

CHAPITRE 1

RESISTANCE AU CISAILLEMENT

1. INTRODUCTION

La résolution d'un problème de géotechnique consiste généralement à vérifier d'abord la stabilité vis-à-vis de la rupture en utilisant un coefficient de sécurité satisfaisant, puis à s'assurer que le dimensionnement de l'ouvrage est compatible avec les tassements admissibles.

On peut identifier dans les sols trois principaux types de sollicitations : la traction, la compression et le cisaillement.

La rupture par cisaillement d'un sol, est généralement provoquée avant que ne se produise la rupture par contraintes de compression. Ainsi pour dimensionner par exemple les fondations, il suffit en général de connaître la résistance au cisaillement du sol, car s'il y a rupture ce sera suivant une sollicitation en cisaillement.

2. NOTIONS ÉLÉMENTAIRES SUR LA RUPTURE DES SOLS [8]

Lorsque le chemin expérimental suivi permet de grandes déformations, on obtient une courbe contrainte - déformation (loi de comportement) qui a l'allure de la figure 1.

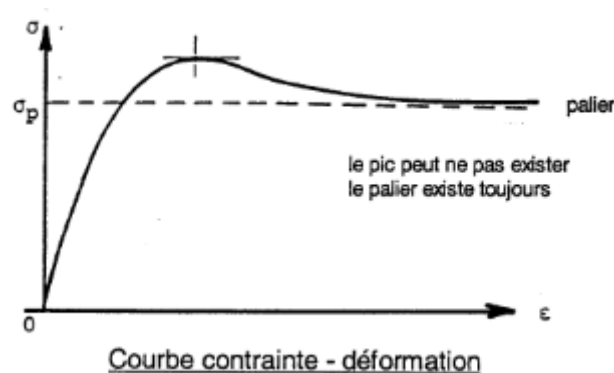


Figure 1. Courbe contrainte- déformation. [8]

On fait les approximations suivantes :

- dans le domaine des petites déformations : on considère que le comportement est linéaire et on applique la théorie de l'élasticité linéaire.
- Dans le domaine des grandes déformations : le comportement est irréversible, on considère que l'on peut utiliser la théorie de la plasticité parfaite.

Considérons un massif de sol chargé et les contraintes qui résultent de ces charges en un point M du massif : En augmentant les charges, on augmente les contraintes. Ces dernières ne peuvent augmenter indéfiniment. En effet, les contraintes de cisaillement atteindront sur certaines faces dites surfaces de glissement ou surface de rupture une limite au-delà de laquelle les particules de sol glisseront les unes sur les autres (figure 2).

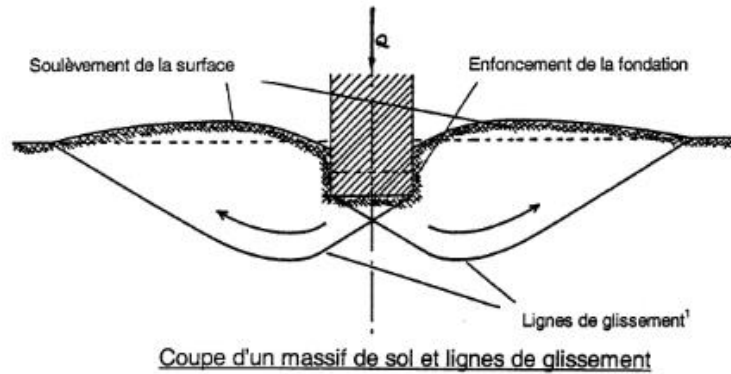


Figure 2. Coupe d'un massif de sol et lignes de glissement. [8]

3. RAPPELS SUR LES CONTRAINTES

Les méthodes de calcul utilisées habituellement en Mécanique des Sols supposent que le sol est un matériau continu c'est à dire un milieu physique continu dont les transformations sont continues. L'hypothèse est d'autant meilleure que les particules sont petites. C'est une bonne approximation dans le cas des sols cohérents saturés. Par contre, il y a désaccord dans le cas de milieux granulaires, parce que le mouvement relatif des grains conduit à des discontinuités de déplacements au moment de la rupture, lorsqu'il y a apparition de surfaces de glissement (surfaces de discontinuité).

La contrainte normale positive correspond ainsi à une compression.

On appelle tenseur des contraintes en un point M l'ensemble des contraintes en ce point, obtenu en donnant à la facette (c'est à dire à sa normale) toutes les orientations possibles.

L'état de contrainte en un point d'un milieu continu est complètement défini par le tenseur à six composantes.

