

Exercice N°1 :

Soit une poutre, de longueur de **47 m**, soumise à la précontrainte en post tension, par **4** câbles de 7 T15 à **8 jours**. Pour la section à **mi travée**, déterminer :

- La tension à l'origine.
- Les pertes instantanées.
- Les pertes différées.
- Les contraintes finales à l'ELS et l'ELU.

Données :

$\alpha = 0,298 \text{ rd.}$	$f_{peg} = 1660 \text{ MPa.}$	$\varepsilon_r = 0,0003.$
$\psi = 0,002 \text{ m}^{-1}$	$f_{prg} = 1860 \text{ MPa.}$	$f_{c28} = 35 \text{ MPa.}$
$f = 0,18 \text{ rd}^{-1}.$	$\sigma_b = 12,4 \text{ MPa.}$	$\rho_{1000} = 2,5 \text{ \%}$
$g = 6 \text{ mm.}$	$\sigma_b^M = 15,3 \text{ MPa.}$	$\mu_0 = 0,43.$
$E_p = 190000 \text{ MPa.}$	$\sigma_b^F = 11,1 \text{ MPa.}$	

Solution N° 1:

La tension à l'origine :

$$\sigma_{p0} = \min(0,9 f_{peg}, 0,8 f_{prg}) \rightarrow \sigma_{p0} = \mathbf{1488 \text{ MPa.}}$$

Les pertes instantanées :

- La perte due au frottement :

$$\Delta\sigma_{frott}(x) = \sigma_{p0} (1 - e^{-(\alpha f + \varphi x)}). \quad \Delta\sigma_{frott}(23,5) = \mathbf{142,95 \text{ MPa.}}$$

- La perte due au recul d'ancrage :

$$d = \sqrt{\frac{g E_p x}{\Delta\sigma_{frott}(x)}} \rightarrow d = 13,69 \text{ m}, \text{ comme } d < x = 23,5 \text{ m} \text{ donc : } \Delta\sigma_{rec}(23,5) = \mathbf{0 \text{ MPa.}}$$

- La perte due au raccourcissement du béton :

$$\Delta\sigma_{racc}(x) = \frac{n-1}{2n} (\sigma_b \frac{E_p}{E_{ij}}) \text{ avec : } E_{ij} = E_{i8} = 31974,38 \text{ MPa} \quad (f_{c8} = 24,56 \text{ MPa}).$$

$$\text{Donc : } \Delta\sigma_{rac}(23,5) = \mathbf{27,63 \text{ MPa.}}$$

- Les pertes instantanées : $\Delta\sigma_{pi}(23,5) = \mathbf{170,58 \text{ MPa.}}$

- La tension initiale : $\sigma_{pi}(23,5) = \sigma_{p0} - \Delta\sigma_{pi} = \mathbf{1317,42 \text{ MPa.}}$

Les pertes différées :

- La perte due au retrait du béton :

$$\Delta\sigma_{ret}(x) = E_p \varepsilon_r. \quad \text{Donc:} \quad \Delta\sigma_{ret}(23,5) = 57 \text{ MPa.}$$

- La perte due au fluage du béton :

$$\Delta\sigma_{flu}(x) = (\sigma_b^M + \sigma_b^F) \frac{E_p}{E_{ij}} \quad \text{avec : } E_{ij} = E_{i28} = 35981,73 \text{ MPa.}$$

$$\text{Donc: } \Delta\sigma_{flu}(23,5) = 139,4 \text{ MPa.}$$

- La perte due à la relaxation des armatures de précontrainte :

$$\Delta\sigma_{rel}(x) = 6 \frac{\rho_{1000}}{100} \left(\frac{\sigma_{pi}}{f_{prg}} - \mu_0 \right) \sigma_{pi}. \quad \text{Donc : } \Delta\sigma_{rel}(23,5) = 54,99 \text{ MPa.}$$

- Les pertes différées : $\Delta\sigma_{pd}(23,5) = \Delta\sigma_{ret} + \Delta\sigma_{flu} + \frac{5}{6} \Delta\sigma_{rel} = 242,22 \text{ MPa.}$

Les contraintes finales :

- La contrainte finale probable (ELU) :

$$\sigma_{pM}(x) = \sigma_{p0} - \Delta\sigma_p(x). \quad \sigma_{pM}(x) = 1075,2 \text{ MPa.}$$

- La contrainte finale maximale (ELS) :

$$\sigma_{p1}(x) = 1,02\sigma_{p0} - 0,8\Delta\sigma_p(x). \quad \sigma_{p1}(x) = 1187,52 \text{ MPa.}$$

- La contrainte finale minimale (ELS) :

$$\sigma_{p2}(x) = 0,98\sigma_{p0} - 1,2\Delta\sigma_p(x). \quad \sigma_{p2}(x) = 962,88 \text{ MPa.}$$

EXERCICE 2:

Soit une poutre, de **42 m** de longueur, précontrainte en post tension à **12 jours** par **6** câbles. Pour la section située à **12m** de l'ancrage passif, déterminer la tension à l'origine et celle résiduelle après toutes les pertes.

