

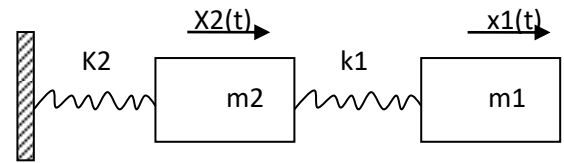
TD 2 SYSTEMES A UN DEGRE DE LIBERTE

Exercice 1

On considère un système masses-ressorts (m, k) tel que représenté figure 1. Le système écarté de sa position d'équilibre stable et relâché. On note x_1 et x_2 les déplacements des masses relatives à la position statique selon la direction x. soit $m_1=9\text{ t}$ $m_2=1\text{ t}$ $k_1=24\text{ KN/m}$ $k_2=3\text{ KN/m}$:

Questions :

- Ecrire les équations du mouvement libre des deux masses.
- Ecrire l'équation matricielle du mouvement
- Calculer les pulsations de chacun des deux modes propres.
- Calculer les fréquences, périodes et vecteurs propres du système .

**Figure 1****SOLUTION****Equations du mouvement libre des deux masses**

En sommant les forces qui s'exercent sur chaque masse, on obtient les équations suivantes:

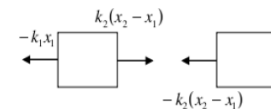
$$m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -k_2 (x_2 - x_1)$$

Donc, les deux équations différentielles du second ordre couplées sont:

$$m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = 0$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + k_2 x_2 - k_2 x_1 = 0$$

**Equation matricielle du mouvement**

la matrice des masses $M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$, la matrice des raideurs $K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$

donc, le système d'équations qui décrit le système à deux degrés de liberté peut s'écrire sous forme matricielle :

$$M\ddot{x} + Kx = 0$$

Calcule les pulsations de chacun des deux modes propres. $(k-M\omega^2) \cdot D=0$

La solution non trivial correspond au cas où la matrice $(k-M\omega^2)$ est singulière (son déterminant est nul et elle n'a pas d'inverse).

$\det(k-M\omega^2) = 0$, permet de déterminer les pulsations ω^2

$$\det = \begin{bmatrix} -\omega^2 m_1 + k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & -\omega^2 m_2 + k_2 \end{bmatrix} = m_1 m_2 \omega^4 - (m_1 k_2 + m_2 k_1 + m_2 k_2) \omega^2 + k_1 k_2 = 0$$

$$m_1=9\text{ t} \quad m_2=1\text{ t} \quad k_1=24\text{ t/m} \quad k_2=3\text{ t/m}$$

$$\omega^4 - 6\omega^2 + 8 = 0$$

On résoudra l'équation précédente on obtient les solutions suivantes :

$$\omega_1^2 = 2 \text{ rad/s}^2 \Rightarrow \omega_1 = 1.41 \text{ rad/s} \Rightarrow T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 4.45 \text{ s}, f_1 = 0.22 \text{ Hz}$$

$$\omega_2^2 = 4 \text{ rad/s}^2 \Rightarrow \omega_2 = 2 \text{ rad/s} \Rightarrow T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = 3.14 \text{ s}, f_2 = 0.31 \text{ Hz}$$

Premier vecteur x_1

$$\begin{bmatrix} +k_1 + k_2 - \omega_1^2 m_1 & -k_2 \\ -k_2 & +k_2 - \omega_1^2 m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 27 - 9 * 2 & -3 \\ -3 & 3 - 1 * 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow X1 = \begin{Bmatrix} 1/3 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

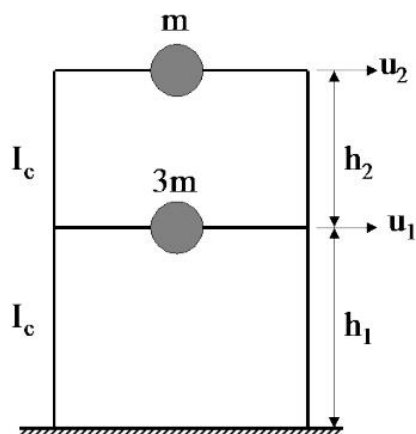
Deuxieme vecteur x1

$$\begin{bmatrix} +k_1 + k_2 - \omega_2^2 m_1 & -k_2 \\ -k_2 & +k_2 - \omega_2^2 m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

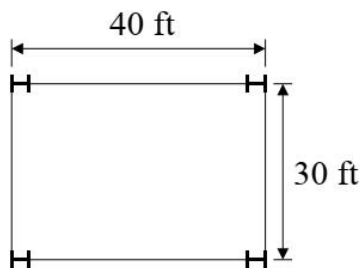
$$\begin{bmatrix} 27 - 9 * 4 & -3 \\ -3 & 3 - 1 * 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow X2 = \begin{Bmatrix} -1/3 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

