

Chapitre 4

MÉTHODE DES DÉPLACEMENTS

Introduction :

La méthode des déplacements ou des déformations est une des méthodes les plus utilisées pour le calcul des systèmes hyperstatiques. Les déformations (rotations et translations) sont les inconnues.

Nombre d'inconnues de la méthode :

Le nombre d'inconnues de la méthode des déplacements est égal au nombre de rotations des nœuds N_r et le nombre de translations N_t du portique ($N = (N_r + N_t)$).

- **Nombre de rotations N_r** : le nombre de rotations d'un portique est égal au nombre de nœuds intermédiaires rigides ($N_r = \text{nœuds intermédiaires rigides}$).
- **Nombre de translations N_t** : le nombre de translations possibles du portique :

$$N_t = 2n - (b+1)$$

Avec :

n : Nombre total de nœuds (nœuds et appuis).

b : Nombre de barres.

l : Nombre de liaisons (réactions) verticales ou horizontales.

Intérêt de la méthode des déplacements :

On réduit considérablement avec cette méthode le nombre des inconnues surabondantes et elle permet de déterminer la matrice de rigidité unique du système.

Exemple1 :

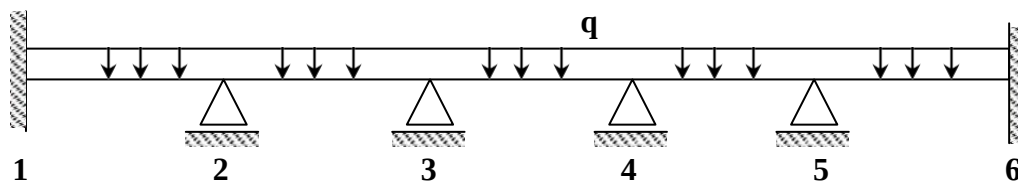


Figure 4.1. : Poutre hyperstatique

Dans la Figure 4.1, la méthode des trois moments nous donne 6 équations à 6 inconnues ; alors que la méthode des déplacements nous donne seulement 4 inconnues (car les rotations aux nœuds 1 et 6 sont nuls)

Exemple 2 :

Dans cet exemple (figure 4.2) nous avons 3 inconnues par liaison encastree ; ce qui fait en tout 9 inconnues.

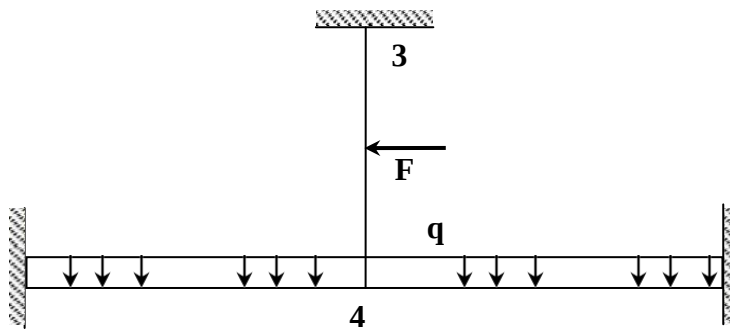


Figure 4.2. : Système hyperstatique

La statique nous donne trois équations (une équation de moment et 2 équations de projection de toutes les forces appliquées).

Le degré d'hyperstaticité est $(9-3 = 6 \text{ fois hyperstatique})$.

Puisque ce système est une structure non déplaçable ($N_t = 2n - (b+l) = 2 \cdot 4 - (3+6) = -1$) alors nous avons seulement une seule inconnue puisque nous avons un seul nœud intermédiaire (le nœud 4). Donc l'inconnue Z_1 c'est la rotation au nœud 4.

Principe de la méthode des déplacements

La méthode des déplacements est utilisée pour le calcul des structures constituées de barres droites encastées dans les nœuds.

Globalement, le principe de la méthode est décrit par les trois étapes suivantes :

- a On détermine le système de base en bloquant (encastements spéciaux) tous les nœuds intermédiaires de la structure réelle dans le cas d'une structure non déplaçable.

Si le système est déplaçable, on bloque aussi les nœuds intermédiaires (encastements spéciaux) et on bloque aussi les translations à l'aide de butée (Figure 4.3b).

