

1.1. DÉFINITIONS ET HYPOTHÈSES

La résistance des matériaux (RDM) est une branche de la mécanique appliquée servant à étudier le comportement des corps solides sous l'action des différents types de charges. La résistance des matériaux traite non seulement les méthodes d'ingénieurs employées pour le calcul de la capacité des structures et de ses éléments à supporter les charges qui leurs sont appliquées sans se détruire, ou se déformer appréciablement, mais aussi à présenter les critères de base pour la conception des structures (forme, dimensions,...) et l'utilisation des matériaux dans les meilleures conditions de sécurité et d'économie.

La résistance des matériaux est basée sur les résultats théoriques de la mécanique et les propriétés des matériaux qui ne peuvent être disponibles qu'à travers les résultats des travaux expérimentaux comme le témoigne l'histoire du développement de la résistance des matériaux qui constitue une combinaison fascinante de la théorie et l'expérience.

Les limites de la résistance des matériaux sont celles imposées par ses hypothèses mêmes. Les disciplines connexes telles que la théorie d'élasticité, de la plasticité ou la méthode des éléments finis se libèrent de certaines de ces contraintes.

Les principales hypothèses de la résistance des matériaux sont les suivantes:

- **L'homogénéité, l'isotropie et la continuité du matériau:** On suppose que le matériau possède les mêmes propriétés élastiques en tous les points du corps, dans toutes les directions en un point quelconque du corps, et que le matériau est assimilé à un milieu continu.
- **L'élasticité et la linéarité du matériau:** On suppose admet qu'en chaque point contraintes et déformations sont proportionnelles et qu'après déformation, l'élément revient à son état initial.
- **La petitesse des déformations:** Les déformations dues aux charges sont négligeables par rapport aux dimensions des éléments et la configuration géométrique reste inchangée.
- **Hypothèse des sections planes (hypothèse de Navier-Bernoulli):** Les sections droites restent planes et normales à la fibre moyenne au cours de la déformation.
- **Hypothèse de Saint Venant:** Tous les efforts qui interviennent dans la théorie peuvent être schématisés par leur torseur résultant.

Ces hypothèses simplificatrices conduisent à des solutions approchées qui permettent en général une bonne approximation du comportement des structures soumises à différents types de charges.

La résistance des matériaux a donc pour but d'assurer qu'on utilise dans une structure donnée, une quantité minimale de matériaux, tout en satisfaisant aux exigences suivantes:

1. **Résistance** : La pièce doit supporter et transmettre les charges externes qui lui sont imposées, (la capacité qu'a un corps de résister aux forces appliquées).
2. **Rigidité** : La pièce ne doit pas subir de déformation excessive lorsqu'elle est sollicitée, (la propriété qu'a un corps à résister aux déformations).
3. **Stabilité** : La pièce doit conserver son intégrité géométrique afin que soient évitées des conditions d'instabilité (flambement).
4. **Endurance** : La pièce, si elle est soumise à un chargement répété, doit pouvoir tolérer sans rupture un certain nombre de cycles de sollicitation variable (fatigue).
5. **Résilience** : Enfin, dans le cas où un chargement dynamique (impact) est à prévoir, la pièce doit pouvoir absorber une certaine quantité d'énergie sans s'en trouver trop endommagée.

1.2. PROPRIÉTÉS DES MATÉRIAUX

Les matériaux résistent, dans la plupart des cas, aux sollicitations auxquelles ils sont soumis car les forces extérieures qui leur sont appliquées, constituent un système en équilibre. Parmi ces forces, il ne faut noter les réactions d'appuis ainsi que les liaisons. Mais ce n'est pas tout, c'est aussi parce que ces matériaux sont doués de propriétés physiques données.

On note parmi les propriétés physiques importantes en résistance des matériaux : l'élasticité, la résistance, la rigidité, la ductilité, la malléabilité, ... Grâce à ces propriétés, les efforts internes engendrées dans les matériaux, sont capables de s'opposer à l'action des forces extérieures, où :

1. **Élasticité** : La propriété physique d'un corps à reprendre sa forme après suppression de la sollicitation (charge).
2. **Ductilité** : La propriété d'un corps à pouvoir être étiré en fils très mince.
3. **Malléabilité** : La propriété d'un corps de pouvoir être réduit en feuilles minces. Un corps ductile est généralement malléable. Un corps qui n'est pas ductile, ni malléable est un corps dit cassant.

