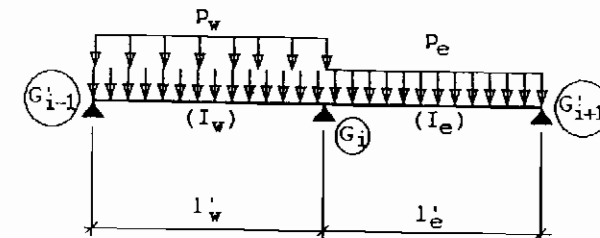
$l_i = l_i$ pour les travées de rive sans porte-à-faux (sinon voir § 4 p. 315),

$l_i = 0,8 l_i$ pour les travées intermédiaires.

2.1.1. Cas des charges réparties

On considère les deux travées fictives de portées l'_w (pour celle de gauche) et l'_e (pour celle de droite) détachées de part et d'autre de l'appui considéré.

a) Cas général



Le théorème des trois moments appliqué à l'appui G_i s'écrit :

$$\frac{l'_w}{6EI_w} \cdot M_{i-1} + \left[\frac{l'_w}{3EI_w} + \frac{l'_e}{3EI_e} \right] \cdot M_i + \frac{l'_e}{6EI_e} \cdot M_{i+1} = -\frac{P_w \cdot l'^3_w}{24EI_w} - \frac{P_e \cdot l'^3_e}{24EI_e}$$

soit après simplification par $6EI$ et en tenant compte de ce que $M_{i-1} = M_{i+1} = 0$ sur les appuis G'_{i-1} et G'_{i+1} :

$$2 \cdot \left[\frac{l'_w}{I_w} + \frac{l'_e}{I_e} \right] \cdot M_i = -\frac{P_w \cdot l'^2_w}{4} \cdot \frac{l'_w}{I_w} - \frac{P_e \cdot l'^2_e}{4} \cdot \frac{l'_e}{I_e}$$

$$\text{d'où : } M_i = -\frac{P_w \cdot l'^2_w}{8} \cdot \frac{l'_w/I_w}{l'_w/I_w + l'_e/I_e} - \frac{P_e \cdot l'^2_e}{8} \cdot \frac{l'_e/I_e}{l'_w/I_w + l'_e/I_e}$$

ce qui s'écrit :

$$M_i = -\left[M'_w \frac{K_e}{D} + M'_e \left(1 - \frac{K_e}{D} \right) \right]$$

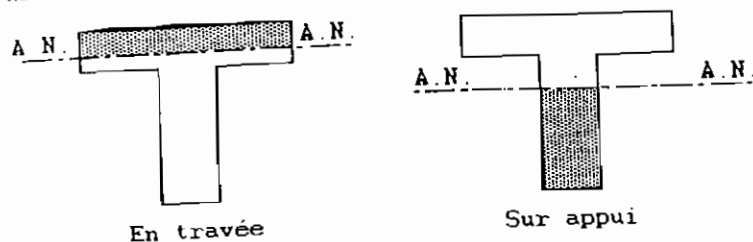
en posant :

$$M'_w = \frac{P_w \cdot l'^2_w}{8,5} \quad \text{et} \quad M'_e = \frac{P_e \cdot l'^2_e}{8,5}$$

$$K_w = \frac{I_w}{l'_w} \quad ; \quad K_e = \frac{I_e}{l'_e} \quad \text{et} \quad D = K_w + K_e$$

I_w et I_e = moments d'inertie de la section de béton seul

Le coefficient 8,5 au lieu de 8 dans l'expression des moments de référence M' traduit l'effet de variation des inerties des sections de béton fissurées le long des travées.



$$\Rightarrow I_{\text{travée}} \neq I_{\text{appui}}$$

b) Cas particulier où $I = \text{Cste}$

Si les travées ont le même moment d'inertie I (section non fissurée) :

$$\left. \begin{aligned} K_w &= \frac{I}{l_w} \\ K_e &= \frac{I}{l_e} \\ D &= 1 + \frac{l_w + l_e}{l_w \cdot l_e} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} \frac{K_e}{D} &= \frac{l_w}{l_w + l_e} \\ 1 - \frac{K_e}{D} &= \frac{l_e}{l_w + l_e} \end{aligned}$$

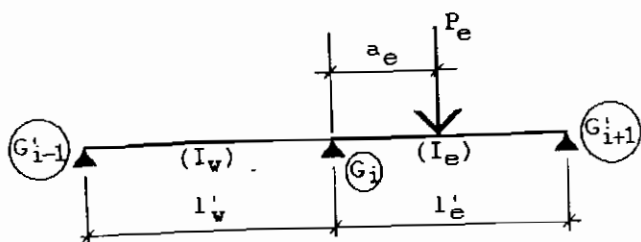
et l'on obtient :

$$M_i = - \frac{P_w \cdot l_w^3 + P_e \cdot l_e^3}{8,5 (l_w + l_e)}$$

2.1.2. Cas des charges concentrées

On considère les deux travées fictives de portées l_w (pour celle de gauche) et l_e (pour celle de droite) détachées de part et d'autre de l'appui considéré et soumises à l'action d'une charge concentrée P_e d'abscisse a_e comptée depuis l'appui central.

a) Cas général



Le théorème des trois moments appliqué à l'appui G_i s'écrit :

$$\frac{l_w}{6 EI_w} \cdot M_{i-1} + \left[\frac{l_w}{3 EI_w} + \frac{l_e}{3 EI_e} \right] \cdot M_i + \frac{l_e}{6 EI_e} \cdot M_{i+1} = - \frac{P_e \cdot a_e (l_e - a_e) (2 l_e - a_e)}{6 EI_e \cdot l_e}$$

soit après simplification par $6E$ et en tenant compte de ce que $M_{i-1} = M_{i+1} = 0$ sur les appuis G'_{i-1} et G'_{i+1} :

$$2 \cdot \left[\frac{l_w}{l_w} + \frac{l_e}{l_e} \right] \cdot M_i = - \frac{P_e \cdot l_e^2}{l_e} \cdot \frac{a_e}{l_e} \cdot \left(1 - \frac{a_e}{l_e} \right) \left(2 - \frac{a_e}{l_e} \right)$$

d'où :

$$M_i = - \frac{1}{2} \cdot \frac{a_e}{l_e} \cdot \left(1 - \frac{a_e}{l_e} \right) \left(2 - \frac{a_e}{l_e} \right) \cdot \frac{P_e \cdot l_e \cdot l_e / l_e}{l_w / l_w + l_e / l_e}$$

ce qui s'écrit dans le cas général de charges concentrées dans les deux travées encadrant l'appui considéré :

$$M_i = - \left[M'_w \frac{K_e}{D} + M'_e \left(1 - \frac{K_e}{D} \right) \right]$$

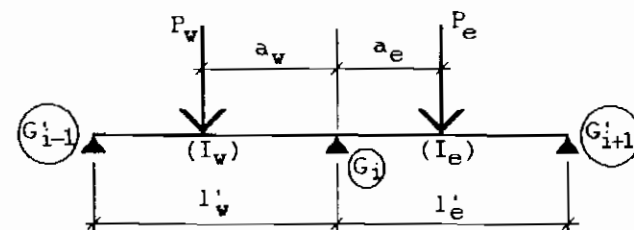
en posant :

$$k_w = \frac{1}{2,125} \cdot \frac{a_w}{l_w} \left(1 - \frac{a_w}{l_w} \right) \left(2 - \frac{a_w}{l_w} \right) ; k_e = \frac{1}{2,125} \cdot \frac{a_e}{l_e} \left(1 - \frac{a_e}{l_e} \right) \left(2 - \frac{a_e}{l_e} \right)$$

$$M'_w = \sum k_w \cdot P_w \cdot l_w \quad \text{et} \quad M'_e = \sum k_e \cdot P_e \cdot l_e$$

$$K_w = \frac{I_w}{l_w} ; K_e = \frac{I_e}{l_e} \quad \text{et} \quad D = K_w + K_e$$

I_w et I_e = moments d'inertie de la section de béton seul



Le coefficient 2,125 au lieu de 2 dans l'expression des coefficients k_w et k_e traduit l'effet de variation des inerties des sections de béton fissurées le long des travées.

b) Cas particulier où $I = Cste$

Si les travées ont même moment d'inertie I (section non fissurée) :

$$\left. \begin{aligned} K_w &= \frac{I}{l'_w} \\ K_e &= \frac{I}{l'_e} \\ D &= I \cdot \frac{l'_w + l'_e}{l'_w \cdot l'_e} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} K_e &= \frac{l'_w}{D} \\ 1 - \frac{K_e}{D} &= \frac{l'_e}{l'_w + l'_e} \end{aligned}$$

et l'on obtient :

$$M_i = - \frac{\sum k_w \cdot P_w \cdot l'_w{}^2 + \sum k_e \cdot P_e \cdot l'_e{}^2}{l'_w + l'_e}$$

1.3. Cas général

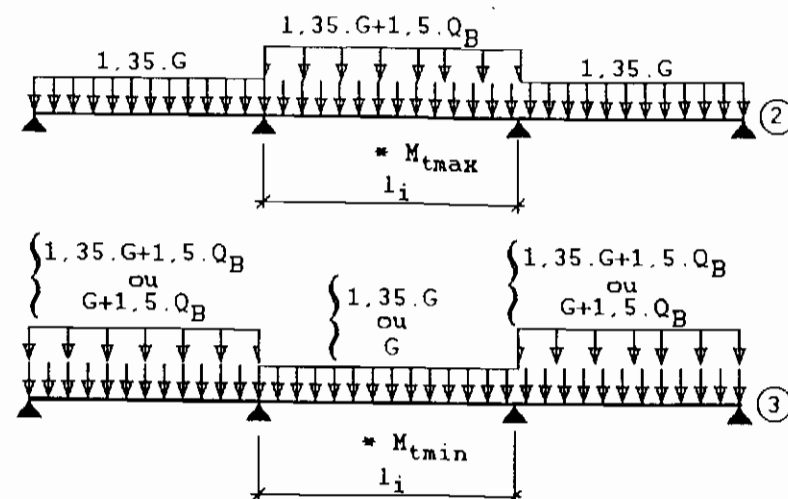
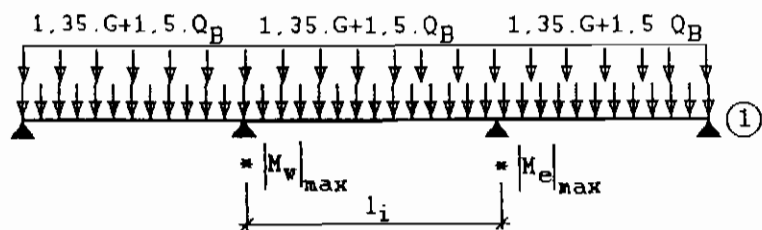
Lorsqu'agissent simultanément des charges réparties et des charges concentrées, on superpose les résultats précédents.

2. MOMENTS EN TRAVÉE

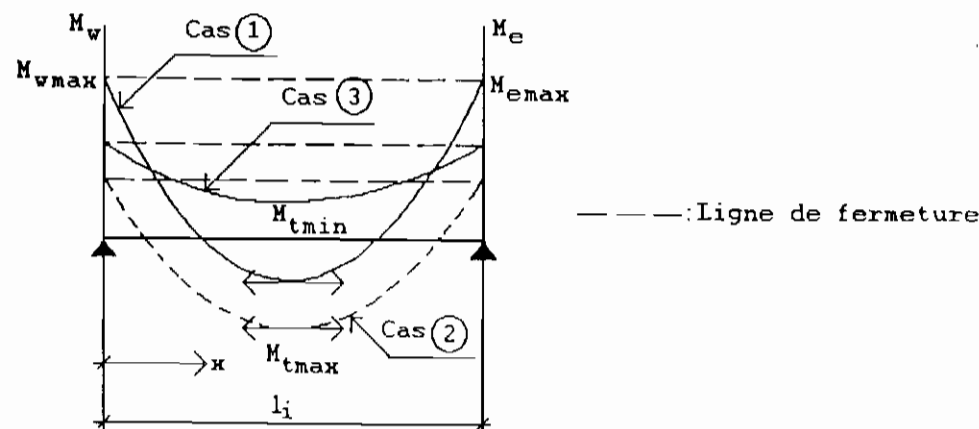
Les valeurs des moments sur appuis sont obtenues comme indiqué ci-dessus au paragraphe 2.1.

Les moments en travée sont calculés en considérant les travées réelles (de portée l et non l') chargées ou non suivant le cas et soumises aux moments sur appuis obtenus précédemment.

Comme, dans l'évaluation des moments sur appuis, on ne considère que les deux travées adjacentes à l'appui étudié, les cas de charge à envisager pour l'E.L.U. sont les suivants :



D'où la courbe enveloppe des moments pour des charges réparties, les cas de charge à considérer étant les mêmes et conduisant à des courbes analogues, mais à points anguleux, pour des charges concentrées :

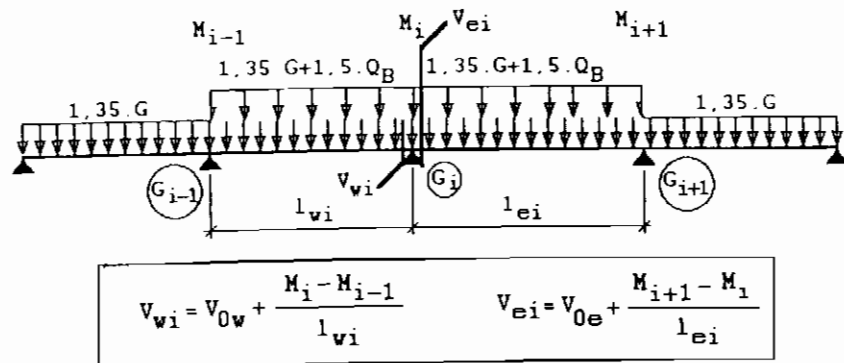


$$M(x) = \mu(x) + M_w \left(1 - \frac{x}{l_i}\right) + M_e \frac{x}{l_i}$$

3. EFFORTS TRANCHANTS

Les efforts tranchants sont calculés en tenant compte des moments sur appuis évalués par la méthode Caquot.

3.1. EFFORTS TRANCHANTS EXTRÊMES SUR APPUIS



avec :

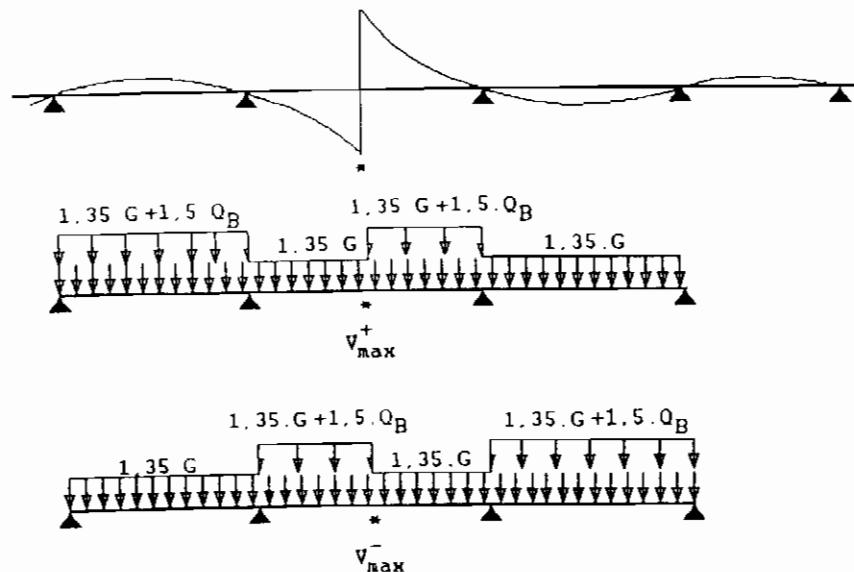
V_{0w} et V_{0e} = efforts tranchants sur appui G_i des travées de référence en valeur algébrique,

M_{i-1} , M_i et M_{i+1} = moments sur appuis avec leurs signes.

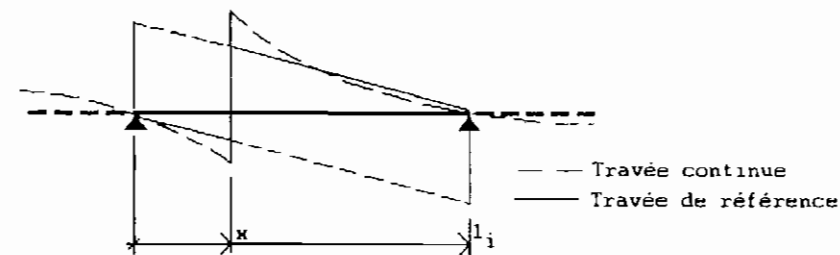
3.2. EFFORTS TRANCHANTS EN TRAVÉE

3.2.1. Cas des charges réparties

D'après l'allure de la ligne d'influence de l'effort tranchant en travée, on a, en se limitant à la travée considérée et aux deux travées adjacentes (nécessaires pour le calcul des moments sur appuis, donc de $\Delta M/l$) :



D'après l'allure de la ligne d'influence de l'effort tranchant en travée pour la poutre isostatique de référence associée à la travée considérée, on voit que pour un extremum de signe donné (V_{max}^+ ou V_{max}^-), la zone à charger est la même que pour la travée continue.



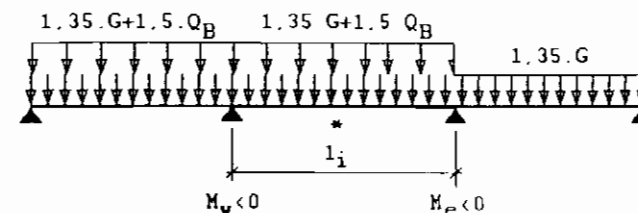
D'où le mode opératoire obtenu en dissociant les parts isostatique ($d\mu/dx$) et hyperstatique ($\Delta M/l_i$) de l'effort tranchant.

1) On commence par tracer la ligne enveloppe de l'effort tranchant dans la travée de référence de portée l_i .

2) On fait subir à la partie positive une translation de valeur algébrique :

$$\frac{\Delta M_M}{l_i} = \frac{M_c - M_w}{l_i}$$

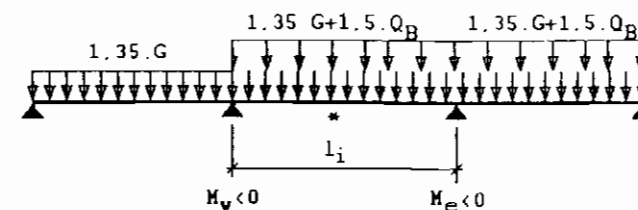
avec M_c et M_w obtenus en considérant le cas de charge :



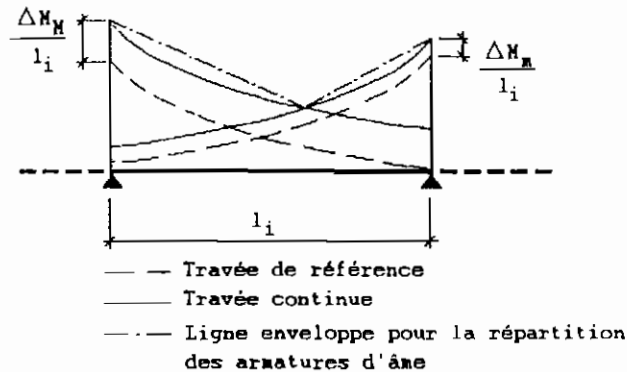
3) On fait subir à la partie négative une translation de valeur algébrique :

$$\frac{\Delta M_m}{l_i} = \frac{M_c - M_w}{l_i}$$

avec M_c et M_w obtenus en considérant le cas de charge :



4) On en déduit la ligne enveloppe de l'effort tranchant dans la travée continue en s'intéressant à sa valeur absolue et en remplaçant les arcs de courbe par leurs cordes (sens de la sécurité) :



Remarque 1 : en principe, il faudrait tenir compte des chargements partiels de la travée l_i pour le terme hyperstatique $\Delta M/l_i$, mais la méthode donnée va dans le sens de la sécurité.

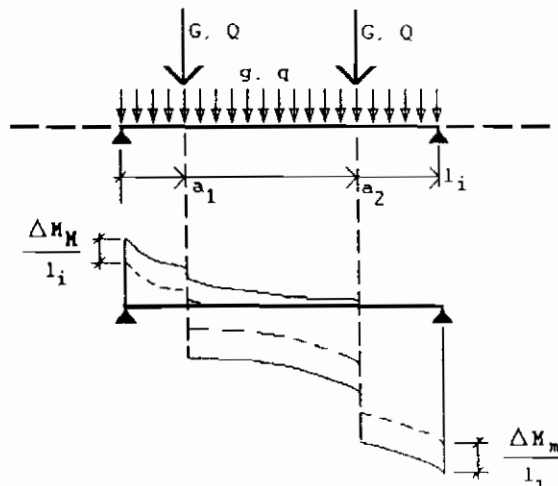
Remarque 2 : pour une charge répartie q_u d'étendue variable, au milieu d'une travée isostatique :

$$V_u = \pm \frac{q_u l}{8} \quad (\text{voir paragraphe 4.2.a) de l'exercice «Poutre - effort tranchant» du chapitre 7}$$

«EFFORT TRANCHANT».

4.2. Cas des charges concentrées

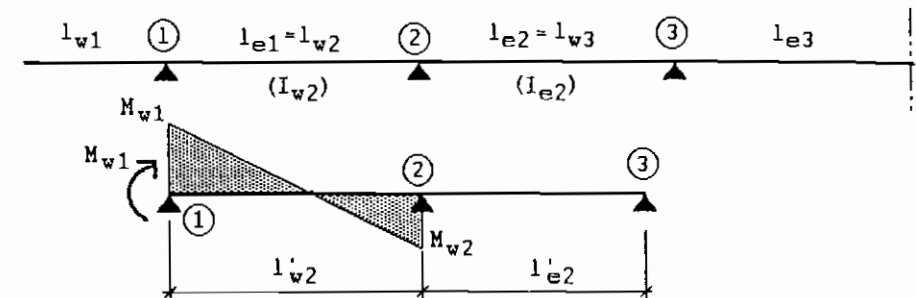
Considérer pour $V_{\max}$ toutes les sections d'abscisses $\pm \epsilon$ (a_i = abscisse des charges concentrées qu'elles soient variables ou permanentes) en considérant le cas de charge le plus défavorable pour l'effet recherché dans une section donnée, c'est-à-dire en chargeant successivement les zones correspondant aux parties positives ou négatives de la ligne d'influence de l'effort tranchant relative à la section considérée.



4. TRAVÉES DE RIVE AVEC CONSOLE

4.1. THÉORIE

Dans le cas où la travée de gauche (l_{w1}) adjacente au premier appui est une console :



En appliquant le théorème des trois moments à l'appui 2 encadré par les travées fictives de portées l'_{w2} et l'_{e2} :

$$b_{w2} \cdot M_{w1} + (c_{w2} + a_{e2}) \cdot M_{w2} + b_{e2} \cdot 0 = 0 \Rightarrow -\frac{M_{w2}}{M_{w1}} = \frac{b_{w2}}{c_{w2} + a_{e2}}$$

d'où, en posant $K = I/l'$:

$$-\frac{M_{w2}}{M_{w1}} = \frac{\frac{l'_{w2}}{6EI_{w2}}}{\frac{l'_{w2}}{3EI_{w2}} + \frac{l'_{e2}}{3EI_{e2}}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{K_{w2}}}{\frac{1}{K_{w2}} + \frac{1}{K_{e2}}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{K_{e2}}{K_{w2} + K_{e2}}$$

Soit en prenant 2,125 au lieu de 2 pour tenir compte de la variation d'inertie de la section fissurée le long des travées de la poutre :

$$M_{w2} = -\frac{1}{2,125} \frac{K_{e2}}{K_{w2} + K_{e2}} M_{w1}$$

ce qui s'écrit dans le cas où $I_w = I_e = I$:

$$M_{w2} = -\frac{1}{2,125} \frac{l'_{w2}}{l'_{w2} + l'_{e2}} M_{w1}$$

Dans le cas où la travée de droite (l_{en}) adjacente au dernier appui est une console il vient de la même manière :

$$M_{e(n-1)} = - \frac{1}{2,125} \cdot \frac{K_{w(n-1)}}{K_{e(n-1)} + K_{w(n-1)}} \cdot M_{en}$$

ou :

$$M_{e(n-1)} = - \frac{1}{2,125} \cdot \frac{l'_{e(n-1)}}{l'_{e(n-1)} + l'_{w(n-1)}} \cdot M_{en}$$

4.2. MÉTHODE DE CALCUL

4.2.1. Cas où l'appui 3 est continu

Le moment sur appui 2 est donné par la formule :

$$M_2 = M_{2c} - \frac{1}{2,125} \cdot \frac{K_{e2}}{K_{w2} + K_{e2}} \cdot M_{w1}$$

avec :

$$l'_{w2} = l_{w2} ; l'_{e2} = 0,8.l_{e2} ,$$

M_{2c} = moment dû aux charges agissant sur les travées encadrant l'appui 2,

M_{w1} = moment apporté par la console (avec son signe) sur l'appui 1.

4.2.2. Cas où l'appui 3 est un appui de rive

Même formule qu'au paragraphe 4.2.1. avec :

$$l'_{w2} = l_{w2} ; l'_{e2} = l_{e2} .$$

4.2.3. Cas où l'appui 3 est un appui de rive avec console

Même cas qu'au paragraphe 4.2.2. si en partant des deux extrémités de la poutre on obtient :

$$M_{w2} = M_{e2} .$$

Sinon appliquer les formules de la Résistance des Matériaux pour retrouver le même moment M_2 sur appui 2 en partant des deux extrémités de la poutre.

4.2.4. Remarque

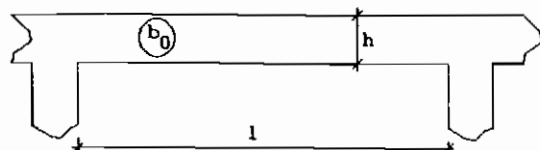
Les formules établies pour l'appui 1 avec console l_{w1} se transposent au cas de l'appui n avec console l_{en} :

– en remplaçant les indices 1 et 2 par n et $n - 1$ respectivement,

– en permutant les indices e et w .

D. POUTRES CONTINUES – DIMENSIONNEMENT

1. CONDITIONS DE DÉFORMATION



1.1. CALCUL DE FLÈCHE NON IMPOSÉ

Pour les poutres de plancher vérifier :

$$\frac{h}{l} \geq \frac{1}{16}$$

$$\frac{h}{l} \geq \frac{1}{10} \frac{M_t}{M_0}$$

$$\frac{A}{b_0 \cdot d} \leq \frac{4,2}{f_e} \text{ (MPa)}$$

avec :

M_0 = moment de la travée de référence,

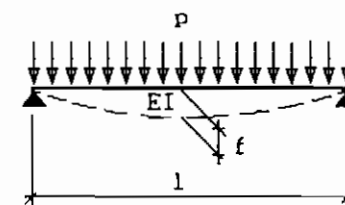
M_t = moment maximal en travée,

A = section d'aciers tendus en travée.

Sinon vérifier l'état-limite de déformation (voir *Maîtrise du BAEL 91 et des DTU associés*).

1.2. LIMITATION DES FLÈCHES

En Résistance des Matériaux, pour une travée isostatique sur deux appuis simples uniformément chargée :



$$f = \frac{5 \cdot p \cdot l^4}{384 \cdot EI}$$

En béton armé, le calcul de la flèche est beaucoup plus complexe, compte tenu de la fissuration du béton. Ce calcul n'est pas traité dans le présent ouvrage (voir *Maîtrise du BAEL 91 et des DTU associés*).

Limitation des flèches pour les planchers :

$$f \leq \frac{1}{500}$$

si $l \leq 5,00\text{m}$

$$f \leq 0,5\text{cm} + \frac{1}{1000}$$

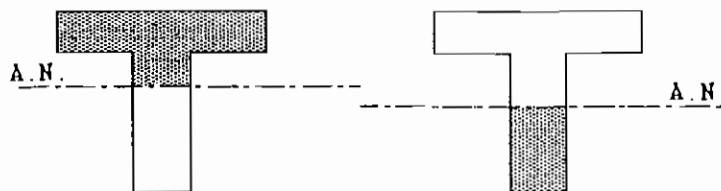
si $l > 5,00\text{m}$

$$f \leq \frac{1}{250}$$

pour les consoles avec $l \leq 2,00\text{m}$

2. RÉSISTANCE À LA FLEXION

2.1. SECTIONS CRITIQUES



En travée

Sur appui

M_{Tser}	>>	M_{rb}
M_{Tu}	>>	M_{lu}

d'où la section critique est SUR APPUI.

