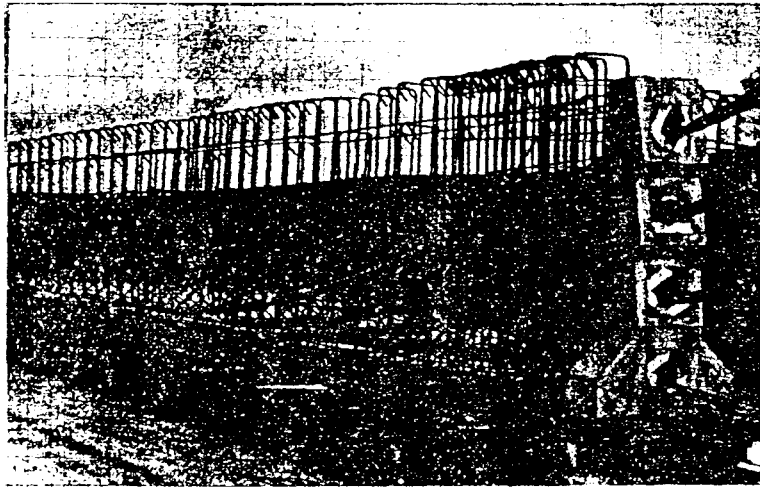


LE BÉTON PRÉCONTRAIT AUX ÉTATS-LIMITES



HENRY THONIER

Chez le même éditeur :

Le béton hydraulique : connaissance et pratique (1982)
sous la direction de J. BARON et R. SAUTEREY

Le béton jeune (1982)
Comptes rendus de colloque

Toute reproduction, même partielle, de cet ouvrage est interdite. Une copie ou reproduction par quelque procédé que ce soit, photographie, microfilm, bande magnétique, disque ou autre, constitue une contrefaçon passible des peines prévues par la loi du 11 mars 1957 sur la protection des droits d'auteur.

© 1985

ISBN 2-85978-082-3

Presses de l'école nationale des
Ponts et chaussées

28, rue des Saints-Pères, 75007 Paris

Département Édition de l'Association Amicale des Ingénieurs Anciens Elèves de l'École Nationale des Ponts et Chaussées.

PRÉFACE

Depuis plus de vingt-cinq ans, la théorie de la sécurité structurale des constructions a accompli de très importants progrès : grâce en particulier à l'impulsion du CEB, Comité Euro-International du Béton, les vérifications aux états-limites sont progressivement entrées dans les codes, et dans les mœurs, permettant de mieux fixer les conditions de durabilité des ouvrages.

En ce qui concerne le béton précontraint, matériau encore jeune à l'échelle du génie civil, puisqu'il n'a pas soixante ans, d'autres éléments sont intervenus dans les dix dernières années, pour modifier encore les habitudes des ingénieurs : l'expérience d'un grand nombre d'ouvrages construits dans les années soixante et au début des années soixante-dix, a permis de mieux cerner le comportement de structures précontraintes ; c'est ainsi, par exemple, que les actions des gradients thermiques, et des déformations différées du béton dans les ponts hyperstatiques ont été précisées ; de même, les contraintes localisées dues à la diffusion des forces concentrées sont mieux connues...

Cette évolution de la technique s'est traduite par une très grande accélération de la révision des règlements : après l'Instruction Provisoire relative à l'emploi du béton précontraint du 12 août 1965, dite IP 1, une autre Instruction Provisoire, dite IP 2, était publiée le 13 août 1973, introduisant la théorie semi-probabiliste dans le domaine du béton précontraint ; puis, en application du Code Modèle CEB-FIP de 1978, était approuvé en 1983 le règlement BPEL, qui doit très prochainement se substituer aux textes antérieurs.

Dans le même temps, les ingénieurs ont vécu l'avènement de l'informatique, qui est venue bousculer leurs habitudes de calcul et même de pensée, en rendant possibles des résolutions numériques qu'on ne pouvait imaginer auparavant.

