

Chapitre 3. Méthodes de modélisation et de propagation des incertitudes

1.1. Introduction

1.2. Variables aléatoires et lois de probabilité (loi normale, log-normale, exponentielle...).

1.3. Fonction de densité de probabilité (PDF) et fonction de répartition (CDF).

1.4. Techniques de propagation des incertitudes :

- Méthodes analytiques (premiers et seconds moments).
- Simulation de Monte Carlo.
- Méthodes semi-probabilistes (coefficients de sécurité partiels).

1.5. Application à un cas simple (poutre, portique, sol soumis à charge).

Chapitre 3

Méthodes de modélisation et de propagation des incertitudes

1.1. – Introduction

Les méthodes de modélisation et de propagation des incertitudes visent à évaluer comment les incertitudes des paramètres d'entrée affectent les résultats d'un modèle. Elles impliquent l'identification des sources d'incertitude, la quantification de leur ampleur via des fonctions de densité de probabilité (PDF), puis leur combinaison via des méthodes comme l'analyse de Monte-Carlo pour estimer la PDF finale de la quantité d'intérêt.

1.1.1. Identification et Quantification des Incertitudes

- **Identifier les sources** : Déterminez toutes les sources d'incertitude dans votre modèle, qu'elles soient dues à des erreurs de mesure, à la variabilité des données ou à des choix de modèle.
- **Quantifier l'ampleur** : Estimez l'ampleur de chaque incertitude en utilisant des fonctions de densité de probabilité (PDF). Si des données sont disponibles, les PDF peuvent être déterminées empiriquement. En l'absence de données, l'avis d'experts peut être sollicité.

1.1.2. Méthodes de Modélisation des Incertitudes

- **Propagation des incertitudes** : Cette approche analyse comment les incertitudes des paramètres d'entrée se propagent pour affecter la quantité d'intérêt en estimant sa PDF finale.
- **Modèles de substitution** : Dans le cadre de simulations complexes, des modèles de substitution peuvent être utilisés pour réduire le coût de calcul de l'analyse de Monte-Carlo.

1.2. – Variables aléatoires et lois de probabilité (loi normale, log-normale, exponentielle...).

Une variable aléatoire associe une valeur numérique à chaque événement d'un univers, tandis qu'une loi de probabilité décrit la distribution de ces valeurs. La loi normale modélise de nombreux phénomènes naturels grâce à sa densité symétrique, la loi log-normale est utilisée pour les grandeurs positives lorsque leur logarithme est normal, et la loi exponentielle décrit la durée de vie des composants ou le temps jusqu'à un événement.

1.2.1. Variables aléatoires

- Une variable aléatoire (v.a) est une fonction qui associe une valeur numérique à chaque résultat d'une expérience aléatoire.
- **Exemple** : Si on lance un dé, on peut définir une v.a. "X" qui prend les valeurs 1, 2, 3, 4, 5, 6.

1.2.2. Lois de probabilité

Les lois de probabilité décrivent comment les valeurs d'une (v.a) sont distribuées.

a) Loi Normale (ou de Laplace-Gauss) :

- **Description** : C'est une loi continue, symétrique, en forme de cloche, définie par sa moyenne (μ) et sa variance (σ^2).
- **Utilisation** : Elle modélise de nombreux phénomènes naturels (taille, poids, erreurs de mesure).
- **Caractéristique** : La moyenne, la médiane et le mode sont égaux.

b) Loi Log-Normale (ou de Galton) :

- **Description** : Une variable aléatoire positive X suit une loi log-normale si son logarithme, $\ln(X)$, suit une loi normale.
- **Utilisation** : Elle modélise des grandeurs positives dans la finance (cours des actions) et l'analyse de fiabilité.
- **Exemple** : La distribution du nombre de mots dans une phrase peut suivre une loi log-normale.

c) Loi Exponentielle :

- **Description** : C'est une loi de probabilité continue, définie par un paramètre $\lambda > 0$, qui modélise des durées.