2.2. MÉTHODE DE DIMENSIONNEMENT

Il convient donc :

1) de calculer les moments sur appui (formules de la Résistance des Matériaux, méthode forfaitaire ou méthode de Caquot),

2) de vérifier sur appui :

– si la fissuration est peu préjudiciable :

$$b_0 \cdot d^2 \geq \frac{M_u}{\mu_{lu} \cdot f_{bu}}$$

– si la fissuration est préjudiciable ou très préjudiciable :

$$b_0 \cdot d^2 \geq \text{Max} \left[\frac{M_u}{\mu_{lu} \cdot f_{bu}} ; \frac{M_{ser}}{\mu_{rb} \cdot \sigma_{bc}} \right]$$

3) de déterminer b_0 et d en tenant compte des dispositions constructives qui fournissent la seconde équation de coffrage :

$$0,3 \cdot d \leq b_0 \leq 0,5 \cdot d$$

3. VÉRIFICATION À L'EFFORT TRANCHANT

La poutre étant dimensionnée en flexion, il faut vérifier :

$$\tau_{u0} = \frac{V_{u0}}{b_0 \cdot d} \leq \tau_{lim}$$

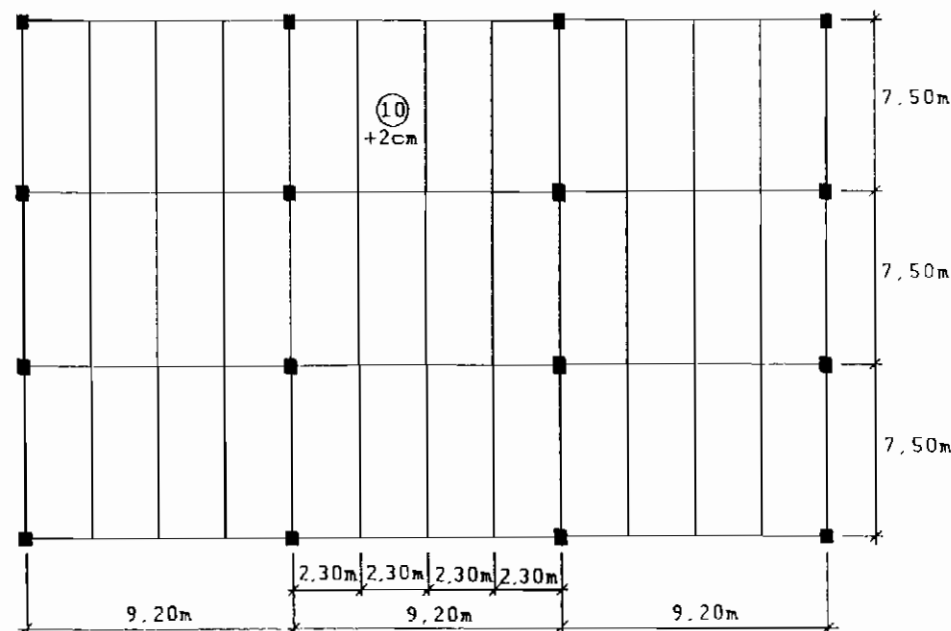
la valeur de τ_{lim} étant celle donnée au paragraphe 1.3. du chapitre 7 «EFFORT TRANCHANT».

Si $\tau_{u0} > \tau_{lim}$ on peut :

- soit augmenter le coffrage (b_0 et/ou d),
- soit augmenter la résistance caractéristique f_{c28} du béton à utiliser,
- soit incliner les armatures d'âme (ce qui revient à augmenter τ_{lim}).

II. EXERCICE N° 1 : PLANCHER – MÉTHODE FORFAITAIRE

— ÉNONCÉ —



■ Caractéristiques des matériaux :

- béton : $f_{c28} = 25 \text{ MPa}$,
- aciers : Fe E 500 HA.

■ Caractéristiques géométriques :

- hourdis : épaisseur 10 cm,
- chape de 2 cm,
- poteaux tous carrés $30 \times 30 \text{ cm}^2$,
- retombée maximale admise : 50 cm.

■ Actions variables de durée d'application supérieure à 24 heures :

- charge d'exploitation : $q = 2,5 \text{ kN/m}^2$.

■ Fissuration peu préjudiciable. Reprise de bétonnage sans indentations pour les poutres et poutrelles.

■ On se propose :

- 1) de dimensionner les poutrelles,
- 2) de dimensionner les poutres,
- 3) de déterminer le ferrailage des poutrelles.

— CORRIGÉ —

1. CARACTÉRISTIQUES DES MATÉRIAUX

1.1. BÉTON

Résistance de calcul

$$f_{bu} = 0,85 \cdot \frac{f_{c28}}{0 \cdot \gamma_b}$$

$$f_{bu} = 0,85 \cdot \frac{25}{1 \cdot 1,5} = 14,2 \text{ MPa}$$

Contrainte limite à l'E.L.S.

$$\sigma_{bx} = 0,6 \cdot f_{c28}$$

$$\sigma_{bx} = 0,6 \cdot 25 = 15 \text{ MPa}$$

1.2. ACIERS

Résistance de calcul

$$f_{sd} = \frac{f_c}{\gamma_s}$$

$$f_{sd} = \frac{500}{1,15} = 435 \text{ MPa}$$

Contrainte limite à l'E.L.S.

fissuration peu
préjudiciable

⇒ pas de limitation de σ , en service.

2. DIMENSIONNEMENT DU PLANCHER

2.1. ACTIONS AU M² DE DALLE

a) Actions permanentes

Poids propre dalle : $25 \text{ kN/m}^3 \cdot 0,10 = 2,5 \text{ kN/m}^2$

Chape de 2 cm : $20 \text{ kN/m}^3 \cdot 0,02 = 0,4 \text{ kN/m}^2$

Total : $g = 2,9 \text{ kN/m}^2$

b) Actions variables

Charges d'exploitation : $q = 2,5 \text{ kN/m}^2$

2.2. MÉTHODE DE CALCUL UTILISÉE

Charges :

g = somme charges permanentes,

q = somme charges variables,

$$\frac{q}{g} > 2$$

$$\frac{q}{g} = \frac{2,5}{2,9} = 0,86 < 2$$

$$q > 5 \text{ kN/m}^2$$

$$q = 2,5 \text{ kN/m}^2 < 5 \text{ kN/m}^2$$

Fissuration :

ne compromettant pas la tenue des cloisons
ni celle des revêtements,

Inertie des travées :

$I = \text{Cste}$ dans toutes les travées,

Portées :

$$0,8 \leq \frac{l_1}{l_{i+1}} \leq 1,25$$

travées toutes égales :

poutres : 9,20 m

poutrelles : 7,50 m

$$\Rightarrow 0,8 \leq \frac{l_1}{l_{i+1}} = 1 = \frac{l_1}{l_{i-1}} \leq 1,25$$

⇒ On appliquera la **MÉTHODE FORFAI-
TAIRE DE CALCUL DES PLANCHERS.**

2.3. DIMENSIONNEMENT DES POUTRELLES

L'équarrissage des poutres et poutrelles n'étant pas connu à ce stade de l'étude, nous raisonnerons à partir des portées entre axes (et non entre nus d'appuis).

a) Charge au ml de poutrelle

Transmission des charges des panneaux de dalle aux poutrelles :

$$\alpha = \frac{l_x}{l_y} \leq 1$$

$$\alpha = \frac{2,30}{7,50} = 0,31 < 0,40$$

- ⇒ Les panneaux de dalle portent dans le sens de leur petite portée.
- ⇒ Les charges sont transmises directement des panneaux de dalle aux poutrelles.

Charge sur poutrelle à l'ELU :

$$p_u = (1,35 g + 1,5 q) l_x \quad p_u = (1,35 \cdot 2,9 + 1,5 \cdot 2,5) 2,30 = 17,63 \text{ kN/m}$$

Résistance à la flexion

Moment dans la travée de référence :

$$M_{0u} = \frac{p_u \cdot l^2}{8} \quad (l = l_y) \quad M_{0u} = \frac{17,63 \cdot 7,50^2}{8} = 123,96 \text{ m kN}$$

Moments sur appui :

- section sur appui = section critique.
- par la méthode forfaitaire :

$$|M_a| \geq 0 \quad 0,5 M_0 \quad 0,5 M_0 \quad 0$$

$$M_{au} = -0,5 M_{0u} \quad M_{au} = -0,5 \cdot 123,96 = -61,98 \text{ m kN}$$

Dimensionnement :

- pour ne pas mettre d'aciers comprimés :

$$M_{au} \leq M_{lu}$$

$$\gamma = \frac{M_u}{M_{ser}} = \frac{p_u}{p_{ser}} = \frac{1,35 \cdot g + 1,5 \cdot q}{g + q} \quad \gamma = \frac{1,35 \cdot 2,9 + 1,5 \cdot 2,5}{2,9 + 2,5} = 1,419$$

- moment réduit limite approché :

Fe E 500 et $f_{c28} \leq 30 \text{ MPa}$

$$\Rightarrow 10^4 \mu_{lu} = 3 220 \theta \gamma + 51 \frac{f_{c28}}{10} - 3 100 \quad 10^4 \mu_{lu} = 3 220 \cdot 1,419 + 51 \cdot \frac{25}{1} - 3 100$$

$$= 2 744 \Rightarrow \mu_{lu} = 0,274$$

- dimensionnement :

$$\begin{cases} \mu_{bu} = \frac{M_{au}}{b_0 \cdot d^2 \cdot f_{bu}} \leq \mu_{lu} \\ 0,3 d \leq b_0 \leq 0,5 d \\ d = 0,9 h \end{cases}$$

d'où pour $b_0 = 0,4 \cdot 0,9 h$:

$$h^3 \geq \frac{M_{au}}{0,4 \cdot 0,9^3 \cdot \mu_{lu} \cdot f_{bu}} \quad h \geq \sqrt[3]{\frac{61,98 \cdot 10^{-3}}{0,4 \cdot 0,9^3 \cdot 0,274 \cdot 14,2}} = 0,379 \text{ m}$$

$$b_0 = 0,36 \cdot 0,379 = 0,136 \text{ m}$$

retombée : $37,9 - 10 = 27,9 < 50 \text{ cm O.K.}$
 ⇒ **POUTRELLES $14 \times 40 \text{ cm}^2$**

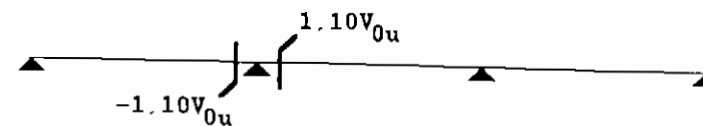
c) Résistance à l'effort tranchant

Effort tranchant :

- poutre de référence :

$$V_{0u} = p_u \cdot \frac{l}{2} \quad V_{0u} = 17,63 \cdot \frac{7,50}{2} = 66,11 \text{ kN}$$

- poutre continue :



$$V_u = 1,10 V_{0u} \quad V_u = 1,10 \cdot 66,11 = 72,72 \text{ kN}$$

Contrainte tangente conventionnelle réduite :

$$V_{u0} = V_u - p_u \cdot \frac{5h}{6} \quad V_{u0} = 72,72 - 17,63 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{5}{6} = 0,40$$

$$= 0,0671 \text{ MN}$$

$$\tau_{u0} = \frac{V_{u0}}{b_0 \cdot d} \quad \tau_{u0} = \frac{0,0671}{0,14 \cdot 0,35} = 1,37 \text{ MPa}$$

Contrainte tangente limite :

$$\begin{cases} \text{fissuration peu} \\ \text{préjudiciable} \end{cases} \Rightarrow \tau_{lim} = \text{Min} \begin{cases} 0,20 \frac{f_{cj}}{\gamma_b} \\ 5 \text{ MPa} \end{cases} \quad \tau_{lim} = 3,33 \text{ MPa} = \text{Min} \begin{cases} 0,20 \frac{25}{1,5} \\ 5 \text{ MPa} \end{cases} = 3,33$$

Vérification :

$$\tau_{u0} < \tau_{lim} \quad \tau_{u0} = 1,37 \text{ MPa} < \tau_{lim} = 3,33 \text{ MPa O.K.}$$

d) Flexibilité

$$\frac{h}{l} > < \frac{1}{16} \quad h > \frac{7,50}{16} = 0,469 = 47 \text{ cm} > 40 \text{ cm}$$

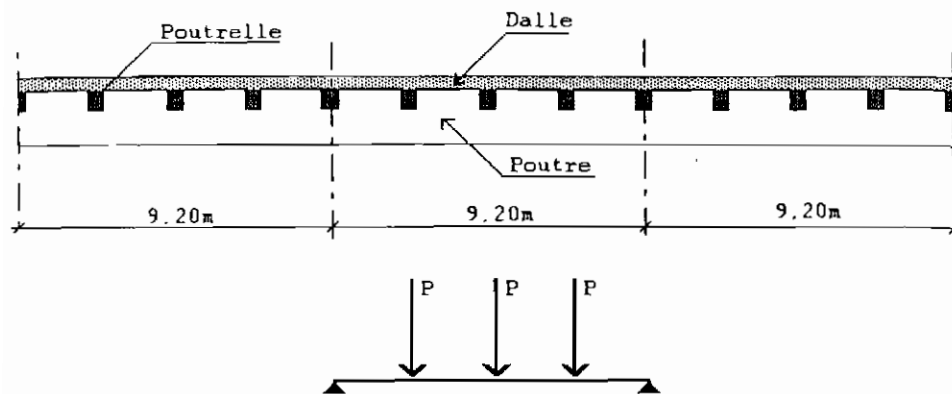
trouvés en résistance (voir h).
 $47 - 10 = 37 \text{ cm} < 50 \text{ cm}$ de retombée admissible.

e) Retenu

$h = 45 \text{ cm}$ compte tenu du fait que l est la portée entre nus et non entre axes et du fait que l'on a négligé le poids propre de la retombée :

POUTRELLES $14 \times 45 \text{ cm}^2$

2.4. DIMENSIONNEMENT DES POUTRES



a) Charges transmises par les poutrelles aux poutres

Charges concentrées :

 g_n = poids propre retombée

$$P_u = 1,10 \cdot 2 \left[V_{0u} + 1,35 g_n \frac{l}{2} \right] \quad P_u = 1,10 \cdot 2 \left[66,11 + 1,35 \cdot 25 \cdot 0,14 \cdot 0,35 \cdot \frac{7,50}{2} \right]$$

$$= 159,085 \text{ kN}$$

1,10 car on s'intéresse à la poutre constituant le premier appui intermédiaire des poutrelles, 2 car deux poutrelles s'appuient sur la poutre.

b) Résistance à la flexion

Moment dans la travée de référence à l'E.L.U. :

$$M_{0u} = 3 \cdot \frac{P_u}{2} \cdot \frac{l}{2} - P_u \cdot \frac{l}{4} = P_u \cdot \frac{l}{2} \quad M_{0u} = 0,159 \cdot \frac{9,20}{2} = 0,731 \text{ mMN}$$

Moment sur appui (section critique d'une poutre continue) :

$$M_{au} = -0,5 M_{0u} \quad M_{au} = -0,5 \cdot 0,731 = -0,366 \text{ mMN}$$

Dimensionnement :

En prenant $\gamma = 1,419 > \gamma_{\text{red}} = \frac{P_u}{P_{\text{scr}}}$ par sécurité puisqu'on a rajouté le poids propre de la nervure et qu'on a négligé celui de la poutre :

$$h^3 \geq \frac{M_{au}}{0,4 \cdot 0,9^3 \cdot \mu_{lu} \cdot f_{bu}} \quad h \geq \sqrt[3]{\frac{0,366}{0,4 \cdot 0,9^3 \cdot 0,274 \cdot 14,2}} = 0,686 \text{ m}$$

$$b_0 = 0,36 \cdot 0,686 = 0,247 \text{ m}$$

or retombée maxi = 50 cm > h - 10 = 59 cm

$$\Rightarrow h = 60 \text{ cm}$$

et poteaux $30 \times 30 \text{ cm}^2 \Rightarrow b_0 = 30 \text{ cm}$ $\Rightarrow$ retenu poutres $30 \times 60 \text{ cm}^2$.

c) Résistance à l'effort tranchant

Calcul de V_u :

$$P_u$$

$$V_{0u} = 3 \cdot \frac{P_u}{2}$$

$$V_u = 1,10 V_{0u}$$

$$P_u = 0,159 \text{ MN}$$

$$V_{0u} = 3 \cdot \frac{0,159}{2} = 0,239 \text{ MN}$$

$$V_u = 1,10 \cdot 0,239 = 0,263 \text{ MN}$$

Contrainte tangente conventionnelle :

$$V_{u0} = V_u^{(1)}$$

$$V_{u0} = V_u \text{ en négligeant } p_u$$

$$= 0,263 \text{ MN}$$

$$\tau_{u0} = \frac{V_{u0}}{b_0 \cdot d}$$

$$\tau_{u0} = \frac{0,263}{0,30 \cdot 0,55} = 1,59 \text{ MPa}$$

Contrainte tangente limite :

$$\left. \begin{array}{l} \text{fissuration peu} \\ \text{préjudiciable} \end{array} \right\} \Rightarrow \tau_{\text{lim}} = \text{Min} \left\{ \begin{array}{l} 0,20 \frac{f_{ct}}{\gamma_b} \\ 5 \text{ MPa} \end{array} \right. \quad \tau_{\text{lim}} = \text{Min} \left\{ \begin{array}{l} 0,20 \frac{25}{1,5} \\ 5 \text{ MPa} \end{array} \right. = 3,33$$

Vérification :

$$\tau_{u0} < \tau_{\text{lim}}$$

$$\tau_{u0} = 1,59 \text{ MPa} < \tau_{\text{lim}} = 3,33 \text{ MPa O.K.}$$

d) Flexibilité

$$\frac{h}{l} > \frac{1}{16}$$

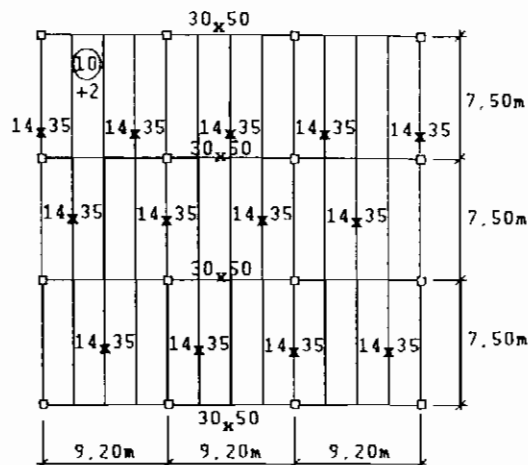
$$h > \frac{9,20 - 2 \cdot \frac{0,30}{2}}{16} = 0,56 \text{ m} < 0,60 \text{ m O.K.}$$

e) Retenu

POUTRES $30 \times 60 \text{ cm}^2$.(1) Ne pas confondre V_{0u} (isostatique) et V_{u0} (réduit)

5. CONCLUSION

En adoptant les mêmes dimensions pour les poutres et poutrelles de rive qui sont moins chargées que les poutres et poutrelles intermédiaires, on retient pour les retombées :



ACTIONS ET SOLLICITATIONS DANS LES POUTRELLES

A. ACTIONS (CHARGES)

Charges permanentes

Caractéristiques des panneaux de dalle :

poutrelles 14 × 45 $\Rightarrow l_x = 2,30 - 0,14 = 2,16 \text{ m}$

poutres 30 × 60 $\Rightarrow l_y = 7,50 - 0,30 = 7,20 \text{ m}$

$$\alpha = \frac{l_x}{l_y} = \frac{2,16}{7,20} = 0,30$$

Apportées par la dalle :

$$g_M = \left(1 - \frac{\alpha^2}{3}\right) \cdot \frac{g l_x}{2} = \left(1 - \frac{0,30^2}{3}\right) \cdot 2,9 \cdot \frac{2,16}{2} = 3,038 \text{ kN/m}$$

$$g_V = \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \frac{g l_x}{2} = \left(1 - \frac{0,30}{2}\right) \cdot 2,9 \cdot \frac{2,16}{2} = 2,662 \text{ kN/m}$$

À prendre en compte :

2 panneaux de dalle : $2 \cdot 3,038 = 6,076 \text{ kN/m}$

sur poutrelle : $2,9 \text{ kN/m}^2 \cdot 0,14 = 0,406 \text{ kN/m}$

retombée de poutrelle : $25 \text{ kN/m}^3 \cdot 0,14 \cdot 0,35 = 1,225 \text{ kN/m}$

total pour M : $g_M = 7,707 \text{ kN/m}$

2 panneaux de dalle :	$2 \cdot 2,662 =$	5,324 kN/m
sur poutrelle :	$2,9 \text{ kN/m}^2 \cdot 0,14 =$	0,406 kN/m
retombée de poutrelle :	$25 \text{ kN/m}^3 \cdot 0,14 \cdot 0,35 =$	1,225 kN/m
total pour V :		$g_V = 6,955 \text{ kN/m}$

b) Charges variables

Apportées par la dalle :

$$q_M = \left(1 - \frac{\alpha^2}{3}\right) \cdot \frac{q l_x}{2} = \left(1 - \frac{0,30^2}{3}\right) \cdot 2,5 \cdot \frac{2,16}{2} = 2,619 \text{ kN/m}$$

$$q_V = \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \frac{q l_x}{2} = \left(1 - \frac{0,30}{2}\right) \cdot 2,5 \cdot \frac{2,16}{2} = 2,295 \text{ kN/m}$$

À prendre en compte :

2 panneaux de dalle : $2 \cdot 2,619 = 5,238 \text{ kN/m}$

sur poutrelle : $2,5 \text{ kN/m}^2 \cdot 0,14 = 0,350 \text{ kN/m}$

total pour M : $q_M = 5,588 \text{ kN/m}$

2 panneaux de dalle : $2 \cdot 2,295 = 4,590 \text{ kN/m}$

sur poutrelle : $2,5 \text{ kN/m}^2 \cdot 0,14 = 0,350 \text{ kN/m}$

total pour V : $q_V = 4,940 \text{ kN/m}$

3.2. SOLLICITATIONS

a) Remarque

Pour la méthode forfaitaire, les sollicitations hyperstatiques sont déduites des sollicitations isostatiques au moyen de coefficients.

On ne calculera que les sollicitations à l'E.L.U., celles à l'E.L.S. s'en déduisant en multipliant les précédentes par $1/\gamma$ avec :

$$\gamma = \frac{1,35 \cdot g_M + 1,5 \cdot q_M}{g_M + q_M} = \frac{1,35 \cdot 7,707 + 1,5 \cdot 5,588}{7,707 + 5,588} = 1,413$$

(valable uniquement pour les moments, l'effort tranchant étant étudié à l'E.L.U.).

b) Sollicitations dans la travée de référence

$P_{Mu} = 1,35 g_M + 1,5 q_M$ $P_{Mu} = 1,35 \cdot 7,707 + 1,5 \cdot 5,588 = 18,786 \text{ kN/m}$

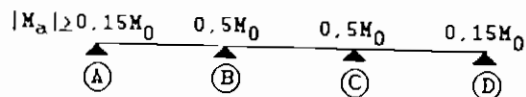
$M_{0u} = P_{Mu} \cdot \frac{l^2}{8}$ $M_{0u} = 18,786 \cdot \frac{7,20^2}{8} = 121,73 \text{ m kN}$

$P_{Vu} = 1,35 g_V + 1,5 q_V$ $P_{Vu} = 1,35 \cdot 6,955 + 1,5 \cdot 4,940 = 16,8 \text{ kN/m}$

$V_{0u} = P_{Vu} \cdot \frac{l}{2}$ $V_{0u} = 16,8 \cdot \frac{7,20}{2} = 60,48 \text{ kN}$

c) Moments sur appuis

On prend les moments minimaux suivants (poutre à plus de deux travées) :



$$M_{Au} = M_{Du} = -0,15 M_{0u}$$

$$M_{Bu} = M_{Cu} = -0,5 M_{0u}$$

$$M_{Au} = M_{Du} = -0,15 \cdot 0,122 = -0,018 \text{ mMN}$$

$$M_{Bu} = M_{Cu} = -0,5 \cdot 0,122 = -0,061 \text{ mMN}$$

d) Moment en travée courante

$$\alpha = \frac{q_M}{g_M + q_M}$$

$$\alpha = \frac{5,588}{7,707 + 5,588} = 0,420$$

Moment calculé :

$$M_t + \frac{M_w + M_e}{2} \geq \text{Max} \left\{ \begin{array}{l} (1 + 0,3 \alpha) M_0 \\ 1,05 M_0 \end{array} \right.$$

soit avec $M_w = M_e = 0,5 M_0$:

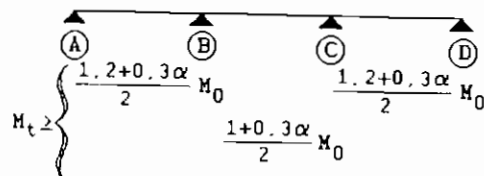
$$M_t \geq \text{Max} \left\{ \begin{array}{l} (0,5 + 0,3 \alpha) M_0 \\ 0,55 M_0 \end{array} \right.$$

$$0,5 + 0,3 \cdot 0,42 = 0,626 > 0,55$$

$$\Rightarrow M_{tu} \geq 0,626 \cdot 0,122 = 0,076 \text{ mMN}$$

Moment minimal réglementaire :

on doit avoir :



d'où dans la travée centrale :

$$M_t \geq \frac{1 + 0,3 \alpha}{2} \cdot M_0$$

$$0,626 \geq \frac{1 + 0,3 \cdot 0,42}{2} = 0,563 \text{ O.K.}$$

Conclusion :

$$\text{retenons : } M_{tu} = 0,076 \text{ mMN}$$

e) Moment en travée de rive

Moment calculé :

$$M_t + \frac{M_w + M_e}{2} \geq \text{Max} \left\{ \begin{array}{l} (1 + 0,3 \alpha) M_0 \\ 1,05 M_0 \end{array} \right.$$

soit avec $M_w = 0,15 M_0$ et $M_e = 0,5 M_0$:

$$M_t \geq \text{Max} \left\{ \begin{array}{l} (0,675 + 0,3 \alpha) M_0 \\ 0,725 M_0 \end{array} \right.$$

$$0,675 + 0,3 \cdot 0,42 = 0,801 > 0,725$$

$$\Rightarrow M_{tu} \geq 0,801 \cdot 0,122 = 0,098 \text{ mMN}$$

Moment minimal réglementaire :

$$M_t \geq \frac{1,2 + 0,3 \alpha}{2} \cdot M_0$$

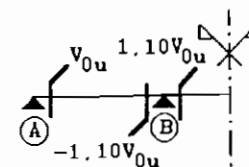
$$0,801 \geq \frac{1,2 + 0,3 \cdot 0,42}{2} = 0,663 \text{ O.K.}$$

Conclusion :

$$\text{retenons : } M_{tu} = 0,098 \text{ mMN}$$

f) Efforts tranchants

En faisant abstraction de la continuité :



Soit :

$$V_{Au} = V_{0u}$$

$$|V_{Bgu}| = 1,10 V_{0u}$$

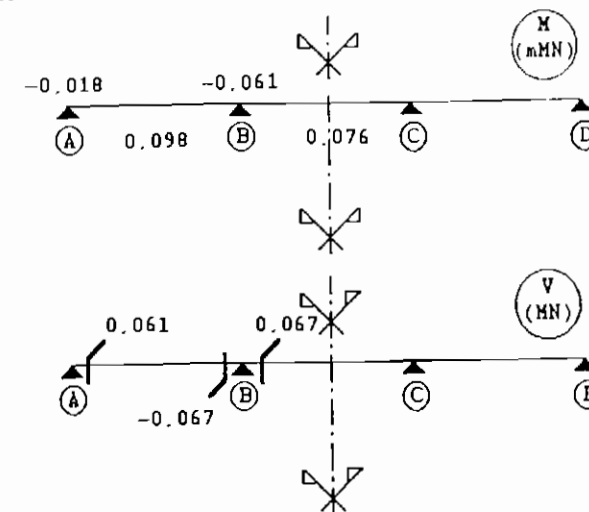
$$V_{Bdu} = 1,10 V_{0u}$$

$$V_{Au} = 0,061 \text{ MN}$$

$$|V_{Bgu}| = 1,10 \cdot 0,061 = 0,067 \text{ MN}$$

$$V_{Bdu} = 0,067 \text{ MN}$$

3.3. SOLLICITATIONS RETENUES



4. POUTRELLES - ARMATURES LONGITUDINALES

1. SUR APPUIS INTERMÉDIAIRES

a) Nécessité d'aciers comprimés

Moment réduit agissant :

$$\mu_{bu} = \frac{M_u}{b_0 \cdot d^2 \cdot f_{bu}}$$

$$\mu_{bu} = \frac{0,061}{0,14 \cdot 0,40^2 \cdot 14,2} = 0,192$$

Moment réduit limite :

Fe E 500 et $f_{c28} \leq 30$ MPa $\Rightarrow$

$$10^4 \mu_{lu} = 3\,220 \theta \gamma + 51 \frac{f_{c28}}{\theta} - 3\,100 \quad (\text{MPa})$$

$$\gamma = 1,413$$

$$10^4 \mu_{lu} = 3\,220 \cdot 1 \cdot 1,413 + 51 \cdot \frac{25}{1} - 3\,100 = 2\,725$$

$$\Rightarrow \mu_{lu} = 0,2725$$

Nécessité d'aciers comprimés :

$$\mu_{bu} > \mu_{lu}$$

$$\mu_{bu} = 0,192 < 0,2725 = \mu_{lu} \Rightarrow A' = 0$$

b) Armatures supérieures

$\mu_{bu} > 0,275 \rightarrow$ méthode

$$z_b = d(1 - 0,6 \mu_{bu})$$

$\mu_{bu} = 0,192 < 0,275 \Rightarrow$ formules simplifiées

$$z_b = 0,40(1 - 0,6 \cdot 0,192) = 0,354 \text{ m}$$

$$A_u = \frac{M_u}{z_b \cdot f_{cd}}$$

$$A_u = \frac{0,061}{0,354 \cdot 435} \cdot 10^4 = 3,96 \text{ cm}^2$$

$$f_{t28} = 0,6 + 0,06 f_{c28}$$

$$f_{t28} = 0,6 + 0,06 \cdot 25 = 2,10 \text{ MPa}$$

$$B = b_0 \cdot h + (b - b_0) h_0 \quad (1)$$

$$B = 0,14 \cdot 0,45 + 1,44 \cdot 0,10 = 0,207 \text{ m}^2$$

$$v' = \frac{b_0 \cdot h^2 + (b - b_0) \cdot h_0^2}{2 \cdot B}$$

$$v' = \frac{0,14 \cdot 0,45^2 + 1,44 \cdot 0,10^2}{2 \cdot 0,207} = 0,103 \text{ m}$$

$$I = b_0 \cdot \frac{h^3}{3} + (b - b_0) \cdot \frac{h_0^3}{3} - B \cdot v'^2 \quad I = 0,14 \cdot \frac{0,45^3}{3} + 1,44 \cdot \frac{0,10^3}{3} - 0,207 \cdot 0,103^2$$

$$I = 0,0025 \text{ m}^4$$

$$A_{min} = \frac{1}{0,81 h} \cdot \frac{1}{v'} \cdot \frac{f_{t28}}{f_c}$$

$$A_{min} = \frac{1}{0,81 \cdot 0,45} \cdot \frac{0,0025}{0,103} \cdot \frac{2,1}{500} \cdot 10^4$$

$$A_{min} = 2,80 \text{ cm}^2 < A_u \text{ O.K.}$$

d'où pour deux files verticales :

$$\text{lit 1 : } 2\Phi 12\text{HA : } 2 \cdot 1,13 = 2,26 \text{ cm}^2$$

$$\text{lit 2 : } 2\Phi 12\text{HA : } 2 \cdot 1,13 = 2,26 \text{ cm}^2$$

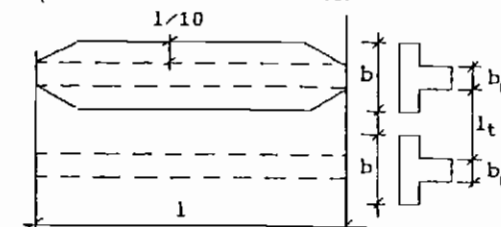
$$A = 4,52 \text{ cm}^2$$

1) Voir § 4.7 a), pour $b = 1,58 \text{ m}$

4.2. EN TRAVÉE DE RIVE

a) Largeur de table à prendre en compte

$M_l > 0 \Rightarrow$ section en T en travée.