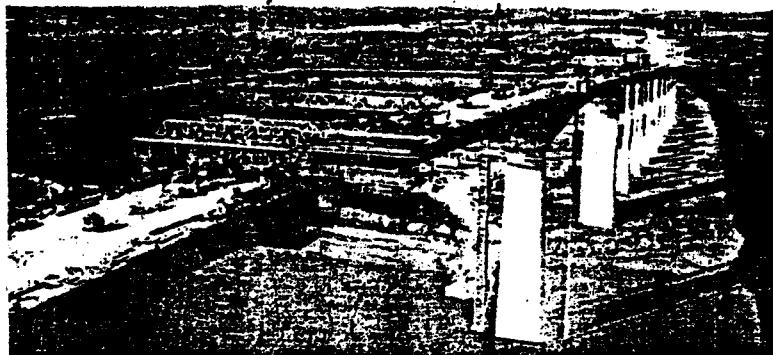
De ce fait, la littérature classique dans le domaine du béton précontraint est devenue rapidement périmée, et un besoin est né de la remplacer par des ouvrages modernes, tenant compte de l'actualité.

Le cours de Béton Précontraint d'Henry THONIER s'inscrit parfaitement dans cette nouvelle génération, et il répond à un besoin certain des ingénieurs chargés d'élaborer ou de vérifier un projet.

La carrière d'Henry THONIER, partagée entre le bureau d'études, l'entreprise et l'enseignement, lui a permis de voir avec des éclairages différents et complémentaires les problèmes du projet de béton précontraint. Le travail très important qu'il a fourni, s'est traduit par un ouvrage de grande qualité, à la fois complet, précis et pratique, directement applicable dans un bureau d'études. Le cours d'Henry THONIER constituera un guide très précieux, à la fois pour les étudiants, et pour les ingénieurs en exercice, qui éprouvent souvent quelques difficultés à mettre à jour leurs connaissances, dans un contexte aussi rapidement évolutif.

Nous devons le remercier vivement pour cette importante contribution qui vient en temps opportun faire le point des théories de base du béton précontraint, et de leur application.

Roger LACROIX
Président de l'AFPC



Pont de Houston (Texas)

A voussoirs coulés en place avec équipement mobile, 229 m de portée de travée centrale et 2 travées latérales de 114 m (1982); 96 kg d'aciers passifs et 75 kg d'aciers de précontrainte par m² de tablier (photo Freyssinet International).



Pont de Luzancy sur la Marne.

Portée 55 m, hauteur à la clé 1,27 m. Voussoirs assemblés par précontrainte provisoire en éléments de poutres sur la rive, mis en place par un transporteur à câbles et solidarisés par précontrainte définitive longitudinale et transversale (1941-1946) (photo H. Baranger).

SOMMAIRE

1. Présentation — Notations — Unités.....	9
2. La réglementation — La sécurité.....	25
3. Les ciments.....	41
4. Les granulats.....	47
5. Les bétons.....	51
6. Les aciers.....	67
7. Les procédés de précontrainte.....	81
8. Les sollicitations.....	109
9. Les contraintes.....	125
10. L'adhérence.....	137
11. Les pertes de précontrainte.....	145
12. Les tirants.....	169
13. Méthode interne — Méthode externe.....	189
14. La flexion en état-limite de service.....	199
15. La flexion en état-limite ultime.....	259
16. L'effort tranchant.....	269
17. La torsion.....	307
18. Les efforts concentrés — Ancrages — Appuis.....	319
19. Les systèmes hyperstatiques.....	343
20. Dispositions constructives.....	365
21. Exemples de poutre isostatique.....	371
22. Pont-dalle continu à deux travées égales.....	407
23. Précontrainte par pré-tension.....	423
24. Exemple de poutre de bâtiment.....	445
25. Les ouvrages.....	471
Annexes	
A. Déformations différées.....	533
B. Intégrales de Mohr.....	545
C. Formulaire de calcul des éléments fléchis.....	551
Index.....	555

