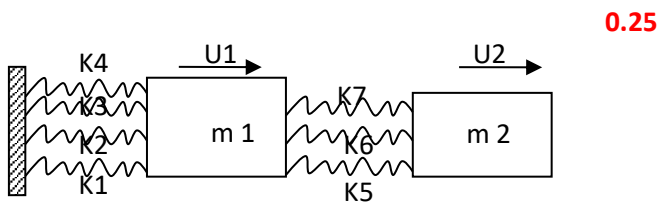
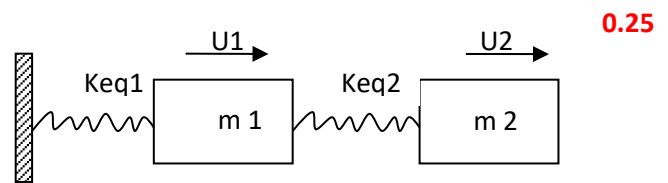


Exercice 1 13 p
1. Dessin du système


0.25



0.25

$$keq1 = k + 2k + 2k + k = 6k \quad ; \quad keq2 = k + 2k + k = 4k$$

$$m1 = 3m \quad m2 = 2m :$$

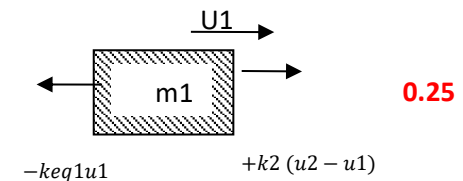
Equation matricielle du mouvement

$$m1 \ddot{u}_1 + (keq1 + keq2)u_1 - keq2u_2 = 0 \quad (1)$$

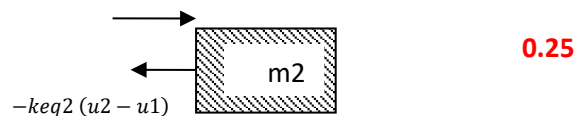
$$m2 \ddot{u}_2 + keq2u_2 - keq2u_1 = 0 \quad (2)$$

0.25

0.25



0.25



0.25

2. Identifier les matrices de raideur K et de Masse

$$\text{masse matrice } M = \begin{bmatrix} m1 & 0 \\ 0 & m2 \end{bmatrix}, \quad \text{stiffness matrice } K = \begin{bmatrix} keq1 + keq2 & -keq2 \\ -keq2 & keq2 \end{bmatrix}$$

Matrix equation of motion

$$\begin{bmatrix} 3m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 10k & -4k \\ -4k & 4k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = 0 \quad 0.25$$

3. Les Pulsations et fréquences et périodes propres.

$$\begin{vmatrix} (keq1 + keq2) - m1\omega^2 & -keq2 \\ -keq2 & keq2 - m2\omega^2 \end{vmatrix} = (keq1 + keq2 - m1\omega^2)(keq2 - m2\omega^2) - keq2 \cdot keq2 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 10 - m1\omega^2 & -4k \\ -4k & 4k - m2\omega^2 \end{vmatrix} = (10k - m1\omega^2)(4k - m2\omega^2) - 16k = 0$$

0.25

$$m1m2\omega^4 - (m1keq2 + m2keq1 + m2keq2)\omega^2 + keq1keq2 = 0$$

0.25

$$keq1 = k + 2k + 2k + k = 6k \quad ; \quad keq2 = k + 2k + k = 4k$$

$$m1 = 3m \quad m2 = 2m :$$

$$6m^2\omega^4 - (3m \cdot 4k + 2m \cdot 6k + 2m \cdot 4k)\omega^2 + 6k \cdot 4k = 0$$

0.25

$$6m^2\lambda^2 - 32km\lambda + 24k^2 = 0$$

0.25

$$\Delta = b^2 - 4ac = (32km)^2 - 4 \cdot 6m^2 \cdot 24k^2 = 448k^2m^2$$

0.25

$$\lambda_1 = \omega_1^2 = \frac{32km - \sqrt{448k^2m^2}}{2 \cdot 6m^2} = 0.903 \frac{k}{m} \frac{\text{rad}^2}{\text{s}^2}$$