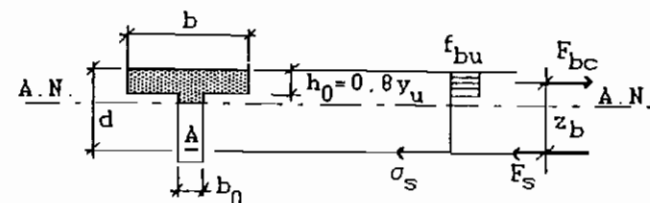


$$\frac{b - b_0}{2} = \text{Min} \left\{ \frac{l}{10}, \frac{l}{4} \right\}$$

$$\frac{b - b_0}{2} = \text{Min} \left\{ \frac{7,20}{10} = 0,72 \text{ m}, \frac{2,16}{2} = 1,08 \text{ m} \right\}$$

$$b = 2 \cdot 0,72 + 0,14 = 1,58 \text{ m}$$

b) Moment de référence



$$F_{bc} = b \cdot h_0 \cdot f_{bu}$$

$$F_{bc} = 1,58 \cdot 0,10 \cdot 14,2 = 2,244 \text{ MN}$$

$$z_b = d - \frac{h_0}{2}$$

$$z_b = 0,40 - \frac{0,10}{2} = 0,35 \text{ m}$$

$$M_{Tu} = F_{bc} \cdot z_b$$

$$M_{Tu} = 2,244 \cdot 0,35 = 0,785 \text{ mMN}$$

c) Type de section

$$M_{lu} > M_{Tu}$$

$$M_{lu} = 0,098 \text{ mMN} < 0,785 \text{ mMN} = M_{Tu}$$

$\Rightarrow$ Section rectangulaire bd.

d) Armatures inférieures

$$\mu_{bu} = \frac{M_{lu}}{b \cdot d^2 \cdot f_{bu}}$$

$$\mu_{bu} = \frac{0,098}{1,58 \cdot 0,40^2 \cdot 14,2} = 0,027$$

$$\mu_{bu} < \mu_{lu}$$

$$\mu_{bu} = 0,027 < 0,2725 = \mu_{lu} \Rightarrow A' = 0$$

$\mu_{bu} > 0,275 \Rightarrow$ méthode

$\mu_{bu} = 0,027 < 0,275 \Rightarrow$ formules simplifiées

$$z_b = d(1 - 0,6 \mu_{bu})$$

$$z_b = 0,40(1 - 0,6 \cdot 0,027) = 0,394 \text{ m}$$

$$A_u = \frac{M_{lu}}{z_b \cdot f_{cd}}$$

$$A_u = \frac{0,098}{0,394 \cdot 435} \cdot 10^4 = 5,72 \text{ cm}^2$$

$$v = h - v'$$

$$A_{min} = \frac{1}{d - \frac{h_0}{3}} \cdot \frac{1}{v} \cdot \frac{f_{c28}}{f_c}$$

$$v = 0,45 - 0,103 = 0,347 \text{ m}$$

$$A_{min} = \frac{1}{0,40 - \frac{0,10}{3}} \cdot \frac{0,0025}{0,347} \cdot \frac{2,1}{500} \cdot 10^4$$

$$A_{min} = 0,83 \text{ cm}^2 < A_u = 5,72 \text{ cm}^2 \text{ O.K.}$$

soit deux files verticales :

$$\text{lit 1 : } 2\Phi 14\text{HA} : 2 \cdot 1,54 = 3,08 \text{ cm}^2$$

$$\text{lit 2 : } 2\Phi 14\text{HA} : 2 \cdot 1,54 = 3,08 \text{ cm}^2$$

$$A = 6,16 \text{ cm}^2$$

4.3. EN TRAVÉE CENTRALE

Un calcul identique en tout point à celui effectué ci-dessus au paragraphe 4.2. donne pour deux files verticales ; $M_u = 0,076 \text{ mMN}$; $b = 1,58 \text{ m}$; $b_0 = 0,14 \text{ m}$ et $d = 0,40 \text{ m}$:

$$A = 4,36 \text{ cm}^2$$

soit :

$$\text{lit 1 : } 2\Phi 12\text{HA} : 2 \cdot 1,13 = 2,26 \text{ cm}^2$$

$$\text{lit 2 : } 2\Phi 12\text{HA} : 2 \cdot 1,13 = 2,26 \text{ cm}^2$$

$$A = 4,52 \text{ cm}^2$$

4.4. SUR APPUI DE RIVE

Moment à reprendre pour encastrement partiel sur poutres de rive.

$$M_u = -0,15 \cdot M_{01}$$

$$M_u = -0,018 \text{ mMN}$$

Armatures supérieures :

$$\mu_{bu} = \frac{M_u}{b_0 \cdot d^2 \cdot f_{bu}}$$

$$\mu_{bu} = \frac{0,018}{0,14 \cdot 0,40^2 \cdot 14,2} = 0,057$$

$$\mu_{bu} > \mu_{lu}$$

$$\mu_{bu} = 0,057 < 0,2725 = \mu_{lu} \Rightarrow \Lambda' = 0$$

$$\mu_{bu} > 0,275 \Rightarrow \text{méthode}$$

$$\mu_{bu} = 0,057 < 0,275 \Rightarrow \text{formules simplifiées}$$

$$z_b = d (1 - 0,6 \mu_{bu})$$

$$z_b = 0,40 (1 - 0,6 \cdot 0,057) = 0,386 \text{ m}$$

$$\Lambda_u = \frac{M_u}{z_b \cdot f_{cd}}$$

$$\Lambda_u = \frac{0,018}{0,386 \cdot 435} \cdot 10^4 = 1,07 \text{ cm}^2$$

soit deux files verticales :

$$2\Phi 10\text{HA} : 2 \cdot 0,79 = 1,58 \text{ cm}^2 = A$$

5. ARMATURES D'ÂME

En indiquant entre parenthèses les résultats pour l'appui de rive de la travée de rive.

5.1. VÉRIFICATION DU BÉTON

a) Contrainte tangente

Charges uniformément réparties :

$$(0,061)$$

$$V_{u0} = V_u - p_{vu} \cdot \frac{5 \cdot b}{6}$$

$$V_{u0} = 0,067 - 16,8 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{5 \cdot 0,45}{6}$$

$$(0,055)$$

$$= 0,061 \text{ MN}$$

$$(0,055) \quad (0,98)$$

$$\tau_{u0} = \frac{V_{u0}}{b_0 \cdot d}$$

$$\tau_{u0} = \frac{0,061}{0,14 \cdot 0,40} = 1,09 \text{ MPa}$$

b) Contrainte limite

$$\left. \begin{array}{l} \text{fissuration peu} \\ \text{préjudiciable} \end{array} \right\} \rightarrow \tau_{lim} = \min \left\{ \begin{array}{l} 0,20 \cdot \frac{f_{ct}}{\gamma_b} \\ 5 \text{ MPa} \end{array} \right. \quad \tau_{lim} = \min \left\{ \begin{array}{l} 0,20 \cdot \frac{25}{1,5} = 3,33 \\ 5 \text{ MPa} \end{array} \right.$$

$$\tau_{lim} = 3,33 \text{ MPa}$$

c) Vérification

$$\tau_{u0} > \tau_{lim}$$

$$(0,98)$$

$$\tau_{u0} = 1,09 \text{ MPa} < 3,33 \text{ MPa} = \tau_{lim} \text{ O.K.}$$

$$\Rightarrow \Lambda_1 \text{ droites}$$

5.2. ARMATURES D'ÂME DROITES

a) Calcul

$$\frac{\Lambda_1}{b_0 \cdot s_1} \cdot \frac{f_{ct}}{\gamma_s} \geq \frac{\tau_u}{0,9 (\sin \alpha + \cos \alpha)}$$

avec :

α = inclinaison des Λ_1 .

$$\Lambda_1 \text{ droites} \Rightarrow \alpha = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \sin \alpha + \cos \alpha = 1$$

$$\text{Fe E 500} \Rightarrow f_{ct} = 500 \text{ MPa}, \gamma_s = 1,15$$

$$(0,98)$$

$$\tau_{u0} = 1,09 \text{ MPa}$$

$$\tau_{u0} = \frac{V_{u0}}{b_0 \cdot d}$$

$$k = \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ si reprise non traitée,} \\ 0 \text{ si fissuration très préjudiciable,} \\ 1 \text{ sinon en flexion simple.} \end{array} \right. \rightarrow k = 0$$

f_{t28} bornée supérieurement à 3,3 MPa

$$f_{t28} = 2,1 \text{ MPa} < 3,3 \text{ MPa O.K.}$$

$$\frac{A_t}{s_t} \geq \frac{14 \cdot 1,09}{0,9 \cdot \frac{500}{1,15}} = \frac{1}{25,64} \text{ cm}^2/\text{cm} \quad (0,98) \quad (28,52)$$

b) Pourcentage minimal

$$\frac{A_t}{b_0 \cdot s_t} \cdot f_{ct} \geq 0,4 \text{ MPa}$$

$$\frac{A_t}{s_t} \geq \frac{14 \cdot 0,4}{500} = \frac{1}{89,29} \text{ cm}^2/\text{cm}$$

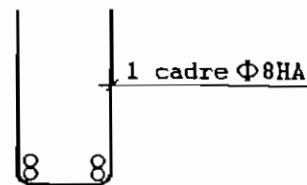
$$\frac{A_t}{s_t} = \frac{1}{25,64} > \frac{1}{89,29} \text{ O.K.} \quad (28,52)$$

c) Diamètre et espacement des A_t

$$\Phi_t \leq \text{Min} \begin{cases} \Phi_l \\ l/35 \\ b_0/10 \end{cases}$$

$$\Phi_t \leq 12 \text{ mm} = \text{Min} \begin{cases} 12 \text{ mm (appui)} \\ 450/35 = 12,9 \text{ mm} \\ 140/10 = 14 \text{ mm} \end{cases}$$

d'où pour «coudre» deux files :



$$A_t = 2 \cdot 0,50 = 1,00 \text{ cm}^2$$

$$\Rightarrow s_t = 1,00 \cdot 25,64 = 25,64 \text{ cm} \quad (28,52) \quad (28,52)$$

$$\text{retenons : 1 cadre } \Phi 8 \text{ HA } s_{t0} = 25 \text{ cm} \quad (28 \text{ cm})$$

d) Espacement maximal

$$s_t = \text{Min} \begin{cases} 0,9 \cdot d \\ 40 \text{ cm} \\ 15 \Phi'_{\text{min}} \text{ si } A' \neq 0 \end{cases}$$

$$s_t = 25 \text{ cm} < 36 \text{ cm} = s_t = \text{Min} \begin{cases} 0,9 \cdot 40 = 36 \text{ cm} \\ 40 \text{ cm} \end{cases} \quad (28) \quad *$$

$$s_t = 25 \text{ cm} < 36 \text{ cm} = s_t \text{ O.K.} \quad (28 \text{ cm})$$

6. VÉRIFICATIONS DIVERSES

6.1. APPUI SIMPLE D'ABOUT

a) Aciers inférieurs sur appui

$$A = \frac{V_{\text{umax}}}{f_{cd}}$$

$$A = \frac{0,061}{435} \cdot 10^4 = 1,40 \text{ cm}^2$$

Comme on avait deux files de 2Φ14HA en travée de rive, on garde :

2Φ14HA inférieurs sur appui :

$$A = 2 \cdot 1,54 = 3,08 \text{ cm}^2$$

totalement ancrés au-delà du nu d'appui.

b) Vérification du béton de la bielle d'about

Largeur d'appui : $b_p = 30 \text{ cm}$

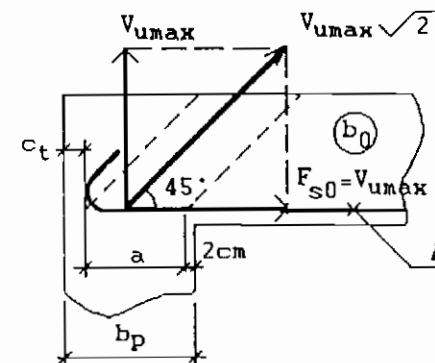
= largeur des poutres

Enrobage : $e = 3 \text{ cm}$

$$c_t = \text{Max} \begin{cases} \Phi \\ e \\ 1 \text{ cm} \end{cases}$$

$$c_t = 3,0 \text{ cm} = \text{Max} \begin{cases} 14 \text{ mm} \\ 3 \text{ cm} \\ 1 \text{ cm} \end{cases}$$

$$b_0 = 14 \text{ cm}$$



$$a = b_p - c_t - 2 \text{ cm}$$

$$a = 30 - 3 - 2 = 25 \text{ cm}$$

Contrainte dans la bielle :

$$\sigma_{bc} = \frac{V_{\text{umax}} \sqrt{2}}{b_0 \cdot \frac{a}{\sqrt{2}}} = \frac{2 \cdot V_{\text{umax}}}{b_0 \cdot a}$$

On doit vérifier :

$$\sigma_{lx} = \frac{2 \cdot V_{u\max}}{b_0 \cdot a} \leq 0,8 \cdot \frac{f_{c28}}{\gamma_{lx}}$$

$$\sigma_{lx} = \frac{2 \cdot 0,061}{0,14 \cdot 0,25} = 3,49 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{lx} = 3,49 \text{ MPa} < 13,3 \text{ MPa} = 0,8 \cdot \frac{25}{1,5} \text{ O.K.}$$

6.2. APPUIS INTERMÉDIAIRES

Armatures inférieures

$$M_{au} > V_{u\max} \cdot z$$

$$z = 0,9d$$

$$M_{au} = 0,061 \text{ mMN}$$

$$V_{u\max} \cdot z = 0,067 \cdot 0,9 \cdot 0,40 = 0,024 \text{ mMN}$$

$$\Rightarrow M_{au} = 0,061 > V_{u\max} \cdot z = 0,024$$

$\Rightarrow$ Armatures inférieures A ancrées pour $V_{u\max} - M_u/z$ au-delà du nu d'appui non nécessaires en principe. On garde 2 Φ 14.

7. ARRÊT FORFAITAIRE DES ARMATURES

$$q > < g$$

$$q = 2,5 \text{ kN/m}^2 < g = 2,9 \text{ kN/m}^2$$

7.1. EN TRAVÉE DE RIVE

4 Φ 14HA, d'où :

lit 1 : 2 Φ 14HA conduits jusqu'à l'appui ($\geq A/2$),

lit 2 : 2 Φ 14HA arrêtés à moins de $l/10$ du nu d'appui. C'est-à-dire à 70 cm du nu.

7.2. SUR APPUIS INTERMÉDIAIRES

4 Φ 12HA en deux lits, d'où :

lit 1 : 2 Φ 12HA ($> A/2$) arrêtés pour le premier appui intermédiaire à :

$$l' = \text{Max} \left\{ \begin{array}{l} l/4 \\ 50 \cdot 1,2 = 60 \text{ cm} \end{array} \right. = \text{Max} \left\{ \begin{array}{l} 7,20/4 = 1,80 \text{ m} \\ 60 \text{ cm} \end{array} \right. = 1,80 \text{ m} \text{ côté travée de rive}$$

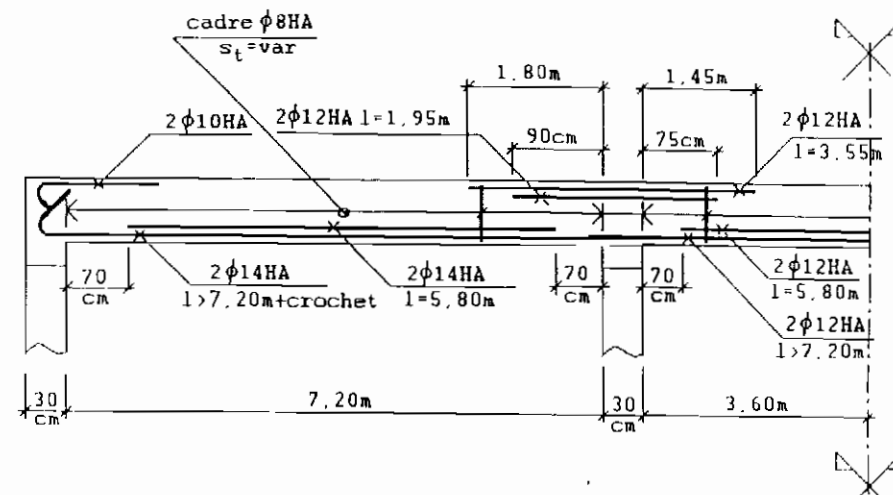
$$l' = \text{Max} \left\{ \begin{array}{l} l/5 \\ 50 \cdot 1,2 = 60 \text{ cm} \end{array} \right. = \text{Max} \left\{ \begin{array}{l} 7,20/5 = 1,44 \text{ m} \\ 60 \text{ cm} \end{array} \right. = 1,45 \text{ m} \text{ côté travée centrale}$$

lit 2 : 2 Φ 12HA arrêtés pour le premier appui intermédiaire à :

$$l'' = \text{Max} \left\{ \begin{array}{l} l'/2 \\ 50 \cdot 1,2 = 60 \text{ cm} \end{array} \right. = \text{Max} \left\{ \begin{array}{l} 1,80/2 = 0,90 \text{ m} \\ 60 \text{ cm} \end{array} \right. = 90 \text{ cm} \text{ côté travée de rive}$$

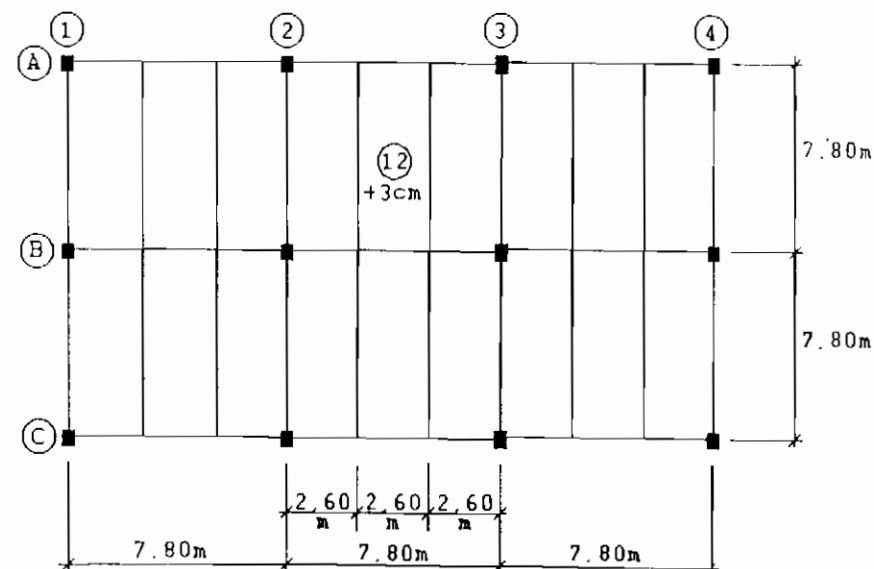
$$l'' = \text{Max} \left\{ \begin{array}{l} l'/2 \\ 50 \cdot 1,2 = 60 \text{ cm} \end{array} \right. = \text{Max} \left\{ \begin{array}{l} 1,45/2 = 0,725 \text{ m} \\ 60 \text{ cm} \end{array} \right. = 75 \text{ cm} \text{ côté travée centrale}$$

7.3. SCHÉMA



III. EXERCICE N° 2 : PLANCHER - MÉTHODE CAQUOT

— ÉNONCÉ —



■ Caractéristiques du plancher :

- dalle de 12 cm d'épaisseur avec chape de 3 cm,
- poutrelles $24 \times 65 \text{ cm}^2$,
- poutres $30 \times 90 \text{ cm}^2$,
- poteaux $30 \times 30 \text{ cm}^2$.

■ Actions variables de durée d'application supérieure à 24 heures :

- charge d'exploitation de 10 kN/m^2 .

■ Fissuration peu préjudiciable. Reprise de bétonnage sans indentations dans les poutres

■ Matériaux :

- béton : $f_{c28} = 25 \text{ MPa}$,
- aciers : Fe E 500 HA.

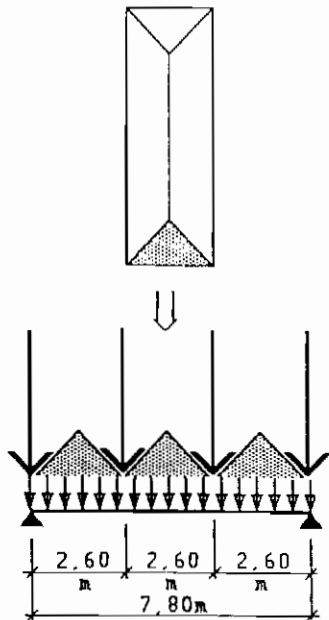
■ On se propose :

- 1) de calculer les aciers longitudinaux de la travée centrale de la poutre file B,
- 2) de déterminer dans cette travée, les armatures d'âme.

— CORRIGÉ —

COLLICITATIONS-TRAVÉE CENTRALE FILE B

CHARGEMENT



1.2. MÉTHODE DE CALCUL

a) Charges au m^2 de plancher

Poids propre dalle :	$25 \text{ kN/m}^3 \cdot 0,12 =$	$3,0 \text{ kN/m}^2$
Chape :	$20 \text{ kN/m}^3 \cdot 0,03 =$	$0,6 \text{ kN/m}^2$
		$g = 3,6 \text{ kN/m}^2$
Charges d'exploitation :		$q = 10 \text{ kN/m}^2$

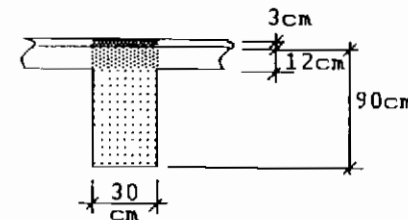
b) Méthode de calcul

$\frac{q}{g} > 2$	$\frac{10}{3,6} = 2,78 > 2$
$q > 5 \text{ kN/m}^2$	$q = 10 \text{ kN/m}^2 > 5 \text{ kN/m}^2$
poutres et poutrelles associées à un hourdis	oui

⇒ MÉTHODE CAQUOT.