1

PRÉSENTATION DU BÉTON PRÉCONTRAIT NOTATIONS — UNITÉS

1. PRÉSENTATION

1.1. Etymologie

Le mot «précontraint», créé par E. FREYSSINET, signifie contraint avant. Le béton précontraint est soumis, préalablement à toute charge extérieure, à un effort de compression qui permettra de supprimer les contraintes de traction qui apparaîtraient dans un élément en béton armé. On évite ainsi les inconvénients du béton armé tels que fissuration, corrosion des aciers, béton tendu inutile...

1.2. Historique

La précontrainte sous toutes ses formes existe depuis longtemps. Elle est naturelle dans les arcs, voûtes, ou provoquée comme les cercles de tonneau, les roues de bicyclette, les roues de chariots, le pneu et la chambre à air, la corde et l'arc, la glace trempée, la scie à bois...

1.2.1. Le mot «précontrainte», néologisme créé par E. FREYSSINET, a été imprimé la première fois en janvier 1933 dans un article de la revue *Travaux* (Sciences et Industrie) sous le titre: «Idées et voies nouvelles».

1.2.2. Le premier brevet de FREYSSINET sur la précontrainte date du 2 octobre 1928, il était intitulé: «Procédé de fabrication de pièces en béton armé».

1.2.3. En fait, les premières études sur la précompression du béton sont antérieures à celles de FREYSSINET. On peut citer:

— les tentatives de CONSIDÈRE et BACH, de retarder les apparitions de fissuration par compression du béton et prétension de l'acier;

- le brevet de P. JACKSON en Californie en 1886 qui est la première application de béton précontraint;
- le brevet de DOEHRING en 1888 comportant quelques principes de précontrainte, mais sans lendemain et qui déposa un brevet de dalles précontraintes par fils;
- les essais des Allemands KOENER et LUNDT en 1907, qui furent voués à l'échec, pour essayer de limiter la fissuration de traction du béton. Le béton insuffisamment comprimé était encore tendu et l'effort de compression dû aux aciers était pratiquement annulé par le retrait et le fluage.

1.2.4. C'est FREYSSINET (1879-1962) qui, en se plaçant dans des conditions voisines des voûtes, introduisit un effort de compression pour compenser les tractions à venir. En 1926, il découvrit le phénomène de fluage (déformation lente sous charge) et les lois du retrait à la suite d'expériences sur l'arc du pont de Plougastel.

Après la guerre, on assista à un essor du béton précontraint dans les pays industrialisés avec P. ABELES en Grande-Bretagne, G. MAGNEL en Belgique, F. LEONHARDT en Allemagne, T.Y. LIN aux Etats-Unis, V. MIKHAILOV en URSS, J.J. BOUVY aux Pays-Bas, E. FREYSSINET et Y. GUYON en France.

1.2.5. Les premiers ponts en béton précontraint ont été réalisés par précontrainte extérieure au béton au moyen de câbles. Ce sont les ponts de la Saale à Aise en Allemagne (1928) de 68 m de portée, et de Aue en Allemagne également (1936) de 69 m de portée.

On peut citer également en :

- 1924, les voûtes de Polyvestre dans le Var avec des tirants prétendus;
- 1935, les premiers tuyaux préfabriqués précontraints;
- 1941, le pont de Luzancy;
- 1946, les pistes précontraintes d'Orly.

En ce qui concerne la précontrainte extérieure, on peut citer également le pont de Villeneuve-Saint-Georges (1953), les ponts de Long Key, Seven Miles aux Etats-Unis, les viaducs de l'autoroute A8 (Vallon des Fleurs, de la Banquière).

1.2.6. Les nouveautés et l'avenir

On assiste actuellement à un certain développement des ponts avec précontrainte extérieure totale ou partielle.

