

Chapitre 2

DÉFORMÉES DES POUTRES

2.1. Généralités

2.1.1. But de l'étude

Lorsque les structures reçoivent des charges, elles se déforment. Il est nécessaire de limiter leurs déplacements pour des raisons d'exploitation des constructions. En effet, un changement de position trop important peut engendrer, entre autre, des contrepenes, des fissurations dans certains éléments (cloisons), des vibrations sous les charges variables telles que le vent . . .

Le présent chapitre a donc pour but de quantifier les déformées des structures.

2.1.2. Rappels mathématiques

Dans cette partie de cours, nous aurons besoins de maîtriser les intégrales. Les fonctions étudiées sont généralement assimilées à des polynômes. L'intégration d'une fonction polynomiale du type x^n est :

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + A$$

2.1.3. Définitions

a. Déformée

La déformée d'une structure correspond à l'allure de celle-ci lorsqu'elle reçoit un chargement. Elle est intimement liée aux actions qu'elle subit (si l'intensité, le type de chargement... change, la déformée changera).

Remarque

Il est très important de ne pas confondre "déformée" et "déformations". En effet, la déformation est un allongement par unité de longueur, alors qu'une déformée est la combinaison entre une translation [m] et une rotation [rad].

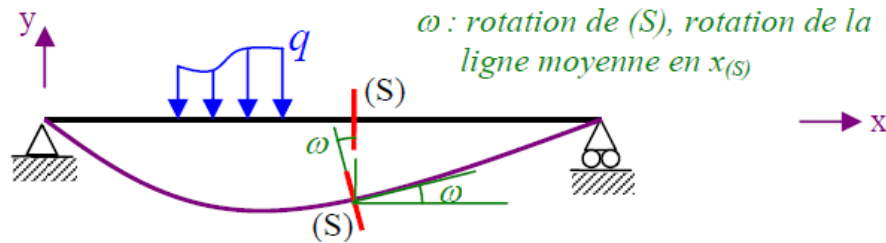
b. Flèche

Lorsqu'une structure est soumise à un moment de flexion, on observe la translation des sections droites perpendiculairement à la ligne moyenne de la poutre. Cette translation s'appelle "flèche".



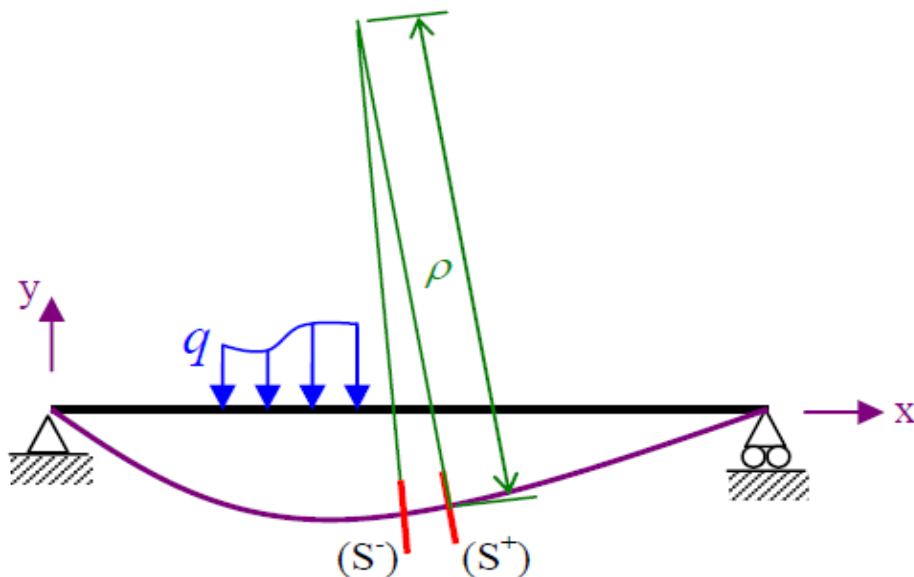
c. Rotation

Certaines sections subissent une rotation. Cette rotation est naturellement la même que celle de la ligne moyenne:



d. Rayon de courbure

Considérons deux sections (S^-) et (S^+) infiniment proches. Une fois la structure déformée, les axes de ces sections se croisent à une distance ρ de la ligne moyenne. Cette distance s'appelle 'rayon de courbure'.