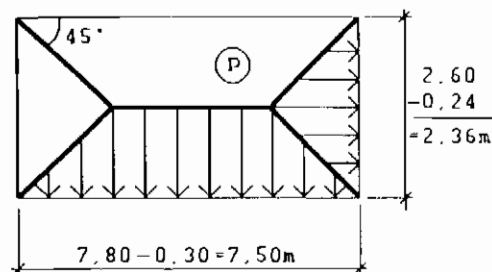
1.3. ÉVALUATION DES CHARGES

a) Charge uniformément répartie



- Dalle sur poutre :	$25 \text{ kN/m}^3 \cdot 0,12 \cdot 0,30 =$	$0,90 \text{ kN/m}$
- Chape sur poutre :	$20 \text{ kN/m}^3 \cdot 0,03 \cdot 0,30 =$	$0,18 \text{ kN/m}$
- Retombée de poutre :	$25 \text{ kN/m}^3 \cdot 0,78 \cdot 0,30 =$	$5,85 \text{ kN/m}$
- Total :		$g_1 = 6,93 \text{ kN/m}$
- Charge d'exploitation :	$10 \text{ kN/m}^2 \cdot 0,30 =$	$q_1 = 3 \text{ kN/m}$

b) Charge triangulaire (panneaux de dalle sur poutre)



- Charge permanente globale : $2 \left[3,6 \text{ kN/m}^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2,36 \cdot \frac{2,36}{2} \right] = 10,025 \text{ kN}$
- Charge variable globale : $10,025 \cdot \frac{10}{3,6} = 27,847 \text{ kN}$
- Soit, en remplaçant l'ensemble des charges triangulaires par une charge uniforme équivalente :
 - Charge permanente : $\frac{10,025}{2,60} = g_2 = 3,86 \text{ kN/m}$
 - Charge variable : $\frac{27,847}{2,60} = q_2 = 10,71 \text{ kN/m}$

c) Charges concentrées (réactions d'appui des poutrelles sur les poutres)

En tenant compte de la continuité puisque l'on utilise la méthode Caquot :

Charges permanentes :

Caractéristiques des panneaux de dalle :

$$\alpha = \frac{l_x}{l_y} \quad \alpha = \frac{2,36}{7,50} = 0,3147$$

D'où les charges par mètre de poutrelle :

- charge transmise par les deux panneaux de dalle (calcul de V donc de R) :

$$2 \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) \cdot \frac{g l_x}{2} \quad 2 \left(1 - \frac{0,3147}{2} \right) \cdot 3,6 \cdot \frac{2,36}{2} = 7,16 \text{ kN/m}$$

- poids correspondant à l'épaisseur de la dalle au-dessus de la poutrelle :

$$3,6 \text{ kN/m}^2 \cdot 0,24 = 0,864 \text{ kN/m}$$

- poids de la retombée :

$$25 \text{ kN/m}^3 \cdot 0,24 \cdot 0,53 = 3,180 \text{ kN/m}$$

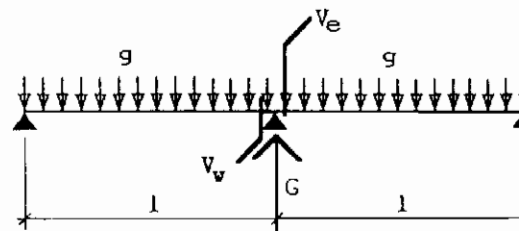
- total :

$$g = 11,204 \text{ kN/m}$$

Moment sur appui central des poutrelles ($l = l_y$):

$$\left. \begin{array}{l} l'_w = l'_e = l \\ p_w = p_e = g \end{array} \right\} \Rightarrow M_{Bg} = -g \frac{l^2}{8,5} \quad M_{Bg} = -11,204 \cdot \frac{7,50^2}{8,5} = -74,14 \text{ m kN}$$

Effort tranchant au voisinage de cet appui :



$$V_e = -V_w = g \cdot \frac{l}{2} - \frac{M_{Bg}}{l} \quad V_e = 11,204 \cdot \frac{7,50}{2} + \frac{74,14}{7,50} = 51,90 \text{ kN}$$

Réaction d'appui :

$$G = V_e - V_w \quad G = 2 \cdot 51,90 = 103,80 \text{ kN}$$

Charges variables :

- charge transmise par les deux panneaux de dalle (calcul de V donc de R) :

$$2 \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) \cdot \frac{q l_x}{2} \quad 2 \left(1 - \frac{0,3147}{2} \right) \cdot 10 \cdot \frac{2,36}{2} = 19,89 \text{ kN/m}$$

- charge d'exploitation au dessus de la poutre :

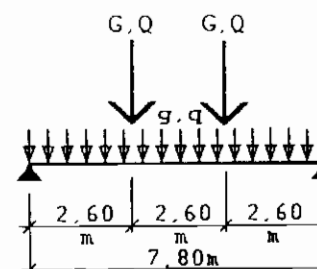
$$10 \text{ kN/m}^2 \cdot 0,24 = 2,40 \text{ kN/m}$$

$$q = 22,29 \text{ kN/m}$$

D'où la réaction d'appui des poutrelles sur la poutre :

$$Q = G \cdot \frac{q}{g} \quad Q = 103,80 \cdot \frac{22,29}{11,204} = 206,51 \text{ kN}$$

d) Charges retenues



$$g = g_1 + g_2$$

$$g = 6,93 + 3,86 = 10,79 \text{ kN/m}$$

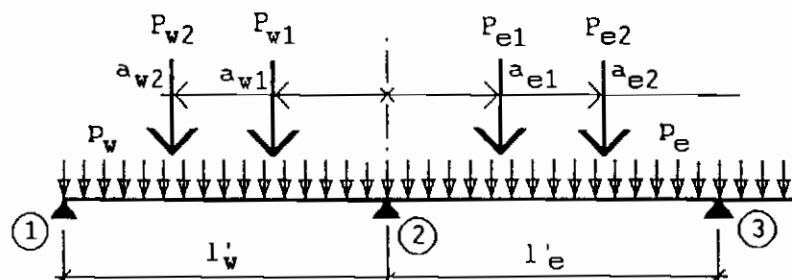
$$q = q_1 + q_2$$

$$q = 3 + 10,71 = 13,71 \text{ kN/m}$$

$$G = 103,80 \text{ kN}$$

$$Q = 206,51 \text{ kN}$$

MOMENTS ÉLÉMENTAIRES SUR APPUIS



$$l'_w = l_w = 7,50 \text{ m (travée de rive)}$$

$$l'_e = 0,8 l_e = 0,8 \cdot 7,50 = 6,00 \text{ m (travée courante)}$$

$$a_{w1} = a_{e1} = 2,45 \text{ m}$$

$$a_{w2} = a_{e2} = 2,45 + 2,60 = 5,05 \text{ m}$$

$$M_2 = - \frac{p_w \cdot l_w^3 + p_e \cdot l_e^3}{8,5 (l'_w + l'_e)} - \frac{k_w \cdot p_w \cdot l_w^2 + k_e \cdot p_e \cdot l_e^2}{(l'_w + l'_e)}$$

$$k = - \frac{1}{2,125} \cdot \frac{a}{l'} \left(1 - \frac{a}{l'} \right) \left(2 - \frac{a}{l'} \right)$$

a) Charges permanentes

$$p_w = p_e = g$$

$$p_w = p_e = 10,79 \text{ kN/m}$$

$$P_{w1} = P_{w2} = P_{e1} = P_{e2} = G$$

$$P_{w1} = P_{w2} = P_{e1} = P_{e2} = 103,80 \text{ kN}$$

d'où :

$$p_w \Rightarrow 10,79 \cdot \frac{7,50^3}{8,5} = 535,53$$

$$p_e \Rightarrow 10,79 \cdot \frac{6,00^3}{8,5} = 274,19$$

$$p_{w1} \Rightarrow \frac{a_{w1}}{l'_w} = \frac{2,45}{7,50} = 0,327$$

$$k_{w1} = \frac{1}{2,125} \cdot 0,327 (1 - 0,327) (2 - 0,327) = 0,173$$

$$0,173 \cdot 103,80 \cdot 7,50^2 = 1010,10$$

$$p_{w2} \Rightarrow \frac{a_{w2}}{l'_w} = \frac{5,05}{7,50} = 0,673$$

$$k_{w2} = \frac{1}{2,125} \cdot 0,673 (1 - 0,673) (2 - 0,673) = 0,137$$

$$0,137 \cdot 103,80 \cdot 7,50^2 = 799,91$$

$$p_{e1} \Rightarrow \frac{a_{e1}}{l'_e} = \frac{2,45}{6,00} = 0,408$$

$$k_{e1} = \frac{1}{2,125} \cdot 0,408 (1 - 0,408) (2 - 0,408) = 0,181$$

$$0,181 \cdot 103,80 \cdot 6,00^2 = 676,36$$

$$p_{e2} \Rightarrow \frac{a_{e2}}{l'_e} = \frac{5,05}{6,00} = 0,842$$

$$k_{e2} = \frac{1}{2,125} \cdot 0,842 (1 - 0,842) (2 - 0,842) = 0,072$$

$$0,072 \cdot 103,80 \cdot 6,00^2 = 269,05$$

$$\Sigma = 3565,14 \text{ kNm}^2$$

d'où :

$$M_{2g} = - \frac{3565,14}{7,50 + 6,00} = -264,08 \text{ mkn}$$

b) Charges variables sur travée l_w

$$p_w = q ; p_c = 0$$

$$P_{w1} = P_{w2} = Q ; P_{c1} = P_{c2} = 0$$

d'où :

$$p_w = q = 13,71 \text{ kN/m}$$

$$P_{w1} = P_{w2} = Q = 206,51 \text{ kN}$$

$$P_w \Rightarrow 535,53 \cdot \frac{13,71}{10,79} = 680,46$$

$$P_{w1} \Rightarrow 1\,010,10 \cdot \frac{206,51}{103,80} = 2\,009,59$$

$$P_{w2} \Rightarrow 799,91 \cdot \frac{206,51}{103,80} = 1\,591,42$$

$$\Sigma = 4\,281,47 \text{ kNm}^2$$

d'où :

$$M_{2q_w} = - \frac{4\,281,47}{7,50 + 6,00} = - 317,15 \text{ mkN}$$

c) Charges variables sur travée l_c

$$p_c = q ; p_w = 0$$

$$P_{c1} = P_{c2} = Q ; P_{w1} = P_{w2} = 0$$

d'où :

$$p_c = q = 13,71 \text{ kN/m}$$

$$P_{c1} = P_{c2} = Q = 206,51 \text{ kN}$$

$$P_c \Rightarrow 274,19 \cdot \frac{13,71}{10,79} = 348,39$$

$$P_{c1} \Rightarrow 676,36 \cdot \frac{206,51}{103,80} = 1\,345,62$$

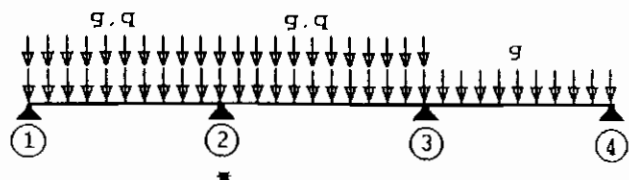
$$P_{c2} \Rightarrow 269,05 \cdot \frac{206,51}{103,80} = 535,27$$

$$\Sigma = 2\,229,28 \text{ kNm}^2$$

d'où :

$$M_{2q_c} = - \frac{2\,229,28}{7,50 + 6,00} = - 165,13 \text{ mkN}$$

1.5. MOMENT MAXIMAL SUR APPUI 2



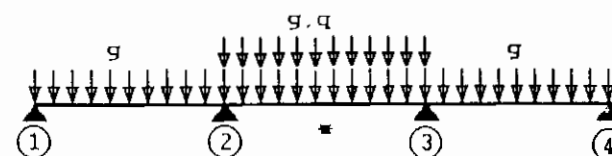
État-limite ultime :

$$M_{2u} = 1,35 M_{2g} + 1,50 [M_{2q_c} + M_{2q_w}] \quad M_{2u} = - 1,35 \cdot 264,08 - 1,5 [165,13 + 317,15] \\ = - 1\,079,93 \text{ mkN}$$

État-limite de service :

$$M_{2ser} = M_{2g} + [M_{2q_c} + M_{2q_w}] \quad M_{2ser} = - 264,08 - [165,13 + 317,15] \\ = - 746,36 \text{ mkN}$$

1.6. MOMENT MAXIMAL EN TRAVÉE 2-3



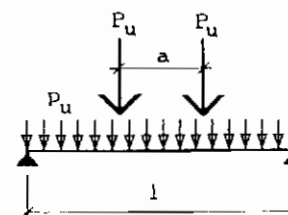
État-limite ultime :

- Moment sur appui :

$$M_{2u} = 1,35 M_{2g} + 1,5 M_{2q_c} \quad M_{2u} = - 1,35 \cdot 264,08 - 1,5 \cdot 165,13 \\ = - 604,20 \text{ mkN}$$

- Moment en travée :

$$M_{umax} = \mu \left(\frac{l}{2} \right) + M_{2u}$$



$$l = 7,50 \text{ m} \\ a = 2,60 \text{ m} \\ l - a = 4,90 \text{ m}$$

$$P_u \Rightarrow \mu \left(\frac{l}{2} \right) = P_u \cdot \frac{l^2}{8} \quad \mu \left(\frac{l}{2} \right) = [1,35 \cdot 10,79 + 1,5 \cdot 13,71] \cdot \frac{7,50^2}{8} \\ = 247,02 \text{ mkN}$$

$$P_u \Rightarrow \mu \left(\frac{l}{2} \right) = P_u \cdot \left(\frac{l}{2} - \frac{a}{2} \right) \quad \mu \left(\frac{l}{2} \right) = [1,35 \cdot 103,8 + 1,5 \cdot 206,51] \cdot \frac{4,90}{2} \\ = 1\,102,24 \text{ mkN}$$

$$\mu \left(\frac{l}{2} \right) = 1\,349,26 \text{ mkN}$$

$$M_{umax} = 1\,349,26 - 604,20 \\ = 745,06 \text{ mkN}$$

État-limite de service :

– Moment sur appui :

$$M_{2ser} = M_{2g} + M_{2qe}$$

$$M_{2ser} = -264,08 - 165,13 \\ = -429,21 \text{ mN}$$

– Moment en travée :

$$M_{tsermax} = \mu \left(\frac{l}{2} \right) + M_{2ser}$$

$$P_{ser} \Rightarrow \mu \left(\frac{l}{2} \right) = P_{ser} \cdot \frac{l^2}{8}$$

$$\mu \left(\frac{l}{2} \right) = [10,79 + 13,71] \frac{7,50^2}{8} \\ = 172,27 \text{ mN}$$

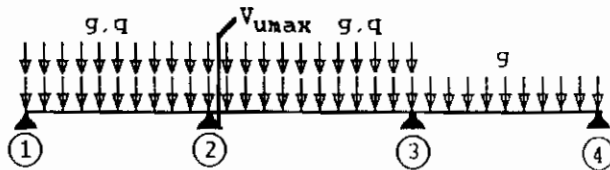
$$P_{ser} \Rightarrow \mu \left(\frac{l}{2} \right) = P_{ser} \cdot \left(\frac{l}{2} - \frac{a}{2} \right)$$

$$\mu \left(\frac{l}{2} \right) = [103,8 + 206,51] \frac{4,90}{2} \\ = 760,26 \text{ mN}$$

$$\mu \left(\frac{l}{2} \right) = 932,53 \text{ mN}$$

$$M_{tsermax} = 932,53 - 429,21 \\ = 503,32 \text{ mN}$$

7. EFFORT TRANCHANT SUR APPUIS DANS LA TRAVÉE 2-3



) Moments sur appuis 2 et 3

$$M_{2u} = 1,35 M_{2g} + 1,5 (M_{2qw} + M_{2qe})$$

$$M_{2u} = -1\,079,93 \text{ mN (voir 1.5.)}$$

$$M_{3u} = 1,35 M_{2g} + 1,5 M_{2qe}$$

$$M_{3u} = -604,20 \text{ mN (voir 1.6.)}$$

) Effort tranchant dans la travée de référence

$$p_u = 1,35 g + 1,5 q$$

$$p_u = 1,35 \cdot 10,79 + 1,5 \cdot 13,71 = 35,13 \text{ kN/m}$$

$$P_u = 1,35 G + 1,5 Q$$

$$P_u = 1,35 \cdot 103,8 + 1,5 \cdot 206,51 = 449,90 \text{ kN}$$

$$V_{0u} = p_u \cdot \frac{l}{2} + P_u$$

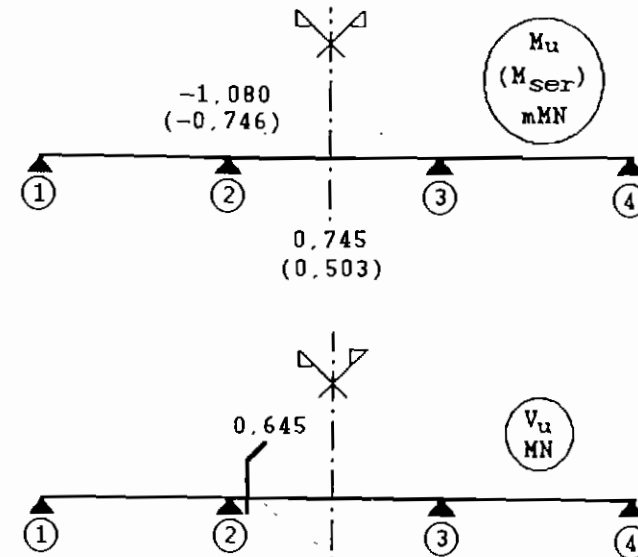
$$V_{0u} = 35,13 \cdot \frac{7,50}{2} + 449,90 = 581,64 \text{ kN}$$

c) Effort tranchant dans la travée continue

$$V_{2u} = V_{0u} + \frac{M_{3u} - M_{2u}}{l}$$

$$V_{2u} = 581,64 + \frac{-604,20 + 1\,079,93}{7,50} \\ = 645,07 \text{ kN}$$

1.8. CONCLUSION



2. ARMATURES LONGITUDINALES

2.1. SUR APPUI 2 (OU 3)

$M_u = -1,080 \text{ mMN} < 0 \Rightarrow$ Section rectangulaire $b_0 = 0,30 \text{ m}$; $h = 0,90 \text{ m}$.

Le calcul est en tout point identique à celui exposé au paragraphe 4 de l'exercice «Fissuration peu préjudiciable – section rectangulaire avec A' » au chapitre 6 «FLEXION SIMPLE». Les aciers tendus sont placés en partie supérieure de la section.

Pour $M_u = 1,080 \text{ mMN}$; $M_{ser} = 0,746 \text{ mMN}$; $b_0 = 0,30 \text{ m}$; $d = 0,81 \text{ m}$ et $d' = 0,05 \text{ m}$; il vient :

a) Aciers comprimés

$$A' = 13,44 \text{ cm}^2$$

$$\text{Lit 1 : } 3\Phi 20\text{HA } 3 \cdot 3,14 = 9,42 \text{ cm}^2$$

$$\text{Lit 2 : } 3\Phi 14\text{HA } 3 \cdot 1,54 = 4,62 \text{ cm}^2$$

$$A' = 14,04 \text{ cm}^2$$

b) Aciers tendus

$$A = 35,85 \text{ cm}^2$$

$$\text{Lit 1 : } 3\Phi 25\text{HA } 3 \cdot 4,91 = 14,73 \text{ cm}^2$$

$$\text{Lit 2 : } 3\Phi 25\text{HA } 3 \cdot 4,91 = 14,73 \text{ cm}^2$$

$$\text{Lit 3 : } 1\Phi 20\text{HA} + 2\Phi 16\text{HA } 3,14 + 2 \cdot \frac{2,01}{2} = 7,16 \text{ cm}^2$$

$$A = 36,62 \text{ cm}^2$$

2.2. EN TRAVÉE

 $M_u > 0 \Rightarrow$ Section en T.
Fissuration peu préjudiciable $\Rightarrow$ Calcul à l'E.L.U.

a) Largeur de table à prendre en compte

$$\frac{b - b_0}{2} = \text{Min} \left\{ \begin{array}{l} \frac{l}{10} \\ l_1 \\ 2 \end{array} \right.$$

$$\frac{b - b_0}{2} = 0,75 \text{ m} = \text{Min} \left\{ \begin{array}{l} \frac{7,50}{10} = 0,75 \\ \frac{7,50}{2} = 3,75 \end{array} \right.$$

$$b = 2 \cdot 0,75 + 0,30 = 1,80 \text{ m}$$

b) Moment de référence

$$f_{bu} = 0,85 \cdot \frac{f_{c28}}{0 \cdot \gamma_b}$$

$$f_{bu} = 0,85 \cdot \frac{25}{1 \cdot 1,5} = 14,2 \text{ MPa}$$

$$F_{bc} = b \cdot h_0 \cdot f_{bu}$$

$$F_{bc} = 1,80 \cdot 0,12 \cdot 14,2 = 3,07 \text{ MN}$$

$$z_b = d - \frac{h_0}{2}$$

$$z_b = 0,85 - \frac{0,12}{2} = 0,79 \text{ m}$$

$$M_{1u} = F_{bc} \cdot z_b$$

$$M_{1u} = 3,07 \cdot 0,79 = 2,43 \text{ mMN}$$

c) Armatures à l'E.L.U.

Type de section à considérer :

$$M_u > M_{1u}$$

$$M_u = 0,745 \text{ mMN} < M_{1u} = 2,43 \text{ mMN}$$

 $\Rightarrow$ Table surabondante. $\Rightarrow$ Calcul en section rectangulaire bd.

Armatures pour la section de largeur b :

$$\mu_{bu} = \frac{M_u}{b \cdot d^2 \cdot f_{bu}}$$

$$\mu_{bu} = \frac{0,745}{1,80 \cdot 0,85^2 \cdot 14,2} = 0,040$$

$$\mu_{bu} > \mu_{lu}$$

$$\mu_{bu} = 0,040 < 0,186 = \mu_{Ab} < \mu_{lu} \Rightarrow \Lambda^* = 0$$

$$\mu_{bu} > 0,275 \Rightarrow \text{Méthode}$$

$$\mu_{bu} = 0,040 \leq 0,275 \Rightarrow \text{Formules simplifiées}$$

$$\Rightarrow z_b = d (1 - 0,6 \cdot \mu_{bu})$$

$$z_b = 0,85 (1 - 0,6 \cdot 0,040) = 0,830 \text{ m}$$

$$f_{ed} = \frac{f_c}{\gamma_s}$$

$$f_{ed} = \frac{500}{1,15} = 435 \text{ MPa}$$

$$\Rightarrow \Lambda_u = \frac{M_u}{z_b \cdot f_{ed}}$$

$$\Lambda_u = \frac{0,745}{0,830 \cdot 435} = 20,63 \text{ cm}^2$$

d) Retenu

$$\text{Lit 1 : } 3\Phi 25\text{HA } 3 \cdot 4,91 = 14,73 \text{ cm}^2$$

$$\text{Lit 2 : } 3\Phi 16\text{HA } 3 \cdot 2,01 = 6,03 \text{ cm}^2$$

$$A = 20,76 \text{ cm}^2$$

3. ARMATURES D'ÂME

3.1. CONTRAINTE TANGENTE CONVENTIONNELLE

$$Q \text{ à } a > \frac{3 \cdot h}{2}$$

$$a_{\text{min}} = 2,45 > \frac{3 \cdot 0,90}{2} = 1,35 \text{ m}$$

 $\Rightarrow$ pas de réduction de V_u pour Q

Charges uniformément réparties :

$$V_{u0} = V_u - p_u \cdot \frac{5 \cdot h}{6}$$

$$V_{u0} = 0,645 - 0,03513 \cdot \frac{5 \cdot 0,90}{6} = 0,619 \text{ MN}$$

$$\tau_{u0} = \frac{V_{u0}}{b_0 \cdot d}$$

$$\tau_{u0} = \frac{0,619}{0,30 \cdot 0,81} = 2,55 \text{ MPa}$$

3.2. VÉRIFICATION

$$\left. \begin{array}{l} \text{fissuration peu} \\ \text{préjudiciable} \end{array} \right\} \Rightarrow \tau_{lim} = \text{Min} \left\{ \begin{array}{l} 0,20 \cdot \frac{f_{ct}}{\gamma_b} \\ 5 \text{ MPa} \end{array} \right. \quad \tau_{lim} = \text{Min} \left\{ \begin{array}{l} 0,20 \cdot \frac{25}{1,5} = 3,33 \\ 5 \text{ MPa} \end{array} \right.$$

$$\tau_{u0} > \tau_{lim}$$

$$\tau_{u0} = 2,55 \text{ MPa} < 3,33 \text{ MPa} = \tau_{lim}$$

 $\Rightarrow A_t$ droites

3.3. CALCUL

$$\frac{A_t}{b_0 \cdot s_t} \cdot \frac{f_{ct}}{\gamma_s} \geq \frac{\tau_u - 0,3 \cdot k \cdot f_{tj}}{0,9 (\sin \alpha + \cos \alpha)}$$

avec :

 α = inclinaison des A_t , A_t droites $\Rightarrow \alpha = 90^\circ$ $\Rightarrow \sin \alpha + \cos \alpha = 1$ Fe E 500 $\Rightarrow f_{ct} = 500 \text{ MPa}$, $\gamma_s = 1,15$

$$f_{ct} \cdot \gamma_s$$

$$\tau_{u0} = \frac{V_{u0}}{b_0 \cdot d}$$

$$\tau_{u0} = 2,55 \text{ MPa}$$

$$k = \begin{cases} 0 & \text{si reprise non traitée,} \\ 0 & \text{si fissuration très préjudiciable,} \\ 1 & \text{sinon en flexion simple.} \end{cases} \Rightarrow k = 0$$

$$f_{t28} = 0,6 + 0,06 \cdot f_{c28}$$

f_{t28} bornée supérieurement à 3,3 MPa

– reprise non traitée,

– fissuration peu préjudiciable,

– flexion simple.

$$f_{t28} = 0,6 + 0,06 \cdot 25 = 2,10 \text{ MPa}$$

$$f_{t28} = 2,1 \text{ MPa} < 3,3 \text{ MPa O.K.}$$

$$\frac{A_t}{s_t} \geq \frac{30 \cdot 2,55}{0,9 \cdot \frac{500}{1,15}} = \frac{1}{5,12} \text{ cm}^2/\text{cm}$$

4. POURCENTAGE MINIMAL

$$\frac{A_t}{b_0 \cdot s_t} \cdot f_{ct} \geq 0,4 \text{ MPa}$$

$$\frac{A_t}{s_t} \geq \frac{30 \cdot 0,4}{500} = \frac{1}{41,67} \text{ cm}^2/\text{cm}$$

$$\frac{A_t}{s_t} = \frac{1}{5,12} > \frac{1}{41,67} \text{ O.K.}$$

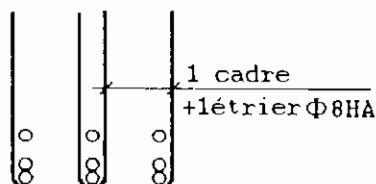
5. DIAMÈTRE DES A_t

$$\Phi_t \leq \text{Min} \begin{cases} \Phi_l \\ h/35 \\ b_0/10 \end{cases}$$

$$\Phi_t \leq 14 \text{ mm} = \text{Min} \begin{cases} 14 \text{ mm} \\ 900/35 = 25,7 \text{ mm} \\ 300/10 = 30 \text{ mm} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ prenons $\Phi_t = 8 \text{ mm}$

d'où pour «coudre» trois files :



$$A_t = 4 \cdot 0,50 = 2,00 \text{ cm}^2$$

$$\rightarrow s_t = 2,00 \cdot 5,12 = 10,24 \text{ cm}$$

retenons :

1 cadre + 1 étrier $\Phi 8 \text{ HA } s_{t0} = 10 \text{ cm}$

ESPACEMENT MAXIMAL

$$\bar{s}_t = \text{Min} \begin{cases} 0,9 \cdot d \\ 40 \text{ cm} \\ 15 \Phi'_{l\text{min}} \end{cases}$$

$$s_t = 10 \text{ cm} < 21 \text{ cm} = \bar{s}_t = \text{Min} \begin{cases} 0,9 \cdot 81 = 72,9 \text{ cm} \\ 40 \text{ cm} \\ 15 \cdot 1,4 = 21 \text{ cm} \end{cases}$$

$$s_t = 10 \text{ cm} < 21 \text{ cm} = \bar{s}_t \text{ O.K.}$$

CHAPITRE 13

DALLES RECTANGULAIRES

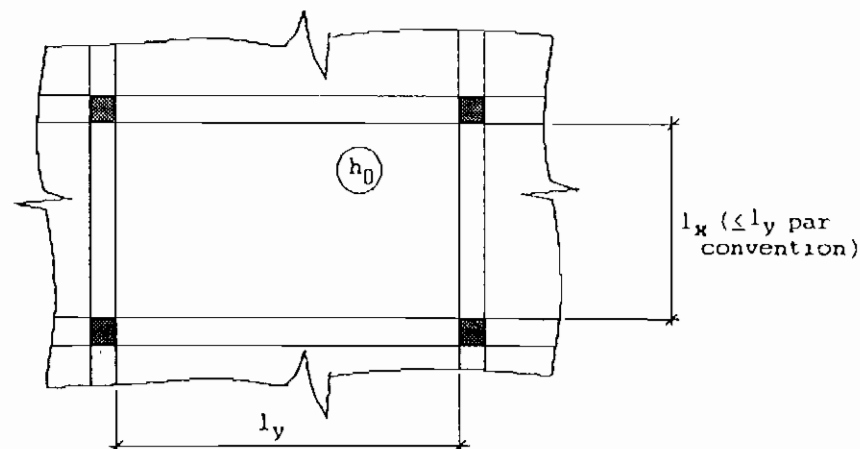
I. RAPPELS DE COURS

I. INTRODUCTION

I.1. DÉFINITION

Une dalle est un élément, généralement rectangulaire, dont une dimension (épaisseur) est faible vis-à-vis des deux autres (dimensions en plan).

Dans un plancher, on appelle «PANNEAUX DE DALLE» les parties de dalle bordées par les poutres-soutres (poutrelles et poutres du plancher).



On pose :

$$\alpha = \frac{l_x}{l_y} \leq 1$$

1.2. ÉPAISSEURS COURANTES (à titre indicatif)

Pour des dalles portant dans un seul sens ($\alpha < 0,40$) :

$$h_0 \geq \frac{l_x}{20} \text{ pour un panneau isolé,}$$

$$h_0 \geq \frac{l_x}{25} \text{ pour une dalle continue.}$$

Pour des dalles portant dans les deux sens ($\alpha \geq 0,40$) :

$$h_0 \geq \frac{l_x}{30} \text{ pour un panneau isolé,}$$

$$h_0 \geq \frac{l_x}{40} \text{ pour une dalle continue.}$$

2. MOMENTS DANS LES DALLES ARTICULÉES SUR LEUR CONTOUR

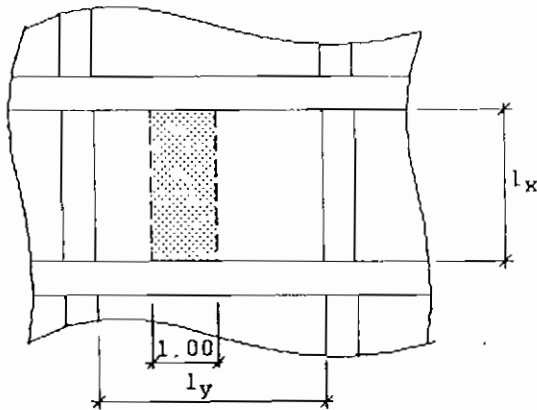
2.1. CHARGES UNIFORMÉMENT RÉPARTIES

Dans la suite, p désigne la charge par m^2 de dalle.

2.1.1. Cas où α est inférieur à 0,40

On admet que le panneau ne porte que dans le sens l_x .

Au centre de la dalle, pour une bande de largeur unité :



$$\begin{aligned} M_{0x} &= p \frac{l_x^2}{8} && \text{«sens } l_x \text{» (bande parallèle à } l_x \text{).} \\ M_{0y} &= 0 && \text{«sens } l_y \text{» (bande parallèle à } l_y \text{).} \end{aligned}$$

2.1.2. Cas où α est au moins égal à 0,40

Le panneau porte dans les deux sens l_x et l_y .