1.3. CONVENTION DE SIGNE DES AXES

Généralement on utilise le système Cartésien ou rectangulaire pour toutes les structures. Cependant, pour les structures en arc, le système polaire s'avère plus pratique. Le premier ayant les axes OX, OY et OZ mutuellement perpendiculaire. Les sens positifs des ces axes obéissent à la règle de la main droite. Comme indiqué ci-dessous (Fig. 1.1), on choisit les sens positifs de deux axes X et Y par exemple, le sens positif de l'axe Z est suivant la direction d'un vis tournant de l'axe X vers l'axe Y.

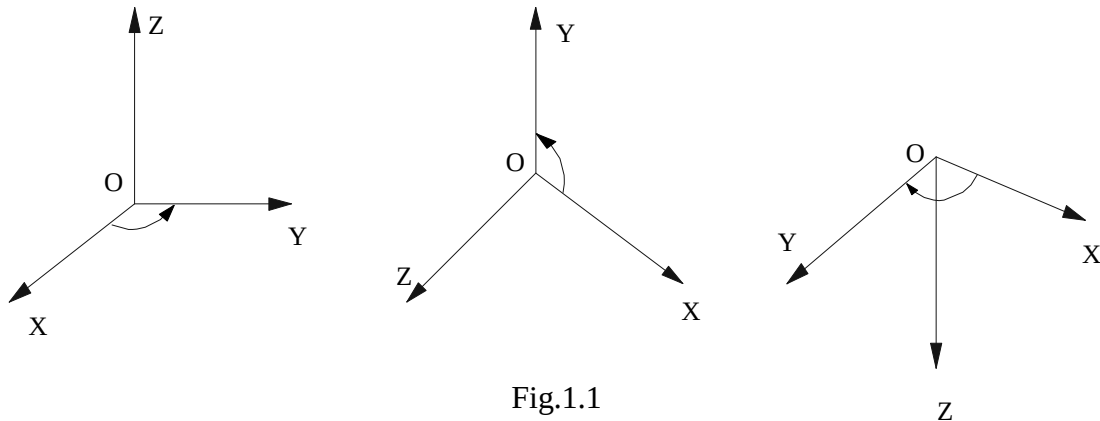


Fig.1.1

1.4. CLASSIFICATION DES SOLIDES (POUTRE, PLAQUE, COQUE)

1.4.1. Poutre

Une poutre est un solide engendré par une surface plane (Σ) dont le centre G décrit une courbe appelée ligne moyenne. Le rayon de courbure de la ligne moyenne est grand par rapport aux dimensions de la section droite (Σ).

- La section droite (Σ) de centre de surface G varie progressivement (Fig. 1.2) ou est constante (Fig. 1.3).
- La poutre a une grande longueur par rapport aux dimensions transversales.
- La poutre possède un plan de symétrie.
- Les points disposés de façon identique sur les sections droites constituent des lignes appelées fibres (Fig. 1.2).
- La ligne moyenne est aussi appelée fibre neutre.
- Lorsque la ligne moyenne est une droite, alors la poutre est appelée poutre droite (Fig. 1.3).
- Les sections droites des poutres étudiées ont un plan de symétrie et qu'elles sont chargées dans ce plan.