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (1)$$

4. RELATIONS CONTRAINTES DEFORMATIONS

Le tenseur des déformations et le tenseur des contraintes sont liés par des relations traduisant de comportement rhéologique du matériau. Le modèle rhéologique le plus simple est celui de l'élasticité linéaire isotrope.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} 1 & -\nu & -\nu \\ -\nu & 1 & -\nu \\ -\nu & -\nu & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{Bmatrix} \quad (2)$$

Où E est le module de Young ou module d'élasticité, ν est le coefficient de Poisson.

L'approximation de Terzaghi consiste à considérer que le sol est composé de deux milieux, l'ossature granulaire et l'eau interstitielle. Dans un sol saturé, les contraintes totales notées σ se répartissent entre le squelette solide (contraintes effectives notées σ') et l'eau (pression interstitielle isotrope notée u). D'où la relation très importante de Terzaghi s'écrit :

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma' + u \\ \tau &= \tau' \end{aligned} \quad (3)$$

Dans un sol non saturé, la phase liquide n'est plus continue. Donc, si l'on néglige les contraintes de capillarité, u est partout nul ($\sigma = \sigma'$, $\tau = \tau'$).

5. REPRESENTATION PLANE : CERCLE DE MOHR

La représentation de Mohr est une représentation plane du tenseur des contraintes dans des axes liés à la facette :

- axe des abscisses $O\sigma$ confondu avec la normale à la facette,
- axe des ordonnées $O\tau$ se déduisant de $O\sigma$ par une rotation de $+\pi/2$, il est confondu avec le support de la composante tangentielle de la contrainte.

Lorsque la facette tourne autour de M, l'extrémité du vecteur contrainte reste située dans le plan de Mohr, à l'intérieur de deux triangles curvilignes délimités par trois cercles centrés sur $(O\sigma)$ et appelés cercles de Mohr (figure 3).

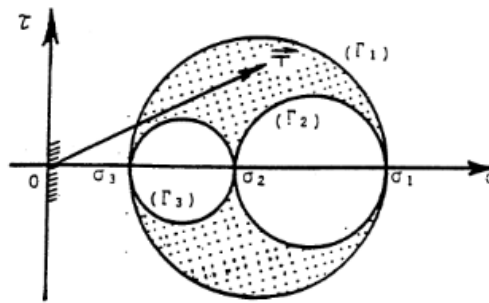


Figure 3. Cercle de Mohr. [8]

6. CRITÈRE DE MOHR-COULOMB

6.1 Notion de courbe intrinsèque

En Mécanique des Sols on utilise la notion de courbe intrinsèque due à Caquot. La théorie est applicable à un matériau homogène et isotrope.

Dans le plan de Mohr (σ , τ) la limite d'écoulement est représentée par une courbe, appelée courbe intrinsèque, qui sépare la zone des états de contrainte possibles de la zone des états de contrainte impossibles à développer dans le matériau (Figure 4).

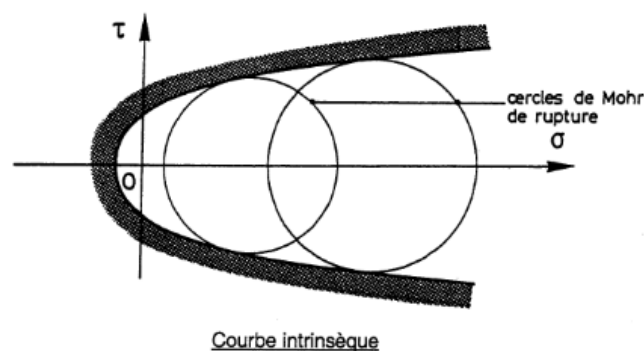


Figure 4. Courbe intrinsèque- cercle de Mohr. [8]

La courbe intrinsèque est l'enveloppe des cercles de Mohr pour lesquels débute l'écoulement du matériau (cercles de Mohr de rupture).

Lorsqu'un cercle est tangent à la courbe intrinsèque, l'écoulement se produit par glissement suivant la direction de la facette qui correspond au point de contact entre le cercle et la courbe.

L'expérience montre que la courbe intrinsèque d'un sol est constituée par deux demi-droites symétriques par rapport à l'axe ($O\sigma'$) appelées droites de Coulomb.