Au centre de la dalle, pour une bande de largeur unité :

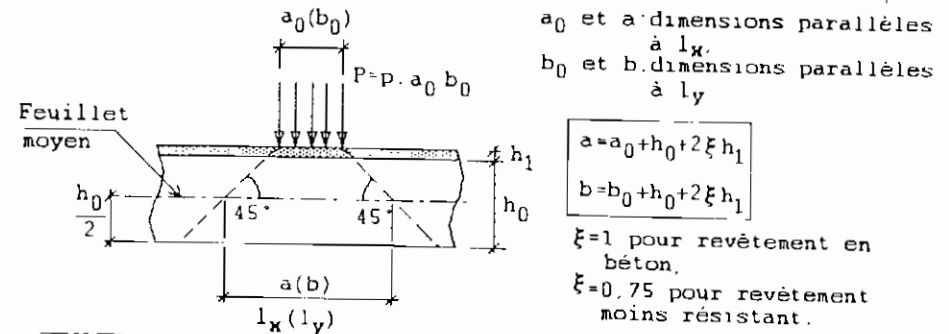
$$\begin{aligned} M_{0x} &= \mu_x p l_x^2 && \text{«sens } l_x \text{» (bande parallèle à } l_x \text{).} \\ M_{0y} &= \mu_y M_{0x} && \text{«sens } l_y \text{» (bande parallèle à } l_y \text{).} \end{aligned}$$

Avec pour valeur approchée des coefficients μ_x et μ_y donnés par l'annexe E.3 des Règles BAEL 91 :

CALCULS	μ_x	μ_y
sollicitations à l'E.L.U et à l'E.L.S	$\frac{1}{8(1+2,4 \alpha^3)}$	$\alpha^3 [1,9 - 0,9\alpha] \geq 1/4$
déformations à l'E.L.S	$\frac{1}{8(1+2 \alpha^3)}$	$\alpha^2 [1 + \frac{3}{2}(1-\alpha)^2] \geq 1/4$

2.2. CHARGES CONCENTRÉES

2.2.1. Rectangle d'impact



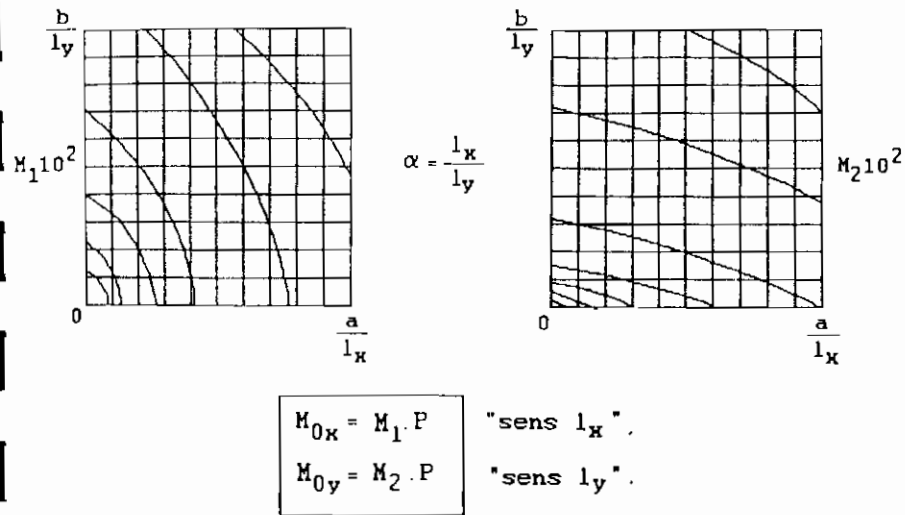
2.2.2. Moments fléchissants

a) Charge centrée

Les moments M_1 et M_2 sont tous deux donnés en fonction de :

- $\alpha = l_x/l_y$,
- a/l_x ,
- b/l_y ,

par les abaques de Pigeaud, pour des bandes de largeur unité au centre du panneau de dalle :



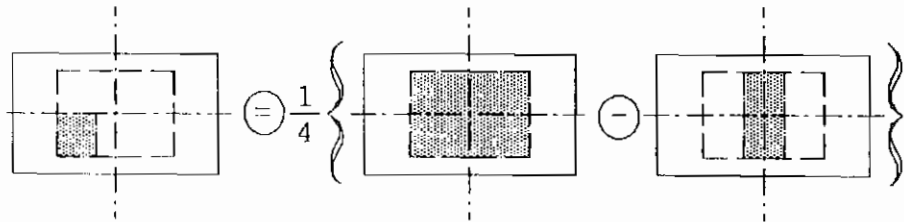
avec :

P = charge totale sur rectangle d'impact $a \cdot b$.

On interpole linéairement pour les valeurs de α intermédiaires à celles des abaques.

b) Charge non centrée

Par combinaison de rectangles centrés, on obtient, au centre du panneau :



7. MOMENTS AUX ENCASTREMENTS

$-0,15 \cdot M_{0x}$ sur les appuis de rive

Valeurs du paragraphe 3 si la dalle est continue.

8. DALLES RECTANGULAIRES CONTINUES – MOMENTS FLÉCHISSANTS

M_{0x} et M_{0y} désignent les moments évalués dans l'hypothèse où le panneau de dalle est articulé sur son contour.

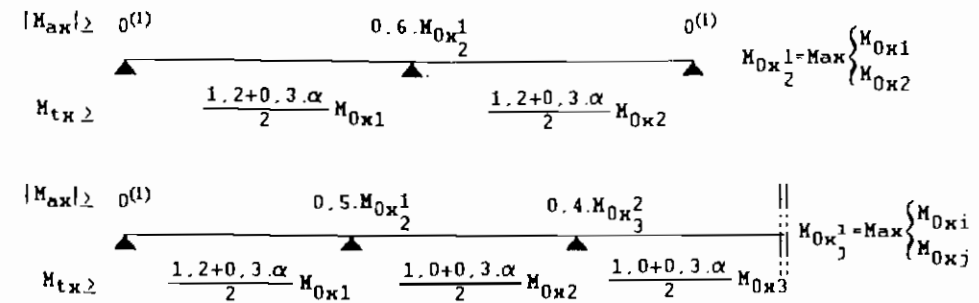
3.1. MOMENTS À PRENDRE EN COMPTE

3.1.1. Cas où $\alpha < 0,40$ et où la charge p est uniforme

Moments de flexion dans le sens l_x évalués suivant la méthode forfaitaire de calcul des poutres de plancher :

$$M_{tx} + \frac{M_{wx} + M_{ex}}{2} \geq \text{Max} \left\{ \begin{array}{l} (1 + 0,3 \cdot \alpha) M_{0x} \\ 1,05 \cdot M_{0x} \end{array} \right. \text{ avec : } \alpha = \frac{Q_B}{G + Q_B}$$

les moments minimaux étant :

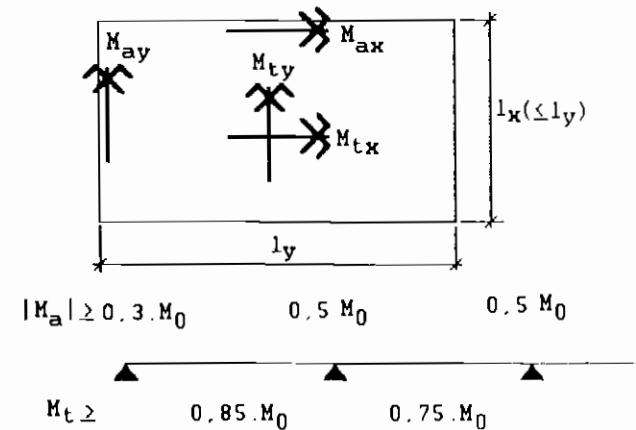


(1) : $-0,15 M_{0x1}$ ou $-0,15 M_{0x2}$ si les bords sont liés à leur support

Moments de flexion dans le sens l_y négligés sauf sur les appuis (voir paragraphe 3.2.2.).

3.1.2. Autres cas

En prenant l'indice x ou y suivant le sens de flexion envisagé :



ce qui réalise :

$$M_{tx} + \frac{M_w + M_e}{2} \geq 1,25 M_0$$

3.2. MOMENTS MINIMAUX

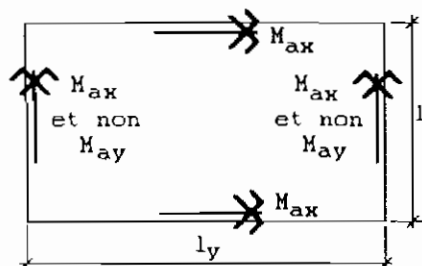
3.2.1. En travée

Charges uniformément réparties (seulement) : $M_{ly} \geq \frac{M_{lx}}{4}$

Présence de charges concentrées : $M_{ly} \geq \frac{M_{lx}}{3}$

3.2.2. Moments d'encastrement sur les côtés

Pour toute valeur du rapport $\alpha = l_x/l_y$:



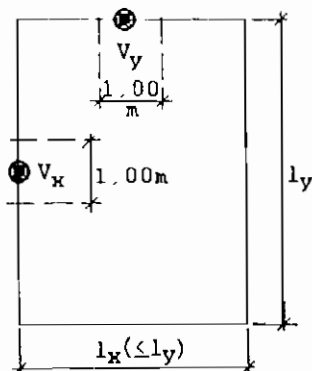
Moment d'encastrement sur le petit côté du même ordre de grandeur que sur le grand côté.

Les armatures équilibrant ces moments sont dites «armatures en chapeau» ou plus simplement «chapeaux».

4. EFFORT TRANCHANT

4.1. VALEUR DE L'EFFORT TRANCHANT PAR UNITÉ DE LONGUEUR SUR LE CONTOUR DE LA DALLE

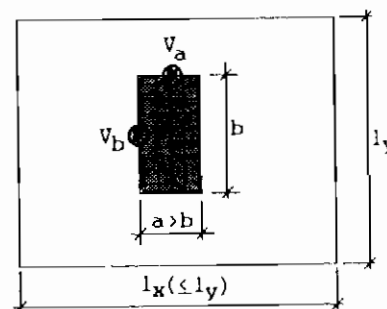
4.1.1. Cas des charges uniformément réparties



$$\alpha < 0,40 \quad \left\{ \begin{array}{l} V_x = p \frac{l_x}{2} \\ V_y = 0 \end{array} \right.$$

$$\alpha \geq 0,40 \quad \left\{ \begin{array}{l} V_x = p \frac{l_x}{2} \frac{1}{1 + \frac{\alpha}{2}} \\ V_y = p \frac{l_x}{3} \leq V_x \end{array} \right.$$

4.1.2. Cas des charges concentrées



$$\text{quel que soit } \alpha \quad \left\{ \begin{array}{l} V_a = \frac{P}{2a+b} \\ V_b = \frac{P}{3} \frac{1}{a} \leq V_a \end{array} \right.$$

Dans le cas où $a < b$, inverser dans les formules ci-dessus a et b

4.1.3. Cas général

Lorsqu'agissent simultanément des charges réparties et des charges concentrées, on admet

$$V = V_x + V_b \text{ ou } V = V_y + V_a$$

4.2. NÉCESSITÉ D'ARMATURES D'ÂME

Pas d'armatures d'âme si :

- la dalle est bétonnée sans reprise dans son épaisseur,
- la contrainte tangente vérifie :

$$\tau_u = \frac{V_u}{d} \leq 0,07 \frac{f_{cj}}{\gamma_b}$$

Calcul des armatures d'âme

- en appliquant la règle des coutures (voir paragraphe 5.1. chapitre 7 «EFFORT TRANCHANT») si reprise de bétonnage dans l'épaisseur,
- dans les autres cas, comme pour les poutres avec les valeurs de τ_{lim} multipliées par .

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{10}{3} \cdot h_0 \text{ (m)} \text{ si } 0,15 \text{ m} \leq h_0 < 0,30 \text{ m,} \\ 1 \text{ si } h_0 \geq 0,30 \text{ m.} \end{array} \right.$$

5. POINÇONNEMENT

5.1. CHARGE CONCENTRÉE ÉLOIGNÉE DES BORDS DE LA DALLE

Pas d'armatures transversales de poinçonnement si :

$$Q_u \leq 0,045 \cdot u_c \cdot h_0 \cdot \frac{f_{cj}}{\gamma_b}$$

où :

Q_u = charge de calcul à l'E.L.U.,

h_0 = épaisseur de la dalle,

u_c = périmètre du rectangle d'impact au niveau du feuillet moyen de la dalle.

Sinon prévoir des armatures d'âme :

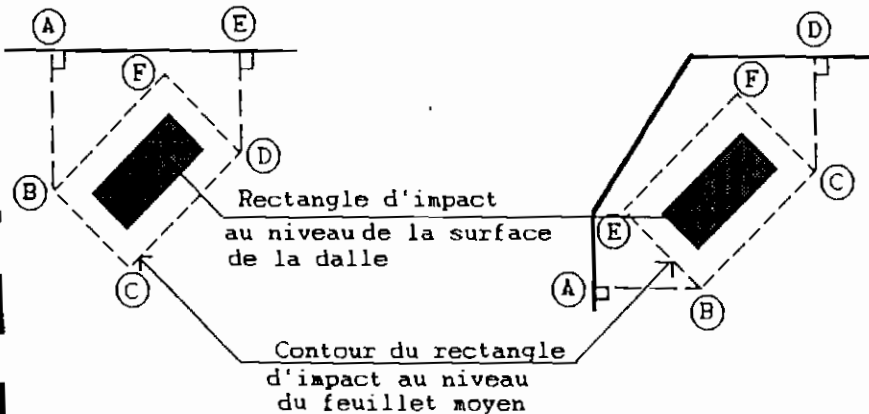
– calculées comme indiqué au paragraphe 4.2.,

– disposées à l'intérieur du contour u situé à la distance x de u_c , cette distance étant telle que :

$$Q_u \leq 0,045 \cdot (u_c + 8x) \cdot h_0 \cdot \frac{f_{cj}}{\gamma_b} \quad u > u_c$$

5.2. CHARGE CONCENTRÉE VOISINE DES BORDS DE LA DALLE

Faire les vérifications du paragraphe 5.1. en modifiant éventuellement u_c comme suit :



u ou $u_c = ABCDE$ si $AB + DE < BF + FD$ u ou $u_c = ABCD$ si $AB + CD < BE + EF + FC$

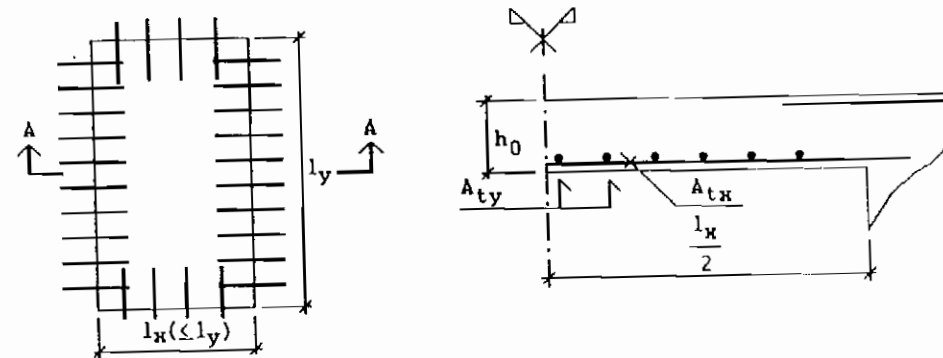
6. DISPOSITIONS CONSTRUCTIVES

6.1. DIAMÈTRE DES ARMATURES

$$\Phi \leq \frac{h_0}{10}$$

6.2. DISPOSITION DES BARRES

Les armatures les plus proches de la face tendue sont celles parallèles au petit côté.



6.3. SECTIONS MINIMALES

Sens l_y ; en exprimant h_0 en mètres :

$$A_{ymin} (cm^2/m) = \begin{cases} 12 h_0 : \text{ronds lisses,} \\ 8 h_0 : \text{Fc E 400,} \\ 6 h_0 : \text{Fc E 500 ou TS} \end{cases}$$

Sens l_x :

$$A_{xmin} (cm^2/m) = A_{ymin} \frac{3 - \alpha}{2}$$

6.4. ESPACEMENTS MAXIMAUX

6.4.1. Cas des charges réparties, fissuration peu préjudiciable

$$s_{ix} \leq \text{Min} \begin{cases} 3 \cdot h_0 \\ 33 \text{ cm} \end{cases} \quad \text{armatures dans le sens } l_x,$$

$$s_{iy} \leq \text{Min} \begin{cases} 4 \cdot h_0 \\ 45 \text{ cm} \end{cases} \quad \text{armatures dans le sens } l_y.$$

6.4.2. Cas où la dalle supporte également des charges concentrées et où la fissuration est peu préjudiciable

$$s_{ix} \leq \text{Min} \begin{cases} 2 \cdot h_0 \\ 25 \text{ cm} \end{cases} \quad \text{armatures dans le sens } l_x,$$

$$s_{iy} \leq \text{Min} \begin{cases} 3 \cdot h_0 \\ 33 \text{ cm} \end{cases} \quad \text{armatures dans le sens } l_y$$

6.4.3. Cas où la fissuration est préjudiciable ou très préjudiciable

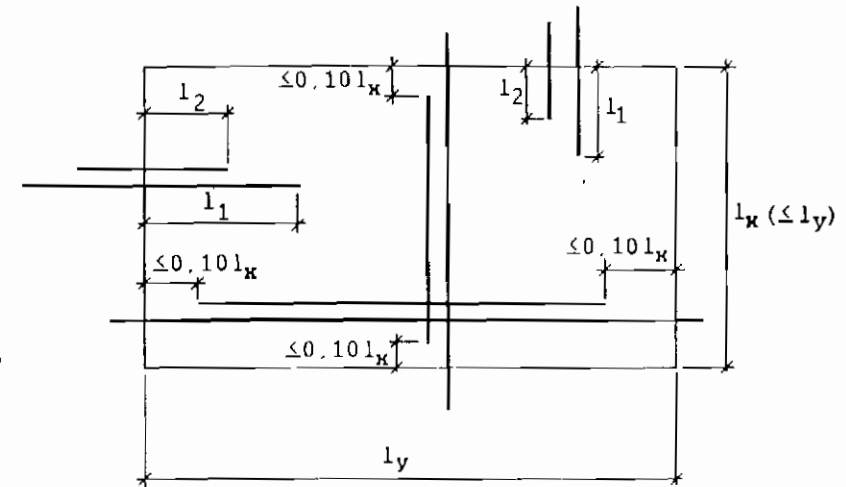
$$h_0 > 10 \text{ cm} \Rightarrow \begin{cases} s_{ix} \text{ et } s_{iy} \leq \text{Min} \begin{cases} 2 \cdot h_0 \\ 25 \text{ cm} \end{cases} \\ \Phi \geq 6 \text{ mm (sens } l_x) \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{si fissuration} \\ \text{préjudiciable} \end{matrix}$$

$$\begin{cases} s_{ix} \text{ et } s_{iy} \leq \text{Min} \begin{cases} 1,5 \cdot h_0 \\ 20 \text{ cm} \end{cases} \\ \Phi \geq 8 \text{ mm (sens } l_x) \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{si fissuration} \\ \text{très préjudiciable} \end{matrix}$$

7. ARRÊT DES ARMATURES

7.1. CAS DES CHARGES UNIFORMES

Arrêt des armatures en travée et des chapeaux par moitié, les aciers traversant le contour étant ancrés au-delà de celui-ci



$$l_1 = \text{Max} \left\{ \frac{l_x}{4} \left[0,3 + \frac{M_d}{M_0} \right], l_x \right\}$$

$$l_1 = \text{Max} \left\{ \frac{l_x}{2}, l_x \right\}$$

7.2. CAS OÙ LA DALLE SUPPORTE DES CHARGES CONCENTRÉES

Les armatures inférieures traversent toutes le contour d'appui et sont totalement ancrées au-delà.

7.3. TREILLIS SOUDÉ

L'ancrage peut ne comporter qu'une seule soudure sauf si les charges concentrées Q_u créent un risque de poinçonnement.

8. AUTRES CRITÈRES POUR LES BÂTIMENTS

Isolation phonique.

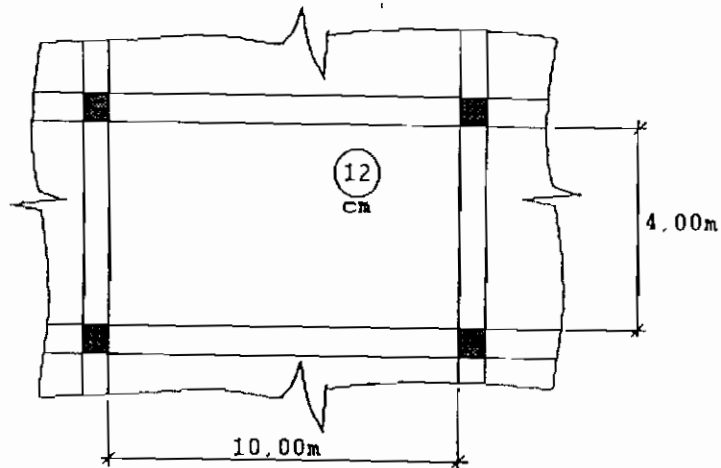
Résistance au feu :

– coupe-feu = 1 heure $\Rightarrow h_0 \geq 7 \text{ cm}$.

– coupe-feu = 2 heures $\Rightarrow h_0 \geq 11 \text{ cm}$

II. EXERCICE : PANNEAU DE DALLE ($\alpha = 0,40$)

— ÉNONCÉ —



Dalle continue dans les deux sens formée de panneaux de $10,00 \times 4,00 \text{ m}^2$.

Action variable de durée d'application supérieure à 24 heures :

$q = 5 \text{ kN/m}^2$.

Fissuration peu préjudiciable.

Matériaux :

Béton : $f_{c28} = 25 \text{ MPa}$,

Aciers Fe E 500 HA.

On se propose :

de déterminer le ferrailage du panneau de dalle,

et examiner le cas où la charge d'exploitation est constituée par une force concentrée de 12 kN sur un carré de $10 \times 10 \text{ cm}^2$ au centre de la dalle et de comparer les sollicitations obtenues avec celles de la première question, en admettant que pour une bande de largeur 10 cm au centre du panneau :

$$\begin{cases} M_{0x} = \frac{Q}{4} \cdot \left[1 - \frac{a}{2 \cdot l_x} \right] \\ M_{0y} = \frac{Q}{4} \cdot \frac{1 - b/l_y}{1 + a/l_x} \end{cases}$$

— CORRIGÉ —

1. CARACTÉRISTIQUES DES MATÉRIAUX

1.1. BÉTON

Résistance de calcul :

$$f_{bu} = 0,85 \cdot \frac{f_{c28}}{\theta \cdot \gamma_b}$$

$$f_{bu} = 0,85 \cdot \frac{25}{1 \cdot 1,5} = 14,2 \text{ MPa}$$

Contrainte limite en service :

$$\sigma_{bc} = 0,6 \cdot f_{c28}$$

$$\sigma_{bc} = 0,6 \cdot 25 = 15 \text{ MPa}$$

1.2. ACIERS

Résistance de calcul :

$$f_{ed} = \frac{f_c}{\gamma_s}$$

$$f_{ed} = \frac{500}{1,15} = 435 \text{ MPa}$$

Contrainte limite en service :

fissuration
peu préjudiciable } $\Rightarrow$

pas de limitation de σ_s en service.

2. SOLLICITATIONS

2.1. CHARGE AU m^2 DE PLANCHER

Poids propre :

$$g = 25 \text{ kN/m}^3 \cdot 0,12 = 3 \text{ kN/m}^2$$

Charge variable :

$$q = 5 \text{ kN/m}^2$$

$$p_u = 1,35 g + 1,5 q$$

$$p_u = 1,35 \cdot 3 + 1,5 \cdot 5 = 11,55 \text{ kN/m}^2$$

2.2. MOMENTS FLÉCHISSANTS POUR LE PANNEAU ARTICULÉ SUR SON CONTOUR

$$\alpha = \frac{l_x}{l_y}$$

$$\alpha = \frac{4,00}{10,00} = 0,40$$

$$\alpha > 0,40$$

$\alpha \geq 0,40 \Rightarrow$ La dalle porte dans les deux sens

$$\mu_x = \frac{1}{8(1 + 2,4 \cdot \alpha^3)}$$

$$\mu_x = \frac{1}{8(1 + 2,4 \cdot 0,40^3)} = \frac{1}{9,23}$$

$$\mu_y = \alpha^3 [1,9 - 0,9\alpha]$$

$$\mu_y = 0,40^3 [1,9 - 0,9 \cdot 0,4] = 0,099 < 0,25 \Rightarrow \mu_y = 0,25$$

d'où les moments pour les bandes de largeur unité :

$$M_{0x} = \mu_x \cdot p \cdot l_x^2$$

$$M_{0x} = \frac{11,55 \cdot 4,00^2}{9,23} = 20,02 \text{ mkN/m}$$

$$M_{0y} = \mu_y \cdot M_{0x}$$

$$M_{0y} = 0,25 \cdot 20,02 = 5,00 \text{ mkN/m}$$

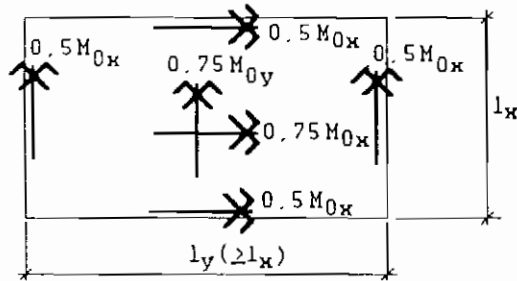
Remarque :

$\alpha = 0 \Rightarrow \mu_y = 0$ et $\mu_x = \frac{1}{8}$ d'où on retrouve les formules de la poutre sur deux appuis simples.

$\alpha = 0,40 \Rightarrow \mu_x \approx \frac{1}{8}$ à 13 % près dans le sens de la sécurité ce qui conduit à dire que L.A

DALLE PORTE DANS UN SEUL SENS LORSQUE $\alpha < 0,40$.