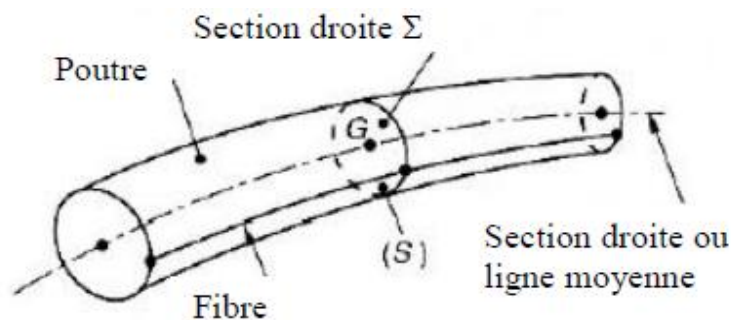


Fig. 1.2

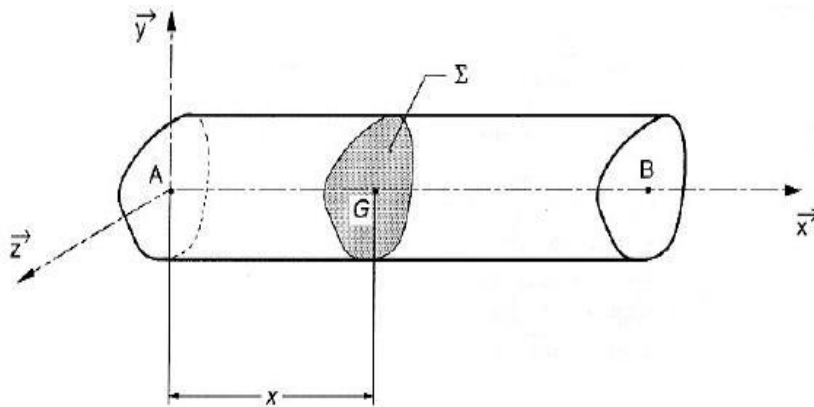


Fig. 1.3

1.4.2. Plaque

Une plaque est un élément prismatique d'épaisseur h petite devant les deux autres directions de l'espace (Fig. 1.4). Le plan moyen sera le plan (O, x, y) , le déplacement transverse étant la direction z . On suppose que l'hypothèse des petits déplacements vérifiée.

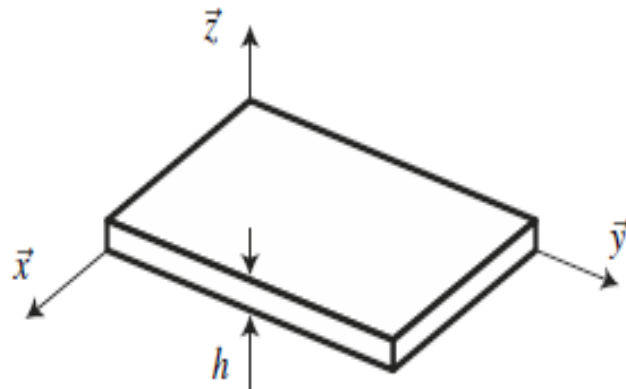


Fig. 1.4

1.4.3. Coque

Une coque est un solide délimité par deux surfaces proches et approximativement parallèles (Fig. 1.5). Elle est soit fermée sur elle-même, soit délimitée en outre par une surface périphérique (le bord) qui joint les deux surfaces principales.

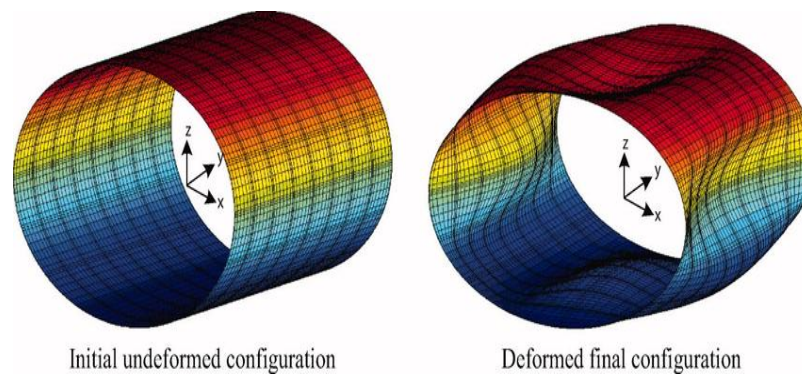


Fig. 1.5

1.5. DIFFÉRENTS TYPES DE CHARGEMENTS

Les chargements peuvent être classifiés de différentes manières. On distingue deux types de chargements (ou actions mécaniques):

- les actions mécaniques de contact (liaisons de contact entre solides, pression,...);
- les actions mécaniques à distance (champ de pesanteur, force électromagnétique,...).

Le premier type d'action est une action qui s'applique sur la surface du solide (action surfacique) tandis que le second s'exerce au niveau de son volume (action volumique).

On distingue aussi les actions extérieures et les actions intérieures à un système de solides.

- On appelle effort (ou action) extérieur appliqué à un système matériel isolé, toutes les actions mécaniques agissant sur ce système, dont l'origine est à l'extérieur du système. Ces actions sont : soit des actions mécaniques de contact ; soit des actions à distances (gravité).
- Les efforts intérieurs sont les efforts que s'exercent mutuellement les différentes parties du système isolé.

• Modélisation des actions mécaniques

L'analyse des actions mécaniques ne peut se faire qu'en utilisant des modèles pour représenter les actions et leurs effets sur le solide. On distingue principalement deux modèles pour représenter et étudier les actions mécaniques, le modèle local et le modèle global.