Les ponts à haubans, peu nombreux en France (au nombre de 5) ont, depuis le premier du type sur le canal de Donzère par CAQUOT (1952), vu un développement récent avec le pont Masséna sur le périphérique à Paris, le pont de Saint-Nazaire-Saint-Brévin sur l'embouchure de la Loire (1975), le Pont de Brotonne sur la Seine (1977).

Comme nouveauté, on peut citer le pont à treillis précontraint de Bubiyan (Koweït) (1983).

1.2.7. Les raisons des échecs des prédécesseurs de FREYSSINET sont dues à deux causes :

- la méconnaissance du retrait et du fluage qui annihilait la tension des armatures;
- la limite élastique réduite des aciers disponibles sur le marché.

En effet, pour conserver une force de tension suffisante, les aciers doivent être tendus à une valeur qui dépasse la limite élastique des aciers existants à l'époque.

Ainsi, un retrait de 3×10^{-4} entraîne une chute de tension de l'acier de 60 MPa, une contrainte de compression du béton de 4 MPa entraîne une chute de tension de 60 MPa. On voit ainsi que la limite élastique de 235 MPa est vite atteinte lorsqu'on y ajoute les pertes de recul à l'ancrage et frottement.

Les aciers modernes ont des limites élastiques de 1 400 à 1 600 MPa qui compensent largement les pertes.

1.2.8. Deux définitions sur le béton précontraint

« A aucun degré, le béton précontraint n'est du béton armé amélioré. Il n'a, avec le béton armé, aucune frontière commune. »

E. FREYSSINET, 1946

« Dans la poutre en béton précontraint, l'acier n'est pas une armature, c'est une force. »

Y. GUYON

1.3. Evolution

Du domaine des ponts à poutres, puis ponts-dalles, ponts à poutres préfabriquées, le principe de la précontrainte s'est étendu aux ponts poussés, aux ponts construits par encorbellement, aux ponts suspendus, aux ponts à haubans.

D'autre part, le champ s'est élargi aux réservoirs, aux poteaux, tuyaux, dalles de planchers, tirants de voûtes, tirants d'ancrages, portiques, radiers, réparations d'ouvrages...

1.4. Principes du béton précontraint

Pour comprendre le phénomène de « précontrainte », nous proposons deux exemples :

1.4.1. La roue de bicyclette

La roue de bicyclette est constituée d'une jante avec pneu, de rayons métalliques tendus et d'un moyeu.

• Première étude

Examinons ce qui se passerait si les rayons n'étaient pas prétendus (fig. 1-1).

La raideur de la jante n'est pas suffisante pour ne pas se déformer au contact du sol.

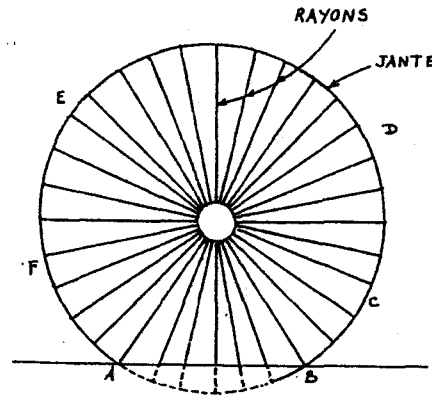


Fig. 1-1. Roue de bicyclette

Les rayons ne peuvent résister à des efforts de compression importants (élancement mécanique de l'ordre de 1 000, contrainte critique d'Euler de l'ordre de 2 MPa, effort critique d'Euler de l'ordre de 3 newton, ce qui est négligeable).

La jante a tendance à se raccourcir entre A et B mais comme son module d'Young élevé ne permet pas d'absorber ce raccourcissement sur la longueur AB, elle pousse sur la partie extérieure à AB. Dans la zone ED, les rayons sont comprimés pour équilibrer l'effort de compression apporté par ceux de la zone AB.

L'équilibre général serait obtenu par :

- compression des rayons des zones AB et DE;
- traction des rayons des zones EF et BD;
- la jante, comprimée sur toute sa longueur.

