

Vibrations libres amorties (Oscillations amorties)

On parle d'oscillations amorties quand l'amortissement n'est pas nul, c'est-à-dire quand $c \neq 0$. La figure (3.1) illustre un modèle d'un système amorti, modélisé à sa position d'équilibre.

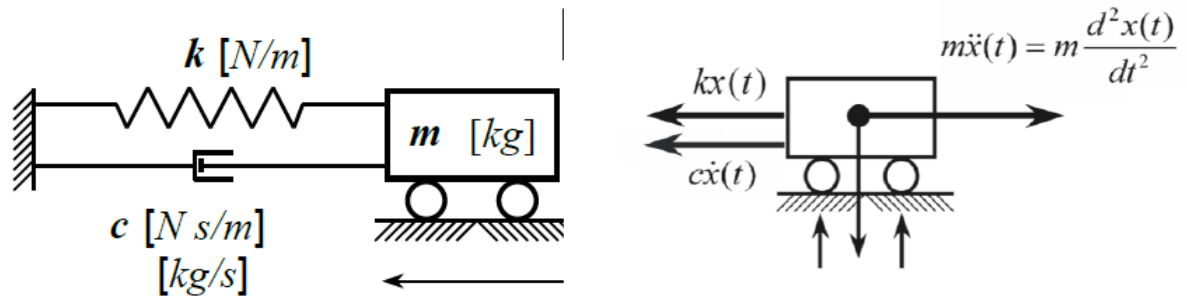


Figure 3.1 Forces et actions dans un système amorti

L'équation du mouvement s'écrit :

$$M \ddot{u} + C \dot{u} + K u = 0$$

en introduisant le coefficient d'amortissement ξ .

$$\ddot{u} + 2 \xi \omega \dot{u} + \omega^2 u = 0$$

La solution de l'équation de type :

$$x(t) = A e^{rt}$$

Équation caractéristique

$$s^2 + 2 \xi \omega s + \omega^2 = 0$$

$$\Delta = 4 \xi^2 \omega^2 - 4 \omega^2 = 4 \omega^2 (\xi^2 - 1)$$

$$s_{1,2} = \frac{-2 \xi \omega \pm 2 \omega \sqrt{\xi^2 - 1}}{2} = -\xi \omega \pm \omega \sqrt{\xi^2 - 1}$$

Trois cas d'amortissements du système peuvent alors se présenter : un amortissement faible, un amortissement critique ou un amortissement fort. La figure (3.2) illustre ces trois niveaux d'amortissement.

Cas 1: Amortissement critique

$$\xi^2 - 1 = 0 \rightarrow \xi = 1 \quad \text{ou} \quad C = C_{cr} = 2M\omega$$

$$s_1 = s_2 = -\xi \omega$$

$$u(t) = (c_1 + c_2 t) e^{-\xi \omega t} = \left[u_0 + (\dot{u}_0 + \xi \omega u_0) t \right] e^{-\xi \omega t}$$

Cas 2: Amortissement super – critique (amortissement fort)

$$\xi^2 - 1 > 0 \rightarrow \xi > 1 \quad \text{ou} \quad C > C_{cr}$$

$$\text{poser } \omega_D = \omega \sqrt{\xi^2 - 1}$$

$$\Rightarrow s_{1,2} = -\xi \omega \pm \omega_D$$

$$\Rightarrow u(t) = e^{-\xi \omega t} (c_1 \cosh \omega_D t + c_2 \sinh \omega_D t)$$

Cas 3: Amortissement infra-critique (amortissement faible)

Nous nous intéressons ici uniquement aux systèmes sous-critiques pour lesquels le coefficient d'amortissement reste inférieur à 1. Dans ce cas, les racines s_1 et s_2 sont complexes. La solution de l'équation différentielle s'écrit maintenant :

$$\xi^2 - 1 < 0 \rightarrow \xi < 1 \quad \text{ou} \quad C < C_{cr}$$

$$\text{poser } \omega_D = \omega \sqrt{1 - \xi^2}$$

$$\Rightarrow s_{1,2} = -\xi \omega \pm i \omega_D$$

$$\Rightarrow u(t) = e^{-\xi \omega t} (A_1 \cos \omega_D t + A_2 \sin \omega_D t) = e^{-\xi \omega t} A \cos(\omega_D t - \phi)$$

$$\text{avec } \begin{cases} A = \sqrt{u_0^2 + \left(\frac{\dot{u}_0 + \xi \omega u_0}{\omega_D} \right)^2} \\ \phi = \arctan \frac{(\dot{u}_0 + \xi \omega u_0) / \omega_D}{u_0} \end{cases}$$

$$u(t) = e^{-\xi \omega t} A \cos(\omega_D t - \phi) \quad \text{avec} \quad \omega_D = \omega \sqrt{1 - \xi^2}$$

ω_D : pulsation amortie où pseudo pulsation [rad/s]

Le système amorti oscille donc à une pulsation légèrement inférieure à la pulsation du système non amorti (Fig 2.2) l'amplitude du mouvement décroît dans le temps de façon exponentielle.