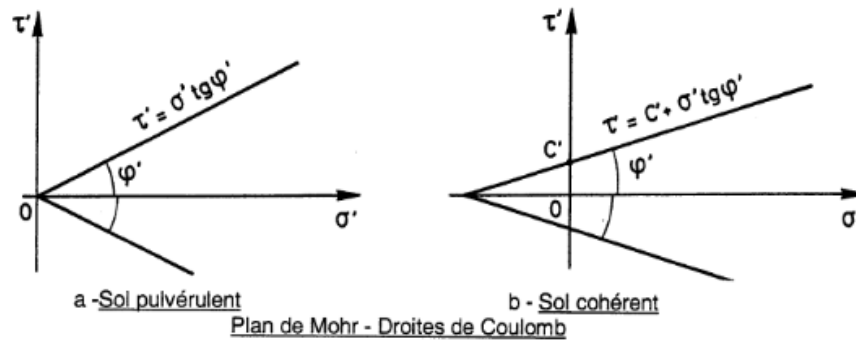


Figure 5. Droites de Coulomb a) sol pulvérulent, b) sol cohérent. [8]

7. INFLUENCE DES CONDITIONS DE CONSOLIDATION ET DE DRAINAGE SUR C ET ϕ

La résistance au cisaillement d'un sol dépend de nombreux facteurs, tels que la nature et l'état du sol, mais aussi l'intensité des efforts exercés et la manière dont ces efforts sont appliqués.

On distingue deux grands types de comportement du sol :

- Le comportement drainé.
- Le comportement non drainé.

Selon l'état de consolidation et de drainage, deux comportements extrêmes de sol sont envisagés, comportement à long terme et comportement à court terme, et on distingue trois essais :

a) Essai de cisaillement consolidé draine (CD)

L'essai consolidé drainé (CD) permet de déterminer les caractéristiques intrinsèques du squelette du sol, il correspond au comportement du sol à long terme.

On commence par consolider l'échantillon de sol sous une contrainte isotrope, c'est-à-dire qu'ayant appliqué cet état de contrainte, on le maintient, l'orifice de drainage ouvert, jusqu'à ce que la pression interstitielle se soit annulée ($u = 0$).

Puis laissant la contrainte normale constante durant tout l'essai, on augmente très lentement la contrainte tangentielle τ . La courbe intrinsèque obtenue (Figure 6) à partir des résultats de plusieurs essais est toujours approximativement une droite dont les caractéristiques sont les suivantes, ϕ' : Appelé angle de frottement effectif est l'angle que fait la droite intrinsèque avec l'axe des contraintes normales. c' : Appelée cohésion drainée, est la valeur de l'ordonnée à l'origine de la droite intrinsèque.

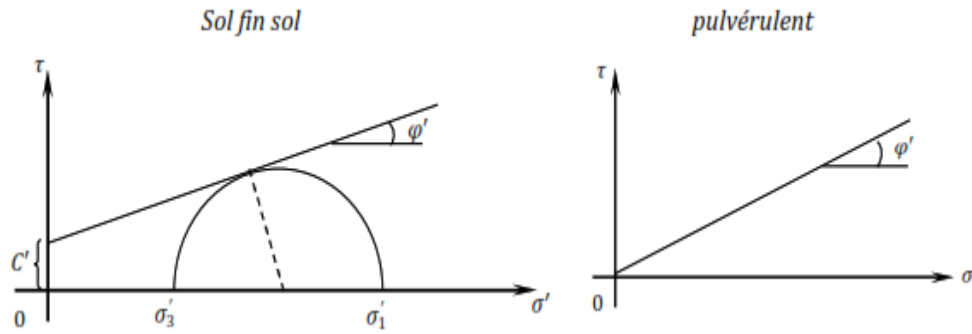


Figure 6. Résultats d'essai de cisaillement consolidé drainé CD. [1]

L'équation de Mohr Coulomb devient :

$$\tau' = \sigma' \tan \varphi' + c' \quad (4)$$

b) Essai de cisaillement non consolidé non drainé (UU)

L'essai non consolidé non drainé (UU) correspond au comportement à court terme du sol en place.

L'échantillon de sol «intact», c'est-à-dire non remanié, est soumis à l'état de contrainte isotrope, l'orifice de drainage est fermé.

Puis, toujours avec les orifices de drainage fermés, on augmente jusqu'à la rupture la contrainte tangentielle. Les différents cercles de Mohr à la rupture, en contraintes totales, sont simplement translatés parallèlement à l'axe des contraintes normales (figure 7).