Or, les rayons flambent.

• Deuxième étude

Supposons les rayons prétendus à la fabrication de la roue, l'effort de compression supporté par les rayons de la zone AB, pour 8 rayons, est de l'ordre de :

$\frac{100}{8} = 12,5 \text{ kg}$; pour des rayons de $1,5 \text{ mm}^2$ de section, on aurait une contrainte de 82 MPa.

Si les rayons sont prétendus à 100 MPa (15 kg de traction), ils peuvent supporter un effort de compression qui diminue l'effort de traction résistant de 100 à $100 - 82 = 18 \text{ MPa}$. Ils restent toujours tendus et ne flambent donc pas.

On voit ainsi comment, par la mise en place d'un effort préalable de traction (précontrainte par traction), on ramène le comportement des matériaux (rayons) dans le domaine de résistance.

C'est ce que Freyssinet énonçait :

« Précontraindre une construction, c'est la soumettre, avant application des charges, à des forces additionnelles déterminant des contraintes telles que leur composition avec celles provenant des charges donne en tous points des résultantes inférieures aux contraintes limites que la matière peut supporter indéfiniment sans altération ».

1.4.2. Expérience simple

Une expérience simple peut être faite avec des morceaux de sucre qui peuvent représenter les voussoirs préfabriqués d'un pont à voussoirs.

Prenons huit morceaux de sucre que nous assemblerons par juxtaposition suivant leur grande face disposée horizontalement (fig. 1-2).

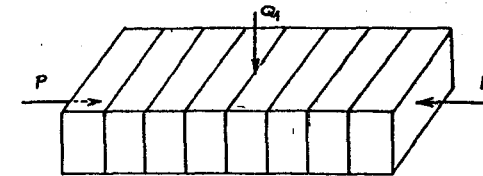


Fig. 1-2. Blocs assemblés par compression suivant la petite inertie

Appliquons une force Q_1 à mi-portée jusqu'à l'effondrement. On constate que la ruine se produit par ouverture du joint inférieur des morceaux n° 4 et 5, comme si l'effort P était appliqué au-dessus du noyau central.

Retournons l'ensemble dans le sens vertical (fig. 1-3).

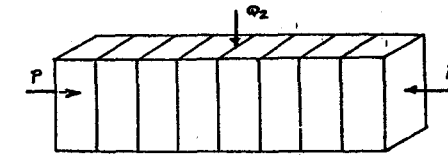


Fig. 1-3. Blocs assemblés par précontrainte suivant la grande inertie

On constate alors que la charge de ruine Q_2 est plus grande que Q_1 .

Déplaçons la position du point d'application de l'effort P vers le bas, l'effort de ruine Q_3 est encore plus élevé :

$$Q_3 > Q_2 > Q_1$$

Le frottement d'un bloc sur l'autre transmet l'effort tranchant. L'effort tranchant résistant est amélioré par la présence de la précontrainte P et par la surface en contact.

On constate donc que la force portante est améliorée par :

- une plus grande inertie ($Q_2 > Q_1$);
- une excentricité de l'effort P dirigée vers le bas ($Q_3 > Q_2$).

1.5. Qualités et défauts du béton précontraint

Comme principaux avantages du béton précontraint, on peut citer :

- une meilleure utilisation de la matière puisque contrairement au béton armé, il n'y a pas de béton tendu inutile (tout au moins en classe I et II);
- le béton situé autour des armatures de précontrainte est toujours comprimé, on limite ainsi sérieusement les risques de corrosion des aciers;
- les armatures à haute limite élastique utilisées en béton précontraint sont moins chères, à force égale, que les aciers de béton armé;
- l'effort de précontrainte, agissant en sens inverse des charges extérieures, limite les déformées. On obtient ainsi une diminution des flèches des poutres et donc une diminution de leur hauteur;
- la possibilité d'assembler des éléments préfabriqués sans échafaudage ni bétonnage de deuxième phase: ponts construits avec des voussoirs préfabriqués posés en encorbellements successifs, fléaux de couverture de stade (Parc des Princes, stade olympique de Montréal, etc.);
- la possibilité de franchir de plus grandes portées qu'avec des ouvrages en béton armé.