0.25

Corrigé d'Examen de Dynamique des Structures 2

12/05/2026

$$\lambda_2 = \omega_2^2 = \frac{32km + \sqrt{448k^2m^2}}{2 * 6m^2} = 4.4305 \frac{k}{m} = \frac{\text{rad}^2}{s^2}$$

0.25

$$\omega_1^2 = 0.903 \frac{k}{m}, \quad \omega_2^2 = 4.4305 \frac{k}{m}$$

$$I = \frac{0.4 * 0.4^3}{12} = 0,002133$$

0.25

$$k = 12EI/l^3 = 12 * 250000000 * 0,002133 / (3.25^3) = 1,86E+07 \text{ N/m} = 18643,6049 \text{ kN/m}$$

0.5

$$\omega_1^2 = 0.903 \frac{18643,605}{30} = 561,173 \text{ rad}^2/s^2 \Rightarrow \omega_1 = 23,689 \text{ rad/s} \Rightarrow T_{01} = \frac{2\pi}{\omega_1} = 0,265 \text{ s}, f_1 = 3,77 \text{ Hz}$$

$$\omega_2^2 = 4.4305 \frac{18643,605}{30} = 2753,350 \text{ rad}^2/s^2 \Rightarrow \omega_2 = 52,472 \text{ rad/s} \Rightarrow T_{02} = \frac{2\pi}{\omega_2} = 0,1197 \text{ s}, f_2 = 8,355 \text{ Hz}$$

0.5

4. les modes propres associés.

1^{er} mode

$$\begin{bmatrix} 10k - 3m * 0.903k/m & -4k \\ -4k & 4k - 2m * 0.903k/m \end{bmatrix} X \begin{Bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{12=1} \end{Bmatrix} = 0$$

0.5

$$\begin{bmatrix} 7.291 & -4 \\ -4 & 8.194 \end{bmatrix} X \begin{Bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{12=1} \end{Bmatrix} = 0$$

$$7.291 * \phi_{11} - 4\phi_{12} = 0 \Rightarrow \phi_{11} = \frac{4\phi_{12}}{7.291} = 0.548$$

0.25

$$\phi_1 = \begin{Bmatrix} +0.548 \\ +1 \end{Bmatrix}$$

0.25

2^{ème} mode

$$\begin{bmatrix} 10k - 3m * 4.4305 * k/m & -4k \\ -4k & 4k - 2m * 4.4305 * k/m \end{bmatrix} X \begin{Bmatrix} \phi_{21} \\ \phi_{22=1} \end{Bmatrix} = 0$$

0.25

$$\begin{bmatrix} -3.2915 & -4 \\ -4 & -4.861 \end{bmatrix} X \begin{Bmatrix} \phi_{21} \\ \phi_{22=1} \end{Bmatrix} = 0$$

$$-3.2915 * \phi_{21} - 4\phi_{22} = 0 \Rightarrow \phi_{21} = \frac{4\phi_{22}}{-3.2915} = -1.215$$

$$\phi_1 = \begin{Bmatrix} -1.215 \\ +1 \end{Bmatrix}$$

0.25

5. les coefficients de participation

$$r_1 = \frac{[0.548 \ 1] \begin{bmatrix} 3m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}{[0.548 \ 1] \begin{bmatrix} 3m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.548 \\ 1 \end{bmatrix}} = 1.256, \quad r_2 = \frac{[-1.215 \ 1] \begin{bmatrix} 3m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}{[-1.215 \ 1] \begin{bmatrix} 3m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1.215 \\ 1 \end{bmatrix}} = -0.270$$

0.5

1. Calcule Les accélérations horizontales

Zone IV, S3	S	T1(s)	T2 (s)	T3 (s)
	1.30	0.15	0.60	2

$$\frac{S_{ad}}{g}(T) = \begin{cases} A.I.S. \left[\frac{2}{3} + \frac{T}{T_1} \cdot \left(2.5 \frac{Q_F}{R} - \frac{2}{3} \right) \right] & \text{si } 0 \leq T < T_1 \\ A.I.S. \left[2.5 \frac{Q_F}{R} \right] & \text{si } T_1 \leq T < T_2 \\ A.I.S. \left[2.5 \frac{Q_F}{R} \right] \cdot \left[\frac{T_2}{T} \right] & \text{si } T_2 \leq T < T_3 \\ A.I.S. \left[2.5 \frac{Q_F}{R} \right] \cdot \left[\frac{T_2 \cdot T_3}{T^2} \right] & \text{si } T_3 \leq T < 4s \end{cases}$$