L'enveloppe de ces cercles est une droite parallèle à l'axe des contraintes dont l'ordonnée à l'origine est appelée cohésion non drainée et notée,

L'équation devient :

$$\tau = c_u \quad (5)$$

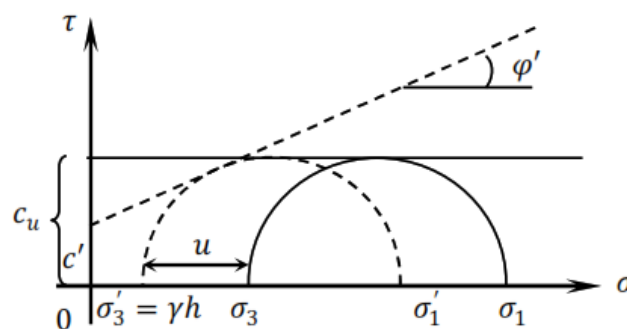


Figure 7. Résultats d'essai de cisaillement non consolidé non drainé UU. [1]

c) Essai de cisaillement consolidé non drainé (CU)

Chaque éprouvette de sol est consolidée avant l'expérience, sous la même contrainte normale que celle qu'elle subira pendant l'essai. La contrainte de cisaillement est suffisamment rapide pour que le

drainage n'ait pas le temps de s'effectuer, donc pour que la pression interstitielle de l'eau ne puisse pas se dissiper en cours d'essai. L'essai consolidé non drainé CU, figure. I.6, a deux buts :

- i. Déterminer la variation de la cohésion non drainée en fonction de la contrainte de préconsolidation.
- ii. Déterminer les caractéristiques de la résistance au cisaillement à long terme (φ' et c') en mesurant la pression interstitielle au moment de la rupture.

Dans le premier cas, l'essai peut être réalisé à l'appareil triaxial ou à la boîte de cisaillement. Dans le deuxième cas, l'essai est obligatoirement réalisé à l'appareil triaxial.

La contrainte de cisaillement à la rupture est donnée par l'équation :

$$\tau = c_{cu} + \sigma \tan \phi_{cu} = c_{cu} + (\sigma' + u) \tan \phi_{cu} \quad (6)$$

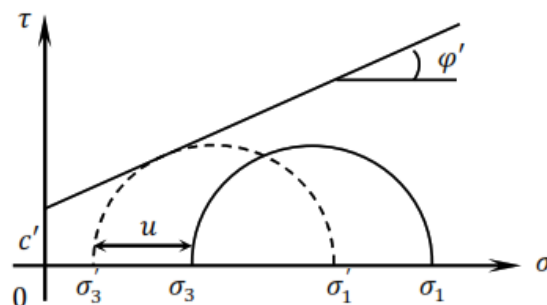


Figure 8. Résultats d'essai de cisaillement consolidé non drainé CU. [1]

8. ESSAIS DE CISAILLEMENT REALISES AU LABORATOIRE

Nous avons deux types d'essais : l'essai de cisaillement direct à la boîte de Casagrand et l'essai triaxial.

8.1 Cisaillement direct à l'appareil de Casagrand

L'essai de cisaillement direct est une méthode assez ancienne pour mesurer la résistance au cisaillement des sols. La forme la plus récente de la boîte de cisaillement directe a été élaborée par Arthur Casagrande en 1932.

L'essai consiste à soumettre le sol à un cisaillement suivant un plan imposé. L'éprouvette de sol est placée à l'intérieur de demi-boîtes qui peuvent se déplacer horizontalement l'une par rapport à l'autre.

Un piston permet d'exercer sur le sol une force verticale N constante pendant toute la durée de l'essai (Fig. 9).

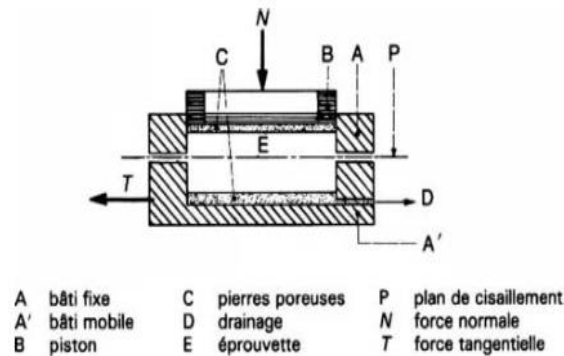


Figure 9. Essai de cisaillement direct à la boîte de Casagrande.[1]

On exerce sur le plan de séparation des deux demi-boîtes une contrainte dont les composantes normale et tangentielle ont pour valeur moyenne :

$$\sigma = \frac{N}{S_c} \text{ et } \tau = \frac{T}{S_c} \quad (7)$$

S_c : section corrigée de l'éprouvette

L'essai consiste à faire croître T jusqu'à la rupture, N étant maintenu constant au cours de l'essai. L'essai est répété plusieurs fois sur la même éprouvette de sol avec des contraintes normales différentes. On trace ensuite les courbes de variation des contraintes tangentielles en fonction des déformations horizontales. Ensuite, on détermine sur la courbe le point qui correspond à la rupture. Ceci permet d'obtenir pour chaque couple de valeurs (τ, σ_n) un point sur le plan de Mohr. Pour déterminer une courbe intrinsèque, il est nécessaire de réaliser l'essai avec plusieurs valeurs de N ,