Le modèle local (Fig. 1.6) permet d'étudier l'action et son effet en tout point de la zone où elle s'exerce: étude des pressions de contact, contraintes dans les matériaux, déformation du solide, ...

Dans le modèle global (Fig. 1.7), on associe à l'action mécanique un torseur (dit Torseur d'Action Mécanique). Ce modèle fait disparaître l'effet local de l'action mais rend son utilisation pratique pour l'étude de l'équilibre ou de la dynamique.

Ces deux modèles, global et local, ne sont pas interchangeables; si on peut déterminer le torseur d'action mécanique à partir de la répartition locale des efforts, on ne peut faire le travail inverse sans faire des hypothèses sur la répartition.

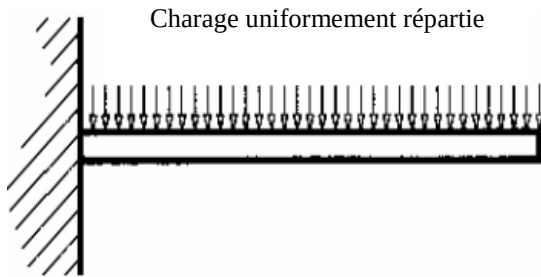


Fig. 1.6

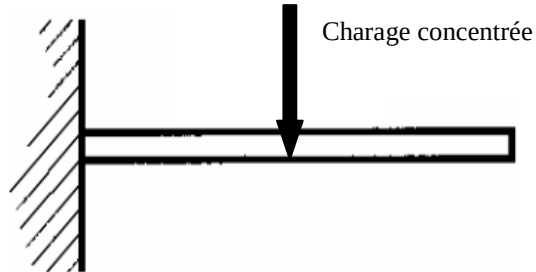


Fig. 1.7

La charge uniformément répartie (Fig. 1.6) est remplacée par l'effort équivalent $\vec{F}$ (Fig.1.7).

• Définition d'un torseur

La définition complète d'un effort (force) fait intervenir deux vecteurs :

- une force $\vec{R}$ appelée résultante,
- un moment $\vec{M}(\vec{R})_O$ en un point O quelconque, appelé moment.

Ces deux vecteurs, appelés éléments de réduction, peuvent être regroupés en une seule écriture dans un nouvel outil mathématique appelé "Torseur".

On note $\{\vec{\tau}\}$ un torseur quelconque et $\{\vec{\tau}\}_O$ ses éléments de réduction au point O.

1.6. RÉACTION D'APPUI (TYPES DE LIAISONS)

Les appuis sont destinés à bloquer les déplacements d'une structure. Dans le plan, trois possibilités de déplacements sont possibles ; deux translations suivant les deux axes X et Y et la rotation ; donc trois degrés de libertés (d.d.l.).

Les appuis peuvent être :

1.6.1. Appui simple

Ce type d'appui matérialisé par la Fig.1.8, le seul déplacement bloqué se trouve en direction perpendiculaire au plan de l'appui, soit une seule réaction (R) d'appui et deux d.d.l.

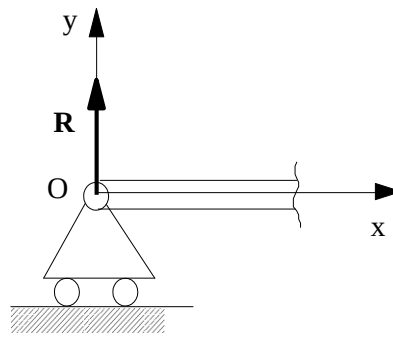


Fig.1.8

1.6.2. Appui double (articulation)

Matérialisé par une rotule (Fig. 1.9), les déplacements sont bloqués dans la direction parallèle et perpendiculaire au plan de l'appui, donc deux réactions R_x et R_y et un seul d.d.l.

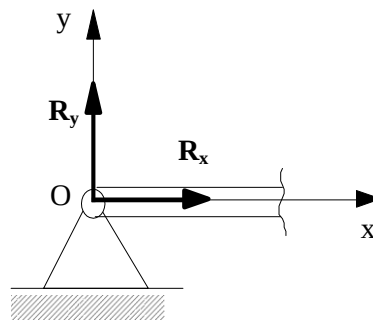


Fig. 1.9

1.6.3. Encastrement

L'encastrement est schématisé sur la Fig. 1.10. Les trois déplacements possibles dans le plan sont bloqués, soit trois réactions d'appui R_x , R_y , M et zéro de d.d.l.