2.3. MOMENTS DANS LA DALLE PARTIELLEMENT ENCASTRÉE



Bande de largeur 1,00 m parallèle à l_x :

$$M_{1x} = 0,75 \cdot M_{0x}$$

$$M_{1x} = 0,75 \cdot 20,02 = 15,015 \text{ mkN/m}$$

$$M_{2x} = 0,50 \cdot M_{0x}$$

$$M_{2x} = 0,50 \cdot 20,02 = 10,01 \text{ mkN/m}$$

Bande de largeur 1,00 m parallèle à l_y :

$$M_{1y} = 0,75 \cdot M_{0y}$$

$$M_{1y} = 0,75 \cdot 5,00 = 3,75 \text{ mkN/m}$$

Valeurs minimales à respecter :

– En travée (q répartie) :

$$M_{1y} \geq \frac{M_{1x}}{4}$$

$$M_{1y} \geq \frac{15,015}{4} = 3,75 \text{ mkN/m}$$

$$\Rightarrow M_{1y} = 3,75 \text{ mkN/m}$$

– Sur appuis :

$$M_{2y} = M_{2x}$$

$$\Rightarrow M_{2y} = 10,01 \text{ mkN/m}$$

3. ARMATURES LONGITUDINALES

3.1. REMARQUE

M_u est proportionnel à M_0 qui est lui-même proportionnel à p d'où :

$$\gamma = \frac{p_u}{g + q} = \text{Cste}$$

$$\gamma = \frac{11,55}{3 + 5} = 1,44 \text{ partout}$$

Par conséquent, pour toutes les bandes et pour Fe E 500 HA et $f_{c28} \leq 30 \text{ MPa}$:

$$10^4 \mu_{bu} = 3 \cdot 220 \cdot 0\gamma + 51 \cdot \frac{f_{c28}}{\theta} - 3 \cdot 100 \quad 10^4 \mu_{bu} = 3 \cdot 220 \cdot 1 \cdot 1,44 + 51 \cdot \frac{25}{1} - 3 \cdot 100$$

(MPa)

$$10^4 \mu_{bu} = 2 \cdot 812$$

$$\mu_{bu} = 0,281$$

3.2. CALCUL DES SECTIONS D'ACIERS

a) Aciers en travée «sens l_x »

$$\mu_{bu} = \frac{M_{1x}}{b_0 \cdot d^2 \cdot f_{bu}}$$

$$\mu_{bu} = \frac{15,015 \cdot 10^{-3}}{1,00 \cdot 0,10^2 \cdot 14,2} = 0,106$$

$$\mu_{bu} < \mu_{lu}$$

$$\mu_{bu} = 0,106 < 0,186 = \mu_{All} < 0,281 = \mu_{lu}$$

$$\Rightarrow A' = 0$$

$$\mu_{bu} < 0,275 \Rightarrow \text{Méthode}$$

$$\mu_{bu} = 0,106 \leq 0,275 \Rightarrow \text{Formules simplifiées}$$

$$\Rightarrow z_b = d (1 - 0,6 \cdot \mu_{bu})$$

$$z_b = 0,10 (1 - 0,6 \cdot 0,106)$$

$$z_b = 0,094 \text{ m}$$

$$\therefore A_{1x} = \frac{M_{1x}}{z_b \cdot f_{cd}}$$

$$A_{1x} = \frac{(15,015 \cdot 10^{-3}) \cdot 10^4}{0,094 \cdot 43,5} = 3,6 \text{ cm}^2/\text{m}$$

b) Aciers en travée «sens l_y »

$$\mu_{bu} = \frac{M_{1y}}{b_0 \cdot d^2 \cdot f_{bu}}$$

$$\mu_{bu} = \frac{3,75 \cdot 10^{-3}}{1,00 \cdot 0,10^2 \cdot 14,2} = 0,026$$

$$\mu_{bu} < \mu_{lu}$$

$$\mu_{bu} = 0,026 < 0,186 = \mu_{All} < 0,281 = \mu_{lu}$$

$$\Rightarrow A' = 0$$

$$\mu_{bu} < 0,275 \Rightarrow \text{Méthode}$$

$$\mu_{bu} = 0,026 \leq 0,275 \Rightarrow \text{Formules simplifiées}$$

$$\Rightarrow z_b = d (1 - 0,6 \cdot \mu_{bu})$$

$$z_b = 0,09 (1 - 0,6 \cdot 0,026)$$

$$\text{avec } d_y = d_x = \frac{\phi_x + \phi_y}{2}$$

$$z_b = 0,089 \text{ m}$$

$$\Rightarrow A_{ly} = \frac{M_{ly}}{z_b \cdot f_{ed}}$$

$$A_{ly} = \frac{(3,75 \cdot 10^{-3}) 10^4}{0,089 \cdot 435} = 0,97 \text{ cm}^2/\text{m}$$

Aciers sur appuis

$$\mu_{bu} = \frac{M_{ax}}{b_0 \cdot d^2 \cdot f_{bu}}$$

$$\mu_{bu} = \frac{10,01 \cdot 10^{-3}}{1,00 \cdot 0,10^2 \cdot 14,2} = 0,071$$

$$\mu_{bu} > \mu_{lu}$$

$$\mu_{bu} = 0,071 < 0,186 = \mu_{AB} < 0,281 = \mu_{lu}$$

$$\Rightarrow A' = 0$$

$$\mu_{lu} > 0,275 \Rightarrow \text{Méthode}$$

$$\Rightarrow z_b = d (1 - 0,6 \cdot \mu_{bu})$$

$$\mu_{bu} = 0,071 \leq 0,275 \Rightarrow \text{Formules simplifiées}$$

$$z_b = 0,10 (1 - 0,6 \cdot 0,071)$$

$$z_b = 0,096 \text{ m}$$

$$\Rightarrow A_a = \frac{M_{ax}}{z_b \cdot f_{ed}}$$

$$A_a = \frac{(10,01 \cdot 10^{-3}) 10^4}{0,096 \cdot 435} = 2,40 \text{ cm}^2/\text{m}$$

SECTIONS MINIMALES D'ARMATURES

des suivant « l_y »

$$A_{ymin} = \begin{cases} 12 h_0 : \text{ronds lisses} \\ 8 h_0 : \text{Fe E 400} \\ 6 h_0 : \text{Fe E 500} \end{cases}$$

$$\text{Fe E 500} \Rightarrow A_{ymin} = 6 \cdot 0,12 = 0,72 \text{ cm}^2/\text{m}$$

$$A_{ymin} = 0,72 \text{ cm}^2/\text{m}$$

$$A_{ly} = 0,97 \text{ cm}^2/\text{m} > 0,72 \text{ cm}^2/\text{m} \text{ O.K.}$$

$$A_{ay} = 2,40 \text{ cm}^2/\text{m} > 0,72 \text{ cm}^2/\text{m} \text{ O.K.}$$

des suivant « l_x »

$$A_{xmin} = \frac{3 - \alpha}{2} \cdot A_{ymin}$$

$$A_{xmin} = \frac{3 - 0,40}{2} \cdot 0,72 = 0,94 \text{ cm}^2/\text{m}$$

$$A_{xmin} = 0,94 \text{ cm}^2/\text{m}$$

$$A_{tx} = 3,67 \text{ cm}^2/\text{m} > 0,94 \text{ cm}^2/\text{m} \text{ O.K.}$$

$$A_{ax} = 2,40 \text{ cm}^2/\text{m} > 0,94 \text{ cm}^2/\text{m} \text{ O.K.}$$

CHOIX DES ACIERS

dispositions constructives :

$$\Phi \leq \frac{h_0}{10}$$

$$\Phi \leq \frac{120}{10} = 12 \text{ mm}$$

$$\Rightarrow \text{prendre au plus } \Phi 12.$$

avée «sens l_x »

$$A_{tx}$$

$$A_{tx} = 3,67 \text{ cm}^2/\text{m}$$

$$s_t \leq \text{Min} \begin{cases} 3 \cdot h_0 \\ 33 \text{ cm} \end{cases}$$

$$s_t \leq 33 \text{ cm} = \text{Min} \begin{cases} 3 \cdot 12 = 36 \text{ cm} \\ 33 \text{ cm} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 5\Phi 10 \text{ HAp} \quad s_t = \frac{100}{5} = 20 \text{ cm} : A = 3,95 \text{ cm}^2/\text{m}$$

b) En travée «sens l_y »

$$A_{ly}$$

$$A_{ly} = 0,97 \text{ cm}^2/\text{m}$$

$$s_t \leq \text{Min} \begin{cases} 4 \cdot h_0 \\ 45 \text{ cm} \end{cases}$$

$$s_t \leq 45 \text{ cm} = \text{Min} \begin{cases} 4 \cdot 12 = 48 \text{ cm} \\ 45 \text{ cm} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 4\Phi 6 \text{ HAp} \quad s_t = \frac{100}{4} = 25 \text{ cm} : A = 1,12 \text{ cm}^2/\text{m}$$

c) En chapeau

$$A_a$$

$$A_a = 2,40 \text{ cm}^2/\text{m}$$

$$s_t < 33 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow 5\Phi 8 \text{ HAp} \quad s_t = \frac{100}{5} = 20 \text{ cm} : A = 2,5 \text{ cm}^2/\text{m}$$

4. EFFORT TRANCHANT

4.1. SOLLICITATIONS ULTIMES

Au milieu du grand côté (p réparti) :

$$V_{ux} = \frac{p_u \cdot l_x}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\alpha}{2}}$$

$$V_{ux} = \frac{11,55 \cdot 4,00}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{0,4}{2}} = 19,25 \text{ kN/m}$$

Au milieu du petit côté :

$$V_{uy} = \frac{p_u \cdot l_x}{3}$$

$$V_{uy} = \frac{11,55 \cdot 4,00}{3} = 15,40 \text{ kN/m} < V_{ux}$$

4.2. VÉRIFICATION

$$\tau_u = \frac{V_u}{d} > < 0,07 \cdot \frac{f_{c28}}{\gamma_b}$$

$$\tau_u = \frac{19,25 \cdot 10^{-3}}{0,10} = 0,193 \text{ MPa}$$

$$b_0 = 1,00 \text{ m}$$

$$\tau_u > < \tau_{lim}$$

$$\tau_u = 0,193 \text{ MPa} < 0,07 \cdot \frac{25}{1,5} = 1,17 \text{ MPa}$$

$\Rightarrow$ pas d'armatures d'âme.

5. ARRÊT DES BARRES

En travée sens l_x , on alterne :

3 Φ 10HApm filants,
2 Φ 10HApm arrêtés à $0,1 \cdot 4,00 = 0,40$ m de la rive.

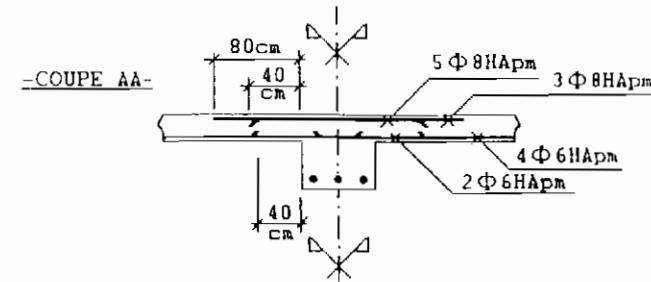
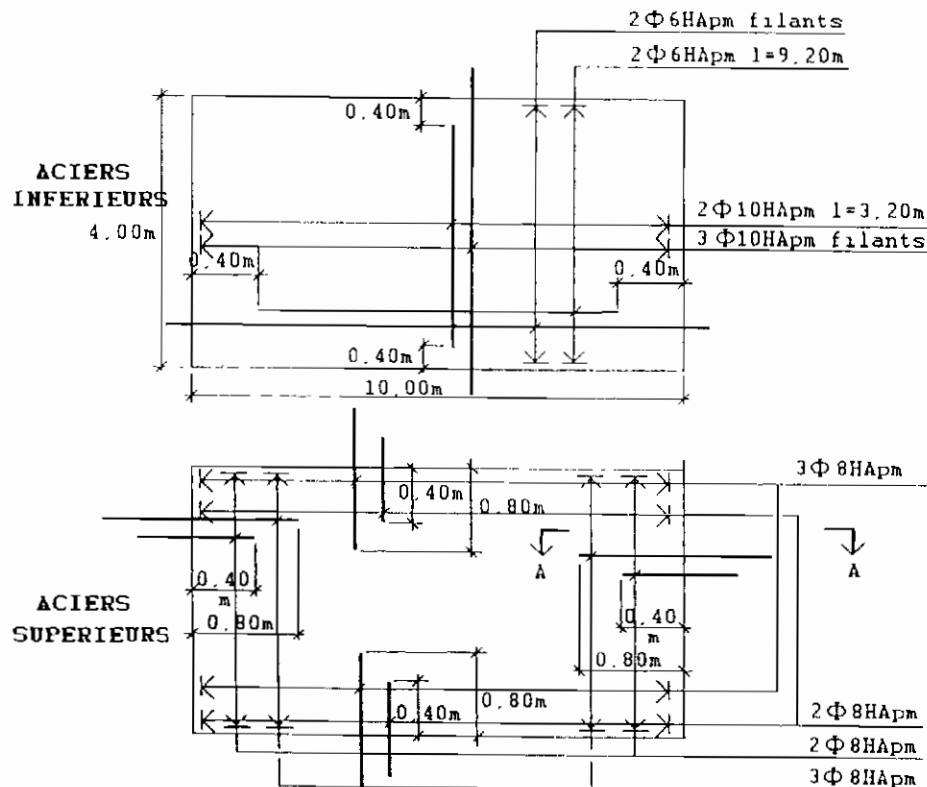
En travée sens l_y , on alterne :

2 Φ 6HApm filants,
2 Φ 6HApm arrêtés à $0,1 \cdot 4,00 = 0,40$ m de la rive.

Sur appuis ($M_a = 0,5M_0$) :

$$l_1 = \max \left\{ \frac{l_x}{0,2}, l_x \right\} \quad 3\Phi 8 \text{ HApm} \quad l_1 = 80 \text{ cm} = \max \left\{ \frac{50 \cdot 0,8}{0,2 \cdot 400} = 40 \text{ cm}, 80 \text{ cm} \right\}$$

$$l_2 = \max \left\{ \frac{l_y}{2}, l_y \right\} \quad 2\Phi 8 \text{ HApm} \quad l_2 = 40 \text{ cm} = \max \left\{ \frac{50 \cdot 0,8}{80/2} = 40 \text{ cm}, 80/2 = 40 \text{ cm} \right\}$$



6. CAS OÙ LA CHARGE LOCALISÉE CENTRÉE EST APPLIQUÉE

6.1. RECTANGLE D'IMPACT

$$a = a_0 + b_0$$

$$a = 0,10 + 0,12 = 0,22 \text{ m}$$

$$b = b_0 + b_0$$

$$b = 0,10 + 0,12 = 0,22 \text{ m}$$

6.2. MOMENTS DANS LE PANNEAU ARTICULÉ

a) Pour la charge variable concentrée

$$\begin{cases} M_{0x} = \frac{Q}{4} \left[1 - \frac{a}{2 \cdot l_x} \right] \\ M_{0y} = \frac{Q}{4} \frac{1 - \frac{b}{l_y}}{1 + \frac{a}{l_x}} \end{cases} \quad \begin{aligned} M_{0x} &= \frac{50}{4} \left[1 - \frac{0,22}{2 \cdot 4,00} \right] = 12,16 \text{ mkN/m} \\ M_{0y} &= \frac{50}{4} \frac{1 - \frac{0,22}{10,00}}{1 + \frac{0,22}{4,00}} = 11,59 \text{ mkN/m} \end{aligned}$$

b) Pour la charge variable uniformément répartie

$$M_{0x} = \mu_x \cdot q \cdot l_x^2 \quad M_{0x} = \frac{5 \cdot 4,00^2}{9,23} = 8,67 \text{ mkN/m}$$

$$M_{0y} = \mu_y \cdot M_{0x} \quad M_{0y} = 0,25 \cdot 8,67 = 2,17 \text{ mkN/m}$$

c) Conclusion

Avec la charge concentrée, M_{0x} et M_{0y} sont du même ordre de grandeur.

Par conséquent, dire qu'une dalle porte dans un seul sens lorsque $\alpha < 0,40$ n'a de sens que si la charge est uniformément répartie.

On remarque de plus que la charge concentrée est beaucoup plus agressive que la charge répartie.

CHAPITRE 14

DESCENTE DE CHARGES

I. RAPPELS DE COURS

1. PRINCIPE

La DESCENTE DE CHARGES a pour but l'évaluation des actions de pesanteur permanentes et variables permettant le calcul :

- des poteaux ou des appuis,
- de leurs fondations.

2. VALEURS DES CHARGES PERMANENTES ET DES CHARGES D'EXPLOITATION

2.1. CHARGES PERMANENTES

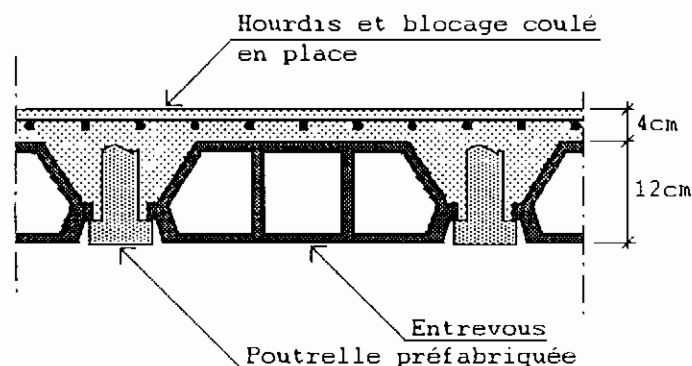
Elles résultent du poids volumique des matériaux mis en œuvre :

- béton :
 - béton armé : 24 à 25 kN/m³,
 - béton banché : 22 à 23 kN/m³,
 - béton cellulaire : 3 à 8 kN/m³,
- parpaing :
 - parpaing plein porteur : 20 à 22 kN/m³,
 - parpaing creux porteur : 13 à 17 kN/m³,
 - parpaing creux de remplissage : 11,5 kN/m³,
- brique :
 - brique pleine : 18 kN/m³,
 - brique creuse : 11 à 13 kN/m³,

• pierre :	
• pierre à maçonner (suivant dureté) :	16 à 20 kN/m ³ ,
• pierre dure pour revêtement :	22 kN/m ³ ,
- second œuvre :	
• plâtre :	14 kN/m ³ ,
• bois :	8 kN/m ³ ,
• sable sec pour forme (parquets flottants) :	17 kN/m ³ ,
• gravillon (protection, étanchéité) :	15 kN/m ³ ,
• asphalte :	22 kN/m ³ ,
• enduit mortier (grillagé ou non) :	22 kN/m ³ ,
• chape en mortier de ciment :	22 kN/m ³ ,
• carrelage céramique :	22 kN/m ³ .

Elles peuvent aussi être déduites du poids au m² de différents éléments :

planchers à entrevous céramique ou béton :



plancher 12 + 4 :	2,3 kN/m ² ,
15 + 4 :	2,5 kN/m ² ,
18 + 4 :	2,8 kN/m ² ,
20 + 5 :	3,25 kN/m ² ,
30 + 5 :	4,8 kN/m ² ,
- planchers bois ou fer de construction ancienne :	5 kN/m ² ,
charpente :	
• en fer : fermes + pannes + chevrons :	0,1 à 0,4 kN/m ² ,
• en bois : fermes + pannes + chevrons :	0,2 à 0,6 kN/m ² ,
- couverture ; y compris petits bois de pose (lattis, liteaux, voligeage) :	
• amiante-ciment :	0,2 kN/m ² ,
• tôle :	0,2 kN/m ² ,
• aluminium :	0,2 kN/m ² ,
• zinc :	0,3 kN/m ² ,
• tuiles mécaniques :	0,5 à 0,6 kN/m ² ,
• tuiles plates de Bourgogne :	0,7 à 1 kN/m ² ,

• ardoises :	0,4 kN/m ² ,
- parquet traditionnel sur lambourdes scellées (parquet + lambourdes + scellement) :	0,3 kN/m ² ,
- cloisons :	
• très légères :	0,4 kN/m ² ,
• légères :	1 kN/m ² ,
• lourdes : charges linéaires aux emplacements prévus sur plans ou charge répartie	> 1 kN/m ²

2.2. CHARGES VARIABLES

Elles résultent de l'exploitation envisagée par les maîtres d'ouvrage pour la construction considérée.

2.2.1. Bâtiments

La norme NF P 06-001 donne, pour les cas usuels :

- locaux d'habitation et d'hébergement :	1,5 kN/m ² ,
- bureaux et salles de travail et de réunion :	2,5 kN/m ² ,
- locaux publics, halls, salles de réunion :	4 à 5 kN/m ² ,
- locaux non accessibles (sauf entretien) :	1 kN/m ² ,
- parkings :	2,5 kN/m ² .

2.2.2. Ponts-routes

Les valeurs des charges d'exploitation sont données par le fascicule 61 titre II du CPC.

2.2.3. Ponts-rails

Les valeurs des charges d'exploitation sont fixées par le livret 2.01 de la SNCF.

2.2.4. Charges climatiques

Elles font l'objet des Règles

- NV 65 pour le vent,
- N84 pour la neige

3. DÉGRESSION DES CHARGES VARIABLES D'EXPLOITATION

Pour tenir compte de la non-simultanéité de chargement de tous les niveaux d'un bâtiment en exploitation, le maître d'ouvrage peut autoriser une dégression des charges variables.

En désignant par :

Q_0 = charge d'exploitation sur terrasse,

Q_B = charge d'exploitation de base sur planchers,

Q_r = fraction de la charge d'exploitation à laquelle la dégression ne s'applique pas :

1 kN/m² pour habitation et/ou bureaux par exemple,

$Q = Q_R - Q_r$ = valeur de la charge d'exploitation sur planchers frappée de dégression.

Les valeurs des charges d'exploitation à prendre en compte, au-dessous de chacun des niveaux du bâtiment sont les suivantes :

Q_0	↑↑	-Sous terrasse: Q_0 .
Q	↑↑	-Sous étage 1: $Q_0 + Q$.
Q	↑↑	-Sous étage 2: $Q_0 + 1,9 \cdot Q + 0,1 \cdot Q_r$.
Q	↑↑	-Sous étage 3: $Q_0 + 2,7 \cdot Q + 0,3 \cdot Q_r$.
Q	↑↑	-Sous étage 4: $Q_0 + 3,4 \cdot Q + 0,6 \cdot Q_r$.
Q	↑↑	-Sous étage 5: $Q_0 + 4 \cdot Q + 1 \cdot Q_r$.
Q	↑↑	-Sous étage 6: $Q_0 + 4,5 \cdot Q + 1,5 \cdot Q_r$.
Q	↑↑	-Sous étage 7 et tous les suivants $Q_0 + 5 \cdot Q + 2 \cdot Q_r$

ET DE LA CONTINUITÉ SUR LES POTEAUX VOISINS DE RIVE

MAÎNE D'APPLICATION

Les poteaux sont les points d'appui :

Les poutres continues,
les bandes de dalle.

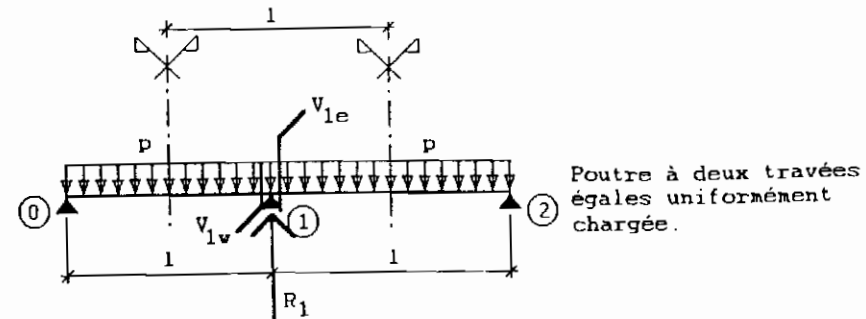
On suppose les charges d'exploitation modérées ; c'est-à-dire :

$$\begin{cases} q \leq 5 \text{ kN/m}^2 \\ q \leq 2 g \end{cases}$$

— Somme des charges variables d'exploitation,

— somme des charges permanentes.

4.2. POUTRES À DEUX TRAVÉES CONTINUES



Moment sur appui (méthode forfaitaire) :

$$|M_1| \geq 0,60 \cdot M_0$$

Efforts tranchants :

$$V_{1v} = -\frac{pl}{2} - \frac{0,60 \cdot \frac{pl^2}{8}}{l} = -0,500 pl - 0,075 pl = -0,575 pl$$

$$V_{1e} = +\frac{pl}{2} + \frac{0,60 \cdot \frac{pl^2}{8}}{l} = +0,500 pl + 0,075 pl = 0,575 pl$$

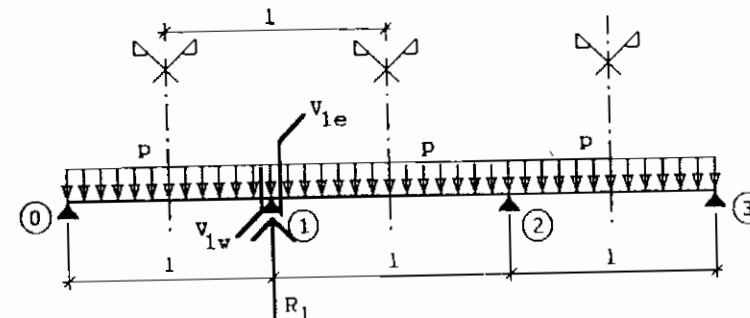
Réaction d'appui :

$$R_1 = V_{1e} - V_{1v} \Rightarrow$$

$$R_1 = 1,150 pl$$

D'où : Majoration de 15 % de la réaction d'appui centrale (soit des charges entre axes des travées pour l'appui central).

4.3. CAS DE n TRAVÉES CONTINUES (n > 3)



Moments sur appui (méthode forfaitaire) :

$$|M_1| \geq 0,50 \cdot M_0$$

$$|M_2| \geq \begin{cases} 0,40 \cdot M_0 & \text{si } n > 3 \\ 0,50 \cdot M_0 & \text{si } n = 3 \end{cases}$$

Efforts tranchants :

$$V_{1x} = -\frac{pl}{2} - \frac{0,50 \cdot \frac{pl^2}{8}}{l} = -0,500 pl - 0,063 pl = -0,563 pl$$

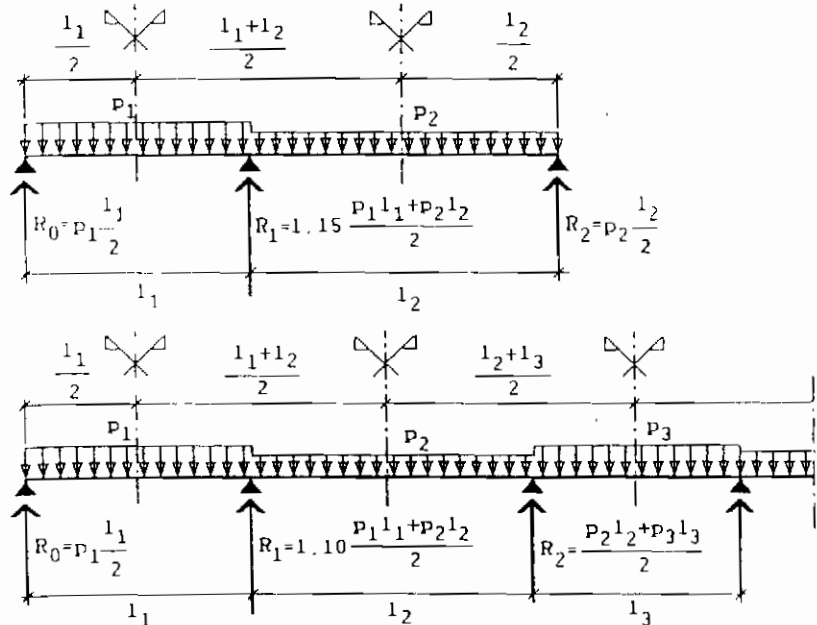
$$V_{1x} = +\frac{pl}{2} + \frac{(-0,40 + 0,50) \cdot \frac{pl^2}{8}}{l} = 0,513 pl$$

Réaction d'appui :

$$R_1 = V_{1c} - V_{1w} \Rightarrow R_1 \leq 1,076 pl$$

D'où Majoration de 10 % de la réaction de l'appui voisin de rive (soit des charges entre axes des travées pour l'appui voisin de rive).

4.4. CONCLUSION

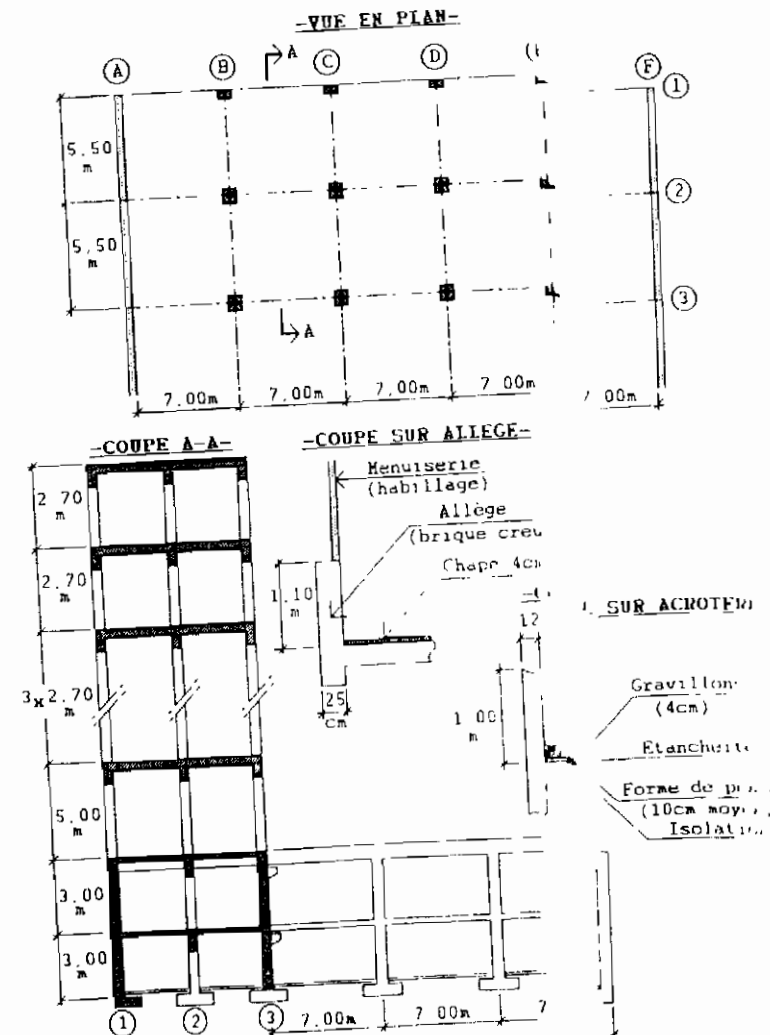


4.5. REMARQUE

Il est toujours possible de tenir compte des moments de continuité des poutres, mais dans ce cas, les calculs sont plus longs et plus précis. Dans un avant-projet sommaire ou une étude préliminaire, la majoration forfaitaire est plus rapide.

II. EXERCICE : BÂTIMENT - DESCENTE DE CHARGES

— ÉNONCÉ —



Extrait du devis descriptif :

1. Charges d'exploitation

- sur terrasse : 1 kN/m² de durée d'application supérieure à 24 heures,
- habitation : 1,5 kN/m² de durée d'application supérieure à 24 heures,
- charge roulante constituée par camions de 30 t (0,3 MN) sur la dalle du rez-de-chaussée : 10 kN/m² équivalents,
- parking : 2,5 kN/m² de durée d'application supérieure à 24 heures,
- dégression verticale des charges d'exploitation non admise.

2. Matériaux

- béton : $f_{c28} = 25$ MPa,
- aciers : Fe E 500 HA,
- fissuration peu préjudiciable.

3. Divers

Sur terrasse :

- gravillons sur 4 cm de poids volumique : 21 kN/m³,
- étanchéité : 0,1 kN/m²,
- réduit de forme de pente de 10 cm moyen : poids volumique : 20 kN/m³,
- isolation de poids négligeable.

Façades :

- allèges en briques creuses de densité : 13 kN/m³,
- menuiseries de poids : 0,40 kN/m.

Pignons :

- pierres de taille, épaisseur 0,25 m, poids volumique : 18 kN/m³.

Superstructure sur planchers :

- étages + RdC : cloisons légères et faux-plafonds estimés à 1 kN/m²,
- étages + RdC : chape de 4 cm de poids volumique : 20 kN/m³.

4. Description du bâtiment

Cinq étages à usage d'habitation.

Plancher-terrasse et planchers courants :

- poutres files 1, 2 et 3, retombée limitée à 35 cm,
- dalle pleine portant entre ces poutres et les pignons files A et F.

RdC à usage de garage (possibilité de circulation d'un camion de 30 t = 300 kN).