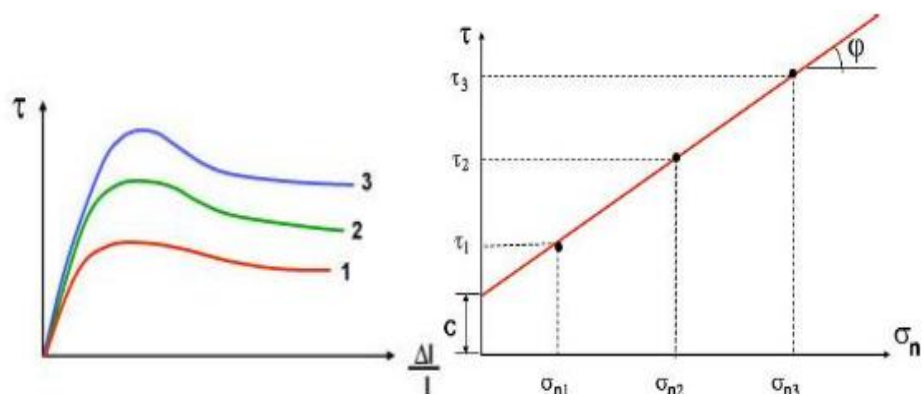


Figure 10. Résultats d'essai de cisaillement direct à la boîte de Casagrande, a) $\pi = \Delta l/l$, b) cisaillement direct dans le plan de Mohr.[1]

8.2 ESSAI TRIAXIAL

Dans cet essai, l'éprouvette de sol est placée dans une cellule dite triaxiale. L'éprouvette cylindrique d'un élanement h/d au moins égal à 2, où h désignant la hauteur et d le diamètre, figure I.9.

Des plaques drainantes reliées à l'extérieur à des dispositifs permettant soit d'assurer le drainage et de connaître les variations de volume, soit de mesurer la pression interstitielle u dans l'éprouvette sont placées à la base et au sommet de l'éprouvette de sol. Les contraintes sont transmises à l'éprouvette de deux manières, d'une part une pression de confinement $\sigma_3 = \sigma_r$ existant dans la cellule triaxiale générée par un dispositif de mise en pression et d'autre part, on applique un effort axial F qui crée un déviateur de contrainte axial ($\sigma_1 - \sigma_3$) ; la contrainte est généralement mesurée par un capteur situé au sommet de l'éprouvette. De plus, on mesure la variation de hauteur de l'éprouvette h qui donne la déformation axiale ($\Delta h/h = \epsilon_l$).

Enfin, on peut imposer au sein de l'éprouvette une contrepression (C_p) qui a pour but de réaliser une bonne saturation de celle-ci. La mesure de u , l'application éventuelle de σ_3 , la connaissance de ($\sigma_1 - \sigma_3$) et la mesure de la pression interstitielle u permettent de déterminer à chaque instant l'état de contraintes totales et l'état de contraintes effectives existant dans l'éprouvette. Le principe de l'essai consiste en général à appliquer tout d'abord un état de contrainte isotrope avec ($\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_r$), pondéré éventuellement de la contrepression C_p . A ce stade, deux possibilités sont envisageables :

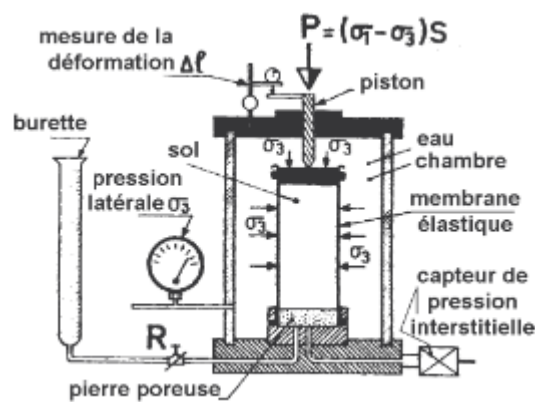


Figure 11. Appareil Triaxial

- iii. Soit on permet le drainage de l'éprouvette et sa consolidation, ce qui entraîne une modification dans l'état de l'éprouvette se traduisant par une variation de l'indice des vides,
- iv. Soit on interdit ce drainage et on mesure la pression interstitielle se développant dans l'éprouvette, dans ce cas, l'état de l'éprouvette ne se modifie pas si l'on suppose qu'elle est initialement saturée.

Dans un second temps on va appliquer l'effort axial pour atteindre la rupture, les deux possibilités de conditions de drainage existent toujours.

