

TD 2 SYSTEMES A UN DEGRE DE LIBERTE
Application

Figure 1 présente la modélisation d'un bâtiment réel à deux étages dont seul le comportement dans le plan est analysé. Le contreventement horizontal est assuré par des portiques est soumis aux effets d'un séisme dont la composante horizontale est définie par un spectre d'accélération calé à 0.1 g (**figure . 2**) . Le portique est étudié sous l'effet d'un séisme agissant dans son plan (direction horizontale)

Les données de la structure sont les suivantes : $m=60\text{ t}$, $E=32164\text{ Mpa}$, h_1 et $h_2=3\text{ m}$

Questions :

1. Identifier les matrices de raideur K et d'inertie M
2. En utilisant les matrices K et M trouvées en 1, écris l'équation matricielle du mouvement
3. Déduire les expressions et valeurs numériques des 02 pulsations , fréquences et périodes propres du système (séisme horizontal).
4. Calculer les modes propres.
5. Calculer la reponse modale (déplacements horizontaux)

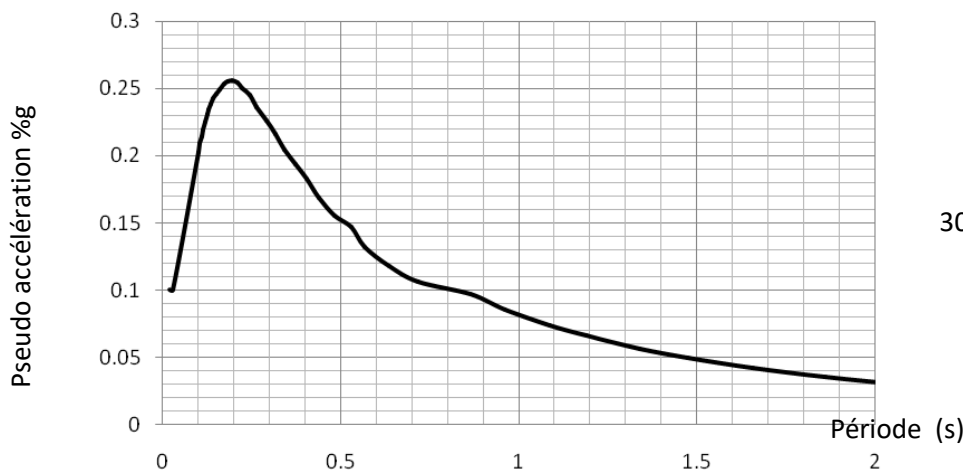


Figure 2

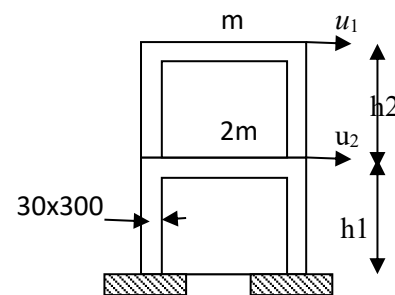


figure 1

Solution
Identification des matrices de raideur K et d'inertie M

$$m \ddot{u}_1 + k_1 u_1 - k_1 u_2 = 0$$

$$2m \ddot{u}_2 + (k_1 + k_2) u_2 - k_1 u_1 = 0$$

la matrice des masses est $M = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix}$, la matrice des raideurs est $K = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix}$

Equation matricielle du mouvement

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = 0$$

Expressions et valeurs numériques des 04 pulsations et fréquences et périodes propres

Les pulsations des deux modes propre sont déterminées par résoudre l'équation

$$(k - M\omega^2) \cdot D = 0$$

La solution non trivial correspond au cas où la matrice $(k - M\omega^2)$ est singulière (son déterminant est nul et elle n'a pas d'inverse).

$\det (k - M\omega^2) = 0$, permet de déterminer les pulsations ω^2

$$\begin{vmatrix} k - m\omega^2 & -k \\ -k & 2k - 2m\omega^2 \end{vmatrix} = (k - m\omega^2)(2k - 2m\omega^2) - k^2 = 0$$

$$2m^2\omega^4 - 4km\omega^2 + k^2 = 0$$

$$\omega_1^2 = 0.29 \frac{k}{m}, \quad \omega_2^2 = 1.71 \frac{k}{m}$$

Séisme horizontal $k = 24EI/l^3 = 24 \times 32164000 \times 6.75 \cdot 10^{-7} / (3^3) = 19298.4 \text{ kN/m}$

$$\omega_1^2 = 0.29 \frac{19298.4}{60} = 94.21 \text{ rad}^2/\text{s}^2 \Rightarrow \omega_1 = 9.71 \text{ rad/s} \Rightarrow T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 0.64 \text{ s}, f_1 = 1.54 \text{ Hz}$$

$$\omega_2^2 = 1.71 \frac{19298.4}{60} = 549.07 \text{ rad}^2/\text{s}^2 \Rightarrow \omega_2 = 23.43 \text{ rad/s} \Rightarrow T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = 0.27 \text{ s}, f_2 = 3.73 \text{ Hz}$$

Calcule les modes propres associés.

1er mode

$$\begin{bmatrix} k - m\omega_1^2 & -k \\ -k & 2k - 2m\omega_1^2 \end{bmatrix} X \begin{Bmatrix} 1 \\ x \end{Bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0.71 & -1 \\ -1 & 1.41 \end{bmatrix} X \begin{Bmatrix} 1 \\ x \end{Bmatrix} = 0 \Rightarrow x = 0.71, \quad D_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.71 \end{Bmatrix}$$

$$a_1 = \frac{[1 \ 0.71] \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}}{[1 \ 0.71] \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.71 \end{Bmatrix}} = 1.20$$

$$\phi_1 = a_1 D_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.71 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.20 \\ 0.86 \end{Bmatrix}$$

2^e mode

$$\begin{bmatrix} k - m\omega_2^2 & -k \\ -k & 2k - 2m\omega_2^2 \end{bmatrix} X \begin{Bmatrix} 1 \\ x \end{Bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} -0.71 & -1 \\ -1 & -1.41 \end{bmatrix} X \begin{Bmatrix} 1 \\ x \end{Bmatrix} = 0 \Rightarrow x = -0.71, \quad D_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.71 \end{Bmatrix}$$

$$a_2 = \frac{[1 \quad -0.71] \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}{[1 \quad -0.71] \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -0.71 \end{bmatrix}} = -0.21$$

$$\phi_2 = a_2 D_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.71 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.21 \\ 0.15 \end{Bmatrix}$$

Calcule de la réponse modale (déplacements horizontaux et verticaux)

A partir du spectre de réponse (fig 2) , Pour le séisme horizontal:

1er mode : $T_1 = 0.64 \text{ s} \Rightarrow \gamma_1 = 0.115 \text{ g}$

$$0.115 \text{ g} \begin{Bmatrix} 1.20 \\ 0.86 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.35 \\ 0.97 \end{Bmatrix}$$

2^e mode : $T_2 = 0.27 \text{ s} \Rightarrow \gamma_2 = 0.24 \text{ g}$

$$0.24 \text{ g} \begin{Bmatrix} -0.21 \\ 0.15 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.49 \\ 0.35 \end{Bmatrix}$$

En applique l'équation suivante on obtient les déplacements exprimées en mm

$$\gamma = \omega^2 u \Rightarrow u = \frac{\gamma}{\omega^2}$$

Resultats des déplacements horizontaux et verticaux

	<i>Déplacements horizontaux</i>	
<i>Mode</i>	1	2
u1 (mm)	14.37	-0.90
u2 (mm)	10.30	0.64