2.2. Hypothèses

De nombreuses hypothèses doivent être posées:

- les structures sont composées de poutres (c.f. théorie des poutres);
- les charges sont appliquées de manière et très lente et progressive;
- les déplacements et rotations sont petits;
- la structure reste dans le domaine élastique;
- les appuis et liaisons internes sont parfaits;
- nous négligerons les effets dus à l'effort normal et à l'effort tranchant;
- nous nous limiterons à l'étude des poutres homogènes (un seul matériau).

2.3. Notations

Nous poserons:

- la longueur d'un tronçon infiniment petit de la poutre dx ;
- l'équation de la rotation en fonction de l'abscisse de la section $\omega(x)$;
- l'équation de la flèche $f(x)$;
- le rayon de courbure $\rho(x)$;
- la rigidité de la poutre $EI_{GZ}(x)$ (si celle-ci est variable) et EI_{GZ} (si elle est constante);

2.4. Etude de la déformée

2.4.1. Relation entre la flèche et la rotation

Prenons un tronçon dx infiniment petit de la poutre :

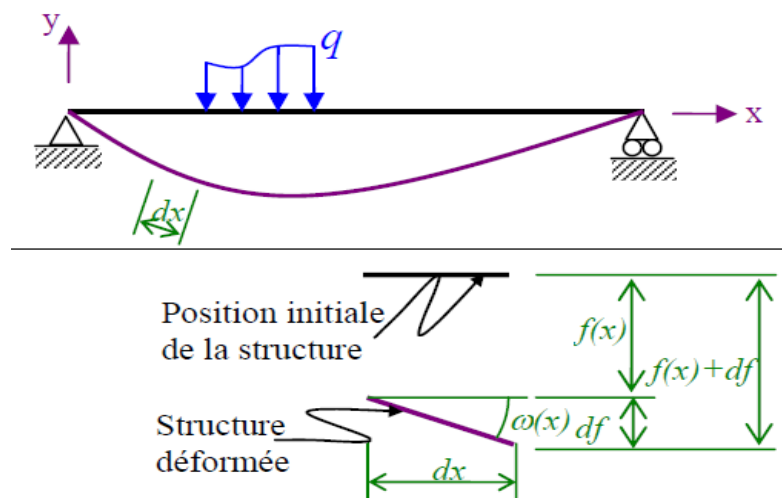
La variation de la flèche vaut df

La déformée de cet élément peut être assimilée à un segment droit :

Nous démontrons donc que :

$$\tan(\omega(x)) = \frac{df}{dx} \approx \omega(x)$$

$$\omega(x) = f'(x)$$



Remarque

La rotation ω peut être assimilée à sa tangente car elle est infiniment petite.

2.4.2. Relation entre la rotation et le rayon de courbure

Soient deux sections infiniment proches dont la variation d'abscisse vaut dx .

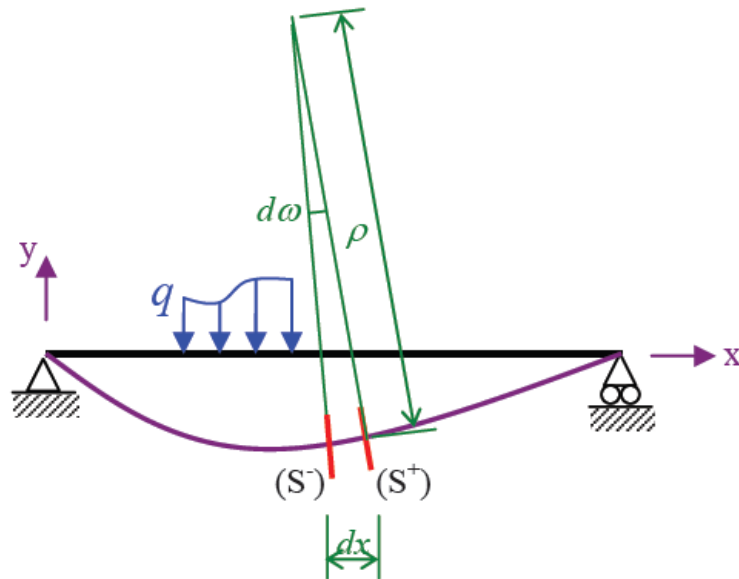
La variation de la rotation de la section en x à la section en $x+dx$ vaut $d\omega$.