Poutraison du plancher RdC :

- poutres dans les deux sens, file 2 et files B, C, D et E,
- voiles porteurs en pignon et façades, files 1 et 3 et files A et F.

Deux sous-sols à usage de parking.

Poutraison du plancher du premier sous-sol :

- poutre file 2,
- voiles porteurs en pignon et façades, files 1 et 3 et files A et F,
- dalle pleine portant entre poutres et voiles porteurs.

Poutraison du plancher du deuxième sous-sol :

dallage de 12 cm d'épaisseur reposant directement sur le sol (on ne doit pas en tenir compte dans les calculs des charges sur les fondations).

Divers.

Trémies d'escaliers, trémies d'ascenseurs et rampes d'accès aux sous-sols, négligées par simplification.

Contreventement.

Dans le sens transversal, assuré par les pignons pleins et les gaines d'ascenseurs et d'escaliers.

Dans le sens longitudinal, assuré par des portiques (poteaux et poutres longitudinales des planchers) et par les gaines d'ascenseurs et d'escaliers.

À l'arrière : deux sous-sols à usage de parking sur toute la longueur du bâtiment.

— CORRIGÉ —

1. PRÉDIMENSIONNEMENT

1.1. PLANCHER-TERRASSE

a) Dalle

Dimensionnement.

Plancher-terrasse constitué par une dalle portant sur trois files de poutres (1, 2 et 3).

$$\alpha = \frac{l_x}{l_y} = \frac{5,50}{5 \cdot 7,00} = 0,16$$

$\alpha = 0,16 < 0,40 \Rightarrow$ la dalle porte dans un seul sens (entre les poutres).

On prendra :

$$\frac{h_0}{l_x} = \frac{1}{30} \text{ à } \frac{1}{40} \text{ car la dalle est continue}$$

soit ici :

$$\frac{h_0}{l_x} = \frac{1}{40} \text{ soit } h_0 = \frac{5,50}{40} = 0,138 \text{ m} \Rightarrow \text{Retenu dalle } h_0 = 15 \text{ cm.}$$

Charges au m² de dalle

Poids propre :	dalle B.A.	25 · 0,15 = 3,75 kN/m ²
	forme de pente :	20 · 0,10 = 2,00 kN/m ²
	étanchéité :	= 0,10 kN/m ²
	gravillons :	21 · 0,04 = 0,84 kN/m ²
	total :	g = 6,69 kN/m ²

Charges d'exploitation

$$q = 1,00 \text{ kN/m}^2$$

Vérification en flexion.

Méthode de calcul

$$q \leq \min \begin{cases} 2 \cdot g = 2 \cdot 6,69 = 13,38 \text{ kN/m}^2 \\ 5 \text{ kN/m}^2 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} q &= 1 \text{ kN/m}^2 < 5 \text{ kN/m}^2 \\ 0,8 \leq \frac{l_1}{l_1 + 1} &\leq 1,25 \\ l_1 &= l_1 + 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{Méthode forfaitaire.}$$

Moments fléchissants.

$$\alpha = \frac{q}{g + q} = \frac{1,00}{6,69 + 1,00} = 0,13$$

$$M_1 + \frac{M_u + M_c}{2} \geq M_{\max} \begin{cases} (1 + 0,3 \cdot \alpha) \cdot M_0 = (1 + 0,3 \cdot 0,13) \cdot M_0 = 1,04 M_0 \\ 1,05 M_0 \end{cases}$$

en vérifiant pour une poutre à deux travées :

$$\begin{array}{c} |M_d| \geq 0 \\ M_t \geq \end{array} \quad \begin{array}{c} 0 \\ \frac{1,2 + 0,3 \cdot \alpha}{2} M_{01} \\ \frac{1,2 + 0,3 \cdot \alpha}{2} M_{02} \end{array} \quad \begin{array}{c} 0,6 \cdot M_{02}^1 \\ M_{02}^1 = \max \begin{cases} M_{01} \\ M_{02} \end{cases} \end{array}$$

d'où, pour : $M_u = M_c = 0,6 M_0$ et $M_u = 0$:

$$M_1 \geq \max \begin{cases} 1,05 M_0 - \frac{0,6}{2} M_0 = 0,75 M_0 \\ \frac{1,2 + 0,3 \cdot \alpha}{2} M_0 = \frac{1,2 + 0,3 \cdot 0,13}{2} M_0 = 0,62 M_0 \end{cases}$$

on retiendra donc :

$$\Rightarrow M_1 = 0,75 M_0$$

ce qui donne pour une bande de dalle de largeur 1,00 m :

$$p_u = 1,35g + 1,5q = 1,35 \cdot 6,69 + 1,5 \cdot 1,00 = 10,53 \text{ kN/m}^2$$

$$M_{0u} = p_u \cdot \frac{l_x^2}{8} = 10,53 \cdot \frac{5,50^2}{8} = 39,82 \text{ mkN/m}$$

$$M_u = 0,6 M_0 = 0,6 \cdot 39,82 = 23,89 \text{ mkN/m}$$

$$M_1 = 0,75 M_0 = 0,75 \cdot 39,82 = 29,87 \text{ mkN/m}$$

Justification pour le moment le plus grand :

$$f_{bu} = 0,85 \cdot \frac{f_{c28}}{\theta \cdot \gamma_b} = 0,85 \cdot \frac{25}{1 \cdot 1,5} = 14,2 \text{ MPa}$$

$$\mu_{bu} = \frac{M_1}{d^2 \cdot f_{bu}} = \frac{29,87 \cdot 10^{-3}}{0,12^2 \cdot 14,2} = 0,146$$

$$\mu_{bu} = 0,146 < \mu_{AB} = 0,186 < \mu_{lu} \Rightarrow A' = 0$$

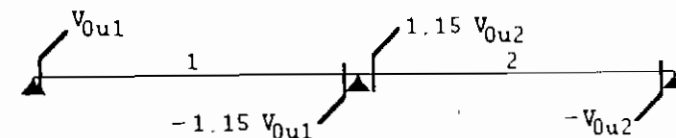
$$\rightarrow h_0 = 15 \text{ cm O.K.}$$

Vérification au cisaillement.

Effort tranchant dans la travée de référence :

$$V_{0u} = p_u \cdot \frac{l_x}{2} = 10,53 \cdot \frac{5,50}{2} = 28,96 \text{ kN/m}$$

Effort tranchant dans la poutre continue à deux travées



$$V_u = 1,15 V_{0u} = 1,15 \cdot 28,96 = 33,30 \text{ kN/m}$$

Contrainte tangente :

$$\tau_u = \frac{V_u}{d} = \frac{33,3 \cdot 10^{-3}}{0,12} = 0,28 \text{ MPa}$$

Vérification (dalles) :

$$\tau_u < \tau_{lm} = 0,07 \cdot \frac{f_{cj}}{\gamma_b}$$

$$\tau_u = 0,28 \text{ MPa} < 1,17 \text{ MPa} = \tau_{lm} = 0,07 \cdot \frac{25}{1,5} \text{ O.K.}$$

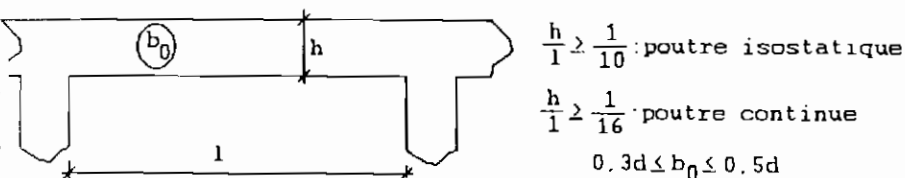
Flexibilité.

$$\frac{h_0}{l_x} = \frac{15}{550} = \frac{1}{37} \text{ O.K. d'autant plus que les portées sont prises entre axes et non entre nus d'appuis.}$$

- Poinçonnement
Pour mémoire.
- Résistance au feu
Pour mémoire.
- Isolation phonique
Pour mémoire.
- État-limite de déformation (E.L.S.)
Pour mémoire.

Poutre file 2

Dimensionnement.



ce qui donne pour des poutres continues de portée 7,00 m entre axes :

$$h \geq \frac{l}{16} = \frac{7,00}{16} = 0,44 \text{ m} \Rightarrow \text{Retenu : } d = 45 \text{ cm, } h = 50 \text{ cm}$$

retombée : $50 - 15 = 35 \text{ cm}$ maximum.

$$b_0 = 0,5 \cdot 0,45 = 0,225 \text{ m} \Rightarrow \text{soit } b_0 = 25 \text{ cm.}$$

Charges au ml

Poids propre:

- retombée :	$25 \cdot 0,25 (0,50 - 0,15) =$	2,19 kN/m
- poids plancher :	$1,15 \cdot 6,69 \cdot 5,50 =$	42,31 kN/m
- total :		$g = 44,50 \text{ kN/m}$

Charges d'exploitation :

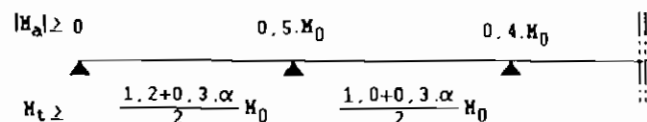
$$q = 1,15 \cdot 1,00 \cdot 5,50 = 6,33 \text{ kN/m}$$

Résistance à la flexion

Méthode de calcul :

méthode forfaitaire (voir dalle).

Moments fléchissants :



pour une poutre de section en T, la section critique est sur appui d'où on prendra :

$$M_a = 0,5 M_0$$

soit :

$$p_u = 1,35 g + 1,5 q = 1,35 \cdot 44,5 + 1,5 \cdot 6,33 = 69,57 \text{ kN/m}$$

$$M_0 = p_u \cdot \frac{l^2}{8} = 69,57 \cdot \frac{7,00^2}{8} = 426,12 \text{ mkN}$$

$$M_a = 0,5 M_0 = 0,5 \cdot 426,12 = 213,06 \text{ mkN}$$

Justification en flexion :

$$\mu_{bu} = \frac{M_a}{b_0 \cdot d^2 \cdot f_{bu}} = \frac{213,06 \cdot 10^{-3}}{0,25 \cdot 0,45^2 \cdot 14,2} = 0,296$$

$$\gamma = \frac{1,35 \cdot g + 1,5 \cdot q}{g + q} = \frac{69,57}{44,5 + 6,33} = 1,37$$

Fissuration peu préjudiciable

Fe E 500 HA

$$f_{c28} = 25 \text{ MPa}$$

$$0 = 1$$

$$\Rightarrow \mu_{lu} = 0,262$$

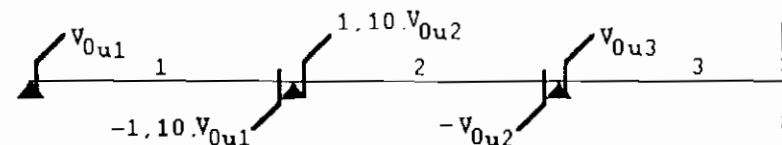
$$\mu_{bu} = 0,296 > \mu_{lu} = 0,262 \Rightarrow A' \text{ (car la hauteur de la retombée est limitée).}$$

Vérification au cisaillement.

Effort tranchant dans la travée de référence :

$$V_{0u} = p_u \cdot \frac{l}{2} = 69,57 \cdot \frac{7,00}{2} = 243,50 \text{ kN}$$

Effort tranchant dans la poutre continue :



$$V_u = 1,10 V_{0u} = 1,10 \cdot 243,50 = 267,85 \text{ kN}$$

Contrainte tangente :

Réduction pour transmission directe de charges aux appuis négligée (prédimensionnement)

$$\tau_u = \frac{V_u}{b_0 \cdot d} = \frac{267,85 \cdot 10^{-3}}{0,25 \cdot 0,45} = 2,38 \text{ MPa}$$

Vérification (poutres) :

$$\tau_u > \tau_{lim} = \min \begin{cases} 0,20 \frac{f_{ct}}{\gamma_b} \\ 5 \text{ MPa} \end{cases} \quad \text{car fissuration peu préjudiciable}$$

$$\tau_u = 2,38 \text{ MPa} < 3,33 \text{ MPa} = \tau_{lim} = \min \begin{cases} 0,20 \frac{25}{1,5} \\ 5 \text{ MPa} \end{cases} = 3,33 \text{ MPa} \quad \text{O.K.}$$

Flexibilité :

$$\frac{h}{l} = \frac{50}{700} = \frac{1}{14} > \frac{1}{16} \quad \text{O.K.}$$

Résistance au feu

Pour mémoire.

État-limite de déformation (E.L.S.)

Pour mémoire.

Poids de poutre ramené au m² de plancher

$$25 \text{ kN/m}^3 \cdot 0,25 (0,50 + 0,15) = 2,19 \text{ kN/m}$$

$$\frac{2,19}{5,50} = 0,40 \text{ kN/m}^2$$

1.2. PLANCHIER COURANT

a) Dalle

On retiendra, comme pour le plancher-terrasse (charges au m² de plancher courant légèrement inférieures à celles du plancher-terrasse).

dalle : h₀ = 15 cm.

b) Poutre file 2

Comme pour le plancher-terrasse (cf. remarque ci-dessus) puisque la trame des poutres est la même :

poutre : 25 x 50 cm².

c) Charges au m² de plancher

Dalle : poids propre :	25 · 0,15 =	3,75 kN/m ²
chape :	20 · 0,04 =	0,80 kN/m ²
cloisons :	=	1,00 kN/m ²
total :		g = 5,55 kN/m ²
charges d'exploitation :		q = 1,50 kN/m ²

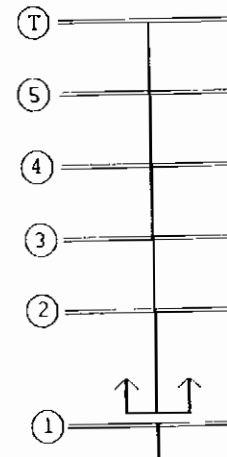
Poutre :

poids propre retombée

$$g = 2,19 \text{ kN/m.}$$

1.3. POTEAU COURANT B2

a) Dimensionnement dans la hauteur du premier étage



Le poteau supporte les charges du plancher-terrasse de quatre planchers courants

Le coffrage des poteaux étant inconnu à ce stade de l'étude, nous le négligerons et nous prendrons les portées entre axes des poutres pour la prise en compte forfaitaire du poids propre du poteau

De plus, le poteau central B₂ est manifestement le plus chargé (poteau voisin de rive)

Descente de charge partielle :

	G (kN)	Q (kN)
- Plancher-terrasse :		
poids propre : 6,69 · 5,50 · 7,00 =	257,6	
charges d'exploitation : 1,00 · 5,50 · 7,00 =		38,5
quatre planchers courants :		
poids propre : 4 · 5,55 · 5,50 · 7,00 =	854,7	
charges d'exploitation : 4 · 1,50 · 5,50 · 7,00 =		231,0
Retombées des poutres (1 + 4) :		
5 · 2,19 · 7,00 =	76,7	
Total :	G = 1 189,0	Q = 269,5

Effort normal ultime :

$$P_u = 1,35 G + 1,5 Q = 1,35 \cdot 1 189 + 1,5 \cdot 269,5 = 2 009,4 \text{ kN}$$

$$N_u = 1,15 P_u = 1,15 \cdot 2 009,4 = 2 311 \text{ kN}$$

Dimensionnement :

Pour que toutes les armatures participent à la résistance, on prendra : λ = 35.

d'où :

$$\beta = 1 + 0,2 \cdot \left(\frac{\lambda}{35} \right)^2 = 1,20$$

On en déduit :

$$B_r > \frac{k \cdot \beta \cdot N_u}{\theta \cdot \frac{f_{bu}}{0,9} + \frac{0,85}{100} \cdot f_{cd}} = \frac{1 \cdot 1,20 \cdot 2 \cdot 311 \cdot 10^{-3}}{1 \cdot \frac{14,2}{0,9} + \frac{0,85}{100} \cdot \frac{500}{1,15}} = 0,1424 \text{ m}^2$$

$$\text{d'où : } b_r > \sqrt{B_r} = \sqrt{1,424} = 37,74 \text{ cm}$$

⇒ Retenu : poteau 40 x 40 cm²

Vérifiant :

l_r = l = 2,70 m les poutres étant moins raides que le poteau.

$$\lambda = \frac{l_r \sqrt{12}}{b} = \frac{2,70 \sqrt{12}}{0,40} = 23 < 35$$

s du poteau ramené au m² de plancher

$$25 \text{ kN/m}^3 \cdot 0,40 \cdot 0,40 = 4 \text{ kN/m}$$

ramené au m² de plancher :

$$\frac{4 (2,70 - 0,50)}{7,00 \cdot 5,50} = 0,23 \text{ kN/m}^2$$

PLANCHER DU REZ-DE-CHAUSSEE

prédimensionnement identique à celui effectué précédemment pour le plancher-terrasse

poteau file B2 dans la hauteur du premier étage donne :

dalle h = 25cm, d'où :

Poids propre :	25 · 0,25 =	6,25 kN/m ²
Chape :	20 · 0,04 =	0,80 kN/m ²
Cloisons :	=	1,00 kN/m ²

Total :		g = 8,05 kN/m ²
---------	--	----------------------------

Charges d'exploitation :		q = 10 kN/m ²
--------------------------	--	--------------------------

poutres :

Poids propre retombée ramené au m ² de plancher :		g = 1 kN/m ²
--	--	-------------------------

poteaux :

Poids propre ramené au m ² de plancher :		g = 0,5 kN/m ²
---	--	---------------------------

1.5. PLANCHER DU PREMIER SOUS-SOL

On obtient de même :

- dalle h₀ = 14 cm, d'où :

charges permanentes :	g = 25 · 0,14 = 3,50 kN/m ²
-----------------------	--

charges d'exploitation :	q = 2,50 kN/m ²
--------------------------	----------------------------

- poutres :

poids propre retombée ramené au m ² de plancher :	g = 0,40 kN/m ²
--	----------------------------

- poteaux :

poids propre ramené au m ² de plancher :	g = 0,5 kN/m ²
---	---------------------------

2. POIDS DES DIVERS ÉLÉMENTS

On sépare les charges permanentes des charges d'exploitation. Les poteaux étant calculés dans leur section de base, leur poids est compté avec les charges permanentes des planchers qu'ils supportent.

2.1. PLANCHER-TERRASSE

	g (kN/m ²)	q (kN/m ²)
Poids propre dalle :	3,75	
Étanchéité :	0,10	
Forme de pente :	2,00	
Gravillons :	0,84	
Poutres :	0,40	
Poteaux sous plancher :	0,23	
Charges d'exploitation :		1,00
Total :	g = 7,32 kN/m ²	q = 1,00 kN/m ²

2.2. PLANCHIERS ÉTAGES COURANTS

	g (kN/m ²)	q (kN/m ²)
Poids propre dalle :	3,75	
Cloisons :	1,00	
Chape :	0,80	
Poutres :	0,40	
Poteaux sous plancher :	0,23	
Charges d'exploitation :		1,50
Total :	g = 6,18 kN/m ²	q = 1,50 kN/m ²

2.3. PLANCHER NIVEAU REZ-DE-CHAUSSEE

	g (kN/m ²)	q (kN/m ²)
Poids propre dalle	6,25	
Colons	1,00	
Chape	0,80	
Poutres	1,00	
Poteaux sous plancher	0,50	
Charges d'exploitation :		10,00
Total :	$g = 9,55 \text{ kN/m}^2$	$q = 10,00 \text{ kN/m}^2$

2.4. PLANCHER DU PREMIER SOUS-SOL

	g (kN/m ²)	q (kN/m ²)
Poids propre dalle :	3,50	
Poutres :	0,40	
Poteaux sous plancher :	0,50	
Charges d'exploitation :		2,50
Total :	$g = 4,40 \text{ kN/m}^2$	$q = 2,50 \text{ kN/m}^2$

2.5. DIVERS

a) Allèges

$$\begin{aligned} \text{Briques creuses : } 13 \cdot 0,25 \cdot 1,10 &= 3,58 \text{ kN/m} \\ \text{Mendriseries d'habillage :} &= 0,40 \text{ kN/m} \\ \text{Total :} &g = 3,98 \text{ kN/m} \end{aligned}$$

b) Acrotère

$$25 \cdot 1,00 \cdot 0,12 = g = 3 \text{ kN/m}$$

c) Murs poteaux, pignons

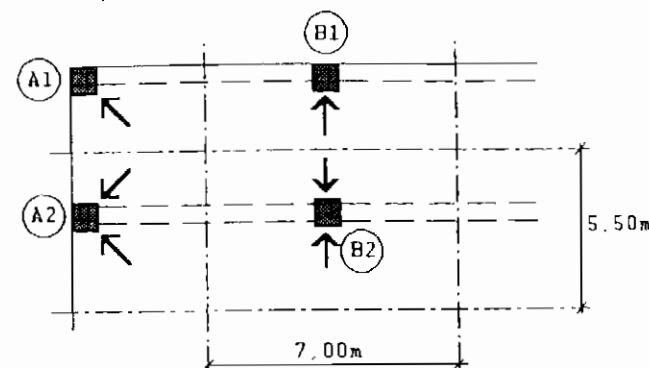
$$18 \cdot 0,25 \cdot (2,70 - 0,50) = 9,9 \text{ kN/m} \Rightarrow g = 10 \text{ kN/m}$$

↑
hauteur poutre

3. DESCENTE DE CHARGES

3.1. RÉPARTITION DES CHARGES DUES AUX DIVERS PLANCHERS

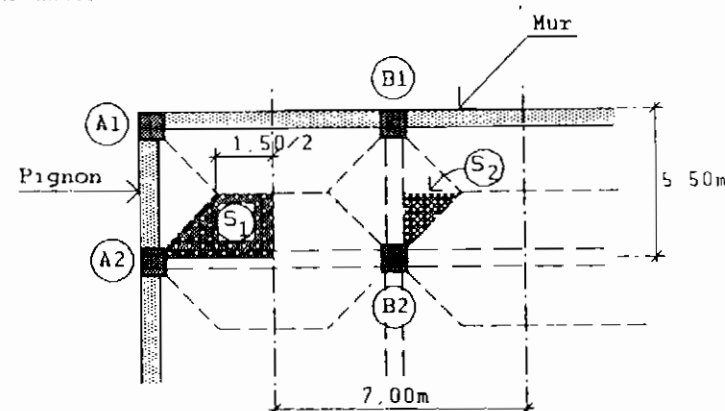
a) Plancher-terrasse et planchers courants



Surfaces affectées aux divers poteaux :

$$\begin{aligned} \text{- poteau A1 : } &\frac{5,50}{2} \cdot \frac{7,00}{2} = 9,63 \text{ m}^2 \\ \text{- poteau A2 : } &2 \cdot \frac{5,50}{2} \cdot \frac{7,00}{2} = 19,25 \text{ m}^2 \\ \text{- poteau B1 : } &\frac{5,50}{2} \cdot 7,00 = 19,25 \text{ m}^2 \\ \text{- poteau B2 : } &2 \cdot \frac{5,50}{2} \cdot 7,00 = 38,50 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

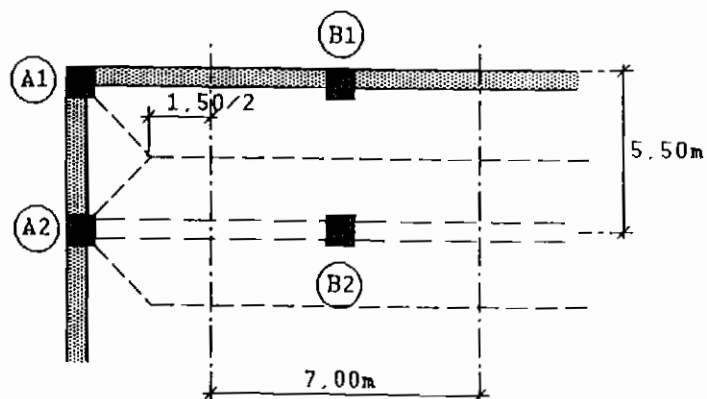
b) Plancher du rez-de-chaussée



Surfaces intéressant les divers planchers :

- poteau A1 : 0 m^2 (charges reportées sur mur et pignon)
- poteau A2 : $2 \cdot S_1 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1,50 + 7,00}{2} \cdot \frac{5,50}{2} = 11,69 \text{ m}^2$
- poteau B1 : $2 \cdot S_2 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5,50}{2} \cdot \frac{5,50}{2} = 7,56 \text{ m}^2$
- poteau B2 : $4 (S_1 + S_2) = 2 \cdot (11,69 + 7,56) = 38,50 \text{ m}^2$

Plancher du premier sous-sol



Surfaces intéressant les divers poteaux :

- poteau A1 : mur et pignon porteurs $\Rightarrow 0 \text{ m}^2$
- poteau A2 : $2 \cdot S_1 = 11,69 \text{ m}^2$ (voir 3.1.b)
- poteau B1 : mur porteur $\Rightarrow 0 \text{ m}^2$
- poteau B2 : $4 (S_1 + S_2) = 38,50 \text{ m}^2$ (voir 3.1.b)

3.2. CHARGES AMENÉES PAR LES DIVERS PLANCHERS

a) Poteaux file A

Poteau	A1	
	G(kN)	Q(kN)
*Plancher-terrasse:		
Poids plancher	7.32.9.63=70.49	
Acrotère	3.6.25= 18.75	
Exploitation		1.9.63= 9.63
Total	G=89.24	Q= 9.63
*Plancher courant:		
Poids plancher	6.18.9.63=59.51	
Allèges	3.98.3.50=13.93	
Pignon	10.2.75= 27.50	
Exploitation		1.5.9.63=14.45
Total	G=100.94	Q=14.45
*Plancher RdC:		
Poids plancher	9.55.0= 0.00	
Mur		
Exploitation		10.0= 0.00
Total	G=0.00	Q=0.00
*Plancher premier sous-sol:		
Poids plancher	4.40.0= 0.00	
Mur		
Exploitation		2.5.0= 0.00
Total	G=0.00	Q=0.00

Poteau	A2	
	G(kN)	Q(kN)
*Plancher-terrasse:		
Poids plancher	7.32.19.25=140.91	
Acrotère	3.5.50= 16.50	
Exploitation		1.19.25= 19.25
Total	G=157.41	Q=19.25
*Plancher courant:		
Poids plancher	6.18.19.25=118.97	
Allèges	3.98.0= 0.00	
Pignon	10.5.50= 55.00	
Exploitation		1.5.19.25=28.88
Total	G=173.97	Q=28.88
*Plancher RdC:		
Poids plancher	9.55.11.69=111.64	
Mur		
Exploitation		10.11.69=116.90
Total	G=111.64	Q=116.90
*Plancher premier sous-sol:		
Poids plancher	4.40.11.69= 51.44	
Mur		
Exploitation		2.5.11.69=29.23
Total	G=51.44	Q=29.23

Poteaux file B

Poteau	B1	
	G(kN)	Q(kN)
*Plancher-terrasse		
Poids plancher	7.32 19.25=140.91	
Acrotère	3.7.00= 21.00	
Exploitation		1 19.25= 19.25
Total	G=161.91	Q=19.25
*Plancher courant		
Poids plancher	6.18 19.25=118.97	
Allèges	3.98 7.00= 27.86	
Pignon	10 0 = 0.00	
Exploitation		1.5 19.25=28.88
Total	G=146.83	Q=28.88
*Plancher RdC.		
Poids plancher	9.55 7.56= 72.20	
Mur		
Exploitation		10 7.56= 75.60
Total	G= 72.20	Q=75.60
*Plancher premier sous-sol		
Poids plancher	4.40 0= 0.00	
Mur		
Exploitation		2.5 0= 0.00
Total	G= 0.00	Q= 0.00

Poteau	B2	
	G(kN)	Q(kN)
*Plancher-terrasse		
Poids plancher	7.32 38.50=281.82	
Acrotère	3 0= 0.00	
Exploitation		1 38.50= 38.50
Total	G=281.82	Q=38.50
*Plancher courant		
Poids plancher	6.18 38.50=237.93	
Allèges	3.98 0= 0.00	
Pignon	10 0 = 0.00	
Exploitation		1.5 38.50=57.75
Total	G=237.93	Q=57.75
*Plancher RdC		
Poids plancher	9.55 38.50=367.68	
Mur		
Exploitation		10 38.50=385.00
Total	G=367.68	Q=385.00
*Plancher premier sous-sol		
Poids plancher	4.40 38.50=169.40	
Mur		
Exploitation		2.5 38.50=96.25
Total	G=169.40	Q=96.25

3.3. DESCENTE DE CHARGES

Le poteau B2 étant le plus chargé, nous établirons la descente de charges pour ce seul poteau

Poteau	B2	
	G(kN)	Q(kN)
⑤	Plancher-terrasse:	
	Majoration(continuité)	0.15 281.82= 42.27
	=>Total	N _G =324.09
④	Plancher courant.	
	Majoration(continuité)	0.15 237.93= 35.69
	=>Total	N _G =597.71
③	Plancher courant	
	Majoration(continuité)	0.15 237.93= 35.69
	=>Total	N _G =871.33
②	Plancher courant	
	Majoration(continuité)	0.15 237.93= 35.69
	=>Total	N _G =1144.95
①	Plancher courant	
	Majoration(continuité)	0.15 237.93= 35.69
	=>Total	N _G =1418.57
RdC	Plancher courant.	
	Majoration(continuité)	0.15 237.93= 35.69
	=>Total	N _G =1692.19
1SS	Plancher RdC	
	Majoration(continuité)	0.15 367.68= 55.15
	=>Total	N _G =2115.02
2SS	Plancher premier sous-sol	
	Majoration(continuité)	0.15 169.40= 25.41
	=>Total	N _G =2309.83

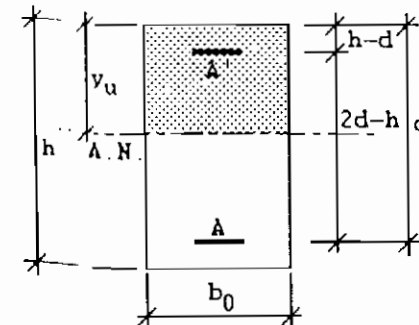
ANNEXE 1

CALCUL MANUEL D'UNE SECTION RECTANGULAIRE À ARMATURES SYMÉTRIQUES À L'E.L.U. PAR APPROXIMATIONS SUCCESSIVES

La solution la plus rapide pour résoudre le problème est obtenue en utilisant les diagrammes d'interaction (lecture sur l'axe $O\mu_G$ pour la flexion simple). Dans le cas où l'on ne dispose pas de tels diagrammes, on peut utiliser la méthode par approximations successives exposée ci-après.