Comme inconvénients, on retiendra :

- la nécessité de fabriquer des bétons plus résistants, principalement avant 28 jours;
- la nécessité de disposer d'un personnel qualifié pour la vérification de la pose des gaines et câbles et pour la mise en tension des câbles;
- l'obligation d'attendre que la mise en tension soit faite pour pouvoir décinturer ou décoffrer;
- des calculs en général plus complexes que pour les ouvrages en béton armé.

1.6. Types de précontrainte

1.6.1. Comment exercer l'effort de précontrainte?

- A l'intérieur du béton avec câbles de fils ou torons, fils adhérents ou barres;
- à l'extérieur du béton au moyen de vérins ou de câbles extérieurs.

1.6.2. Comment assurer la transmission de l'effort de précontrainte de l'acier vers le béton?

- Aux extrémités par des vérins, les ancrages des câbles ou les plaques des barres;
- linéairement le long du câble pour les fils adhérents ou les câbles rendus adhérents par injection.

1.6.3. Quand appliquer l'effort de précontrainte?

- Avant le coulage du béton et donc avant son durcissement: *pré-tension* (les fils adhérents par exemple);
- après le coulage du béton et son durcissement: *post-tension*.

1.7. Quelques ouvrages remarquables

	Record du monde	Record français	
<i>Ponts suspendus</i>	1. Kobé - Japon 1 808 m - 1985 2. Humber N.E. Angleterre 1 410 m - 1981 3. Verrazano - New York 1 298 m - 1964	1. Tancarville 608 m	
<i>Ponts haubanés</i>	1. Hooghly River - Calcutta 457 m - 1982 2. Saint-Nazaire 3. Stretto Di Rande 400 m - 1978	1. Saint-Nazaire 404 m - 1975 2. Brotonne - Caudebec 320 m - 1977	1. Projet de pont à Honfleur - 510 m 2. A construire de 84 à 86: Fraser River Bridge, Canada 465 m
<i>Ponts métalliques</i>	1. Québec - Saint-Laurent 549 m - 1918 2. Forth - Ecosse 521 m - 1889 3. Minato - Japon 510 m - 1974		
<i>Pont-Arcs aciers</i>	1. New River George Virginie Occidentale 518 m - 1977 2. Bayonne - New-Jersey 510 m - 1931 3. Sydney - Australie 509 m - 1932	1. Garabit	
<i>Pont-Arcs béton</i>	1. Krk - Yougoslavie 390 m - 1979 2. Gladesville - Australie 305 m - 1964 3. Amizade - Brésil 290 m - 1964	1. Plougastel 172,6 m - 1930	Projet pont de Magnan (Nice) - 260 m
<i>Pont (acier)</i>	1. Costa e Silva 300 m - 1974 2. Sava - Yougoslavie 261 m - 1956 3. Zoo - Cologne RFA 259 m - 1966	1. Bénodet - 200 m	

	Record du monde	Record français	
Pont (béton)	1. Brisbane River Australie 260 m - 1982 2. Koror - USA - Pacifique 241 m - 1978 3. Hannana - Japon 240 m - 1976	1. Gennevilliers 172 m 2. Ottmarsheim 171,9 m	

Le plus long pont en béton précontraint est celui de Seven Miles qui relie les Keys au continent en Floride. Sa longueur est de 10 941 m et il est constitué de 2 122 voussoirs préfabriqués, assemblés par précontrainte extérieure sur des bossages à l'intérieur du caisson. Les piles les plus hautes sont formées de caissons préfabriqués assemblés par des barres de précontrainte.

