

Chapitre 4 : Analyse de sensibilité et fiabilité probabiliste

- 4.1. Objectif de l'analyse de sensibilité : hiérarchiser les paramètres influents.
- 4.2. Méthodes locales vs globales.
- 4.3. Fiabilité des structures
- 4.4. Indice de fiabilité (β).
- 4.5. Les Méthodes "FORM" et "SORM" (First/Second Order Reliability Methods).
- 4.6. Notion de probabilité de défaillance.
- 4.7. Courbes de fragilité et probabilités conditionnelles.

Chapitre 3

Analyse de sensibilité et fiabilité probabiliste

4.1. – Objectif de l'analyse de sensibilité

L'analyse de sensibilité vise à hiérarchiser les paramètres influents pour comprendre et quantifier l'impact des variations des variables sur les résultats d'un modèle, afin de se concentrer sur les facteurs les plus critiques pour la prise de décision. En identifiant ces variables clés, il est possible d'améliorer la robustesse d'un modèle, d'optimiser les processus, de réduire les incertitudes et de prendre des décisions plus éclairées.

4.1.1. Objectifs principaux de l'analyse de sensibilité

- **Identifier les variables critiques** : Déterminer quelles variables d'entrée ont l'influence la plus significative sur les résultats du modèle.
- **Hiérarchiser les paramètres** : Classer les variables par ordre d'importance pour concentrer les efforts sur celles qui ont le plus d'impact.
- **Quantifier les relations** : Comprendre quantitativement le lien entre les variations des variables d'entrée et les changements dans la sortie du modèle.
- **Améliorer la robustesse** : Évaluer la fiabilité d'un modèle ou d'un système face aux incertitudes en identifiant les facteurs sensibles.
- **Aider à la prise de décision** : Fournir des informations précieuses pour éclairer les stratégies et les décisions en tenant compte des résultats potentiels de différentes variables.

4.1.2. Applications concrètes

- **Modélisation financière** : Évaluer comment les changements dans les taux d'intérêt ou les coûts d'acquisition des clients affectent la rentabilité d'une entreprise.
- **Gestion de projet** : Comprendre l'impact des différentes variables sur les résultats d'un projet pour mieux gérer les risques et allouer les ressources.
- **Ingénierie et sciences** : Tester la robustesse d'un modèle ou d'un système et identifier les points faibles.
- **Science des données** : Valider les modèles prédictifs en identifiant les paramètres qui affectent le plus les prévisions, afin d'affiner la collecte de données et la précision du modèle.

4.2. – Méthodes statistiques globales et locales

Les méthodes statistiques globales et locales se distinguent principalement par l'échelle d'analyse et la portée des conclusions.

4.2.1. Méthodes statistiques globales

- **Définition** : Les méthodes statistiques globales analysent l'ensemble d'un jeu de données pour en tirer des conclusions générales qui s'appliquent à l'ensemble du phénomène ou de la population étudiée. Elles visent à identifier des tendances, des moyennes ou des relations valables pour l'intégralité du domaine d'étude.
- **Caractéristiques** : Elles opèrent une synthèse de l'information, souvent par le biais de statistiques descriptives (moyenne, variance, etc.) ou de modèles inférentiels généraux (régression linéaire globale, tests d'hypothèses sur l'ensemble de l'échantillon).
- **Limites** : Elles peuvent masquer des variations ou des particularités régionales ou locales significatives, en lissant les différences infranationales ou infrarégionales.
- **Exemple** : Le calcul du taux d'emploi national ou d'une moyenne de température à l'échelle d'un pays.

4.2.2. Méthodes statistiques locales

- **Définition :** Les méthodes statistiques locales se concentrent sur des sous-ensembles spécifiques, des régions ou des "petits domaines" des données pour en extraire des informations détaillées et adaptées à ces contextes particuliers. Elles tiennent compte de l'hétérogénéité spatiale ou structurelle des données.
- **Caractéristiques :** Elles utilisent souvent des informations auxiliaires et des modèles d'estimation spécifiques pour compenser la faiblesse des échantillons locaux. Dans l'analyse spatiale, par exemple, elles examinent comment une statistique varie d'un endroit à l'autre.
- **Avantages :** Elles permettent une meilleure compréhension des dynamiques locales et des particularités qui seraient ignorées par une approche globale.
- **Exemple :** L'estimation du taux de chômage au niveau d'un département, d'une commune ou d'un quartier (petits domaines), ou l'analyse localisée d'un tableau de contingence pour identifier des relations spécifiques entre certaines catégories.

En résumé, la distinction réside dans la **portée de l'analyse** : les méthodes globales cherchent des modèles universels, tandis que les méthodes locales s'adaptent aux spécificités de sous-ensembles de données.

4.3. Fiabilité des structures

La fiabilité structurelle est la science de l'application des théories de l'ingénierie de la fiabilité aux bâtiments et autres structures ^{[1],[2]}. Il est également utilisé comme méthode pour décrire la sécurité structurelle. La fiabilité d'une structure est définie comme la probabilité de complément de défaillance ($\text{Fiabilité} = 1 - \text{Probabilité de défaillance}$). La défaillance se produit lorsque la charge totale appliquée est supérieure à la résistance totale de la structure. La fiabilité structurelle est devenue connue comme une philosophie de conception au XXI^e siècle, et elle pourrait remplacer les méthodes déterministes traditionnelles de conception ^[3] et de maintenance.

4.3.1. Théorie

Les charges et les résistances sont modélisées comme des variables probabilistes. En utilisant cette approche, la probabilité de défaillance d'une structure est calculée. Lorsque les charges et les résistances sont explicites et ont leur propre fonction indépendante, la probabilité de défaillance peut être formulée comme suit^{[1],[4]}.

$$P_f = \int_0^{\infty} F_R(s) f_s(s) ds \quad (1)$$

où P_f est la probabilité de défaillance, $F_R(s)$ est la fonction de distribution cumulative de la résistance (R) et $f_s(s)$ est la densité de probabilité de la charge (S).

Mais en réalité, la distribution des charges et des résistances n'est généralement pas indépendante, et la probabilité de défaillance est définie par la formule suivante.

$$P_f = \iiint_{G(X)} f_X(X) dX \quad (2)$$

où X est le vecteur des variables de base, et $G(X)$ qui est appelée est la fonction d'état limite pourrait être une ligne, une surface ou un volume dont l'intégrale est prise sur sa surface.