Chaque élément de la structure travaille seul comme le modèle bi-encasté ou encasté-articulé.

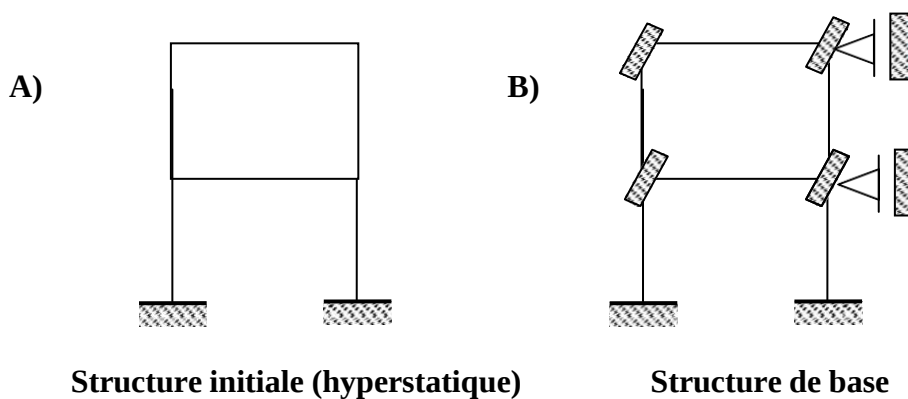


Figure 4.3. : Portique hyperstatique

- b. Afin d'obtenir un système équivalent à la structure initiale, on applique des déplacements (inconnus) correspondant aux liaisons ajoutées (Figure 4.3C).

C)

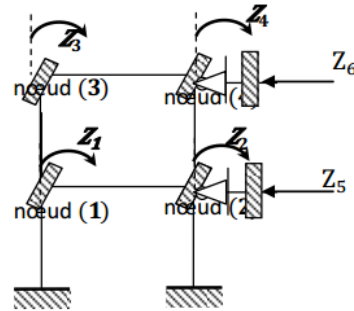


Figure 4.3. : Portique hyperstatique

Les inconnues du problème dans le cas considéré (Figure 4.3C) sont :

Z_1 : Rotation du nœud 1.

Z_2 : Rotation du nœud 2.

Z_3 : Rotation du nœud 3.

Z_4 : Rotation du nœud 4.

Z_5 : Translation horizontale des nœuds 1 et 2, la variation de longueur de la barre 1-2 étant négligée.

Z_6 : Translation horizontale des nœuds 3 et 4, la variation de longueur de la barre 3-4 étant négligée.

- c. Pour obtenir les déplacements inconnus (Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5 et Z_6) on écrit qu'il y a équilibre des réactions (moments ou forces) apparaissant dans chaque liaison ajoutée sous l'effet des forces extérieures et des déplacements imposés. Soit :

$$Z_1 = \Sigma \text{ des moments réactionnels dans l'encastrement (1) } = 0.$$

$$Z_2 = \Sigma \text{ des moments réactionnels dans l'encastrement (2) } = 0$$

$$Z_3 = \Sigma \text{ des moments réactionnels dans l'encastrement (3) } = 0.$$

$$Z_4 = \Sigma \text{ des moments réactionnels dans l'encastrement (4) } = 0.$$

$$Z_5 = \Sigma \text{ des réactions horizontales dans la liaison (2) } = 0.$$

$$Z_6 = \Sigma \text{ des réactions horizontales dans la liaison (4) } = 0.$$

Exemple : barre 1-2 et barre 1-3 :

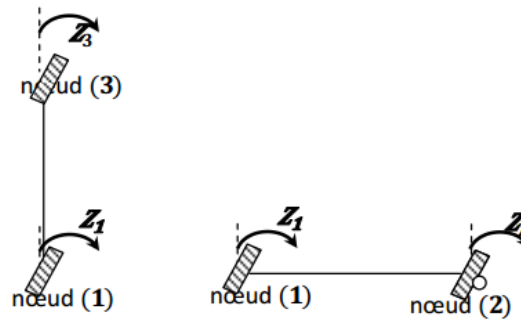


Figure 4.4. : Portique de la figure 4.3. (Exemple : barre 1-2 et 1-3)

Pour terminer, on retient que la méthode des déplacements est caractérisée par :

- Le blocage des rotations des nœuds intermédiaires et des translations du portique.
- Donc un seul système de base possible, donc une façon unique de mettre le problème en équations (de ce fait, la méthode est particulièrement indiquée pour le calcul automatique).