Données :

$\alpha = 17,2^\circ$.	$f_{peg} = 1660 \text{ MPa.}$	$\varepsilon_r = 0,0004$.
$\psi = 0,002 \text{ m}^{-1}$	$f_{prg} = 1860 \text{ MPa.}$	$f_{c28} = 35 \text{ MPa.}$
$f = 0,18 \text{ rd}^{-1}$.	$\sigma_b = 12,4 \text{ MPa.}$	$f_{c12} = 25 \text{ MPa.}$
$g = 6 \text{ mm.}$	$\sigma_b^M = 15,3 \text{ MPa.}$	$\rho_{1000} = 2,5 \%$.
$E_p = 190\,000 \text{ MPa.}$	$\sigma_b^F = 11,1 \text{ MPa.}$	$\mu_0 = 0,43$.

Solution:

La tension à l'origine :

$$\sigma_{p0} = \min(0,9 f_{peg}, 0,8 f_{prg}) \rightarrow \sigma_{p0} = 1488 \text{ MPa.}$$

Les pertes instantanées :

- La perte due aux frottements : ($\alpha = 0,3$ rd et $x = 30$ m)

$$\Delta\sigma_{frott}(x) = \sigma_{p0} (1 - e^{-(\alpha f + \varphi x)}). \quad \Delta\sigma_{frott}(30) = 160,32 \text{ MPa.}$$

- La perte due au recul d'ancrage :

$$d = \sqrt{\frac{g E_p x}{\Delta\sigma_{frott}(x)}} \rightarrow d = 14,6 \text{ m}, \text{ comme } d < x = 30 \text{ m} \text{ donc : } \Delta\sigma_{rec}(30) = 0 \text{ MPa.}$$

- La perte due au raccourcissement du béton :

$$\Delta\sigma_{racc}(x) = \frac{n-1}{2n} (\sigma_b \frac{E_p}{E_{ij}}) \text{ avec : } E_{ij} = E_{i12} = 32164,19 \text{ MPa} \quad \text{Donc : } \Delta\sigma_{rac}(30) = 30,52 \text{ MPa.}$$

- Les pertes instantanées : $\Delta\sigma_{pi}(30) = 190,84 \text{ MPa.}$

- La tension initiale : $\sigma_{pi}(30) = 1297,16 \text{ MPa.}$

Les pertes différées :

- La perte due au retrait du béton :

$$\Delta\sigma_{ret}(x) = E_p \varepsilon_r. \quad \text{Donc : } \Delta\sigma_{ret}(30) = 76 \text{ MPa.}$$

- La perte due au fluage du béton :

$$\Delta\sigma_{flu}(x) = (\sigma_b^M + \sigma_b^F) \frac{E_p}{E_{ij}} \text{ avec : } E_{ij} = E_{i28} = 35981,73 \text{ MPa.} \quad \text{Donc :}$$

$$\Delta\sigma_{flu}(30) = 139,4 \text{ MPa.}$$

- La perte due à la relaxation des armatures de précontrainte :

$$\Delta\sigma_{rel}(x) = 6 \frac{\rho_{1000}}{100} (\frac{\sigma_{pi}}{f_{prg}} - \mu_0) \sigma_{pi}. \quad \text{Donc : } \Delta\sigma_{rel}(30) = 52,03 \text{ MPa.}$$

- Les pertes différées : $\Delta\sigma_{pd}(30) = \Delta\sigma_{ret} + \Delta\sigma_{flu} + \frac{5}{6} \Delta\sigma_{rel} = 258,76 \text{ MPa.}$

- Les pertes totales : $\Delta\sigma(30) = 190,84 + 258,76. \quad \text{Donc : } \Delta\sigma(30) = 449,6 \text{ MPa}$

- La tension résiduelle au point ($x = 30$ m) est : $1488 - 419,08.$

$$\text{Donc : } \sigma(30) = 1038,4 \text{ MPa}$$

EXERCICE 3:

Soit une poutre, de section rectangulaire ($b \cdot h = 35 \cdot 72$) cm^2 et de longueur de **15 m**, soumise à la précontrainte en post tension, par **6 câbles à 10 jours**. Pour la section à **mi travée**, (avec $e_p = -270$ mm), déterminer :

- La tension à l'origine.
- Les pertes instantanées.
- Les pertes différées.