4.3.2. Approches de solution

a. Solutions exactes

Lorsque la charge et la résistance sont explicitement exprimées (comme l'équation (1) ci-dessus) et que leurs distributions sont **normales**, l'intégrale de l'équation (1) a une solution de forme fermée comme suit^[1].

$$P_f = 1 - \Phi(\beta), \quad \beta = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \quad (3)$$

β est l'indice de fiabilité.

b. Méthode de Monte-Carlo

Souvent, la charge et la résistance ne sont pas normalement distribuées. Par conséquent, la résolution analytique des intégrales des équations (1) et (2) est impossible. L'utilisation de la simulation de Monte Carlo est une approche qui pourrait être utilisée dans de tels cas^{[1],[4]}.

4.3.3. Facteurs pris en compte

- **Résistance des matériaux** : La fiabilité dépend des propriétés des matériaux utilisés.
- **Charges appliquées** : Les forces et charges (permanentes, variables, climatiques) sont considérées comme des variables aléatoires.
- **Géométrie** : Les dimensions et la forme de la structure ont un impact direct sur sa fiabilité.
- **Conditions environnementales** : Les contraintes externes, telles que les chocs, la corrosion ou les tremblements de terre, peuvent altérer la fiabilité.
- **Vieillessement** : Des phénomènes comme l'usure, l'érosion et la fatigue, qui augmentent le taux de défaillance avec le temps, sont étudiés pour évaluer la fiabilité à long terme.

4.3.4. Mise en œuvre

- **Modélisation** : Les modes de défaillance (par exemple, rupture d'une poutre, instabilité du sol) sont modélisés pour être analysés.
- **Calculs** : Des méthodes probabilistes comme FORM (First Order Reliability Method) et SORM (Second Order Reliability Method) sont utilisées pour évaluer la fiabilité de structures complexes.
- **Normes et codes** : De nombreuses normes de conception et de maintenance, comme les Eurocodes ou les normes AASHTO pour les ponts, intègrent des concepts de fiabilité.

4.4. Indice de fiabilité (β).

L'**indice de fiabilité (β)** est un paramètre essentiel utilisé en ingénierie, notamment dans le génie civil et la mécanique, pour **évaluer quantitativement la fiabilité d'une structure ou d'un système**. Il permet de relier la probabilité de défaillance d'un ouvrage aux exigences de sécurité fixées par les normes (comme les Eurocodes).

4.4.1. Définition et Signification

L'indice β fournit une mesure numérique unique de la fiabilité d'un système. Il est défini comme le nombre d'écarts-types séparant la valeur de défaillance de la

valeur moyenne. Plus la valeur de β est élevée, plus la fiabilité du système est grande et plus la probabilité de défaillance est faible.

4.4.2. Relation avec la probabilité de défaillance (P_f)

L'indice β est inversement lié à la probabilité de défaillance. Il peut être calculé selon la formule :

$$P_f = \Phi(-\beta) \text{ ou } \beta = -\Phi^{-1}(P_f)$$

Où : Φ^{-1} est la fonction de répartition inverse de la loi normale centrée réduite.

4.4.3. Interprétation

- Un β élevé indique une grande marge de sécurité et une faible probabilité de défaillance.
- Les normes d'ingénierie (comme les Eurocodes) spécifient des valeurs cibles de β pour différentes classes de conséquences (CC1, CC2, CC3), adaptées à la criticité de l'ouvrage.

4.4.4. Utilisation dans le Domaine de la Fiabilité

En ingénierie de la fiabilité, l'indice β est utilisé de plusieurs manières :

- **Dimensionnement et Conception** : Il guide le dimensionnement des structures en définissant les coefficients partiels de sécurité nécessaires pour atteindre le niveau de fiabilité requis.
- **Évaluation de la Durabilité** : Dans le contexte du modèle de Weibull, l'indice β (souvent appelé paramètre de forme ou "bêta de Weibull") décrit l'évolution du taux de défaillance dans le temps :
 - $\beta < 1$: Le taux de défaillance diminue avec le temps (défaillances précoces ou "infantiles").
 - $\beta \approx 1$: Le taux de défaillance est constant (défaillances aléatoires, période de vie utile).
 - $\beta > 1$: Le taux de défaillance augmente avec le temps (défaillances dues à l'usure ou au vieillissement).

4.4.5. Méthodes de Calcul

Des méthodes fiabilistes avancées, telles que FORM (First Order Reliability Method) et SORM (Second Order Reliability Method), sont utilisées pour estimer l'indice β dans des espaces de variables aléatoires transformées en variables normales centrées réduites.

En résumé, l'indice de fiabilité β est un outil clé de l'ingénierie moderne pour garantir la sécurité, la durabilité et la conformité des ouvrages aux exigences réglementaires en matière de fiabilité.

4.5. Les Méthodes "FORM" et "SORM"

Les méthodes **FORM** (First Order Reliability Method) et **SORM** (Second Order Reliability Method) sont des techniques d'**analyse de fiabilité structurelle** semi-probabilistes largement utilisées, notamment en ingénierie, pour évaluer la probabilité de défaillance des systèmes soumis à des incertitudes (dispersions multiples des paramètres).

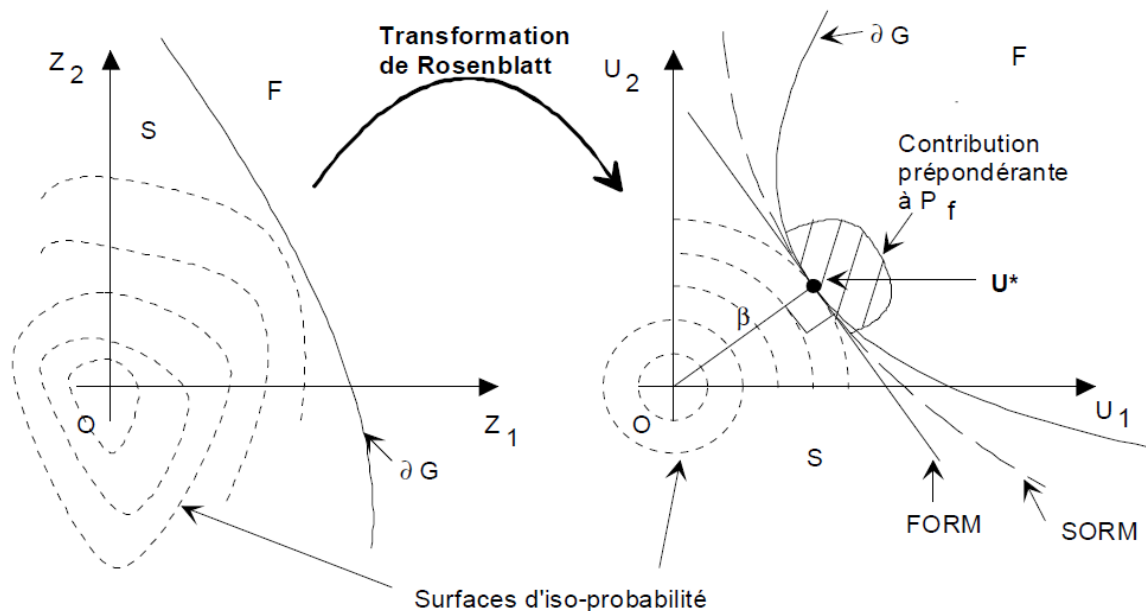


Figure 4.1 – Transformation d'espace, indice de fiabilité β_{HL} , approximations FORM et SORM

4.5.1. Principe général

Ces méthodes visent à estimer la probabilité de défaillance, souvent très faible et difficilement calculable par des simulations directes comme la méthode de Monte Carlo, en se basant sur une simplification du domaine de défaillance.