- **Utilisation** : Elle est couramment utilisée pour décrire l'espérance de vie des composants ou le temps jusqu'à un événement (par exemple, un appel téléphonique).
- **Densité de probabilité** : $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ pour $x \geq 0$.

1.3. – Fonction de densité de probabilité (PDF) et fonction de répartition (CDF).

La fonction de densité de probabilité (PDF), $f(x)$, décrit la densité de probabilité d'une variable aléatoire continue, avec la probabilité qu'elle prenne une valeur spécifique étant nulle. La fonction de répartition cumulative (CDF), $F(x)$, calcule la probabilité qu'une variable aléatoire soit inférieure ou égale à une valeur donnée, x . La CDF est l'intégrale de la PDF, et la PDF est la dérivée de la CDF.

1.3.1. Fonction de densité de probabilité (PDF)

- **Concept** : Pour les variables aléatoires continues, la PDF n'indique pas la probabilité d'une valeur exacte, mais plutôt la probabilité qu'une variable tombe dans un intervalle. La probabilité d'un événement dans un intervalle (a, b) est l'aire sous la courbe de la PDF entre a et b .
- **Relation avec la CDF** : La PDF, $f(x)$, est la dérivée de la CDF, $F(x)$, c'est-à-dire $f(x) = dF(x)/dx$.
- **Propriétés** : La PDF doit être supérieure ou égale à zéro pour toutes les valeurs de x ($f(x) \geq 0$).

1.3.2. Fonction de répartition (CDF)

- **Concept** : La CDF, $F(x)$, donne la probabilité cumulée qu'une variable aléatoire, X , soit inférieure ou égale à une valeur x . C'est la probabilité $P(X \leq x)$.
- **Relation avec la PDF** : La CDF est l'intégrale de la PDF de moins l'infini jusqu'à x : $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$.
- **Utilisation** : La CDF permet de déterminer la probabilité qu'une variable soit inférieure ou égale à une valeur donnée, supérieure à une valeur donnée (en utilisant $1 - CDF$) ou comprise entre deux valeurs (en soustrayant les valeurs de CDF).

1.3.3. En résumé

La PDF vous indique la forme de la distribution et les zones de forte ou faible probabilité, tandis que la CDF vous donne la probabilité totale de toutes les valeurs inférieures ou égales à un point donné. La CDF est l'accumulation des valeurs de la PDF jusqu'à un point spécifique.

1.4. – Techniques de propagation des incertitudes

Les techniques de propagation des incertitudes déterminent l'incertitude d'un résultat calculé à partir de variables dont l'incertitude est connue. Les méthodes analytiques (premiers et seconds moments), la Simulation de Monte Carlo et les méthodes semi-probabilistes (coefficients de sécurité partiels) sont des approches qui estiment l'incertitude.

1.4.1. Méthodes analytiques (premiers et seconds moments).

Les méthodes des premiers et seconds moments, également connues sous le nom de « Méthodes de Taylor » ou « Méthodes au premier et second ordre », sont des techniques utilisées pour la propagation des incertitudes, particulièrement dans le cadre de calculs ou d'évaluations. Elles permettent d'estimer l'incertitude sur une grandeur dérivée à partir des incertitudes des variables de départ.

a) Comment cela fonctionne-t-il ?

Ces méthodes font appel à des développements en série de Taylor pour approximer la relation entre une grandeur calculée et les variables mesurées dont elle dépend.

- **Méthode du premier moment (ou ordre) :** Cette méthode utilise le développement de Taylor au premier ordre. Elle estime l'incertitude de manière linéaire en ignorant les termes d'ordre supérieur. On calcule la variance de la grandeur résultante en fonction des variances et covariances des variables d'entrée.
- **Méthode du second moment (ou ordre) :** Cette méthode incorpore les dérivées secondes dans le développement de Taylor. Elle offre une meilleure approximation de la propagation des incertitudes, car elle prend en compte les effets non linéaires, ce qui conduit à une estimation plus précise de l'incertitude.

b) Pourquoi les utiliser ?