La figure 12 montre les courbes expérimentales de principe. On définit en fonction de ces courbes, l'état de contraintes à la rupture, ce qui donne un cercle dans le plan de Mohr. La réalisation de plusieurs essais permet de tracer la courbe enveloppe et de déterminer c et ϕ . On peut tracer ces courbes enveloppes soit en contraintes totales, soit en contraintes effectives.

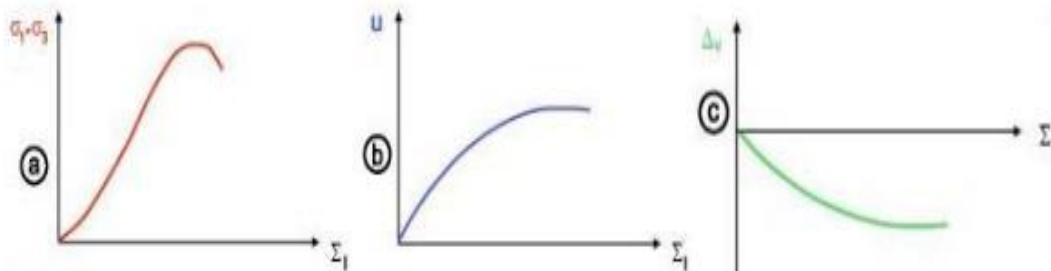


Figure 12. Courbes d'un essai triaxial a) $(\sigma_1 - \sigma_3) = f(\epsilon)$; b) $u = f(\epsilon)$ et la variation de volume

$$\Delta V = f(\epsilon). [1]$$

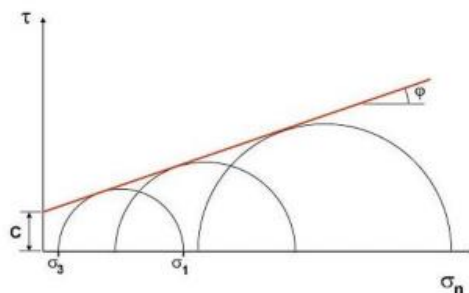


Figure 13. Cercles de Mohr pour un essai triaxial. [1]

9. ETATS D'EQUILIBRE LIMITE DE RANKINE BOUSSINESQ ET PRANDTL

C'est les méthodes dites « classiques » : faisant appel à des calculs analytiques de la poussée et de la butée des terres. Plusieurs théories permettent de calculer les coefficients de poussée et de butée d'un sol pulvérulent ($C = 0$). On mentionne les principales par ordre chronologique.

a) Méthode de coulomb : Charles Augustin Coulomb (1736 - 1806). [4]

La méthode de Coulomb est universellement employée, en raison de sa simplicité théorique et pratique.

La théorie de Coulomb repose sur deux hypothèses :

- Le sol se rompt suivant une surface de rupture plane figure 14.
- La force agissant sur le mur a une direction connue.

En d'autre terme cela signifie que l'angle de frottement δ entre l'écran et le mur est connu ; Ces deux hypothèses faites, la force agissante sur le mur est calculée par de simples considérations d'équilibre statiques à partir d'une règle d'extremum.

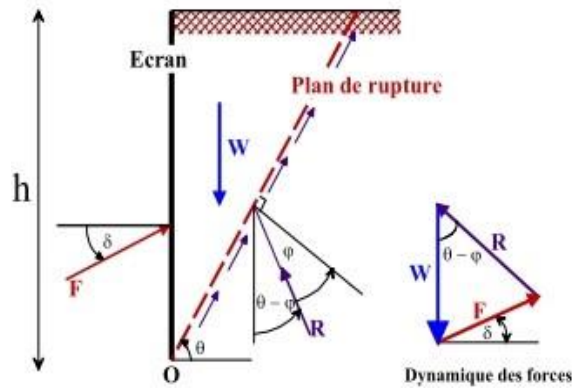


Figure 14. Equilibre du coin de Coulomb. [4]

On suppose que la **surface de rupture** potentielle est un **plan (coin de Coulomb)** passant par le pied de l'écran et faisant un angle θ avec l'horizontale.

On fait l'hypothèse que la contrainte de cisaillement $\tau = \sigma' \tan \phi'$ est complètement mobilisée le long de ce plan. Le coin de Coulomb se comporte de façon rigide-plastique, ce qui n'est pas le cas généralement surtout si l'écran est de grande hauteur.

La réaction totale du sol R sur lequel glisse le coin de Coulomb est donc inclinée de l'angle ϕ sur la normale au plan de rupture. En application de la méthode de Coulomb, on calcule la poussée en supposant que $\delta = 0^\circ$.