Classification des structures :

On distingue deux types de structures :

A- Portiques ou structures à nœuds fixes (dit structure non déplaçable):

Ce sont des structures dont les nœuds ne peuvent subir que des rotations (Figure 4.5). Une structure à nœuds fixes possède autant de nœuds intermédiaires que de rotations inconnues Z .

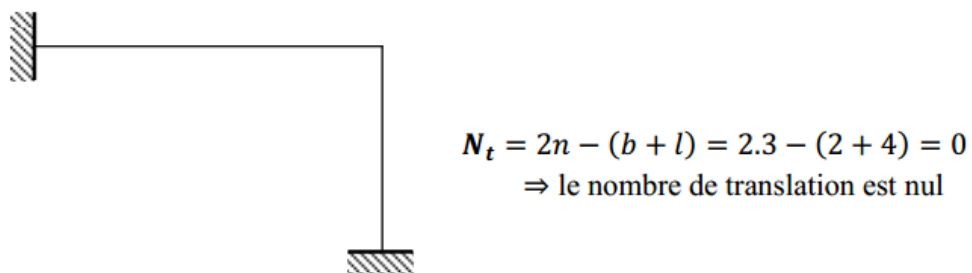
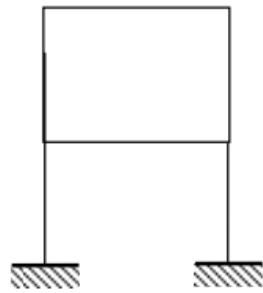


Figure 4.5. : Système hyperstatique non déplaçable

B- Portiques à nœuds déplaçables (structures déplaçables)

Ce sont des structures dont les nœuds intermédiaires peuvent subir en même temps des rotations et des translations (Figure 4.6).



$$N_t = 2n - (b + l) = 2.6 - (6 + 4) = 2$$

⇒ deux translations

Figure 4.6. : Système hyperstatique déplaçable

Principe du nœud fixe

Considérons le schéma de la Figure 4.7 dans lequel deux barres AB et AC relient un nœud A à deux nœuds B et C qui sont fixes en translation dans le plan XY.

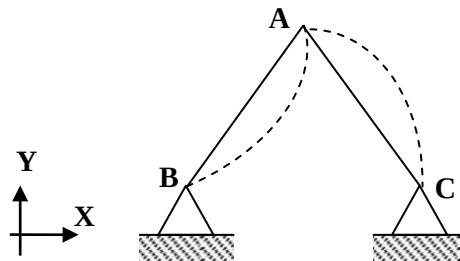


Figure 4.7. : Principe du nœud fixe en translation

En toute généralité, le point A ne sera mobile que si les longueurs AB et AC varient. Une telle variation de longueur ne peut résulter que de l'un et/ou l'autre des effets suivants :

- Raccourcissement de la corde due la courbure prise sous l'effet de la distribution du moment de flexion;
- Variation de la longueur de la corde due à la courbure additionnelle prise sous l'effet de la déformation d'effort tranchant;
- Variation de la longueur de la corde induite par la déformation d'effort normal.

Conformément à l'hypothèse simplificatrice de la méthode des Rotations, les déformabilités à la base des effets (b) et (c) sont négligées ; ceux-ci ne sont donc pas à considérer; en conséquence, seul l'effet (a) reste à examiner. Dans le domaine élastique, il est aisé de démontrer, que le raccourcissement de la corde d'une barre, engendrée par la prise de courbure de flexion, est d'un ordre inférieur à la variation de longueur produite par l'effort normal.

Le principe du nœud fixe en translation s'énonce comme suit :

Si, dans un plan XY, un nœud A est relié par deux barres AB et AC à deux nœuds B et C, tous deux fixes en translation dans ce plan, le point A peut à son tour être considéré comme fixe en translation.