On démontre donc que :

$$\tan(d\omega) = \frac{dx}{\rho} \approx d\omega$$

$$\text{donc } \rho = \frac{dx}{d\omega}$$

$$\frac{1}{\rho} = \omega'(x)$$



Remarque

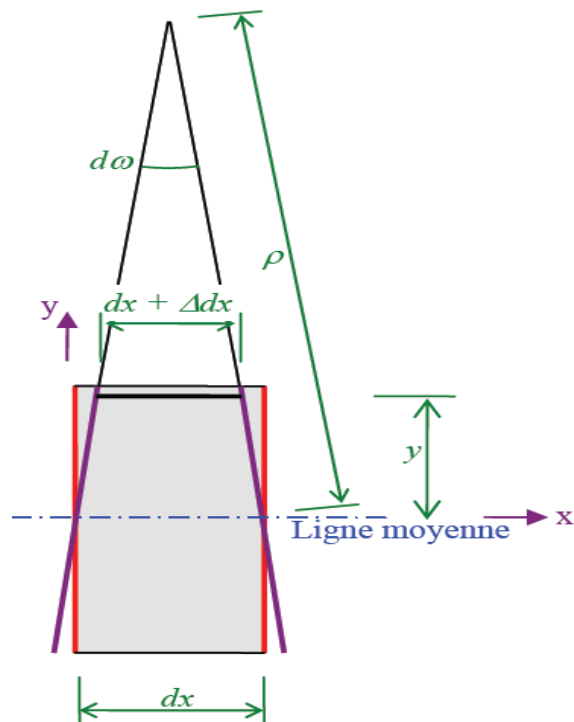
La rotation $d\omega$ peut être assimilée à sa tangente car elle est infiniment faible.

2.4.3. Relation entre le moment et le rayon de courbure

Soit un tronçon dx infiniment petit de la poutre:

Considérons une fibre à l'ordonnée y .

Sous l'action du moment de flexion, cette fibre de longueur initiale dx s'allonge d'une valeur de Δdx .



Remarque

Dans le schéma de droite, la valeur de Δdx est négative.

Nous savons que :

$$\frac{\Delta dx}{dx} = \varepsilon_x \text{ (c.f. contraintes).}$$

$$\frac{\Delta dx}{dx} = \varepsilon_x = \frac{\sigma_x(y)}{E} = -\frac{1}{E} \times \frac{M_z(x)}{I_{GZ}(x)} y$$

Dans le schéma de droite :

$$\tan(d\omega) = \frac{dx}{\rho} = \frac{dx + \Delta dx}{\rho - y}$$

$$\frac{\rho - y}{\rho} = \frac{dx + \Delta dx}{dx} \quad 1 - \frac{y}{\rho} = 1 + \frac{\Delta dx}{dx}$$

Donc :

$$\frac{\Delta dx}{dx} = -\frac{y}{\rho}$$

Au final :

$$\frac{\Delta dx}{dx} = -\frac{y}{\rho} = -\frac{M_z(x)}{EI_{GZ}(x)} y$$

2.4.4. Relation entre la flèche et le moment

En combinant les différentes relations démontrées :

$$\omega(x) = f'(x) \quad \frac{1}{\rho} = \omega'(x) \quad \frac{\Delta dx}{dx} = -\frac{y}{\rho} = -\frac{M_z}{EI_{GZ}} y$$

On montre que :

$$f''(x) = \omega'(x) = \frac{1}{\rho} = \frac{M_z(x)}{EI_{GZ}(x)}$$

En conclusion :

$$f(x) = \int \int \frac{M_z(x)}{EI_{GZ}(x)} dx^2$$

$$\omega(x) = f'(x) = \int \frac{M_z(x)}{EI_{GZ}(x)} dx$$

2.4.5. Conditions limites

En intégrant deux fois l'expression $\frac{M_z(x)}{EI_{GZ}(x)}$, des constantes d'intégration apparaissent.