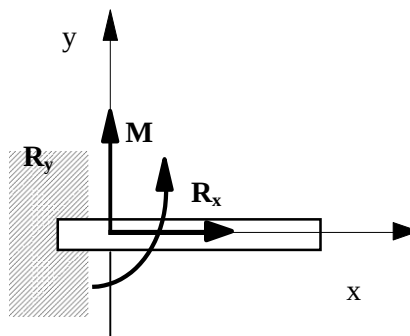


Fig. 1.10

- **Récapitulation sur la modélisation des liaisons**

Les différentes liaisons souvent réalisées en domaine du génie civil sont récapitulées sur le tableau 1.1.

Tableau 1.1. Modélisation des liaisons

Type de liaison	Modélisation	Inconnue de liaison
Appui simple (ou mobile)		1 inconnue 
Appui double (articulation)		2 inconnues 
Encastrement		3 inconnues 

1.7. CONDITIONS D'ÉQUILIBRE

- **Systèmes dans le plan**

Puisque l'ensemble des forces peut être remplacé par une résultante unique ou dans certain cas par deux forces formant un couple M , donc pour qu'un système soit en équilibre dans le plan (OXY) on doit avoir :

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0 \quad \text{et} \quad \sum M_{F/O} = 0$$

- **Systèmes spatiaux**

Un solide est en équilibre si le système des forces qui lui sont appliquées est équivalent à zéro. Donc un solide dans l'espace pour qu'il soit en équilibre les conditions suivantes doivent être vérifiées :

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum F_z = 0, \quad \sum M_x = 0, \quad \sum M_y = 0, \quad \text{et} \quad \sum M_z = 0$$

M_x , M_y et M_z sont les moments de toutes les forces par rapport aux axes X, Y, Z respectivement.

1.8. RÉOLUTION D'UN PROBLÈME DE STATIQUE

La résolution d'un problème de statique consiste à déterminer toutes les actions extérieures au système de solides isolé, notamment les composantes des torseurs mécaniques de liaison.

Il est possible d'écrire les trois équations (vus précédemment) du principe fondamental de statique pour chaque solide isolé, on dispose donc de $3n$ équations pour un système comportant n solides.

Les équations du principe fondamental de statique permettront de déterminer les actions de liaison à condition que le nombre total d'inconnues ne soit pas supérieur à $3n$.

Il existe trois cas :

- **Système hypostatique** : si le nombre total d'inconnues de liaison i est inférieur au nombre d'équations de la statique $3n$. Le système est un mécanisme.
- **Système isostatique** : le nombre d'inconnue de liaison i est égal au nombre d'équations de la statique $3n$. On dispose alors d'autant d'équations que d'inconnues et il est possible de déterminer toutes les inconnues de liaison.
- **Système hyperstatique** : le nombre d'inconnue de liaison i est supérieur au nombre d'équations de la statique $3n$. il est donc impossible de déterminer les inconnues de liaison en utilisant uniquement les équations de la statique. Il faut alors avoir recours à des principes énergétiques afin d'obtenir $(i - 3n)$ équations manquantes.

1.9. EFFORTS INTERNES

On appelle forces extérieures ou charges les forces appliquées connues sur une structure donnée. Suivant le cas, ces charges peuvent-être réparties avec une densité donnée de volume (poids propre d'une structure) ou concentrées en un certain nombre de points. Dans cette catégorie de forces extérieures figurent aussi les réactions d'appuis. Sous l'effet de ces charges, les forces entre les particules d'un corps (élément) en équilibre varient. En Résistance des Matériaux, on appelle souvent cette variation des forces efforts internes.

Afin de faciliter l'étude des efforts exercés sur chaque particule matérielle, on considère une section transversale d'un élément soumis à une sollicitation (Fig.1.11). Tout comme n'importe quel système de forces, les efforts intérieurs répartis sur toute la section peuvent être rapportés à un point (par exemple le centre de gravité de la section), et de ce fait on distingue le vecteur force F (N , T_z , T_y) et le vecteur moment M (M_x , M_y , M_z) résultant des forces intérieures dans la section. Il convient d'adopter les dénominations suivantes pour les forces et moments agissant dans une section.