Le processus implique généralement les étapes suivantes :

1. **Transformation des variables** : Les variables aléatoires initiales (espace physique X) sont transformées en un ensemble de variables normales centrées réduites, indépendantes (espace normal standard U).
2. **Fonction d'état limite** : Une fonction d'état limite $g(X)$ (ou $g(U)$) dans l'espace transformé) est définie, où $g(X) = 0$ représente la surface de défaillance, $g(X) < 0$ le domaine de défaillance et $g(X) > 0$ le domaine de sécurité.
3. **Point de conception (MPP)** : Le "Most Probable Point" (MPP) ou point de conception est identifié. C'est le point sur la surface d'état limite ($g(U) = 0$) qui est le plus proche de l'origine dans l'espace normal standard « U ».
4. **Indice de fiabilité (β)** : La distance minimale de l'origine au MPP est l'indice de fiabilité (β), qui est directement lié à la probabilité de défaillance.

4.5.2. Méthode FORM (First Order Reliability Method)

La méthode FORM est basée sur une **approximation linéaire (du premier ordre)** de la fonction d'état limite au niveau du MPP.

- Elle utilise uniquement les informations sur le **gradient** (dérivées premières) de la fonction au MPP.

La probabilité de défaillance est alors estimée à l'aide de l'indice de fiabilité β et de la fonction de distribution normale standard cumulée Φ :

$$P_f \approx \Phi(-\beta)$$

- **Avantage** : Efficace en termes de calcul.
- **Inconvénient** : La précision diminue si la fonction d'état limite est fortement non linéaire au niveau du MPP.

4.5.3. Méthode SORM (Second Order Reliability Method)

La méthode SORM améliore la précision de la FORM en utilisant une **approximation quadratique (du second ordre)** de la fonction d'état limite au niveau du MPP.

- Elle incorpore des informations sur la **courbure** de la surface de défaillance (dérivées secondes ou matrice hessienne) au MPP pour mieux modéliser les non-linéarités.

- **Avantage** : Plus précise que la FORM, surtout pour les fonctions d'état limite non linéaires.
- **Inconvénient** : Plus coûteuse en calcul car elle nécessite le calcul des dérivées secondes.

En résumé, les méthodes FORM et SORM sont des outils essentiels pour l'analyse de fiabilité, offrant un compromis différent entre la vitesse de calcul (FORM) et la précision pour les systèmes complexes et non linéaires (SORM).

Caractéristique	FORM	SORM
Approximation de la limite de défaillance	Hyperplan (linéaire)	Surface courbe (quadratique)
Précision	Moins précise	Plus précise
Complexité de calcul	Moins coûteuse	Plus coûteuse (nécessite des courbures)
Usage principal	Estimations rapides, calcul de l'indice de fiabilité β	Estimations plus précises, surtout pour des limites non linéaires

4.5.5. Application à un problème à deux variables normales

a) Présentation du problème

Dans la méthode contrainte-résistance, la condition sur la durée de vie : $F(t) \leq \alpha$, s'exprime par une résistance R supérieure à une contrainte S (*stress*) : $R \geq S$, ou plutôt en définissant la marge $m = R - S$: $m \geq 0$.

Cette marge m est donc une fonction de défaillance : $g(R, S) = m$.

Si l'on dispose des distributions (densités de probabilité) f_R et f_S , on peut alors déterminer cette probabilité :

$$F(t) = P(R \leq S) = P(m \leq 0)$$

La probabilité d'avoir un couple de valeurs dans un intervalle ($[S, S + dS]$, $[R, R+dR]$) est donné par :

$$P([S, S + dS] \cap [R, R+dR]) = P([S, S + dS]) \times P([R, R+dR]) = f_S \times f_R \times dS \times dR.$$

On peut tracer la surface $y = f_S \times f_R$, ainsi que la ligne de séparation $m = 0$: cette ligne marque l'état limite entre la situation de survie et la situation de défaillance. Une méthode simple d'estimer la probabilité $P(m \leq 0)$ consiste à utiliser une méthode de Monte-Carlo : on effectue N tirages aléatoires de couples (R, S) , et l'on dénombre les n situations pour lesquelles $m \leq 0$:

$$P(m \leq 0) \simeq n/N.$$

Si l'on veut un risque α faible, cela signifie que le sommet de la surface doit être loin de l'état limite $m = 0$.

Le point que l'on veut le mieux connaître est le maximum de la courbe $m = 0$; c'est notre « point de conception ». Si le risque α est faible, alors le point de conception est loin du sommet de la surface. Cela signifie que lors du tirage aléatoire, peu de points seront proches du point de conception ; il faudra donc de très nombreux tirages — N devra être très grand — si l'on veut caractériser ce point.