- Elles sont particulièrement utiles lorsque l'on ne dispose pas d'informations complètes sur les distributions de probabilité des variables d'entrée, mais que l'on peut estimer leur moyenne (premier moment) et leur variance (second moment).
- Ces méthodes sont souvent utilisées dans des domaines comme l'ingénierie et la métrologie pour quantifier l'incertitude de résultats obtenus à partir de mesures.

1.4.2. Simulation de Monte Carlo.

La simulation de Monte Carlo est une technique de propagation des incertitudes. Elle consiste à effectuer des calculs répétés à l'aide d'entrées aléatoires générées selon leurs distributions d'incertitude, afin d'obtenir une distribution des résultats qui reflète les effets combinés de ces incertitudes. Cette méthode permet de modéliser et d'estimer l'incertitude d'un système, d'une mesure ou d'un événement incertain.

a) Comment ça marche?

- i. Définir les entrées incertaines :** Chaque variable d'entrée du modèle est associée à une distribution de probabilité qui représente son incertitude.
- ii. Générer des échantillons aléatoires :** Le modèle est exécuté de nombreuses fois (des centaines ou des milliers de fois).
- iii. Tirer au sort des valeurs :** Pour chaque itération, des valeurs sont tirées aléatoirement dans les distributions de probabilité des variables d'entrée.
- iv. Calculer les sorties :** Le modèle calcule le résultat souhaité en utilisant ces valeurs aléatoires.
- v. Analyser la distribution des sorties :** La collection de milliers de résultats obtenus forme une distribution de probabilité. Cette distribution représente la propagation des incertitudes d'entrée et permet d'estimer l'incertitude du résultat final.

b) Applications

- **Métrologie :** Évaluer l'incertitude de mesure en métrologie.

- **Finance** : Analyser et évaluer des portefeuilles d'actifs.
- **Prédiction** : Anticiper les résultats possibles d'événements futurs incertains.
- **Optimisation** : Comprendre les mécanismes d'une mesure et optimiser les protocoles de mesure.

1.4.3. Méthodes semi-probabilistes (coefficients de sécurité partiels).

Les méthodes semi-probabilistes sont bien des techniques de propagation des incertitudes, car elles visent à évaluer l'impact des incertitudes sur les résultats d'un calcul ou d'un modèle, même si les informations disponibles ne sont pas toutes probabilistes au sens strict. Elles se situent entre les méthodes déterministes (qui ne tiennent pas compte de l'incertitude) et les méthodes probabilistes (qui nécessitent des données entièrement probablisées).

a) Comment fonctionnent-elles ?

- **Modélisation de l'incertitude** : Elles permettent de représenter les incertitudes sur les données ou les paramètres d'un modèle, même lorsque ces incertitudes ne sont pas exprimées sous forme de probabilités rigoureuses.
- **Calcul de l'incertitude résultante** : En propageant ces incertitudes à travers le modèle, elles permettent de déterminer une estimation de l'incertitude associée au résultat final.
- **Cas d'application** : Elles sont particulièrement utiles dans les cas où l'on a des données incertaines, mais où l'on ne peut pas ou ne veut pas attribuer des distributions de probabilités complètes à ces données.

b) En résumé :

Les méthodes semi-probabilistes sont des techniques qui étendent les méthodes probabilistes pour gérer et propager les incertitudes, en incluant des données qui peuvent ne pas être entièrement probablisables.

1.5. – Application à un cas simple (poutre, portique, sol soumis à charge).