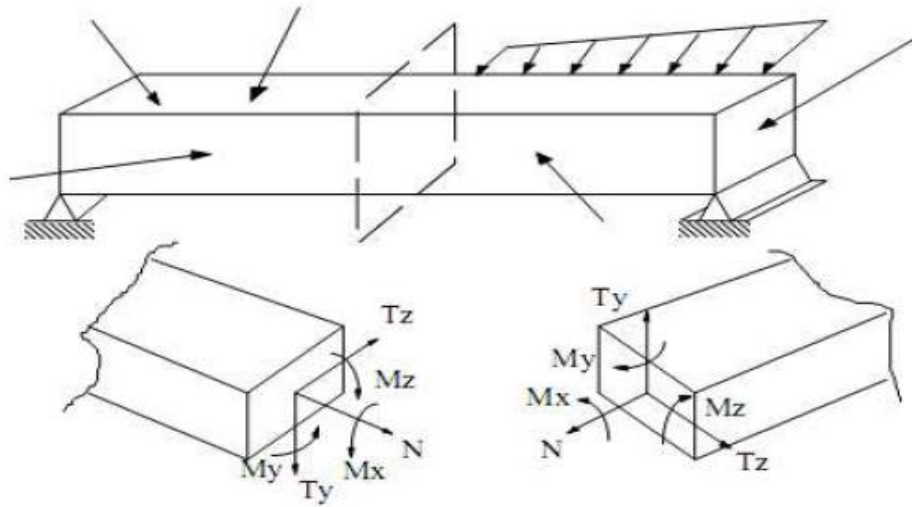


Fig.1.11

1.9.1. Effort normal

La composante N de la résultante F représente la somme des projections de toutes les forces intérieures agissant suivant la normale de la section (ou suivant l'axe longitudinal de l'élément). L'effort normal provoque une déformation longitudinale de l'élément. N est considéré positif s'il s'agit d'une traction et négatif dans le cas contraire.

1.9.2. Efforts tranchants

Les forces transversales T_z , et T_y sont les sommes des projections de toutes les forces intérieures dans la section sur les axes centraux principaux de cette dernière. Ces efforts tranchants provoquent le cisaillement des bords de la section respectivement dans la direction des axes Z et Y . Le sens de T sur le plan est positif par convention quand il tend à faire tourner un élément entre deux sections dans le sens des aiguilles d'une montre comme indiqué sur la Fig. 1.12.

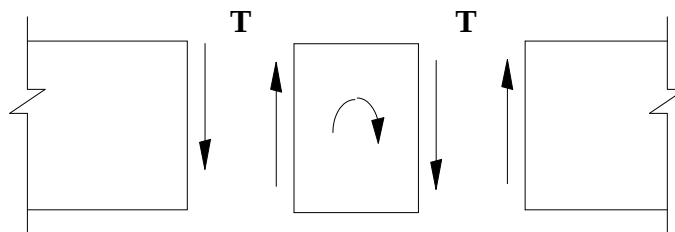


Fig.1.12

1.9.3. Moments fléchissants

Les composantes M_y , et M_z du vecteur moment résultant représentent les sommes des moments de toutes les forces intérieures dans la section, par rapport aux axes d'inertie principaux de cette dernière Y et Z respectivement. La Fig. 1.13 indique le sens positif des moments dans le plan qui par convention tend les fibres inférieures et comprime les fibres supérieures de la section.

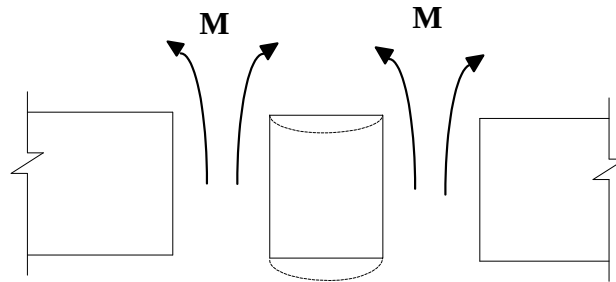


Fig. 1.13

1.9.4. Moment de torsion

Le moment de torsion M_x (ou M_t) est la somme des moments de toutes les forces intérieures dans la section par rapport à l'axe de la barre X . Le moment de torsion est positif lorsqu'il tend à tourner la section dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (sens trigonométrique) en regardant la section du côté de la normale extérieure (Fig. 1.14)