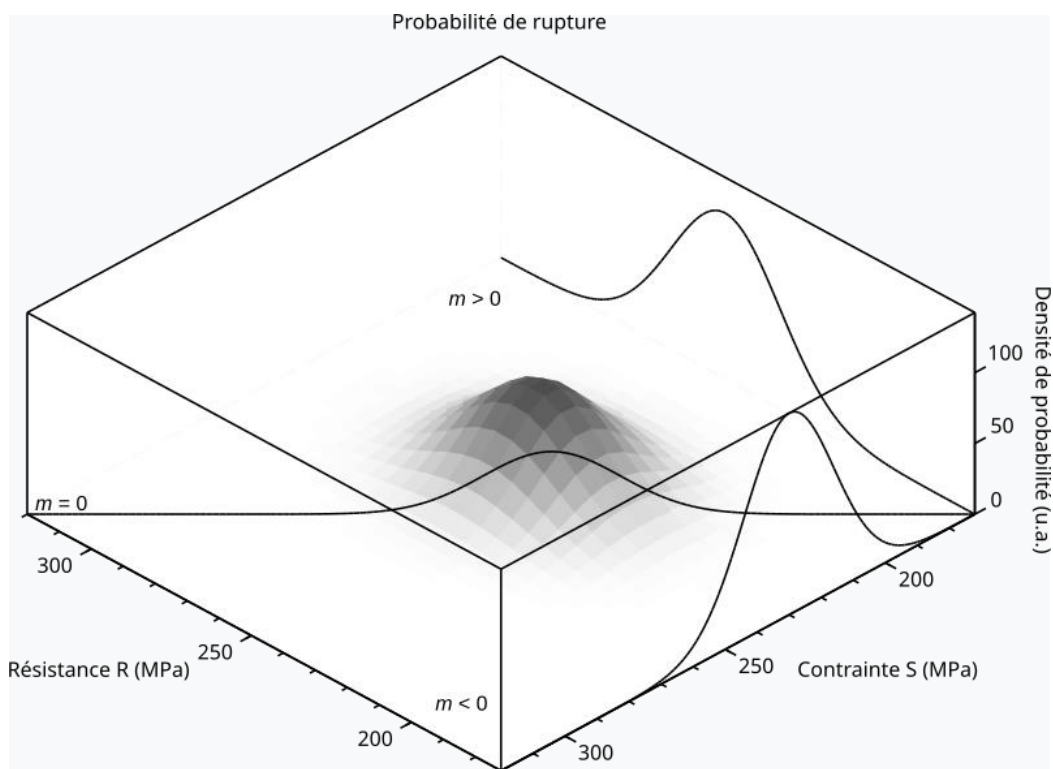


Figure 4.2 : Distribution de la contrainte S et de la résistance R : toutes les situations (R, S) ont une densité de probabilité (surface en niveaux de gris). La zone où la marge $m = R - S$ est positive est la zone où le système survit ($R > S$).

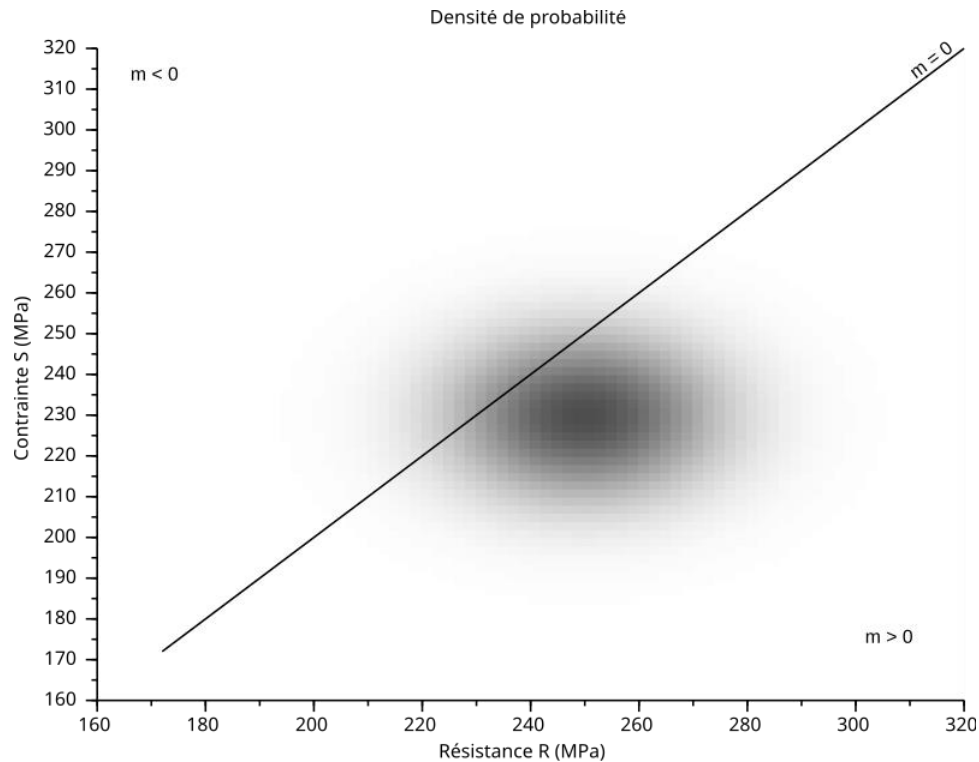


Figure 4.3 : Même situation vue de dessus.

b) Exemple

Nous avons représenté ci-contre une situation pour laquelle :

- La contrainte S suit une loi normale d'espérance $\mu_S = 230$ MPa et un écart type $\sigma_S = 14$ Mpa ;
- La résistance R suit une loi normale d'espérance $\mu_R = 250$ MPa et un écart type $\sigma_R = 17$ Mpa.

Graphiquement, on constate que le maximum de l'état limite se trouve à 238 MPa. Ce point est en général proche de l'intersection des courbes f_S et f_R .

Une méthode de Monte-Carlo avec un million de tirages et un intervalle de confiance de 5 %^[1] donne 18,1 % $\pm$ 0,2 % de défaillance.