1.5.1. Mesure de la longueur d'une barre métallique

Imaginons que vous mesuriez la longueur d'une barre métallique avec une règle graduée en millimètres. Vous effectuez cinq mesures et obtenez les longueurs suivantes (en centimètres) : 50.1, 49.9, 50.0, 50.1, 50.0.

a) Objectif : Déterminer la longueur d'une barre métallique.

b) Principe : Effectuez cinq mesures (en centimètres) pour mesurer la longueur d'une barre métallique avec une règle graduée en millimètres.

c) Modélisation : La longueur de la barre est une fonction de moyenne des mesures et de l'incertitude-type.

d) Évaluation des incertitudes (Type A) :

- Les longueurs sont mesurées, leur moyenne et leur écart-type peuvent être calculés (méthode de type A).
- Tout d'abord, vous calculez la moyenne des mesures :

$$\text{Moyenne} = \bar{M} = \frac{\sum M}{n} = \frac{50.1 + 49.9 + 50.0 + 50.1 + 50.0}{5} = 50.02 \text{ cm}$$

- Ensuite, vous estimez l'écart-type (σ) de ces mesures :

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (M_i - \bar{M})^2} = \sqrt{\frac{1}{5-1} [(50.1 - 50.02)^2 + \dots + (50.0 - 50.02)^2]} \\ \approx 0.08 \text{ cm}$$

- L'incertitude-type de la longueur s'évalue alors comme suit :

$$u(L) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0.08}{\sqrt{5}} \approx 0.036 \text{ cm ; on prend } 0.04$$

- Ainsi, la longueur de la barre peut être exprimée avec son incertitude :

$$L = 50.02 \pm 0.04 \text{ cm.}$$

e) Propagation de l'incertitude : dans notre cas, l'incertitude sur la mesure des longueurs est une incertitude totale.

f) Propager l'incertitude dans une formule

Supposons maintenant que vous souhaitiez calculer la surface **A** d'un rectangle dont la longueur **L** et la largeur **W** ont été mesurées :

$$L = 10.0 \pm 0.1 \text{ cm et } W = 5.0 \pm 0.05 \text{ cm.}$$

La formule de la surface est :

$$A = L \times W$$

Pour propager les incertitudes, utilisez la relation suivante :

$$u(A)^2 = \left(\frac{\partial A}{\partial L} \times u(L)\right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial W} \times u(W)\right)^2$$

En substituant, nous obtenons :

$$u(A)^2 = (W \times u(L))^2 + (L \times u(W))^2$$

Soit :

$$u(A)^2 = (5.0 \times 0.1)^2 + (10.0 \times 0.05)^2$$

Ou encore :

$$u(A)^2 = 0.25 + 0.25 = 0.5$$

$$u(A) = \sqrt{0.5} = 0.707 \text{ cm}^2$$

Finalement, la superficie est :

$$A = 50 \pm 0.71 \text{ cm}^2$$

1.5.2. Mesure de l'incertitude absolue et l'incertitude relative d'une poutre soumis à une charge repartie uniformément

Soit une poutre de longueur "l" simplement appuyer, soumis à une charge uniformément repartie "q".

1. Tracer les digrammes l'effort tranchant T_y et du moment fléchissant M_z de la poutre.
2. Quelle est la valeur maximale du moment de flexion " M_{max} " ?
3. Donner l'expression de l'incertitude absolue et l'incertitude relative de M_{max}

Solution :

- 1) Calculation of support reactions:

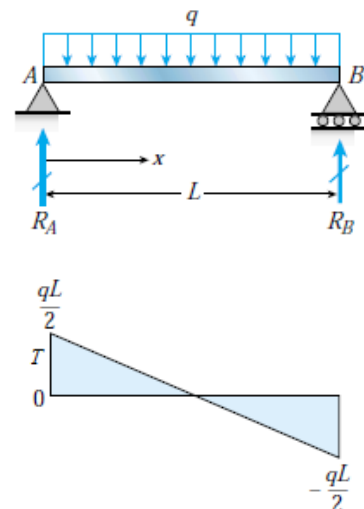
$$R_A = \frac{ql}{2} \text{ et } R_B = \frac{ql}{2}$$