T02= 0,11968S

T01= 0,265 S

T01
T02
T01
T02

6. Les accélérations horizontales

$T_{01} = 0,265 \text{ s}$ $\frac{S_{ad1}}{g} = 0.20 * 1.20 * 1.30 * \left[2.5 * \frac{1.2}{3.5} \right] = 0.245$ $S_{a11} = r_1 * \phi_{11} \frac{S_{ad1}}{g} * g = 1.256 * 0.548 * 0.245 * 9.81 = 1,655 \text{ m/s}^2$ $S_{a12} = r_1 * \phi_{12} \frac{S_{ad1}}{g} = 1.256 * 1 * 0.245 * 9.81 = 3,021 \text{ m/s}^2$	$T_{02} = 0,11968 \text{ s}$ $\frac{S_{ad2}}{g} = 0.20 * 1.20 * 1.30 * \left[\frac{2}{3} + \frac{T}{T_1} \left(2.5 * \frac{1.2}{3.5} - \frac{2}{3} \right) \right] = 0.234$ $S_{a21} = r_2 * \phi_{21} \frac{S_{ad2}}{g} = -0.270 * (-1.215 * 0.234 * 9.81) = 0,754 \text{ m/s}^2$ $S_{a22} = r_2 * \phi_{22} \frac{S_{ad2}}{g} = -0.270 * (-1 * 0.234 * 9.81) = -0,621 \text{ m/s}^2$
---	---

7. Les déplacements horizontaux

mode 1 $S_{d11} = \frac{1}{\omega_1^2} * S_{a11} = 0,00295 \text{ m} = 2.95 \text{ mm}$ $S_{d12} = \frac{1}{\omega_1^2} * S_{a12} = 0,00538 \text{ m} = 5.38 \text{ mm}$	mode 2 $S_{d21} = \frac{1}{\omega_2^2} * S_{a21} = 0,00027 \text{ m} = 0.27 \text{ mm}$ $S_{d22} = \frac{1}{\omega_2^2} * S_{a21} = -0,00023 \text{ m} = -0.23 \text{ mm}$
---	---

8. Les forces sismiques horizontales

mode 1 $f_{11} = r_1 * \phi_{11} * m_1 * \frac{S_{ad1}}{g} * g = 148.99 \text{ kN}$ $f_{12} = r_1 * \phi_{12} * m_2 * \frac{S_{ad1}}{g} * g = 181.25 \text{ kN}$	mode 2 $f_{21} = r_2 * \phi_{21} * m_1 * \frac{S_{ad2}}{g} * g = 67.866 \text{ kN}$ $f_{22} = r_2 * \phi_{22} * m_2 * \frac{S_{ad2}}{g} * g = -37.238 \text{ kN}$
---	--

Question cours (7p)

1. Le point de performance dans l'analyse statique non linéaire correspond au point où la courbe de capacité de la structure intersecte la courbe de demande sismique, indiquant la réponse de la structure (état de déplacement de la structure sous l'action du séisme).
2. La formule utilisée pour transformer le période au déplacement pour obtenir le spectre de demande élastique en format accélération-déplacement (A-D)

$$S_{de} = \frac{T^2}{4\pi^2} S_{ae}$$

3. Le terme statique représente la force (statique) et Le terme non-linéaire représente la relation des contraintes (forces) en fonction déformations (déplacements)
4. Les quatre niveaux de performance sont : Opérationnel (O), Immediate Occupancy (IO), Life Safety (LS), et Collapse Prevention (CP).
5. Collapse Prévention CP (prévention à l'effondrement) : les dommages ne sont pas limités.
6. Les hypothèses de l'analyse statique non linéaire (pushover) sont : La réponse de la structure (système à plusieurs degrés de liberté) peut être assimilée à la réponse d'un système à un seul degré de liberté équivalent est fondamentalement contrôlée par un seul mode de vibration - la forme de mode fondamental demeure constante durant la durée du séisme.
7. Les transformations fait-on: Pour obtenir le spectre de capacité: la force latérale appliquée (F) est transformée en accélération spectrale S_a , et le déplacement (D) est transformé en déplacement spectral S_d