Coulomb a défini les coefficients de pression de terre actifs et passifs respectivement par les expressions suivantes :

$$K_a = \left[\frac{\sin(\alpha - \phi)/\sin \alpha}{\sqrt{[\sin(\alpha + \delta)]} - \sqrt{\frac{\sin(\phi + \delta)\sin(\phi - \beta)}{\sin(\alpha - \beta)}}} \right]^2 \quad (8)$$

$$K_p = \left[\frac{\sin(\alpha + \phi)/\sin \alpha}{\sqrt{[\sin(\alpha - \delta)]} - \sqrt{\frac{\sin(\phi + \delta)\sin(\phi + \beta)}{\sin(\alpha - \beta)}}} \right]^2 \quad (9)$$

Où :

φ : Angle de frottement interne du sol.

δ : Angle de frottement sol – écran.

α : Inclinaison du mur avec l'horizontale.

β : inclinaison de la surface du sol avec l'horizontale.

Très vite ce mode de calcul est mis en défaut tant sur le plan expérimental que sur le plan théorique. Dans la validité des suppositions de sa théorie, Coulomb n'a prêté aucune attention au mode de mouvement du mur et ça suppose que la distribution de pression latéral de la terre est simplement hydrostatique, il avait restreint l'application des règles de « Maximis et Minimis » dans le cas de la poussée à des familles de surfaces de ruptures planes.

b) Méthode de Rankine

En plus des hypothèses suivantes :

- Sol semi-infini, homogène, isotrope,
- Condition de déformation plane,
- Courbe intrinsèque de Mohr-Coulomb
- Massif à surface libre plane,

Rankine (1857) avait rajouté l'hypothèse que la **présence d'un écran ne modifie pas la répartition des contraintes dans le massif.**

• Cas général :

Avec cette hypothèse, on peut déterminer la répartition des contraintes de poussée (ou de butée) le long d'un plan OD, dans le cas d'un sol **pesant pulvérulent** (γ, φ) **non surchargé**.

• Cas particuliers :

La méthode de Rankine peut prendre en compte des surcharges uniformes réparties sur toute la surface du sol. Cependant, il est impossible de réaliser un calcul littéral dans trois cas simples représentés sur la figure 15.

Pour ces situations, la solution communément adoptée consiste à calculer les contraintes appliquées au mur en l'absence de surcharge et à y superposer les efforts dus à la seule surcharge et calculés par la formule élastique de Boussinesq.

Cette approche n'est pas pleinement satisfaisante, le principe de superposition ne pouvant être appliqué en toute rigueur. Une alternative pouvant être trouvée dans la résolution numérique du problème, avec un algorithme d'éléments finis par exemple.

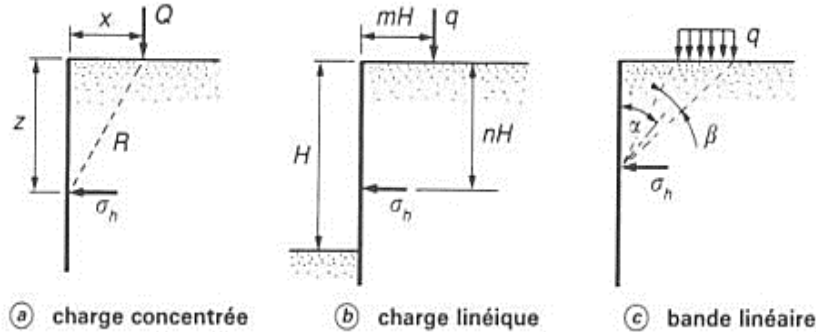


Figure 15. Calcul élastique des contraintes horizontales apportées sur un écran par des surcharges (d'après Schlosser)

Les surcharges correspondant à ces 3 cas sont données par les formules suivantes :

- a : $\sigma_h = \frac{3}{2} \frac{Q}{\pi} x^2 \frac{z}{R^5}$
- b : $\sigma_h = 1,27 \frac{q}{H} \frac{m^2 n}{(m^2 + n^2)^2}$ si $m > 0,4$ et $\sigma_h = 0,203 \frac{q}{H} \frac{m}{(0,16 + n^2)^2}$ si $m < 0,4$
- c : $\sigma_h = \frac{2}{\pi} \frac{q}{\pi} [(\beta + \sin \beta) \sin^2 \alpha + (\beta - \sin \beta) \cos^2 \alpha]$

c) Méthode de Boussinesq [4]

Boussinesq (1882) a amélioré la théorie de Rankine en prenant l'interaction réelle entre le sol et l'écran, c'est-à-dire en choisissant la valeur de l'angle de frottement δ sol-écran. Dans cet équilibre, Boussinesq considère une première zone où on a l'équilibre de Rankine se raccordant à une seconde zone où il tient compte des conditions aux limites sur l'écran figure 16.