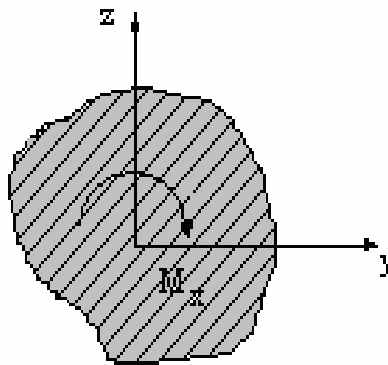


Fig. 1.14

1.10. MÉTHODE DES SECTIONS

Pour déterminer les forces intérieures qui apparaissent dans un élément soumis à une sollicitation, on se sert, en résistance des matériaux, de la méthode des sections. Cette méthode est basée sur le fait que si un élément est en équilibre, sous l'action des forces extérieures, alors n'importe quelle partie de cet élément sous l'action des forces qui lui sont appliquées, est équilibré par un système de forces intérieures agissant dans la section.

On considère l'élément AB plan, soumis à l'action d'un système de forces extérieures (Fig.1.15). Pour calculer les efforts et moments dans n'importe quelle section, on coupe à l'endroit voulu l'élément AB en deux parties. Les valeurs numériques des efforts N , T et M sont égaux aux sommes algébriques des projections et des moments des forces extérieures agissant sur une des parties (gauche ou droite) de l'élément sectionné, généralement sur celle où les projections et moments se calculent plus facilement.

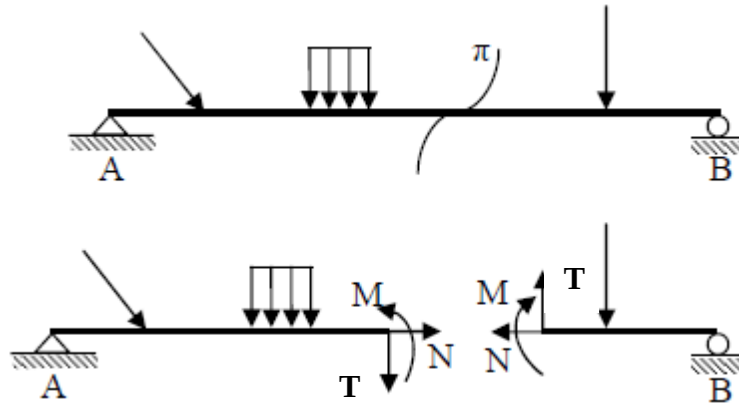


Fig.1.15

1.11. CONVENTIONS DE SIGNES DES EFFORTS INTÉRIEURS

Les efforts intérieurs en un point G de la ligne moyenne d'une poutre sont les composantes des éléments de réduction du torseur des efforts intérieurs. Ces efforts intérieurs prennent les notations suivantes (Fig. 1.16):

- N est l'effort normal (dans la direction x)
- T_y est l'effort tranchant dans la direction y
- T_z est l'effort tranchant dans la direction z
- $T = T_y + T_z$ est l'effort tranchant
- M_t est le moment de torsion (autour de l'axe x)
- M_y est le moment de flexion ou fléchissant (autour de l'axe y)
- M_z est le moment de flexion ou fléchissant (autour de l'axe z)
- $M = M_y + M_z$ est le moment de flexion

• **Remarque :**

Le signe de N a un sens physique : $N > 0$ signifie une traction. $N < 0$ signifie une compression. Il est facile de voir que cela est indépendant de l'orientation de la ligne moyenne.

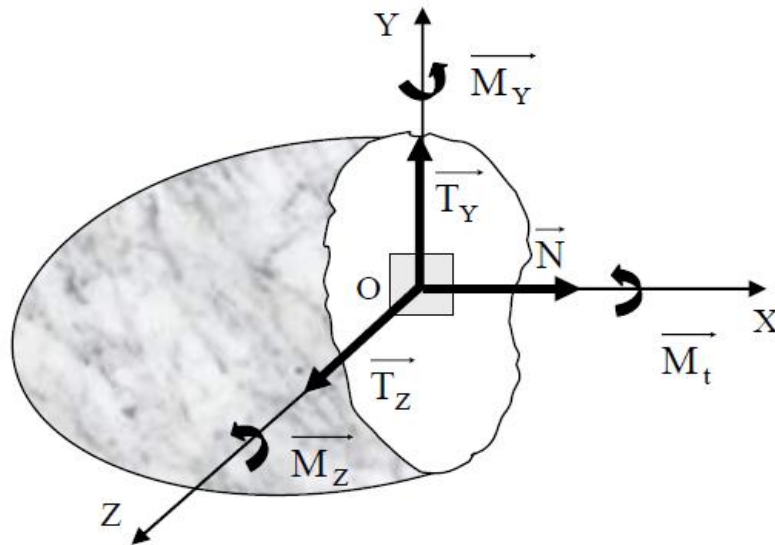


Fig. 1.16

- **Diagrammes des efforts intérieurs**

On appelle diagrammes des efforts intérieurs les courbes représentant la variation de chacun des efforts intérieurs selon la ligne moyenne. Ces représentations sont utiles pour situer rapidement les sections les plus sollicitées.