2.Application

Solved MDOF and Modal Analysis Example



Elevation View



Plan View

Use:

$$E_{\text{steel}} = 29,000 \text{ ksi}$$

$$I_c = 164.8 \text{ in}^4$$

$$h_1 = 15 \text{ ft}$$

$$h_2 = 12 \text{ ft}$$

$$m = \frac{W}{g} = \left(30 \frac{\text{lb}}{\text{ft}^2} \right) \left(\frac{40 \text{ ft} \times 30 \text{ ft}}{386.4 \text{ in/s}^2} \right) = 93.17 \frac{\text{lb} \cdot \text{s}^2}{\text{in}} = 0.09317 \frac{\text{kip} \cdot \text{s}^2}{\text{in}}$$

$$k_{\text{column}} = \left(\frac{12EI_c}{h_i^3} \right) \Rightarrow k_{\text{floor}_i} = 4 \left(12 \frac{EI_c}{h_i^3} \right) = \frac{48EI_c}{h_i^3}$$

$$k_1 = \frac{48EI_c}{h_1^3} = \frac{48(29000 \text{ ksi})(164.8 \text{ in}^4)}{(180 \text{ in})^3} = 39.335 \text{ kip/in}$$

$$k_2 = \frac{48EI_c}{h_2^3} = \frac{48(29000 \text{ ksi})(164.8 \text{ in}^4)}{(144 \text{ in})^3} = 76.826 \text{ kip/in}$$

$$m = 0.09317 \frac{\text{kip} \cdot \text{s}^2}{\text{in}}$$

Write the equation of motion in matrix form:

$$\begin{bmatrix} 3m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

substitute in $\ddot{\mathbf{u}} = -\omega^2 \mathbf{u}$ and rearrange to get

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 - \omega^2 3m & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - \omega^2 m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Take the determinant and set equal to zero

$$\begin{vmatrix} k_1 + k_2 - \omega^2 3m & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - \omega^2 m \end{vmatrix} = 0$$

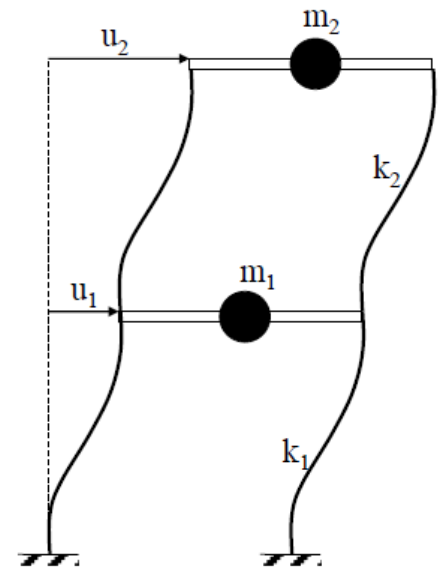
$$3m^2 \omega^4 - mk_1 \omega^2 - 4mk_2 \omega^2 + k_1 k_2 = 0$$

substituting k_1 , k_2 , and m :

$$0.0260419467 \omega^4 - 32.2963556 \omega^2 + 3021.95071 = 0$$

Solving this quadratic equation for ω^2 yields

$$\omega_1^2 = \frac{+32.2963556 - \sqrt{1043.05459 - 314.789917}}{0.0520838934}$$



$$\omega_2^2 = \frac{+32.2963556 + \sqrt{1043.05459 - 314.789917}}{0.0520838934}$$

or,

$$\omega_1^2 = 101.95 \frac{\text{rad}^2}{\text{s}^2}$$

$$\omega_2^2 = 1138 \frac{\text{rad}^2}{\text{s}^2}$$

$$\omega_1 = 10.097 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\omega_2 = 33.734 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = 1.607 \text{ Hz} \quad T_1 = \frac{1}{f_1} = 0.6223 \text{ Sec}$$

$$f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = 5.369 \text{ Hz} \quad T_2 = \frac{1}{f_2} = 0.1863 \text{ Sec}$$

Determining 1st Mode Shape:

Plug k_1 , k_2 , m , and $\omega_1 = 10.097 \text{ rad/sec}$ into
$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 - \omega_1^2 3m & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - \omega_1^2 m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 39.335 + 76.826 - (10.097^2)(3 \cdot 0.09317) & -76.826 \\ -76.826 & 76.826 - (10.097^2)(0.09317) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 87.665 & -76.826 \\ -76.826 & 67.327 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$87.665\phi_{11} - 76.826\phi_{21} = 0$$

let $\phi_{21} = 1$, then

$$87.665\phi_{11} - 76.826(1) = 0$$

$$\phi_{11} = \frac{76.826}{87.665} = 0.876$$

$$\Phi_1 = \begin{Bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.876 \\ 1.000 \end{Bmatrix}$$

Determining 2nd Mode Shape:

Plug k_1 , k_2 , m , and $\omega_2 = 33.734$ rad/sec into $\begin{bmatrix} k_1 + k_2 - \omega_2^2 3m & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - \omega_2^2 m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 39.335 + 76.826 - (33.734^2)(3 \cdot 0.09317) & -76.826 \\ -76.826 & 76.826 - (33.734^2)(0.09317) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -201.917 & -76.826 \\ -76.826 & -29.200 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$-201.917\phi_{12} - 76.826\phi_{22} = 0$$

let $\phi_{22} = 1$, then

$$-201.917\phi_{12} - 76.826(1) = 0$$

$$\phi_{12} = \frac{76.826}{-201.917} = -0.380$$

$$\Phi_2 = \begin{Bmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.380 \\ 1.000 \end{Bmatrix}$$