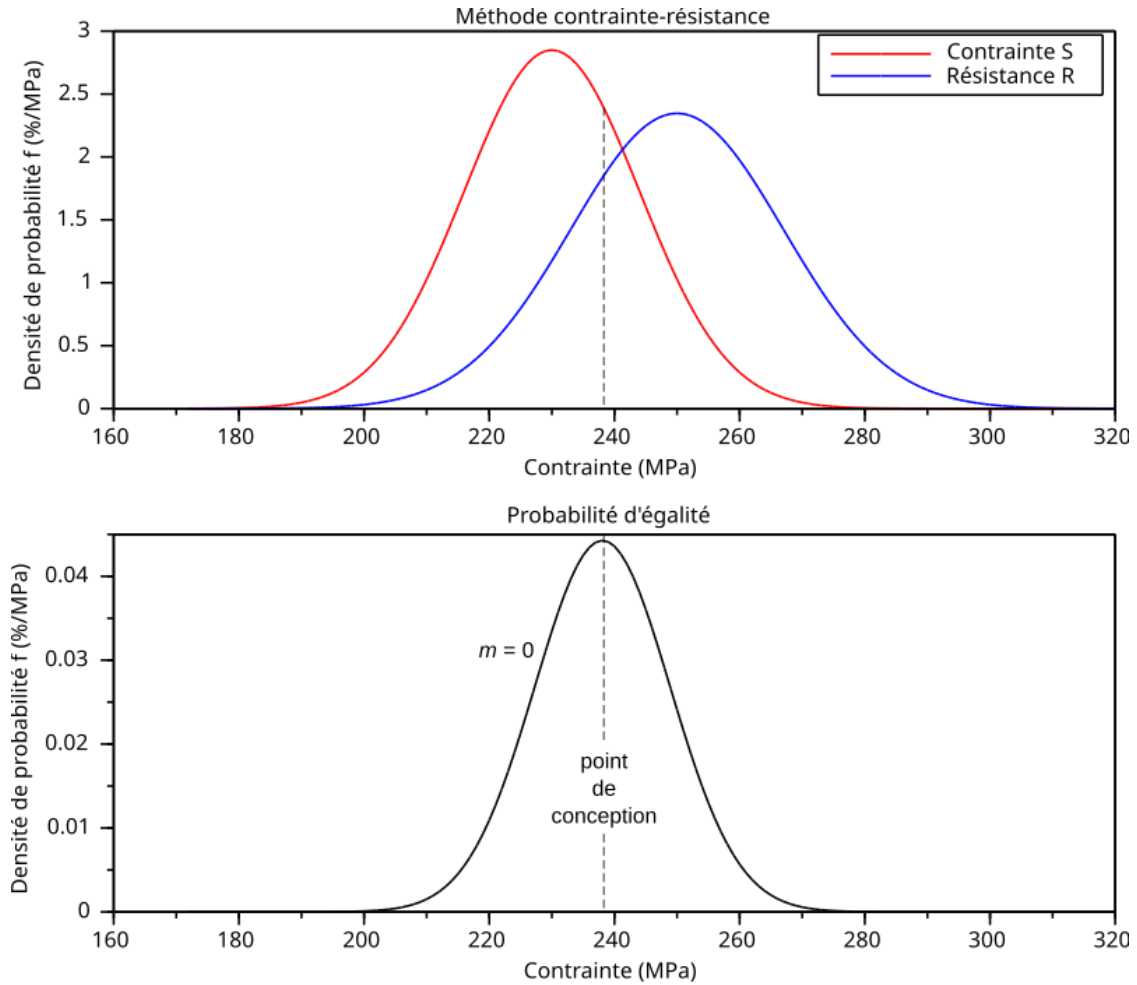


Figure 4.4 : Point de conception : maximum de la courbe $m = 0$.

4.5.6. Mise en œuvre de la méthode FORM

La méthode FORM est une méthode permettant d'obtenir une valeur approchée de la probabilité de défaillance à partir du point de conception. Elle suppose que les distributions de S et de R sont normales.

La première étape consiste à passer dans l'espace des lois centrées réduites : on transforme les coordonnées pour avoir des probabilités de densité d'espérance nulle et de variance 1. Cette étape est appelée « transformation de Nattaf et Rosenblatt ». Les nouvelles coordonnées sont appelées S^* et R^* :

$$R^* = \frac{R - \mu_R}{\sigma_R} ; S^* = \frac{S - \mu_S}{\sigma_S}$$

Le sommet de la surface $f_{S^*} \times f_{R^*}$ se trouve donc aux coordonnées $(0 ; 0)$. La droite d'état limite $m = 0$ ($R - S = 0$) devient donc :

$$R - S = 0 \Leftrightarrow \sigma_R \times R^* + \mu_R - (\sigma_S \times S^* + \mu_S) = 0$$

Ce que l'on peut noter : $m^* = 0$, avec :

$$\sigma_R \times R^* + \mu_R - (\sigma_S \times S^* + \mu_S) = m^*(R^*, S^*)$$

Le point de conception est le point de densité de probabilité maximale sur la droite $m^* = 0$. Du fait des propriétés de symétrie de la surface $f_{S^*} \times f_{R^*}$, c'est aussi le plus proche de l'origine (0 ; 0) — sommet de la surface —, c'est-à-dire celui pour lequel la quantité : $d^{*2} = R^{*2} + S^{*2}$ est minimale.

Pour trouver ce point, on part d'un couple (R^*, S^*) arbitraire, et l'on applique un algorithme d'optimisation (itératif) pour avoir le minimum de d^* avec comme contrainte $m^* = 0$.

La distance d^* atteinte est alors l'indice de fiabilité β , et la probabilité de défaillance P_f s'obtient avec la fonction de répartition Φ de la loi normale centrée réduite : $P_f = \Phi(-\beta)$; c'est la méthode FORM.

Notons que la surface obtenue avec la transformation de Nataff et Rosenblatt est toujours la même ; c'est la droite $m^* = 0$ qui change d'un problème à l'autre.

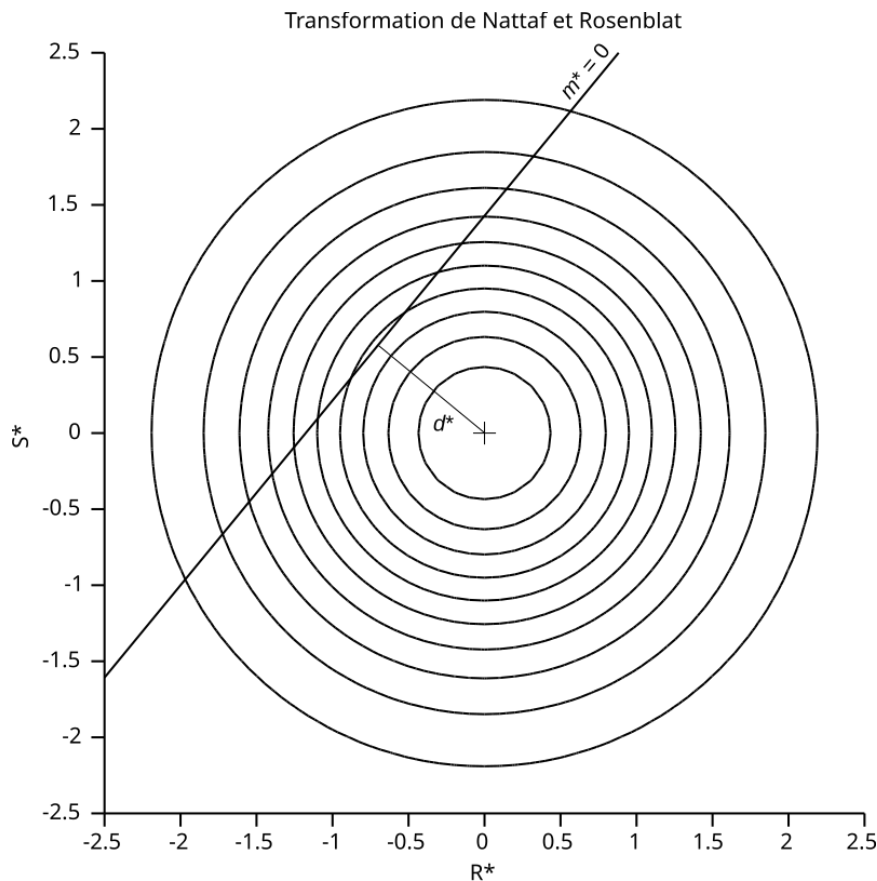


Figure 4.5. Détermination du point de conception par la méthode FORM-SORM.