- **Sollicitations simples**

Les sollicitations couramment rencontrées sont la traction ou la compression, la flexion, la torsion et le cisaillement. Quelques types de sollicitations simples sont donnés sur le tableau 1.2. La Fig. 1.17 schématise ces types de sollicitations.

Tableau 1.2. Quelques types de sollicitations

Sollicitations	Effort Normal	Effort Tranchant	Moment de Torsion	Moment de Flexion
Traction/compression	$N \neq 0$	$T = 0$	$M_t = 0$	$M_f = 0$
Cisaillement pur	$N = 0$	$T_y \text{ (ou } T_z) \neq 0$	$M_t = 0$	$M_f = 0$
Torsion pure	$N = 0$	$T = 0$	$M_t \neq 0$	$M_f = 0$
Flexion pure	$N = 0$	$T = 0$	$M_t = 0$	$M_z \text{ (ou } M_y) \neq 0$
Flexion simple	$N = 0$	$T_y \text{ (ou } T_z) \neq 0$	$M_t = 0$	$M_z \text{ (ou } M_y) \neq 0$

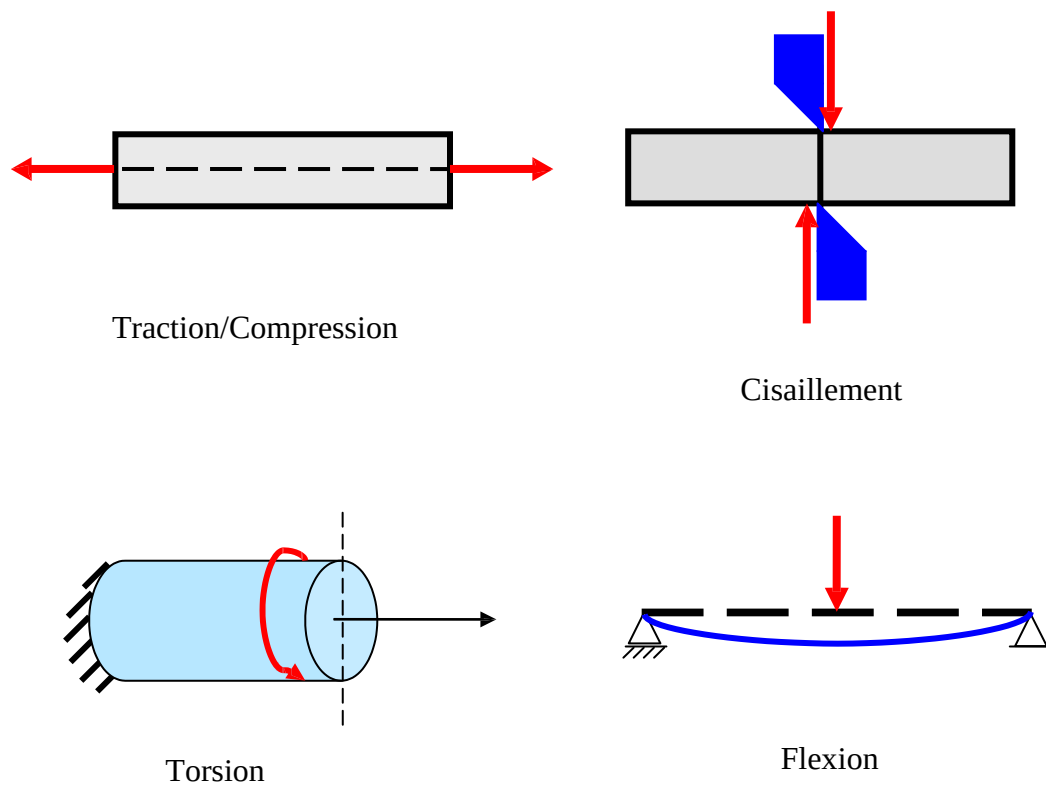


Fig. 1.17