1. HYPOTHÈSES-NOTATIONS

■ Considérons la section rectangulaire définie ci-dessous :



■ On se place dans le cas où $0 \leq y_u \leq d$ (section avec au moins une nappe d'aciers tendus).

■ Cette section est sollicitée en flexion composée sous les sollicitations M_{uA} et N_u ; le cas de la flexion simple - $N_u = 0$ - est traité au § 6 ci-après.

2. REMARQUES

■ Dans le cas général, on a, pour une poutre : $d \approx 0,9 h$ et

$$h - d < 0,259 d \Leftrightarrow h < 1,259 d \Leftrightarrow d > 0,794 h \text{ et on se trouve au pivot A.}$$

■ Pour une dalle, cette condition n'est pas toujours vérifiée ; par exemple pour $h_0 = 8 \text{ cm}$ et $d = 6 \text{ cm}$, on a :

$$d = 6 \text{ cm} < 0,794 \cdot 8 = 6,35 \text{ cm.}$$

3. MOMENT DE RÉFÉRENCE

3.1. Si $y_u < h - d$:

- les aciers supérieurs sont tendus,
- on est au pivot A (cf. $y_u < h - d < 0,259 \cdot d$).

■ Allongement des aciers supérieurs :

$$\epsilon_{st} = \frac{10}{1\,000} \cdot \frac{h - d - y_u}{d - y_u}.$$

■ Contrainte des aciers supérieurs :

$$\sigma_{st} = E_s \cdot \epsilon_{st} = 2\,000 \frac{h - d - y_u}{d - y_u}. \quad [1]$$

■ σ_{st} est maximal pour $y_u = 0$ et vaut alors :

$$\sigma_{s\max} = 2\,000 \left(\frac{h}{d} - 1 \right).$$

■ Comme pour les aciers Fe E 500,

$$\sigma_{s\max} \geq f_{cd} \Leftrightarrow 2\,000 \left(\frac{h}{d} - 1 \right) \geq f_{cd} = 435 \text{ MPa,}$$

on a

$$\sigma_{s\max} \geq f_{cd} \Leftrightarrow \frac{h}{d} \geq \frac{435}{2\,000} + 1 = 1,2175 \Leftrightarrow d \leq 0,82 h,$$

ce qui est rarement le cas pour une poutre (cf. $d \approx 0,9 h$). On en déduit donc que $\sigma_{st} < f_{cd}$

3.2. Si $y_u = h - d$:

L'axe neutre passant par le centre de gravité des aciers tendus :

$$\epsilon_{st} = 0 \Rightarrow \sigma_{st} = 0.$$

D'où le moment que peut équilibrer la section, rapporté aux aciers tendus, lorsque $y_u = h - d$:

$$M_{RS} = 0,8 \cdot b_0 (h - d) f_{bu} [d - 0,4 (h - d)],$$

$$M_{RS} = 0,8 \cdot b_0 d^2 f_{bu} \left(\frac{h}{d} - 1 \right) \cdot \left(1,4 - 0,4 \frac{h}{d} \right),$$

$$M_{RS} = \left(\frac{h}{d} - 1 \right) \left(1,12 - 0,32 \frac{h}{d} \right) b_0 d^2 f_{bu}$$

3.3. Si $y_u > h - d$:

Voir § 4.2 ci-après

4. MISE EN ÉQUATION DU PROBLÈME

4.1. CAS OÙ $M_{uA} \leq M_{RS} (\Leftrightarrow y_u \leq h - d)$

■ Les aciers supérieurs sont tendus et les équations d'équilibre donnent :

$$\begin{cases} N_u = 0,8 \cdot b_0 \cdot y_u \cdot f_{bu} = A (\sigma_{st} + f_{cd}) \end{cases} \quad [2]$$

$$\begin{cases} M_{uA} = 0,8 \cdot b_0 \cdot y_u \cdot f_{bu} (d - 0,4 y_u) = A \sigma_{st} (2d - h), \end{cases} \quad [3]$$

avec :

$$\sigma_{st} = 2\,000 \frac{h - d - y_u}{d - y_u}.$$

A et y_u sont inconnus *a priori*.

4.2. CAS OÙ $M_{uA} > M_{RS} (\Leftrightarrow y_u > h - d)$

Les aciers supérieurs sont comprimés.

4.2.1. Cas où $h - d < y_u \leq 0,259 d$

■ On est au pivot A et le raccourcissement des aciers supérieurs vaut :

$$\epsilon_{sc} = \frac{10}{1\,000} \cdot \frac{y_u - (h - d)}{d - y_u}$$

■ D'où leur contrainte :

$$\sigma_{sc} = E_s \cdot \epsilon_{sc} = 2\,000 \frac{y_u - h + d}{d - y_u} \quad [4]$$

Cette contrainte ne peut atteindre f_{ed} que si :

$$\sigma_{sc} \geq f_{ed} \Leftrightarrow 2\,000 \frac{y_u - h + d}{d - y_u} \geq f_{ed},$$

$$y_u \geq \frac{d \cdot f_{ed} + 2\,000 (h - d)}{2\,000 + f_{ed}},$$

ou, comme on a supposé $y_u \leq 0,259 d$, si :

$$\frac{2\,000 \cdot h - d (2\,000 - f_{ed})}{2\,000 + f_{ed}} \leq 0,259 d.$$

Cette circonstance ne peut se rencontrer que si :

$$2\,000 \cdot h - 2\,000 \cdot d + d \cdot f_{ed} \leq 518 \cdot d + 0,259 d \cdot f_{ed}.$$

$$f_{ed} \leq \frac{1}{0,741 \cdot d} [-2\,000 \cdot h + 2\,518 \cdot d] = 1,35 \left[-2\,000 \frac{h}{d} + 2\,518 \right],$$

ce qui conduit, dans le cas général où $h \approx 1,1 d$ à :

$$f_{ed} \leq 1,35 [-2\,000 \cdot 1,1 + 2\,518] = 429 \text{ MPa}.$$

■ Conclusion :

Dans le cas envisagé ($h - d < y_u \leq 0,259 d$), si l'on emploie des aciers HA Fe E 500, $f_{ed} = 435 \text{ MPa} > 429 \text{ MPa}$ et la contrainte des aciers supérieurs ne peut atteindre f_{ed} .

■ Les équations d'équilibre s'écrivent donc :

$$\begin{cases} N_u = 0,8 \cdot b_0 \cdot y_u \cdot f_{bu} + A \cdot \sigma_{sc} - A \cdot f_{ed} \\ = 0,8 \cdot b_0 \cdot y_u \cdot f_{bu} - A \cdot (f_{ed} - \sigma_{sc}), \\ M_{uA} = 0,8 \cdot b_0 \cdot y_u \cdot f_{bu} (d - 0,4 \cdot y_u) + A \cdot \sigma_{sc} (2d - h), \end{cases} \quad [5]$$

$$[6]$$

avec :

$$\sigma_{sc} = E_s \cdot \epsilon_{sc} = 2\,000 \frac{y_u - (h - d)}{d - y_u},$$

et y_u sont inconnus *a priori*.

Cas où $y_u > 0,259 \cdot d$

On est au pivot B et le raccourcissement des aciers supérieurs vaut :

$$\epsilon_{sc} = \frac{3,5}{1\,000} \cdot \frac{y_u - (h - d)}{y_u}.$$

■ D'où leur contrainte :

$$\sigma_{sc} = E_s \cdot \epsilon_{sc} = 700 \frac{y_u - (h - d)}{y_u}. \quad [7]$$

Cette valeur n'atteint f_{ed} que si :

$$\sigma_{sc} \geq f_{ed} \Leftrightarrow 700 \frac{y_u - (h - d)}{y_u} \geq f_{ed},$$

$$y_u \geq \frac{700 (h - d)}{700 - f_{ed}} = y_e.$$

Ce qui conduit pour les aciers Fe E 500 et $h \approx 1,1 d$ à :

$$y_e = \frac{700}{700 - 435} (h - d) = 2,64 (h - d) \quad [8]$$

4.2.3. Conclusion

En posant :

$$y_e = \frac{700 (h - d)}{700 - f_{ed}}$$

1. si $h - d < y_u \leq y_e$, les équations d'équilibre s'écrivent :

$$\begin{cases} N_u = 0,8 \cdot b_0 \cdot y_u \cdot f_{bu} + A \cdot (\sigma_{sc} - f_{ed}) \\ = 0,8 \cdot b_0 \cdot y_u \cdot f_{bu} - A \cdot (f_{ed} - \sigma_{sc}), \\ M_{uA} = 0,8 \cdot b_0 \cdot y_u \cdot f_{bu} (d - 0,4 \cdot y_u) + A \cdot \sigma_{sc} (2d - h), \end{cases} \quad [9]$$

$$[10]$$

avec :

$$\sigma_{sc} = 700 \frac{y_u - (h - d)}{y_u},$$

A et y_u sont inconnus *a priori*.

2. si $y_u > y_e$, $\sigma_{sc} = f_{ed}$ et les équations d'équilibre deviennent :

$$\begin{cases} N_u = 0,8 \cdot b_0 \cdot y_u \cdot f_{bu} \Rightarrow y_u \\ M_{uA} = 0,8 \cdot b_0 \cdot y_u \cdot f_{bu} (d - 0,4 \cdot y_u) + A \cdot f_{ed} (2d - h) \Rightarrow A \end{cases} \quad [11]$$

$$[12]$$

5. MÉTHODE D'APPROXIMATION

On opère de la façon suivante :

1. Déterminer dans quel cas on se trouve en comparant M_{uA} à M_{RS} (voir § 3.2).
2. En se donnant y_u , calculer la contrainte σ_s ou σ_{sc} correspondante.

3. En déduire A par l'équation d'équilibre des moments.
4. Évaluer N_u à partir de y_u et A trouvé à l'étape 3
5. Comparer la valeur de N_u trouvée à l'étape 4 à celle de N_u réel et reprendre le calcul depuis l'étape 2 en modifiant la valeur de y_u jusqu'à ce que $N_{u \text{ calculé}} < N_{u \text{ réel}}$.

6. CAS DE LA FLEXION SIMPLE

- La seule chose qui change est que $N_u = 0$ dans les équations d'équilibre.
- Le cas où $y_u > y_e$ ne peut se rencontrer. Dans un tel cas, l'équilibre devrait être assuré par les aciers seuls (cf. $N_u = 0 \Rightarrow y_u = 0$ par l'équation [11]) sans intervention du béton comprimé entourant les armatures supérieures comprimées, ce qui n'est pas possible.

7. CONCLUSION

Compte tenu des développements ci-dessus, on voit que, même en flexion simple, la solution la plus rapide est fournie par les diagrammes d'interaction (chapitre 8, § 5.4.5, lecture sur l'axe Op_{μ_G} pour la flexion simple).

ANNEXE 2

VÉRIFICATION À L'E.L.U. D'UNE SECTION RECTANGULAIRE DONT ON CONNAÎT LES ARMATURES

On distingue les deux cas ci-après.

1. SECTION SANS ACIERS COMPRIMÉS ($A' = 0$)

1. Calculer μ_{lu} et en déduire $M_{lu} = \mu_{lu} \cdot b_0 d^2 f_{bu}$
2. Si $M_u \leq M_{lu}$ le fait d'avoir $A' = 0$ est correct. Sinon, il faut prévoir des aciers comprimés et, comme la section n'en comporte pas, tout le dimensionnement (détermination de A' , puis de A) est à reprendre.
3. En déduire la position de l'axe neutre par l'équation d'équilibre des forces

$$0,8 \cdot b_0 y_u f_{bu} - A \cdot f_{cd} = 0 \quad \Rightarrow \quad y_u = \frac{A \cdot f_{cd}}{0,8 \cdot b_0 f_{bu}}$$

4. Calculer la valeur du bras de levier : $z_b = d(1 - 0,4 \cdot y_u)$
5. En déduire le moment résistant à l'E.L.U. : $M_{Ru} = A \cdot f_{cd} \cdot z_b$
6. Il faut avoir : $M_{Ru} \geq M_u$.

2. SECTION AVEC ACIERS COMPRIMÉS ($A' \neq 0$)

Peu importe, dans ce cas, que M_u soit supérieur ou non à M_{lu}

1. Calculer la contrainte équivalente des aciers comprimés à l'E.L.U.

$$\sigma_{sc} = \begin{cases} 9 \cdot \gamma \cdot f_{c28} - \delta' (13 \cdot f_{c28} + 415) \text{ K} \leq 435 \text{ MPa} & (\text{Fe E 500}) \\ 9 \cdot \gamma \cdot f_{c28} - 0,9 \cdot \delta' (13 \cdot f_{c28} + 415) \text{ K} \leq 348 \text{ MPa} & (\text{Fe E 400}) \end{cases}$$

2. Si $M_u > M_{bu}$, vérifier que la section d'aciers comprimés convient :

$$A' \geq \frac{M_u - M_{bu}}{(d - d') \sigma_{sc}}$$

3. Déterminer la position de l'axe neutre par l'équation d'équilibre des forces :

$$0,8 \cdot b_0 \cdot y_u \cdot f_{bu} - A \cdot f_{ed} + A' \cdot \sigma_{sc} = 0 \Rightarrow y_u = \frac{A \cdot f_{ed} - A' \cdot \sigma_{sc}}{0,8 \cdot b_0 \cdot f_{bu}}$$

4. Calculer la valeur du bras de levier du béton seul : $z_b = d - 0,4 \cdot y_u$.

5. En déduire le moment résistant à l'E.L.U. (par rapport aux aciers tendus) :

$$M_{Ru} = 0,8 \cdot b_0 \cdot y_u \cdot f_{bu} \cdot z_b + A' \cdot \sigma_{sc} [d - d']$$

6. Il faut avoir : $M_{Ru} \geq M_u$.

Remarque :

La vérification conduite comme indiqué ci-dessus permet d'être assuré que la condition vis-à-vis de l'état-limite de compression du béton ($\sigma_{bc} \leq 0,6 f_{c28}$) est elle-même satisfaite.

Si l'on voulait ne vérifier que la résistance à l'E.L.U., il faudrait :

calculer
$$y_{u1} = \frac{(A - A') f_{ed}}{0,8 \cdot b_0 \cdot f_{bu}}$$

si $y_{u1} \geq \frac{700 \cdot d'}{700 - f_{ed}}$, prendre :

$$M_{Ru} = 0,8 \cdot b_0 \cdot y_{u1} \cdot f_{bu} (d - 0,4 \cdot y_{u1}) + A' \cdot f_{ed} (d - d')$$

si $y_{u1} < \frac{700 \cdot d'}{700 - f_{ed}}$, choisir $y_{u2} < y_{u1}$ et calculer :

$$\sigma_{sc2} = 700 \frac{y_{u2} - d'}{y_{u2}} \text{ si } y_{u2} \geq 0,259 d,$$

$$\sigma_{sc2} = 2000 \frac{y_{u2} - h + d}{d - y_{u2}} \text{ si } y_{u2} < 0,259 d,$$

où :
$$y_{u3} = \frac{A \cdot f_{ed} - A' \cdot \sigma_{sc2}}{0,8 \cdot b_0 \cdot f_{bu}}$$

et recommencer avec cette valeur le calcul de σ_{sc3} , d'où y_{u4} , etc., jusqu'à trouver

$y_{i+1} \approx y_{ui}$

finalemnt :

$$M_{Ru} = 0,8 \cdot b_0 \cdot y_{ui} \cdot f_{bu} (d - 0,4 \cdot y_{ui}) + A' \cdot \sigma_{sc} (d - d')$$

NOTATIONS-SYMBOLS

1. NOTATIONS

X	valeur absolue de X,
cf.	confer (comparez),
Cste	valeur constante,
O.K.	vérification assurée,
$\sum_{k=1}^n A_k$	$\sum_k A_k = A_1 + A_2 + \dots + A_n$,
$\Rightarrow$	implique,
$\Leftrightarrow$	équivalent à,
$\ll$	très inférieur à,
$\gg$	très supérieur à,
$>$	comparé à,
$\approx$	approximativement égal à,
$\neq$	différent de.

2. SYMBOLES

Les symboles et notations utilisés dans la partie relative au béton armé de cet ouvrage sont conformes aux symboles et notations utilisés dans les Règles BAEL 91.

Néanmoins, pour plus de clarté, d'autres notations sont apparues nécessaires, le symbolisme adopté alors respecte les principes de notations de ces Règles.

2.1. MAJUSCULES ROMAINES

A	section d'aciers,
A'	section d'aciers comprimés,
A _i	armatures inférieures,
A _{max} , A _{min}	sections d'aciers maximale et minimale,
A.N.	axe neutre,

A_s	armatures supérieures,
A_{ser}	section d'aciers pour l'état-limite de service,
A_t	section d'un cours d'armatures transversales ou d'armatures d'âme,
A_u	section d'aciers pour l'état-limite ultime,
B	aire de béton,
B_r	section réduite d'un poteau,
B_0	section homogène totale,
E.L. S.	état-limite de service,
E.L. U	état-limite ultime,
E_s	module d'élasticité de l'acier,
F_{bc}	résultante des efforts de compression dans le béton,
F_{bs}	résultante des efforts de compression dans le béton et les aciers comprimés,
F_s	effort de traction dans une armature,
G	action permanente,
G_{max}	actions permanentes défavorables,
G_{min}	actions permanentes favorables,
I	moment d'inertie,
I_0	moment d'inertie de la section totale homogène,
I_1	moment d'inertie de la section réduite homogène,
K	pente du diagramme de Navier à l'E.L.S., rigidité d'une travée, coefficients,
M	moment fléchissant : $M > 0$ lorsque la fibre inférieure d'une poutre horizontale est tendue, $M < 0$ dans le cas contraire,
M_a	moment sur appui,
M_{lu}	moment fléchissant limite à l'E.L. U.,
M_{rb}	moment résistant béton,
M_{ser}	moment fléchissant à l'E.L.S.,
M_t	moment fléchissant en travée,
M_{1ser}	moment de référence d'une section en T à l'E.L.S.,
M_{Tu}	moment de référence d'une section en T à l'E.L. U.,
M_u	moment fléchissant à l'E.L.U.,
M_{uG_0} (M_{serG_0})	moment ultime (de service) au centre de gravité de la section de béton seul,
M_0	moment fléchissant de la travée de référence,
M_{0x}	moment fléchissant au centre d'un panneau de dalle articulé pour une bande de largeur unité parallèle à l_x ,

M_{0y}	moment fléchissant au centre d'un panneau de dalle articulé pour une bande de largeur unité parallèle à l_y ,
N	effort normal : $N > 0$ pour une compression, $N < 0$ pour une traction,
N_{ser}	effort normal de service,
N_u	effort normal ultime,
N_{uc}	charge critique ultime de calcul (flambement),
P	charge concentrée appliquée (E.L.U. ou E.L.S.),
P_{ser}	charge concentrée appliquée à l'E.L.S.,
P_u	charge concentrée appliquée à l'E.L.U.,
Q_B	charge d'exploitation variable dans les bâtiments,
Q_t	action variable d'accompagnement,
Q_l	action variable de base,
T	couple de torsion,
V	effort tranchant,
V_u	effort tranchant à l'E.L.U.,
V_{u0}	effort tranchant à l'E.L.U. réduit pour transmission directe de charges à l'appui,
V_x	effort tranchant pour une bande de dalle parallèle à l_x ,
V_y	effort tranchant pour une bande de dalle parallèle à l_y ,
V_0	effort tranchant sur appui de la travée de référence,
V_{0u}	effort tranchant sur appui de la travée de référence à l'E.L.U.

2.2. MINUSCULES ROMAINES

a	plus petite dimension d'une section transversale, largeur de la bielle d'about, abscisse d'une charge concentrée depuis l'appui considéré,
a, b	dimensions en plan d'un poteau, rectangle d'impact d'une charge concentrée au niveau du feuillet moyen d'une dalle,
a_0, b_0	rectangle d'impact d'une charge concentrée à la surface d'une dalle,
b	largeur d'une table de compression,
b_0	largeur d'une section rectangulaire ou de la nervure d'une section en T, épaisseur d'une section creuse en torsion,
b_1	largeur d'une aile de section en T,
c ou c_t	enrobage des armatures,
c_g	plus grosse dimension du granulat,

d	hauteur utile d'une section,
d'	distance des aciers comprimés à la fibre de béton la plus comprimée,
e	distance minimale d'une armature au parement de béton le plus proche, excentricité,
e_a	excentricité additionnelle,
e_h	distance libre horizontale entre deux barres (ou groupes de barres),
e_H	distance horizontale entre axes de deux barres (ou groupes de barres),
e_0	excentricité par rapport au centre de gravité du béton seul ou excentricité structurale,
e_1	excentricité du premier ordre,
e_2	excentricité du second ordre,
f	flèche,
f_{bu}	résistance de calcul du béton en compression à l'E.L.U.,
f_{cj}	résistance caractéristique du béton à la compression à j jours d'âge,
f_{c28}	résistance caractéristique du béton à la compression à 28 jours d'âge,
f_e	limite d'élasticité de l'acier,
f_{ed}	résistance de calcul des aciers à l'E.L.U.,
f_{tj}	résistance conventionnelle à la traction du béton à j jours d'âge,
f_{t28}	résistance conventionnelle à la traction du béton à 28 jours d'âge,
h	hauteur totale d'une section,
h_0	hauteur d'une table de compression,
	épaisseur d'une dalle,
i	rayon de giration,
l'	portée fictive d'une travée (méthode Caquot),
l_a	longueur d'ancrage,
l_f	longueur de flambement,
l_i	portée de la travée i ,
l_r	longueur de recouvrement,
l_s	longueur de scellement droit,
l_t	distance entre nus de deux nervures parallèles,
l_0	longueur libre d'une pièce,
	distance du nu d'appui au point où l'effort tranchant s'annule,
l'_0	longueur fictive pour répartir les armatures d'âme,
n	$15 =$ coefficient d'équivalence,
p	charge uniformément répartie (E.L.U. ou E.L.S.),
p_{ser}	charge uniformément répartie à l'E.L.S.,
p_u	charge uniformément répartie à l'E.L.U.,
s	espacement des cours d'armatures transversales ou d'armatures d'âme,
s_{i0}	espacement initial calculé des cours d'armatures d'âme,

s_{i1}	espacement initial retenu des cours d'armatures d'âme,
u_c	périmètre du rectangle d'impact au niveau du feuillet moyen,
v	distance du centre de gravité d'une section à la fibre la plus tendue,
v'	distance du centre de gravité d'une section à la fibre la plus comprimée,
y ou y_u	distance de l'AN à la fibre la plus comprimée d'une section à l'E.L.U. (y_1 à l'E.L.S.),
z	bras de levier du couple des forces internes,
z_b	bras de levier de l'effort de compression du béton par rapport aux aciers tendus.

2.3. MAJUSCULES OU MINUSCULES GRECQUES

α	profondeur réduite de l'axe neutre à l'E.L.U., inclinaison des armatures d'âme, rapport des longueurs des côtés d'une dalle rectangulaire, rapport sans dimensions (de moments, de charges, etc.),
β	coefficient de flambement des poteaux,
γ	rapport du moment ultime au moment de service,
γ_b	coefficient partiel de sécurité pour le béton,
γ_s	coefficient partiel de sécurité pour les aciers,
δ'	distance réduite des aciers comprimés à la fibre de béton la plus comprimée ($\delta' = d'/d$),
ϵ_{bc}	raccourcissement relatif maximal du béton comprimé,
ϵ_s	allongement relatif des aciers tendus,
ϵ_{sc}	raccourcissement relatif des aciers comprimés,
ϵ_{st}	allongement relatif des aciers tendus lorsque leur contrainte atteint la résistance de calcul (f_c/γ_s),
η	coefficient de fissuration,
0	coefficient prenant en compte la durée d'application des charges,
	angle au centre d'une partie courbe de barre,
λ	élancement géométrique,
μ	coefficient de frottement acier/béton,
μ_{AB} (μ_{BC})	moment fléchissant réduit correspondant à un diagramme de déformations passant par les pivots A et B à l'E.L.U. (pour les pivots B et C),
μ_{bu}	moment fléchissant agissant réduit à l'E.L.U.,
μ_{b0}	moment réduit de référence en flexion composée correspondant à une déformation nulle des aciers tendus,
μ_{bu}	moment fléchissant limite réduit à l'E.L.U.,
μ_{rb}	moment résistant béton réduit à l'E.L.S.,
ν	coefficient de Poisson ; effort normal réduit,

σ_{bc}	contrainte de compression du béton,
σ_{ik}	contrainte limite du béton comprimé à l'E.L.S.,
σ_s	contrainte de traction de l'acier,
$\overline{\sigma_s}$	contrainte limite des aciers tendus à l'E.L.S.,
σ_{sc}	contrainte de compression des aciers,
σ_{scc}	contrainte de compression équivalente des aciers comprimés (E.L.U.),
τ_{lim}	contrainte tangente limite,
τ_s	contrainte d'adhérence moyenne,
τ_{su}	contrainte d'adhérence limite,
τ_u	contrainte tangente conventionnelle,
τ_{uv}	contrainte tangente due à V_u ,
τ_{uT}	contrainte tangente due à T_u ,
Φ	diamètre d'une barre d'acier,
Φ_l	diamètre d'une barre d'acier longitudinale,
Φ_t	diamètre d'une barre d'acier pour armatures d'âme,
Φ'_{min}	diamètre minimal des barres réalisant une section d'acier comprimée,
ψ, ψ'	coefficients pour calcul des ancrages courbes,
ψ_s	coefficient de scellement,
ψ_{0,Q_i}	valeur de combinaison d'une action variable,
ψ_{1,Q_i}	valeur fréquente d'une action variable,
ψ_{2,Q_i}	valeur quasi permanente d'une action variable,
Ω	aire limitée par la ligne moyenne à mi-épaisseur des parois d'une section creuse,

2.4. AUTRES INDICES ET EXPOSANTS

Aux indices précédents, on peut adjoindre les symboles suivants :

w ou e	pour les efforts à gauche ou à droite,
t	pour un appui i ou une travée t ,
x	pour le sens parallèle à x ,
y	pour le sens parallèle à y ,
$\max$	pour un maximum,
$\min$	pour un minimum

Le soulignement est utilisé pour distinguer les quantités limites à l'état-limite de service.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

CHAPITRE 1 – NOTIONS DE RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

M. ALBIGES et A. COIN, *Résistance des Matériaux appliquée*, Eyrolles, 1986

CHAPITRE 2 – GÉNÉRALITÉS

Norme NF P 06 001 de juin 1986,

Fascicule 61 - titre II du C.C.T.G. - Conception, calcul et épreuves des ouvrages d'art.

Livret 2.01 du CPC de la SNCF,

Règles NV65,

Règles N84

CHAPITRES 2 À 14

Règles BAEI 91, Eyrolles, 1996

J. PERCHAI et J. ROUX, *Maîtrise du BAEI 91 et des DTU associés*, Eyrolles, 1998

CHAPITRE 11 – FLAMBEMENT

P. FAESSEL, J. R. ROBINSON et A. MORISSET, *Tables d'états-limites ultimes des poutres en béton armé*, Eyrolles, 1971

A. CAPRA et D. DAVIDOVICI, *Guide pratique d'utilisation des Règles BAEI 91*, Eyrolles

CHAPITRE 13 – DALLES RECTANGULAIRES

Abaques de l'Inspecteur général PIGEAUD, document ACHEC

P. LHEUREUX, *Calcul des plaques rectangulaires minces au moyen des abaques de M. l'Inspecteur Général PIGEAUD*, Gauthier-Villars

CHAPITRE 14 – DESCENTE DE CHARGES

Norme NF P 06-001,

Fascicule 61 - titre II du C.C.T.G. - Conception, calcul et épreuves des ouvrages d'art