Exemple

La transformation de Nattaf-Rosenblatt est :

$$R^* = \frac{R - 250}{17}, \quad S^* = \frac{S - 230}{14}$$

On a

$$m^* = 17 \times R^* + 250 - (14 \times S^* + 230) = 17 \times R^* - 14 \times S^* + 20.$$

L'optimisation nous donne le point de conception suivant :

$$R^* = -0,701 ; S^* = 0,577 ; R = S = 238 \text{ MPa}$$

$$\beta = 0,908 ;$$

$$P_f = 0,182 = 18,2 \text{ \%}.$$

Comme dans notre exemple les lois sont effectivement normales et g^* est effectivement linéaire, nous avons un résultat « exact » aux arrondis près : l'approximation provient uniquement du fait que l'on a une résolution numérique.

4.6. Notion de probabilité de défaillance.

La probabilité de défaillance représente le risque qu'un équipement, un système ou une entreprise cesse de fonctionner correctement. Elle se mesure de différentes manières, comme le **taux de défaillance (λ)**, qui est le nombre de défaillances par unité de temps, ou la **probabilité de défaillance à la demande (PFD)**, utilisée pour les systèmes de sécurité. Le calcul dépend du contexte : pour un équipement, on analyse les défaillances au fil du temps, tandis que pour une entreprise, on évalue le risque de ne pas pouvoir rembourser ses dettes.

4.6.1. En ingénierie et fiabilité

- **Taux de défaillance (λ)** : C'est le nombre de défaillances survenant sur une période donnée, rapporté au nombre d'éléments encore fonctionnels au début de la période.
- **Probabilité de défaillance à la demande (PFD)** : Mesure la probabilité qu'un système de sécurité (comme une fonction instrumentée de sécurité) ne fonctionne pas lorsqu'elle est appelée à agir.

- **Courbe en baignoire** : Le taux de défaillance d'un équipement réparable suit généralement une courbe en "baignoire", qui montre trois phases : une période de jeunesse (défaillances initiales), une période de maturité (défaillances aléatoires) et une période d'obsolescence (défaillances dues à l'usure).

La courbe ci-contre montre l'évolution du taux des défaillances pour les différentes entités (Bellaouar et Beleulmi, 2013).

Les courbes du taux de défaillance, "figure I.3" ont une même forme générale dite en baignoire, mais présentent néanmoins des différences suivant la technologie principale du système étudié :

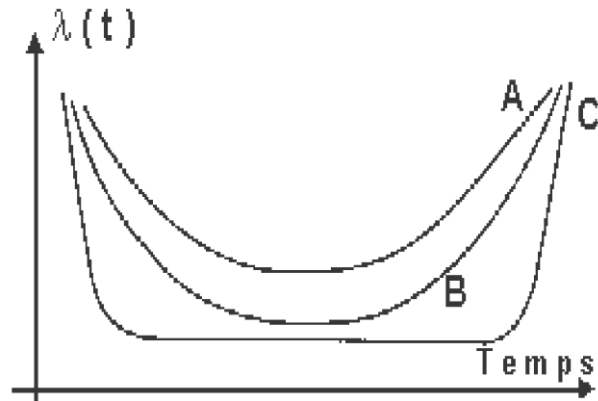


Figure 4.6. Courbes caractéristiques du taux de défaillance

- A. En mécanique.
- B. En électromécanique.
- C. En électronique.

4.6.2. Calcul

- **Taux de défaillance** :
 - Calculé comme le nombre de défaillances divisé par le temps de fonctionnement total.
 - **Formule** :

$$\lambda = \frac{\text{nombre de défaillances}}{\text{temps de fonctionnement total}}$$

- **Exemple** : Si un système a subi 50 pannes sur une période de 1000 heures de fonctionnement, son taux de défaillance est de : $50 / 1000 = 0.05$.
- **Probabilité de défaillance (non instantanée)** :

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

, où t est le temps et λ le taux de défaillance constant.

4.7. Courbes fragilité et probabilités conditionnelles.

Les courbes de fragilité représentent la **probabilité conditionnelle** qu'une structure atteigne ou dépasse un certain niveau de dommage (**état limite**), pour un niveau donné d'intensité de chargement (par exemple, un séisme). En d'autres termes, une courbe de fragilité, souvent modélisée avec une loi log-normale, illustre le risque de dommage en fonction d'un niveau d'excitation.

Mathématiquement, la fragilité $F(a)$ est exprimée comme suit :

$$F(a) = P[LS \geq l_{so} \mid IM = a]$$

Où :

- $P[.... \mid]$: désigne la probabilité conditionnelle.
- LS : représente l'état limite (par exemple, le déplacement d'un pont, l'endommagement d'une structure).
- l_{so} : est le seuil de dommage spécifique considéré.
- IM : est la mesure d'intensité de l'aléa (par exemple, l'accélération maximale du sol pour un séisme, la hauteur d'eau pour une inondation).
- a : est une valeur spécifique de cette intensité

4.7.1. Courbes de fragilité

- a) Définition** : Elles modélisent la probabilité qu'un état de dommage (léger, modéré, important, etc.) soit atteint ou dépassé, pour un niveau d'excitation du sol défini par un paramètre comme l'accélération maximale du sol.
- b) Principe** : Pour une valeur d'intensité sismique donnée sur l'axe des x (par exemple, l'accélération du sol), la courbe indique la probabilité sur l'axe des y que le bâtiment atteigne ou dépasse un état de dommage spécifique.
- c) Modélisation** : Les courbes sont généralement ajustées pour suivre une loi log-normale, ce qui permet d'évaluer la capacité d'un bâtiment à résister à des contraintes sismiques.

En résumé, les courbes de fragilité sont l'outil qui transforme les données sur l'intensité d'un aléa et la résistance d'une structure en une probabilité de défaillance concrète pour un scénario donné, en utilisant le cadre rigoureux des probabilités conditionnelles.