Principe du nœud mobile

Lorsque la structure plane est constituée d'un réseau de poutres orthogonal à un réseau de poteaux, il est assez logique de localiser la structure dans un plan XY tel que l'axe des X soit parallèle aux poutres (barres horizontales) et l'axe des Y parallèle aux poteaux (barres verticales). L'hypothèse simplificatrice à la base de la Méthode des rotations, notamment, la déformabilité aux efforts normaux est négligeable, revient à supposer l'incompressibilité (éventuellement l'inextensibilité) des barres.

Les degrés de liberté de la structure à considérer dès lors sont :

- Le degré de liberté en rotation des nœuds.
- Le degré de liberté en translation horizontale de toute la file des éléments horizontaux.
- Le degré de liberté en translation verticale de toute la file des éléments verticaux

Ainsi, il suffit désormais d'un blocage simple en translation selon l'axe d'une file des éléments pour que tous les nœuds de cette file ne translatent pas. En conséquence, la structure cinématiquement déterminée (Figure 4.8a) est obtenue en disposant d'un blocage simple associé à chacun des degrés de liberté précités. Les blocages simples ainsi requis, en nombre N (N_t et N_r), constituent les inconnues cinématiques. Celles-ci sont donc de deux natures :

- Les angles de rotation aux nœuds intermédiaires ;
- Les déplacements horizontaux ou verticaux du système.

Pour l'exemple de la Figure suivante, on a :

$$N_t = 2n - () = 2.8 - (10 + 3) = 3$$

$$N_r = 6$$

- 6 blocages de rotations de nœuds intermédiaires (Figure 4.8b),
 - 2 blocages de déplacements horizontaux (Figure 4.8c),
 - 1 blocage de déplacements verticaux (Figure 4.8d).
- soit au total $M = 9$.

La structure cinématiquement (Figure 4.8a) déterminée de référence est la structure d'origine munie de ces 11 blocages simples (Figure 4.8).