Afin de déterminer leurs valeurs, il est nécessaire de connaître la flèche ou la rotation en certains points particuliers.

Remarque :

Le nombre de constantes d'intégration est égal à 2 x le nombre de tronçons.

a) Conditions aux appuis : Nous savons que les appuis bloquent des mouvements :

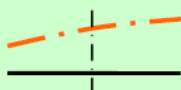
<i>Appui – liaison externe</i>		
<i>encastrement</i>	<i>articulation</i>	<i>appui simple</i>
		
$\omega = 0$ $f = 0$	$f = 0$	$f = 0$

Nous allons donc appliquer les équations au niveau des appuis et ainsi déterminer certaines constantes d'intégration.

b) Conditions de continuité:

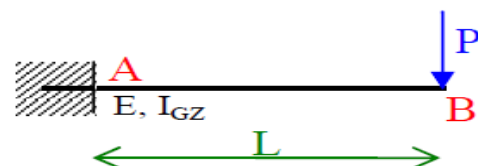
Le reste des constantes d'intégration peut être résolu à l'aide des conditions de continuité.

En effet, lorsque l'équation du moment change, 2 nouvelles constantes d'intégration apparaissent. On regardera ainsi s'il y a continuité de la flèche et de la rotation au droit de ce changement d'équation:

<i>Liaison interne</i>	
<i>encastrement</i>	<i>relâchement</i>
	
$\omega_{relative} = 0$ - continuité de la rotation $f_{relative} = 0$ - continuité de la flèche	$f_{relative} = 0$ - continuité de la flèche

Exemple:

Soit la poutre suivante à rigidité constante :



a) Nature (décomposition minimale)

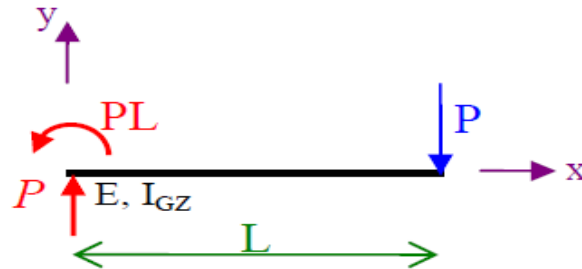
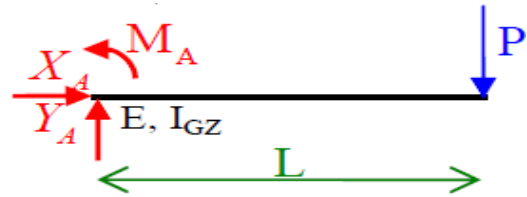
$$\left. \begin{array}{l} x = 3 \\ e = 3 \end{array} \right\} \text{structure isostatique}$$

b) Inconnues de liaison

$$\sum F_x = 0 = X_A$$

$$\sum F_y = 0 = Y_A - P$$

$$\sum M_{A/z} = 0 = -PL + M_A$$

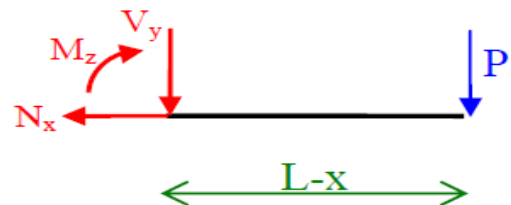


c) Sollicitation

$$N_x(x) = 0$$

$$V_y(x) = -P$$

$$M_z(x) = -P(L-x) = -PL + Px$$



d) Déformée

d.1) Allure de la déformée



d.2) Intégrations

$$M_z(x) = -P(L-x) = -PL + Px$$

$$\omega(x) = \int \frac{M_z(x)}{EI_{GZ}} dx = \int \frac{(-PL + Px)}{EI_{GZ}} dx = \frac{1}{EI_{GZ}} \left(\frac{P}{2} x^2 - PLx + A \right)$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \int \omega(x) dx = \int \left[\frac{1}{EI_{GZ}} \left(\frac{P}{2} x^2 - PLx + A \right) \right] dx \\ &= \frac{1}{EI_{GZ}} \left(\frac{P}{6} x^3 - \frac{PL}{2} x^2 + Ax + B \right) \end{aligned}$$