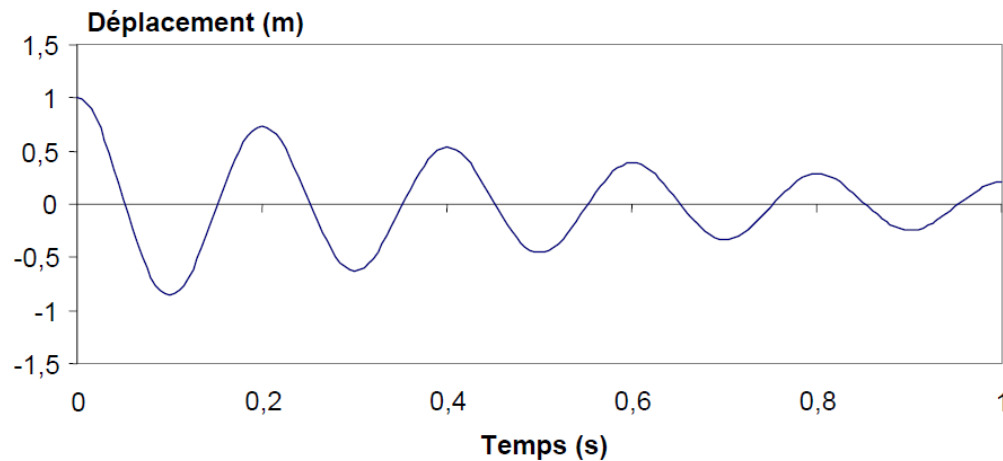
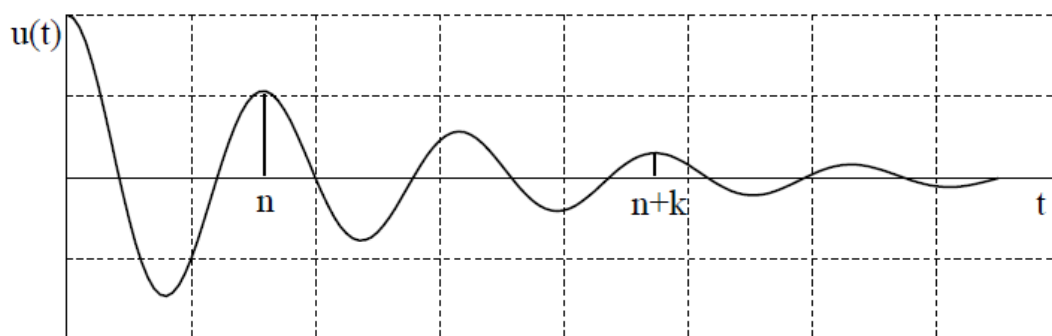


Fig 3.3. Oscillateur libre amorti

Détermination de l'amortissement

Le coefficient d'amortissement ou le taux d'amortissement sont les plus délicats à déterminer. Si la masse et la raideur peuvent être déterminées par des tests statistiques, l'amortissement nécessite une mesure dynamique.

Une approche consiste à mesurer la décroissance de l'enveloppe pour un système **sous-amorti** : les points de mesure $x(t_1)$ et $x(t_2)$ correspondent à $A e^{-\zeta \omega_0 t_1}$ et à $A e^{-\zeta \omega_0 t_2}$.



$$\begin{aligned}
 u(t) &\simeq A e^{-\zeta \omega t} \cos \omega_D t \\
 t_n &= \frac{2\pi n}{\omega_D} \\
 t_{n+k} &= \frac{2\pi(n+k)}{\omega_D} \\
 &\rightarrow \frac{u_n}{u_{n+k}} = \frac{e^{-\zeta \omega \frac{2\pi n}{\omega_D}}}{e^{-\zeta \omega \frac{2\pi(n+k)}{\omega_D}}} = e^{2\pi k \zeta \omega / \omega_D} \\
 \text{si } \zeta \ll 1, \quad \delta_k &= \ln \frac{u_n}{u_{n+k}} = 2\pi k \zeta \rightarrow \zeta = \frac{\delta_k}{2\pi k}
 \end{aligned}$$