4.7.2. Probabilités conditionnelles

a) Définition : La probabilité conditionnelle de l'événement B sachant que l'événement A s'est déjà produit est notée $P(B|A)$.

b) Formule : Elle se calcule avec la formule : $P(B|A) = P(A \cap B)/P(A)$, où $P(A \cap B)$ est la probabilité conjointe des deux événements.

c) Lien avec les courbes de fragilité :

- L'événement A correspond à l'atteinte ou au dépassement d'un certain niveau d'intensité sismique.
- L'événement B correspond au dépassement d'un certain état de dommage (par exemple, dommage modéré).
- La courbe de fragilité est donc la fonction qui donne la valeur de $P(B|A)$ pour différents niveaux d'intensité sismique A .

4.7.3. Courbes de fragilité des bâtiments

Les courbes de fragilité (CF) des bâtiments suivent une loi log-normale et décrivent la probabilité d'atteindre ou de dépasser les états de dommages structuraux et non structuraux, en fonction des estimations médianes de la réponse spectrale. Elles illustrent les variations de probabilité des différents états de dommages, notamment pour les trois niveaux de réponse spectrale correspondant à des secousses sismiques faibles, moyennes et fortes.

La figure 12 présente des exemples de CF exprimant les différentes probabilités d'atteinte des états de dommages :

dommages légers (DL),
dommages modérés (DM), dommages importants (DI) et dommages complets (DC), correspondant aux trois niveaux de réponse spectrale [Sheenthoi et al, 2022].

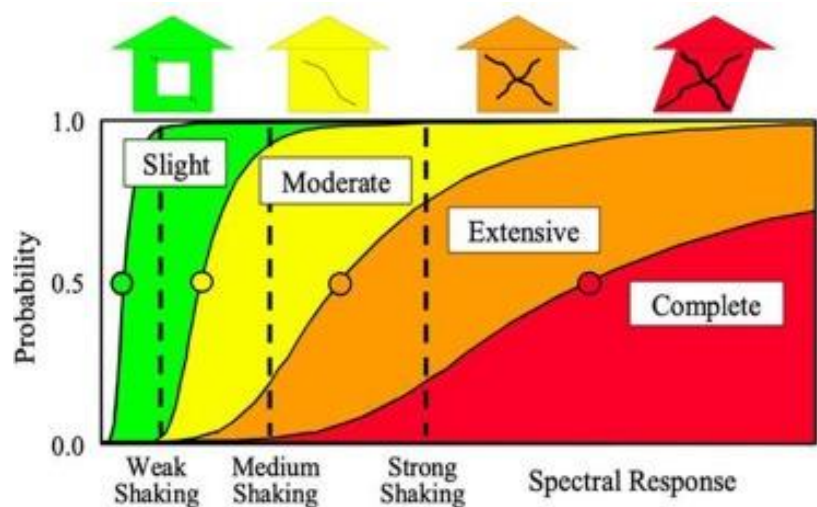


Figure 1. Niveaux d'endommagement décrits par les courbes de fragilités [CSI, 2005]

4.7.3. Exemple numérique

Voici un exemple numérique simplifié pour illustrer le concept de courbe de fragilité sismique pour une structure donnée.

a) Contexte de l'exemple :

Nous considérons un bâtiment simple dont nous souhaitons évaluer la probabilité d'atteindre un **état limite de dommage modéré** (fissures importantes, éléments non structuraux endommagés) en fonction de l'accélération maximale du sol (PGA, de l'anglais *Peak Ground Acceleration*).

Les courbes de fragilité sont souvent modélisées par une distribution log-normale, caractérisée par deux paramètres :

- **Médiane (S_c)** : Le niveau d'intensité de l'aléa pour lequel il y a 50 % de chances que l'état limite soit atteint ou dépassé.
- **Dispersion (β)** : Une mesure de l'incertitude et de la variabilité (plus β est faible, plus la courbe est raide, moins l'incertitude est grande).

b) Données numériques :

Pour notre bâtiment, supposons les valeurs suivantes pour l'état limite de "dommage modéré" :

- **Médiane (S_c) = 0.30 g** (où 'g' est l'accélération de la gravité, environ 9.81 m/s²)
- **Dispersion (β) = 0.4**

La formule de la courbe de fragilité (probabilité conditionnelle) pour une intensité donnée a est :

$$P[LS \geq ls_0 \mid IM = a] = \Phi(\ln(a/S_c)/\beta)$$

Où : Φ : est la fonction de distribution cumulative normale standard (courbe en cloche).

c) Calcul numérique :

Calculons la probabilité que le bâtiment subisse des dommages modérés ou supérieurs pour trois niveaux d'intensité sismique différents :

1. Faible intensité : $a = 0.1 \text{ g}$

$$P(\text{Dommage} | 0.1g) = \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{0.1}{0.3}\right)}{0.4}\right) = \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}{0.4}\right)$$

$$= \Phi\left(-\frac{1.0986}{0.4}\right) = \Phi(-2.7465)$$

En utilisant une table statistique ou une fonction de calculatrice pour $\Phi(-2.7465)$, on trouve une probabilité d'environ **0.3 %**. La probabilité de dommage est très faible.

2. Intensité médiane : $a = 0.3$ g

$$\begin{aligned} P(\text{Dommage}|0.3g) &= \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{0.3}{0.3}\right)}{0.4}\right) = \Phi\left(\frac{\ln(1)}{0.4}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{0}{0.4}\right) = \Phi(0) \end{aligned}$$

Pour $\Phi(0)$, la probabilité est exactement **50 %** (0.5). C'est la définition de la médiane.

3. Forte intensité : $a = 0.5$ g

$$\begin{aligned} P(\text{Dommage}|0.5g) &= \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{0.5}{0.3}\right)}{0.4}\right) = \Phi\left(\frac{\ln(1.6667)}{0.4}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{0.5108}{0.4}\right) = \Phi(1.277) \end{aligned}$$