Données :

$$\begin{array}{lll} \alpha = 0,072 \text{ rd.} & f_{\text{peg}} = 1460 \text{ MPa.} & \varepsilon_r = 0,0003. \\ \psi = 0,002 \text{ m}^{-1} & f_{\text{prg}} = 1720 \text{ MPa.} & f_{c28} = 35 \text{ MPa.} \\ f = 0,18 \text{ rd}^{-1}. & A_p = 1672,2 \text{ mm}^2. & \rho_{1000} = 8 \%. \\ g = 1 \text{ mm.} & \sigma_b^M = 15,1 \text{ MPa.} & \mu_0 = 0,3. & I_n = 1,033 \cdot 10^{10} \text{ mm}^4. \\ E_p = 190000 \text{ MPa.} & \sigma_b^F = 10,8 \text{ MPa.} & B_n = 0,25 \cdot 10^6 \text{ mm}^2. \end{array}$$

Solution:

La tension à l'origine :

$$\sigma_{p0} = \min(0,9 f_{\text{peg}}, 0,8 f_{\text{prg}}) \rightarrow \sigma_{p0} = \mathbf{1314 \text{ MPa.}}$$

Les pertes instantanées :

- La perte due au frottement :

$$\Delta\sigma_{\text{frott}}(x) = \sigma_{p0} (1 - e^{-(\alpha f + \varphi x)}) \text{ Donc : } \Delta\sigma_{\text{frott}}(7,5) = \mathbf{36,23 \text{ MPa.}}$$

- La perte due au recul d'ancrage :

$$d = \sqrt{\frac{g E_p x}{\Delta\sigma_{\text{frott}}(x)}} \rightarrow d = 6,23 \text{ m}, \text{ comme } d < x = 7,5 \text{ m} \text{ donc : } \Delta\sigma_{\text{rec}}(7,5) = \mathbf{0 \text{ MPa.}}$$

- La perte due au raccourcissement du béton :

$$\Delta\sigma_{\text{racc}}(x) = \frac{n-1}{2n} (\sigma_b \frac{E_p}{E_{ij}}) \text{ avec : } E_{ij} = E_{i10} = 32918,32 \text{ MPa.}$$

$$\text{On a : } \sigma_b = \frac{P}{B_n} + \frac{P \cdot e^2}{I_n} + \frac{M \cdot e}{I_n}$$

$$P = (\sigma_{p0} - \Delta\sigma_{\text{frott}} - \Delta\sigma_{\text{rec}}) A_p. \text{ D'où : } \mathbf{P = 2136,7 \text{ kN.}}$$

$$M = Ql^2/8, \text{ avec: } Q = G = (0,35 \cdot 0,72) \cdot 25 = 6,3 \text{ KN/m. } \mathbf{M = 177,19 \text{ KN.m.}}$$

$$\text{Donc: } \sigma_b = \mathbf{19 \text{ MPa.}}$$

$$\text{D'où: } \Delta\sigma_{rac}(7,5) = \mathbf{45,7 \text{ MPa.}}$$

$$\text{- Les pertes instantanées : } \Delta\sigma_{pi}(7,5) = \mathbf{81,93 \text{ MPa.}}$$

$$\text{- La tension initiale : } \sigma_{pi}(7,5) = \sigma_{p0} - \Delta\sigma_{pi} = \mathbf{1232,07 \text{ MPa.}}$$

Les pertes différées :

- La perte due au retrait du béton :

$$\Delta\sigma_{ret}(x) = E_p \varepsilon_r. \quad \text{Donc: } \Delta\sigma_{ret}(7,5) = \mathbf{57 \text{ MPa.}}$$

- La perte due au fluage du béton :

$$\Delta\sigma_{flu}(x) = (\sigma_b^M + \sigma_b^F) \frac{E_p}{E_{ij}} \quad \text{avec : } E_{ij} = E_{i28} = 35981,73 \text{ MPa.}$$

$$\text{Donc: } \Delta\sigma_{flu}(7,5) = \mathbf{136,76 \text{ MPa.}}$$

- La perte due à la relaxation des armatures de précontrainte :

$$\Delta\sigma_{rel}(x) = 6 \frac{\rho_{1000}}{100} \left(\frac{\sigma_{pi}}{f_{prg}} - \mu_0 \right) \sigma_{pi}. \quad \text{Donc : } \Delta\sigma_{rel}(7,5) = \mathbf{246,17 \text{ MPa.}}$$

$$\text{- Les pertes différées : } \Delta\sigma_{pd}(7,5) = \Delta\sigma_{ret} + \Delta\sigma_{flu} + \frac{5}{6} \Delta\sigma_{rel} = \mathbf{398,9 \text{ MPa.}}$$