

Chapitre 2 : Systèmes à un seul degré de liberté

Introduction

La connaissance du système à un degré de liberté (ou oscillateur à 1 ddl) est fondamentale en dynamique des structures. La figure 2.1 présente un tel oscillateur, sollicité par une force $p(t)$ variable dans le temps. Le seul mouvement autorisé pour l'oscillateur est le déplacement horizontal, $x(t)$, de la masse.

L'oscillateur est connecté à son support par un élément qui développe une force F , fonction du déplacement et de la vitesse de la masse M . La relation F caractérise le comportement de l'oscillateur; la force $F(t)$ caractérise la sollicitation.

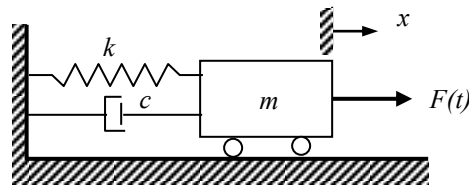


Figure 2.1 Représentation schématique du système 'à un degré de liberté'.

La force de rappel peut ne dépendre que du déplacement $X(t)$ (figure 2.2). Si à tout instant il y a proportionnalité entre la force et le déplacement, l'oscillateur est élastique linéaire. Ce cas est typiquement celui d'un ressort.

La seconde loi de Newton, et s'écrit:

$$\sum f_i = m\ddot{x}.$$

Quand les forces varient en fonction du temps et les effets d'inertie (masse) peuvent modifier la réponse, cette équation devient :

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_{ext}$$

1. Vibrations libres non-amorties

Un système oscillant à un degré de liberté est habituellement repéré à l'aide d'une coordonnée généralisée q qui est l'écart par rapport à la position d'équilibre stable. Lorsqu'aucune force extérieure ne s'applique ($F=0$) à la masse et que la viscosité est négligée $C=0$, Le mouvement vibratoire est dit linéaire s'il est régi par une équation différentielle harmonique comme présenté à la figure (2.2). Les 5 hypothèses de base du modèle sont :

- le ressort a un comportement force/déformation qui est linéaire ;
- le ressort est sans masse ;
- il n'y a aucune friction provenant des rouleaux ;
- la masse est indéformable, et ;
- la résistance de l'air est négligée.

Dans un système linéaire, la gravité n'a aucun effet sur le mouvement oscillatoire, même pour des oscillations verticales.

L'équation différentielle de l'oscillateur harmonique simple s'écrit :

$$m \ddot{x} + kx = 0$$

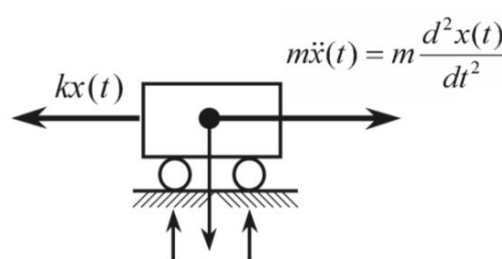


Figure (2.2) Forces présentes dans un système non amorti

Ou encore en posant : $\omega^2 = \frac{k}{m}$ ou $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ (rad/s) (**pulsation propre**)

$$\ddot{x} + \omega x = 0$$

ou, de façon équivalente, la fréquence propre $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ (Hz)

ou la période propre $T = \frac{2\pi}{\omega}$ (s)

La solution d'une telle équation est une fonction sinusoïdale s'écrit:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi) \quad (2a)$$

A et ϕ sont l'amplitude et la phase qui dépendent des conditions initiales et ω est la pulsation (ou fréquence angulaire)

$$\text{vitesse : } \frac{dx(t)}{dt} = \dot{x} = \omega A \cos(\omega t + \phi) \quad (2b)$$

$$\text{accélération : } \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = \ddot{x} = -\omega^2 A \sin(\omega t + \phi) \quad (2c)$$

L'équation (1) s'écrit alors

$$-m\omega^2 A \sin(\omega t + \phi) = -kA \sin(\omega t + \phi)$$

La **pulsation naturelle** est la valeur de ω qui satisfait la relation

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}} \quad [\text{en rad/s}] \quad (3)$$

ω_0 ne dépend que des constantes mécaniques du système. Les constantes A et ϕ dépendent des conditions initiales ($\ddot{x}$ est intégré deux fois pour obtenir x , d'où deux constantes d'intégration). Les conditions initiales sont le déplacement x_0 et la vitesse v_0 à l'instant $t=0$:

$$\begin{aligned} x_0 &= x(0) = A \sin(\omega_0 0 + \phi) = A \sin \phi & [\text{m}] \\ v_0 &= \dot{x}(0) = \omega_0 A \cos(\omega_0 0 + \phi) = \omega_0 A \cos \phi & [\text{m/s}] \end{aligned}$$

donc $\omega_0^2 x_0^2 + v_0^2 = \omega_0^2 A^2 (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi)$ et $\frac{\sin \phi}{\cos \phi} = \frac{\omega_0 x_0}{v_0}$, soit

$$A = \frac{\sqrt{\omega_0^2 x_0^2 + v_0^2}}{\omega_0} \quad \text{et} \quad \phi = \arctan \frac{\omega_0 x_0}{v_0} \quad (4)$$

Le déplacement

$$\boxed{x(t) = \frac{\sqrt{\omega_0^2 x_0^2 + v_0^2}}{\omega_0} \sin\left(\omega_0 t + \arctan \frac{\omega_0 x_0}{v_0}\right)} \quad (5)$$