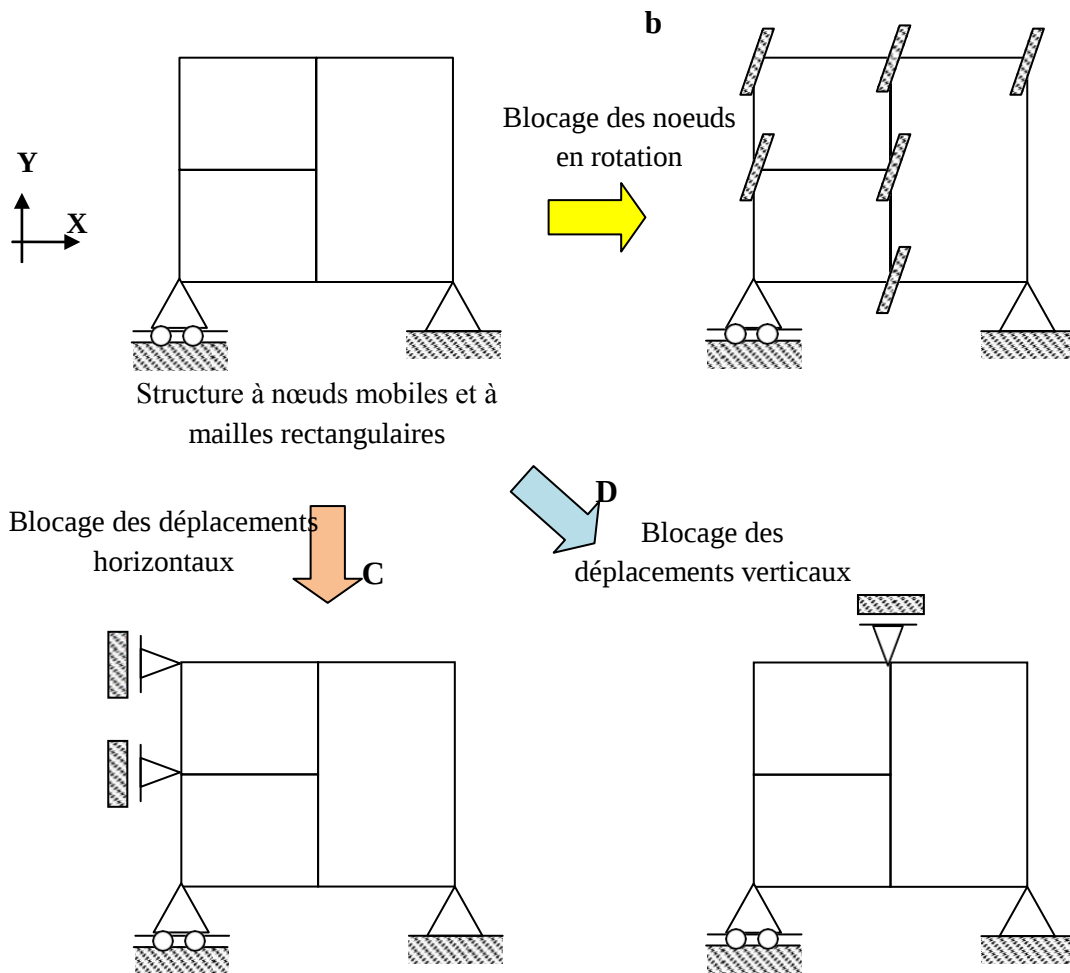


Figure 4.8. : Principe du nœud mobile

Sollicitations des barres :

Les barres sont sollicitées soient par :

- Les charges extérieures (réparties, ponctuelles, ...) (connues)
- Les rotations des nœuds intermédiaires **Ce sont les inconnues**
- Les translations

Les moments fléchissants et les réactions des barres soumises à des déplacements et des charges

Les calculs des moments et les réactions peuvent être menés par les méthodes exposées dans les chapitres précédents (**chapitre 2** : Méthode des trois moments et **chapitre 3** : Méthode des forces).

Les diagrammes des moments et les réactions des charges extérieures les plus courantes sont regroupés dans les deux tableaux suivants.

a- Les barres soumises à des déplacements d'appuis (rotations et translations)