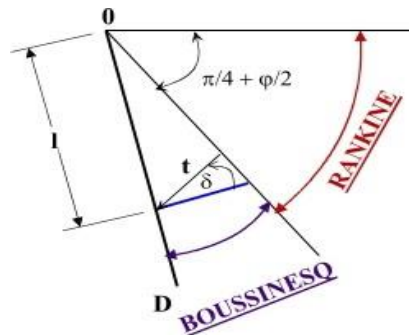


Figure 16. Equilibres de Boussinesq et de Rankine.

Boussinesq garde les résultats de Rankine concernant la répartition des contraintes sur l'écran :

- L'obliquité des contraintes est constante le long de l'écran OD, elle est choisie et fixée à δ
- La répartition des contraintes sur l'écran est triangulaire :

$$t_a = K_a \times \gamma \times \ell \quad (11)$$

Si **Boussinesq** avait bien posé le problème, il n'a été résolu qu'en 1948 par Caquot et Kerisel qui en ont donné la démonstration suivante :

On travaillera en coordonnées polaires, pour lesquelles les équations d'équilibre

$\text{divt} + F = 0$ s'écrivent :

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau}{r \partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = \gamma \cos \theta \quad (12)$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_\theta}{r \partial \theta} + 2 \frac{\tau}{r} = -\gamma \sin \theta \quad (13)$$

σ_r : Contrainte normale radiale

σ_θ : Contrainte normale orthoradiale

τ : Contrainte de cisaillement.

$$\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + 3\tau = -\gamma r \sin \theta \quad (14)$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial \theta} + 2(\sigma_r - \sigma_\theta) = -\gamma r \cos \theta \quad (15)$$

avec $\sigma_\theta = k \sigma_r$

Le système des deux équations différentielles a été intégré par Caquot et Kérisel, les calculs étant améliorés par ABSI pour donner des tables complètes de poussée et butée fournissant les coefficients K_a et K_p . Le problème est déterminé par les conditions aux frontières :

- surface libre : contraintes nulles
- sur l'écran : obliquité imposée δ de la contrainte.

Entre la surface libre et la première ligne de glissement on a un équilibre de Rankine et entre la première ligne de glissement et l'écran un équilibre de Boussinesq.

Le tracé des lignes de glissement montre que les lignes de glissement diffèrent peu de lignes droites dans le cas d'équilibre de poussée, par contre elles s'en éloignent fortement dans le cas d'équilibre de butée.

d) Théorie de Prandtl (1920). [3]

C'est Prandtl qui a pu, pour la première fois, résoudre le problème bidimensionnel d'un sol pulvérulent non pesant, d'angle de frottement interne φ et chargé à sa surface par l'action de deux surcharges réparties telles que: $p = q_u$ et $q = \gamma D$.

D'après Prandtl, le mécanisme de rupture sous la fondation, supposée à base lisse, présente un système de lignes de glissement répartis sur trois zones distinctes :

- La zone I en équilibre de poussée de Rankine.
- La zone II en équilibre de Prandtl, cette zone est appelée saut de Prandtl
- La zone III en équilibre de butée de Rankine.

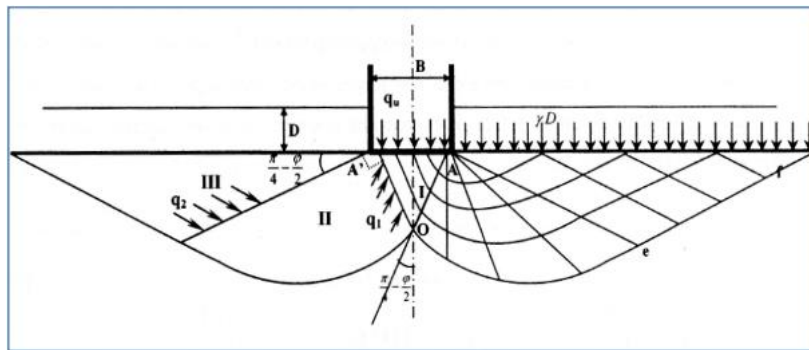


Figure 17. Mécanisme de rupture d'une fondation de base lisse (Prandtl (1920))

Selon la théorie de PRANDTL, la contrainte qui provoque la rupture due à la surcharge est :

$$q_u' = \gamma \cdot D \cdot N_q, \quad (16)$$

avec N_q facteur de charge :

$$N_q = \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) e^{\pi \tan \varphi} \quad (17)$$