d.3) Conditions limites

- Conditions à l'appui A

Encastrement en $x = 0$

$$f(0) = 0$$

$$\omega(0) = 0$$

d.4) Constantes d'intégration

$$\omega(0) = 0 \rightarrow EI_{GZ}\omega(0) = 0 = +\frac{P}{2} \times 0^2 - PL \times 0 + A \rightarrow A = 0$$

$$f(0) = 0 \rightarrow EI_{GZ}f(0) = 0 = \frac{P}{6} 0^3 - \frac{PL}{2} 0^2 + B \rightarrow B = 0$$

d.5) Equations

$$\omega(x) = \frac{1}{EI_{GZ}} \left(\frac{P}{2} x^2 - PLx \right)$$

$$f(x) = \frac{1}{EI_{GZ}} \left(\frac{P}{6} x^3 - \frac{PL}{2} x^2 \right)$$

d.6) Flèche maximale

- Rotation nulle

$$\omega(x) = \frac{1}{EI_{GZ}} \left(\frac{P}{2} x^2 - PLx \right) = 0 \rightarrow EI_{GZ}\omega(x) = 0 = \frac{P}{2} x^2 - PLx$$

$$Px \left(\frac{1}{2} x - L \right) = 0$$

Solutions : $x = 0$, $x = 2L$

Nous ne pouvons retenir que $x = 0$, ce qui donne

$$f(0) = \frac{1}{EI_{GZ}} \left(\frac{P}{6} 0^3 - \frac{PL}{2} 0^2 \right) = 0$$

- Extrémité de tronçon

$$f(0) = \frac{1}{EI_{GZ}} \left(\frac{P}{6} 0^3 - \frac{PL}{2} 0^2 \right) = 0$$

$$f(L) = \frac{1}{EI_{GZ}} \left(\frac{P}{6} L^3 - \frac{PL}{2} L^2 \right) = -\frac{PL^3}{3EI_{GZ}}$$

On en conclut que pour cette poutre

$$f_{max} = f(L) = -\frac{PL^3}{3EI_{GZ}}$$

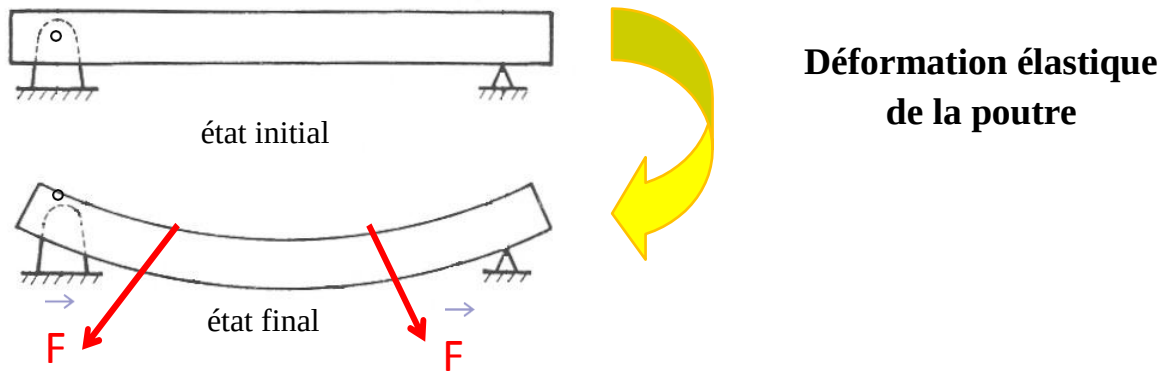
2.5. Théorie du potentiel interne (methodes énergetiques)

2.5.1. Hypothèses

Lorsque des forces sont appliquées à une structure, elles effectuent un travail pour :

- déformer la structure,
- produire de l'énergie cinétique,
- vaincre les résistances de frottement (dissipation en chaleur).