1.8. Quelques statistiques sur les ponts

	1979		1980	
	Nombre de ponts	Surface de tablier m ²	Nombre de ponts	Surface de tablier m ²
Maître d'ouvrage public (DDE)	537	248 000	678	339 000
Sociétés concessionnaires d'autoroute ..	156	75 000	233	142 000
SNCF	434	117 000	?	?
Total	1 127	440 000	> 911	> 481 000

(Extrait de la revue *Travaux*, décembre 1981).

1980	Béton armé	Béton précontraint	Métal
Nombre de ponts	51 %	41 %	8 %
Surface de tablier	27 %	67 %	6 %

(Extrait de la revue *Travaux*, décembre 1981).

Type d'ouvrage	Passage supérieur ou inférieur à dalle précontrainte PSIDP	Passage inférieur en portique ouvert PIPO	Passage inférieur en cadre fermé PICF	Encorbellement
Proportion en :				
— nombre	16,5 %	13,0 %	11,7 %	2,6 %
— surface	18,2 %	5,2 %	4,1 %	23,0 %

2. NOTATIONS

Les notations ont beaucoup varié depuis les premiers règlements de béton armé et de béton précontraint. On a assisté par exemple à des inversions de la signification du signe pour les tractions, puis les compressions.

Les dernières notations du BPEL ont l'avantage d'être en accord avec celles du BAEL, et très voisines de celles des recommandations internationales (ISO, FIP-CEB). Ce ne peut être qu'une source de meilleure compréhension des règlements étrangers (anglo-saxons en particulier).

Le principe de base est de réserver la lettre *f* aux résistances caractéristiques, la lettre *σ* aux contraintes normales, la lettre *τ* aux cisaillements.

Les indices *s* et *p* ont été retenus pour l'acier passif (steel) et de précontrainte respectivement, les indices *c* et *t* pour les contraintes de compression et de traction du béton respectivement. On peut ainsi classer les notations suivantes :

- les actions ;
- les sollicitations ;
- les contraintes ;
- la géométrie.

2.1. Actions

- G* : Charges permanentes.
- Q* : Charges variables quelconques.
- E* : Séisme (earthquake).
- S* : Neige (snow) ou *S_s* (neige).
- W* : Vent (wind).
- T* : Température.
- F_a* : Action accidentelle.

2.2. Sollicitations

- M* : Moment fléchissant.
- M_s* : dû aux charges permanentes.
- M_v* : dû aux charges variables.
- M_u* : Moment de calcul en ELU.
- M̄* : Moment admissible.
- N* : Effort normal autre que la précontrainte.
- T* : Moment de torsion.
- V* : Effort tranchant (mêmes indices que pour *M*) (*V* pour vertical!).
- P* : Effort normal dû à la précontrainte.

2.3. Contraintes

Le surlignage indique une contrainte admissible (exemple: $\overline{\sigma_s}$)*

- f_e : Limite élastique des aciers passifs.
- f_{prg} : Limite de rupture garantie de l'acier de précontrainte.
- f_{peg} : Limite d'élasticité de l'acier de précontrainte.
- f_{cj} : Résistance caractéristique du béton à la compression à j jours (f_{c28} à 28 jours).
- f_{tj} : Résistance caractéristique du béton à la traction à j jours (f_{t28} à 28 jours).
- σ_s : Contrainte de traction dans l'acier passif.
- σ_p : Contrainte de traction dans l'acier de précontrainte.
- σ_{bc} : Contrainte de compression du béton.
- σ_{bt} : Contrainte de traction du béton.
- τ : Contrainte de cisaillement.