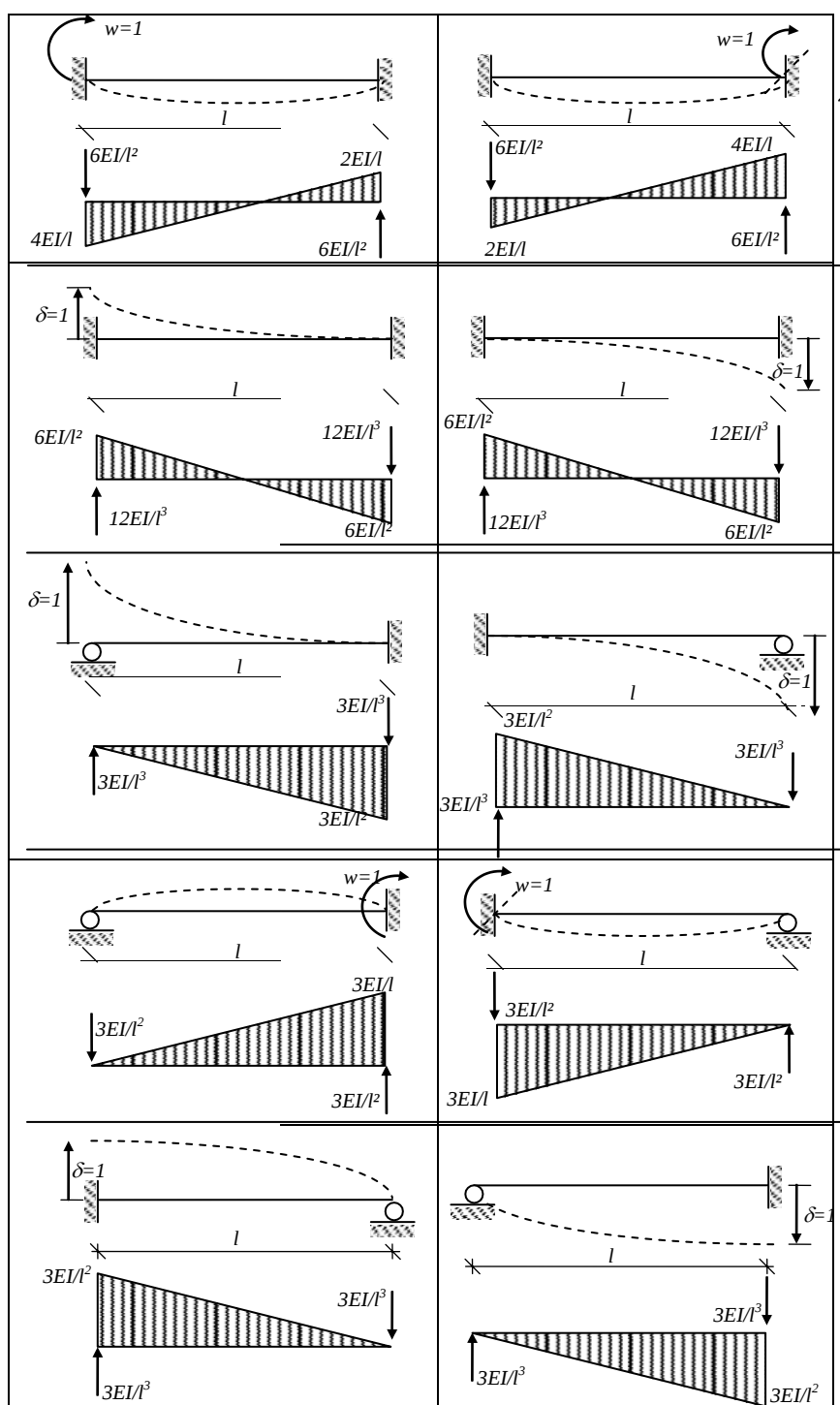


Figure 4.9. : Les moments fléchissants et les réactions des barres soumises à des déplacements d'appuis (rotations et translations)

b- Les barres soumises à des charges extérieures (réparties, ponctuelles, ...)