Calculons le travail total de O à F : $W = \frac{1}{2} F l$: mesure de l'aire du triangle OAB.



Théorème de l'énergie cinétique	→	Travail des forces extérieures W_{ext}	+	Travail des forces intérieures W_{int}	= 0
---------------------------------	---	---	---	---	-----

Énergie de déformation : $W_d = -W_{\text{int}} = W_{\text{ext}}$

2.5.3. Expression du potentiel interne en fonction de sollicitations internes

On peut donc calculer le potentiel interne d'une poutre en déterminant les déplacements par les équations de Bresse. On peut procéder plus simplement dans le cas d'une poutre droite.

a. Effort normal $N(x)$

$$W = \frac{1}{2} N \Delta \ell$$

Considérons un tronçon dx :

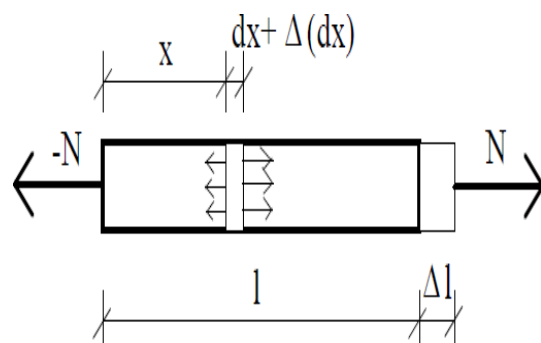
$$dW = \frac{1}{2} N \Delta d(x)$$

$$\Delta d(x) = N \frac{dx}{ES} \quad (\text{la loi de Hooke})$$

$$dW = \frac{1}{2} N^2 \frac{dx}{ES}$$

et pour la poutre entière :

$$W_N = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{N^2}{ES} dx$$



b. Moment de flexion $M(x)$

On a de même pour un tronçon dx :