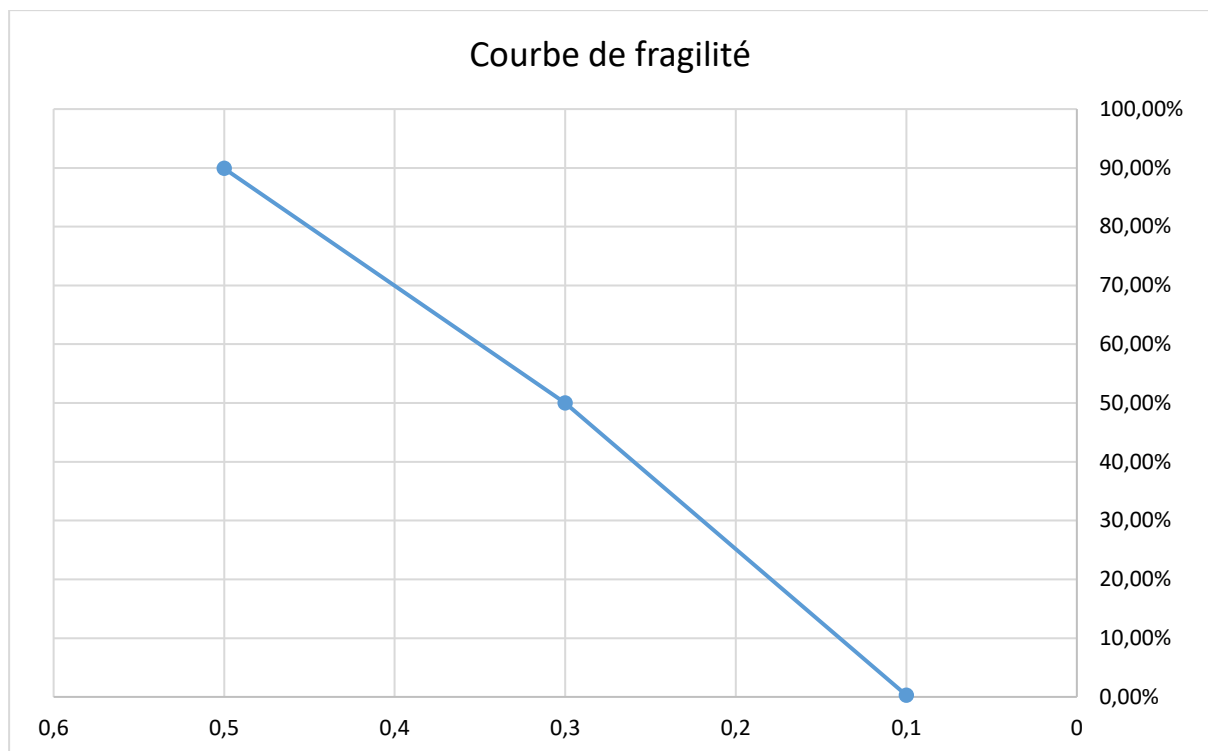
En utilisant la fonction $\Phi(1.277)$, on trouve une probabilité d'environ **89.9 %**. La probabilité de dommage est élevée.

d) Résumé sous forme de tableau :

Intensité Sismique (a)	Probabilité de Dommage Modéré ou Supérieur	Interprétation
0.1 g	0.3 %	Très improbable
0.3 g	50.0 %	Aussi probable qu'improbable (médiane)
0.5 g	89.9 %	Très probable

Ces points permettent de tracer la courbe de fragilité, qui illustre visuellement comment la vulnérabilité augmente avec l'intensité de l'aléa.

PDMS = $f(a)$



Annexe 01 : Exemple sur l'analyse de sensibilité

Voici un exemple numérique simplifié illustrant une **analyse de sensibilité locale** appliquée au calcul d'un facteur de sécurité simple.

1. Contexte de l'exemple : Facteur de sécurité d'un mur de soutènement

Considérons la formule simplifiée du **facteur de sécurité (FS)** d'un mur de soutènement contre le renversement. Le FS dépend de trois variables principales :

$$FS = \text{Moment Stabilisateur} / \text{Moment Renversant} = W \times X / P \times Y$$

Où :

W = Poids total du mur et du sol au-dessus de la fondation (force stabilisatrice)

X = Bras de levier du poids W

P = Poussée des terres (force renversante)

Y = Bras de levier de la poussée P

2. Valeurs nominales (de référence)

Supposons les valeurs nominales suivantes, issues d'une conception initiale : $W = 100 \text{ kN}$; $X = 1.5 \text{ m}$; $P = 40 \text{ kN}$; $Y = 2.0 \text{ m}$

3. Facteur de sécurité nominal :

$$F_{\text{Snominal}} = 100 \times 1.5 / 40 \times 2.0 = 150 / 80 = 1.875$$

Le facteur de sécurité de 1.875 est supérieur à la valeur de sécurité typique requise (souvent 1.5), donc la conception semble sûre.

4. Analyse de sensibilité locale

Nous voulons maintenant savoir si une petite variation de l'une de ces entrées a un effet plus important sur le FS qu'une variation d'une autre entrée. Nous allons faire varier chaque paramètre de **+10%** individuellement et observer l'impact sur le FS.

a. Variation de W (+10%)

W passe de 100 kN à 110 kN. Les autres paramètres restent nominaux.

$$F_{SW+10\%} = 110 \times 1.5 / 40 \times 2.0 = 165 / 80 = 2.0625$$

- **Changement absolu du FS :** $2.0625 - 1.875 = +0.1875$
- **Changement relatif du FS :** $(0.1875 / 1.875) \times 100\% = +10\%$

b. Variation de P (+10%)

P passe de 40 kN à 44kN. Les autres paramètres restent nominaux.

$$F_{SP+10\%} = 100 \times 1.5 / 44 \times 2.0 = 150 / 88 \approx 1.7045$$

- **Changement absolu du FS :** $1.7045 - 1.875 = -0.1705$
- **Changement relatif du FS :** $(-0.1705 / 1.875) \times 100\% \approx -9.1\%$

c. Variation de Y (+10%)

Y passe de 2.0 m à 2.2 m. Les autres paramètres restent nominaux.

$$F_{SY+10\%} = 100 \times 1.5 / 40 \times 2.2 = 15088 \approx 1.7045$$

- **Changement absolu du FS :** $1.7045 - 1.875 = -0.1705$
- **Changement relatif du FS :** $(-0.1705 / 1.875) \times 100\% \approx -9.1\%$

d. (**Note:** Pour X , l'effet serait identique à celui de W , soit +10%).

5. Interprétation des résultats (Conclusion de sensibilité)

Nous pouvons classer les paramètres par ordre d'influence sur le facteur de sécurité pour une variation de 10% :

Paramètre	Variation d'entrée	Changement du FS	Influence
W (Poids)	+10%	+10%	Élevée
X (Bras de levier W)	+10%	+10%	Élevée
P (Poussée)	+10%	-9.1%	Moyenne
Y (Bras de levier P)	+10%	-9.1%	Moyenne

6. Conclusion :

Dans cet exemple local, le facteur de sécurité est **linéairement** sensible aux variations de W et X (le FS varie exactement du même pourcentage que l'entrée), et légèrement moins sensible aux variations de P et Y (qui sont au dénominateur).

Implications pratiques : Si l'ingénieur souhaite augmenter la sécurité ou réduire l'incertitude sur le résultat, il devrait se concentrer en priorité sur la confirmation précise du poids (W) du mur ou sur l'augmentation de son bras de levier (X), car ce sont les paramètres qui "paient" le plus en termes de stabilité.