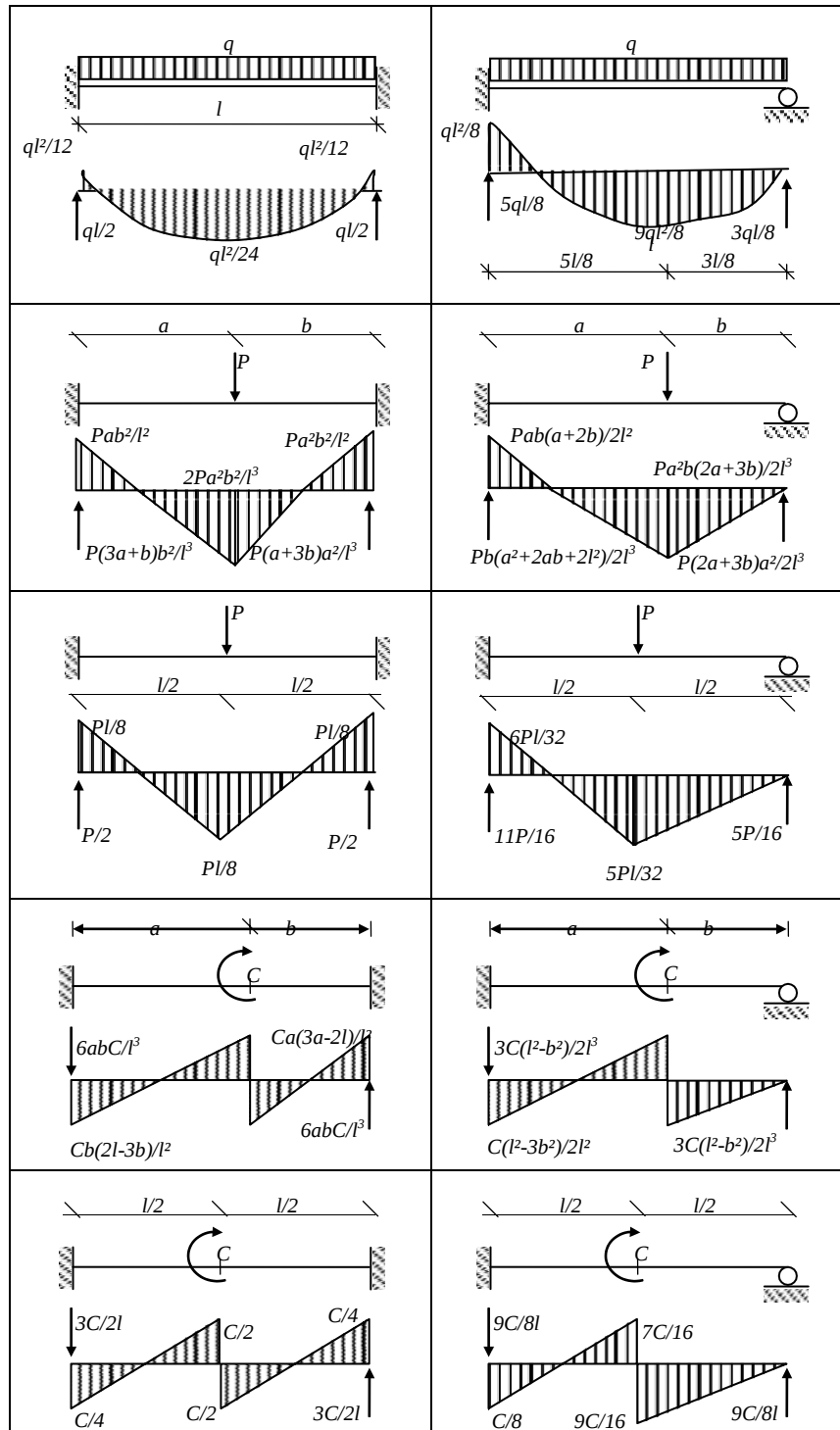


Figure 4.10. : Les moments fléchissants et les réactions des barres soumises à des charges extérieures

Equations d'équilibre

Chaque équation exprime l'équilibre des réactions apparaissant dans une liaison ajoutée. Dans chaque liaison (i) introduite, la résultante des réactions, engendrées par les forces extérieures (r_{i0}) et par les déplacements appliqués (r_{ij}), doit être nulle.

- réaction qui apparaît dans la liaison ajoutée i sous l'action de la sollicitation globale F (c'est-à-dire les charges appliquées).
- réaction dans la liaison i , dont la nature est déterminée par celle de la liaison, sous l'action du déplacement $Z_i=1$ (coefficient de rigidité).

En vertu du principe de superposition des effets nous pouvons écrire :

$$Z_j = r_{ij} Z_j$$

où :

- Z_j est le déplacement inconnu appliqué.
- r_{ij} est la réaction dans la liaison i sous l'action d'un déplacement unitaire, rotation ou translation selon la nature de la liaison j , appliqué à la liaison j .

Ainsi, pour une structure à n inconnues (n déplacements inconnus des nœuds), le système d'équations s'écrit :

[illegible]

Ou encore sous forme condensée :

$$\sum_{j=1}^n r_{ij}Z_j + R_{i0} = 0 \text{ avec } i = 1, \dots, n$$

Sous forme matricielle le système d'équations canoniques s'écrit :

$$[r] [Z] + [R_0] = 0$$

$[r_{ij}]$ est appelée matrice de rigidité.

Les étapes de calcul par la méthode des déplacements :

L'application de la méthode des déplacements peut se résumer aux étapes élémentaires suivantes :

- Déterminer le nombre d'inconnues (N_t et N_r)
- Ecrire les n équations canoniques.
- Choisir le système de base (système isostatique le plus simple)
- Tracer le diagramme des moments fléchissants M_0 du système isostatique due aux charges extérieures ($Z_1 = Z_2 = \dots Z_n = 0$)
- Tracer les diagrammes ou épures unitaires $m_i (i=1 \dots n)$ correspondant au système isostatique sans charges extérieures et avec $Z_i = 1$ et les autres inconnus nuls.
- On calcul tous les coefficients de réaction (r_{ij}, R_{io}) à l'aide des diagrammes.
- Résolution du système d'équations canoniques pour obtenir les déplacements des nœuds.
- Correction des épures unitaires $m^*_j = m_i X_i (i=1 \dots n)$.
 $m^*_1 = m_1 Z_1 ; \quad m^*_{21} = m_2 Z_2 \quad ; \dots ; \quad m^*_n = m_n Z_n$
- On fait la somme des épures unitaires corrigées $\sum m^*_i = m^*_1 + m^*_2 + \dots + m^*_n$
- En dernier, on obtient le diagramme des moments fléchissants final du système hyperstatique réel en faisant la somme des moments suivants $M_{final} = M_0 + \sum m^*_i$