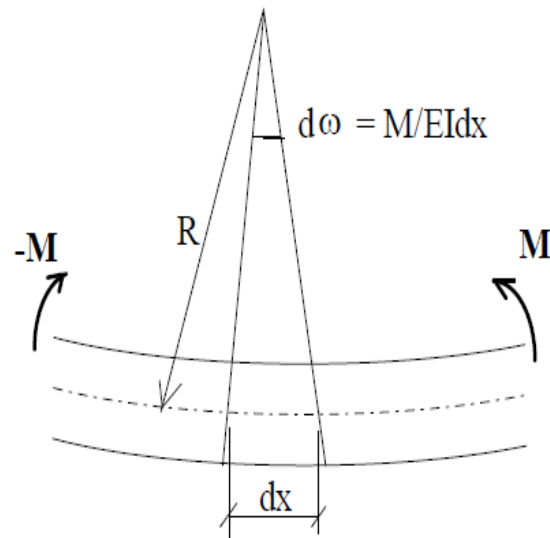
$$dW = \frac{1}{2} M d\omega$$

$$d\omega/dx = M/EI$$

$$dW = \frac{1}{2} M^2 dx/EI$$

et pour la poutre entière

$$W_M = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EI} dx$$



c. Effort tranchant $T(x)$

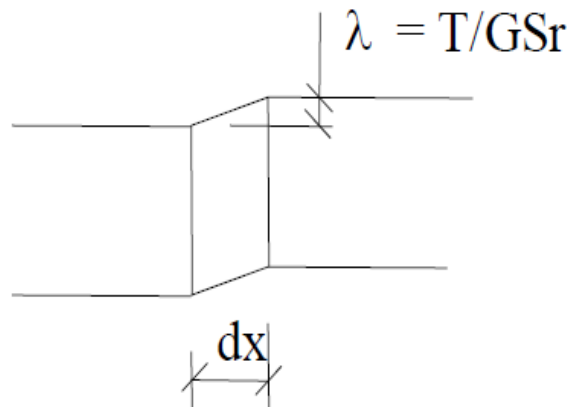
$$dW = \frac{1}{2} T \lambda dx$$

avec : $\lambda = T/GS_r$

$$dW = \frac{1}{2} T^2 dx/GS_r$$

et pour la poutre entière

$$W_T = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{T^2}{GS_r} dx$$



d. Moment de Torsion M_t

L'énergie emmagasinée dans le tronçon dx se calcule comme le travail effectué par M_t lors du déplacement $d\varphi_t$:

$$dW = \frac{1}{2} M_t d\varphi_t = \frac{q M_t^2}{2 G I_p} dx$$

et pour l'ensemble de la poutre

$$W_T = \frac{1}{2} \int_l \frac{q M_t^2}{G I_p} dx$$

q : coefficient de torsion est une constante dépendant de la forme et des dimensions de la section ($q \approx 40 I_p^2 / A^4$). Ce facteur vaut 1 pour la section circulaire et est supérieur à 1 pour les autres cas.

d. Cas général

Si toutes ces actions sont appliquées ensemble on obtient :

$$W = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{N^2}{ES} + \frac{M^2}{EI} + \frac{T^2}{GS_r} + \frac{M^2_t}{GI_0} \right) dx$$

N, M et T sont en général des fonctions de x.

Remarque

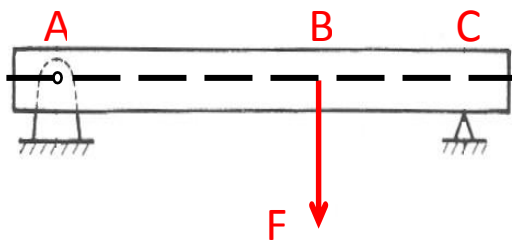
Dans le cas d'une poutre en flexion simple on néglige en général les déformations dues à T, on a donc :

$$W = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EI} dx$$

2.5.4. Théorème de Castigliano

a. Première forme du théorème

Théorème : Dans un système élastique à appuis indéformables, la dérivée de l'énergie de déformation par rapport à l'une des forces agissant sur le système est égale à la projection sur la direction de cette force du déplacement élastique de son point d'application.



$$\frac{\partial W}{\partial F_i} = \delta_i$$

b. Deuxième forme du théorème

Théorème

La dérivée de l'énergie de déformation, exprimée en fonction des déplacements des points sur les quels agissent des forces extérieures, par rapport à un de ces déplacements, est égale à la force correspondante, calculée suivant la direction du déplacement.

$$\frac{\partial W}{\partial \delta_i} = F_i$$

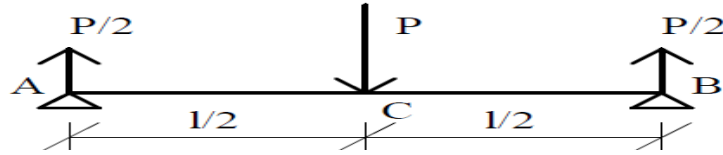
c. Applications

c.1. Calcul de flèche sous charge concentrée

Remarque

pour calculer $v = \frac{\delta W}{\delta P}$ avec $W = \frac{1}{2} \int \frac{M^2}{EI} dx$

Il est en général plus facile de calculer $\frac{\delta W}{\delta P} = \int M \frac{\delta M}{\delta P} \cdot \frac{dx}{EI}$



$$v_c = \frac{\delta W}{\delta P} \quad \text{et} \quad W = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EI} dx$$

Compte tenu de la symétrie, calculons :