- 2) Equations of the shear force T_y and the bending moment M_z

$$0 \leq x \leq l$$

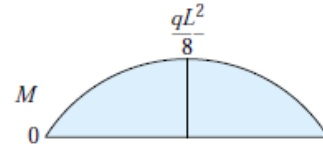
$$T_y = R_A - qx = \frac{ql}{2} - qx$$

$$M_z = R_A \cdot x - qx \frac{x}{2} = \frac{ql}{2} \cdot x - \frac{qx^2}{2}$$



$$x = 0 \Rightarrow M_z = 0, \quad x = \frac{l}{2} \Rightarrow M_z = \frac{ql^2}{8}$$

$$x = l \Rightarrow M_z = 0$$



Commentaire : La valeur maximale du moment de flexion se produit au milieu de la poutre où dM/dx et l'effort tranchant T sont tous deux égaux à zéro.

Par conséquent, comme indiqué sur le diagramme du moment de flexion, nous substituons $x = L/2$ dans l'expression de M et obtenons :

$$M_{max} = \frac{ql^2}{8}$$

3) L'expression de l'incertitude absolue et l'incertitude relative de M_{max} :

$$M_{max} = \frac{ql^2}{8}$$

Rappelle mathématique (Calcul d'incertitude relative et absolue) :

Soit G une fonction telle que : $G = f(x, y, z)$

Alors : L'incertitude Absolue = ΔG et L'incertitude Relative = $\Delta G/G$

$$dG = \frac{\partial G}{\partial x} dx + \frac{\partial G}{\partial y} dy + \frac{\partial G}{\partial z} dz$$

$$\Delta G = \left| \frac{\partial G}{\partial x} \right| \Delta x + \left| \frac{\partial G}{\partial y} \right| \Delta y + \left| \frac{\partial G}{\partial z} \right| \Delta z \text{ (incertitude absolue)}$$

$$\frac{\Delta G}{G} = \left(\left| \frac{\partial G}{\partial x} \right| / G \right) \Delta x + \left(\left| \frac{\partial G}{\partial y} \right| / G \right) \Delta y + \left(\left| \frac{\partial G}{\partial z} \right| / G \right) \Delta z \text{ (incertitude relative)}$$

Application :

$$dM = \frac{\partial M}{\partial q} dq + \frac{\partial M}{\partial l} dl$$

$$\text{nous avons : } \frac{\partial M}{\partial q} = \frac{1}{8} l^2 \quad \text{et,} \quad \frac{\partial M}{\partial l} = \frac{1}{4} q \cdot l$$

$$\text{Alors : } dM = \frac{1}{8} l^2 \cdot dq + \frac{1}{4} q \cdot l \cdot dl$$

$$\Delta M = \left| \frac{1}{8} l^2 \right| \Delta q + \left| \frac{1}{4} ql \right| \Delta l \text{ (incertitude absolue)}$$

$$\frac{\Delta M}{M} = \left| \frac{\frac{1}{8} l^2}{\frac{1}{8} \cdot q \cdot l^2} \right| \Delta q + \left| \frac{\frac{1}{4} \cdot q \cdot l}{\frac{1}{8} \cdot q \cdot l^2} \right| \Delta l$$

$$\frac{\Delta M}{M} = \left| \frac{1}{q} \right| \Delta q + \left| \frac{2}{l} \right| \Delta l \text{ (incertitude relative)}$$

Application numérique :

Dans un essai de chargement d'une poutre, nous avons effectué cinq mesures pour q et l respectivement et nous avons obtenus les résultats suivants:

Longueurs (en centimètres) : 50.1, 49.9, 50.0, 50.1, 50.0.

Chargement (kN/m) : 2.01, 1.99, 2.0, 2.01, 2.0.

- Déterminer la longueur de la poutre (exprimée avec son incertitude)
- Déterminer la charge sur la poutre (exprimée avec son incertitude)
- Utilisant la notion de propagation des incertitudes calculer M_{max} .