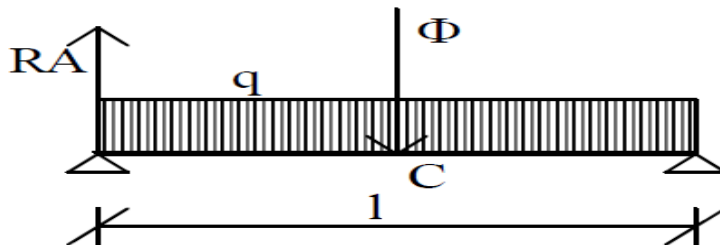
$$W = \int_0^{l/2} \frac{M^2}{EI} dx \quad \text{et} \quad v_c = 2 \int_0^{l/2} M \frac{\delta M}{\delta P} \cdot \frac{dx}{EI}$$

avec EI constant, $M = Px/2$ et $\delta M / \delta P = x/2$ on obtient :

$$v_c = \frac{Pl^3}{48EI}$$

c.2. Calcul de flèche sous charge répartie

On peut aussi calculer le déplacement d'un point où n'agit aucune force en appliquant une force fictive Φ . On calcule l'énergie potentielle avec cette force, puis sa dérivée partielle et on fait tendre Φ vers 0. Cette méthode est pratique pour calculer les flèches sous charges réparties:



$$v_c = \frac{\delta W}{\delta \phi} \quad \text{et} \quad W = \int_0^{l/2} \frac{M^2}{EI} dx \quad \text{en utilisant la symétrie}$$

$$M(x) = R_A x - q x^2 / 2 \quad \text{et} \quad R_A = \Phi / 2 + q l^2 / 2$$

$$\frac{\delta M}{\delta \phi} = \frac{x}{2} \quad \text{et} \quad v_c = \frac{2}{EI} \int_0^{l/2} M \frac{\delta M}{\delta \phi} dx \quad \text{on obtient :}$$

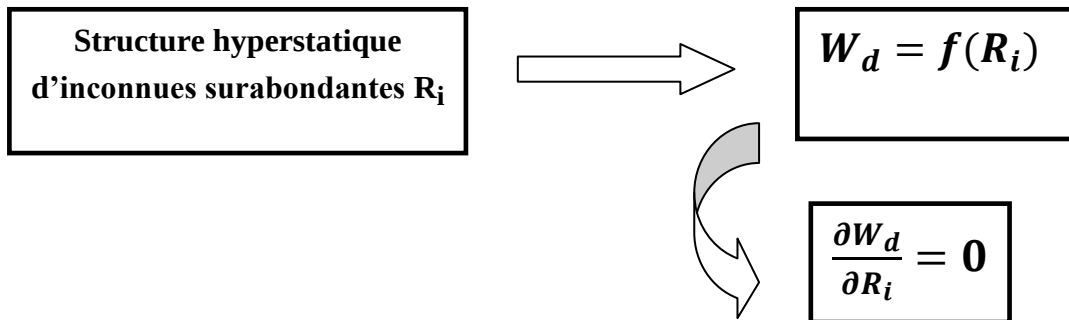
$$v_c = \frac{5ql^4}{384EI}$$

2.5.5. Théorème de Ménabréa

a. Théorème

La dérivée partielle de l'énergie de déformation par rapport à chacune des inconnues surabondantes est nulle, à condition que les points d'application des forces ne bougent pas ($U_i=0$) ou que les sections ne tournent pas ($\theta_i = 0$).

$$\frac{\partial W_d}{\partial R_i} = 0$$



Il y a autant d'équations que d'inconnues hyperstatiques.

Hyperstatique	Isostatique associé	Inconnue hyperstatique	condition cinématique	Ménabréa
		C	$\omega_A = 0$	$\frac{\partial W}{\partial C} = 0$
		F	$u_A = 0$	$\frac{\partial W}{\partial F} = 0$
		N	$u_A^+ = u_A^-$	$\frac{\partial W}{\partial N} = 0$

b. Application

Poutre encastrée-appuyée

Calculons R_A avec Ménébréa : $\frac{\delta W}{\delta R_A} = 0$

$$M(x) = R_A x - qx^2/2, \quad \frac{\delta M}{\delta R_A} = x$$

$$\frac{\delta W}{\delta R_A} = \frac{1}{EI} \int_0^l M \frac{\delta M}{\delta R_A} dx = 0$$

On obtient :

$$R_A = \frac{3ql}{8}$$