2.4. Géométrie

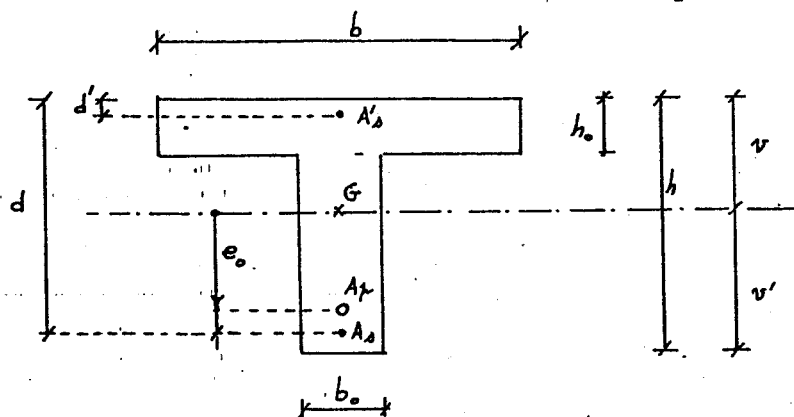


Fig. 1-4. Section en T. Notations

- A_s : Aire d'une section d'armature passive.
- A_p : Aire d'une section d'armature de précontrainte.
- A_s : Somme des aires des sections droites d'un cours d'armatures transversales passives.

* La notation retenue par le BPEL pour une contrainte admissible est l'indice « lim ».
Exemple: σ_{lim} .

- e_o : Excentricité.
- l : Portée.
- s_t : Espacement des armatures passives transversales.
- s_i : Espacement des armatures de précontrainte transversale.

2.5. Autres valeurs

- E_{ij} : Module d'élasticité longitudinal instantané (module d'Young) du béton à j jours.
- E_s : Module d'élasticité longitudinal des aciers passifs.
- E_p : Module d'élasticité longitudinal des aciers actifs.
- ϵ_{bc} : Raccourcissement relatif du béton comprimé.
- ϵ_s : Allongement relatif de l'acier passif.
- ϵ_p : Allongement relatif de l'acier de précontrainte.

Pour les autres notations, on pourra se référer à l'annexe 12 du BPEL ou à défaut à la norme NF-P-06-005.

3. UNITÉS

Le système métrique universellement adopté à ce jour a été une source de simplification des calculs importante, dans la mesure où la règle du jeu est simple (puissance de 10), où les unités sont les mêmes partout (la livre anglaise diffère de la livre française). Seuls, les Etats-Unis utilisent encore un système dit « impérial » à base de pied-pouce-livre*.

Le système légal est le système international dit SI, rendu obligatoire par le décret n° 61-501 du 3 mai 1961. Les unités de base intéressant le béton précontraint sont :

- le mètre (m) pour les longueurs;
- le kilogramme (kg) pour les masses;
- la seconde (s) pour le temps et les unités secondaires qui en découlent;
- le newton (N) pour les forces; c'est la force qui communique à un corps de masse 1 kg, une accélération de 1 m/s^2 .

On utilise couramment :

- le kilonewton (kN) de 1 000 N et le méganewton (MN) de 10^6 N ;

* Les principales unités utilisées en béton précontraint sont :

- La livre (pound: lb) : $0,45359 \text{ kg} = 4,45 \text{ N}$.
- Le pouce (inch: in) : $0,0254 \text{ m}$.
- Le pied (foot-feet: ft) : $12 \text{ in} = 0,3048 \text{ m}$.
- Le kilopound (k) : $1\,000 \text{ lb} = 453,59 \text{ kg} = 4,45 \text{ kN (force)}$.
- Le psi (lb/in²) : $6\,897 \text{ Pa} = 6,897 \text{ kPa (contrainte)}$.
- Le psf (lb/ft²) : $47,9 \text{ Pa} = 4,8827 \text{ kg/m}^2 \text{ (force par unité de surface)}$.
- Le k-ft (1 000 lb × 1 ft) : $1,3564 \text{ kNm (moment)}$.
- Le ksi (1 000 psi) : $6,897 \text{ MPa (contrainte)}$.

— le pascal (Pa) pour les contraintes = 1 N/m² ou plus couramment le kPa (1 000 Pa), le MPa (10⁶ Pa).

On utilise quelquefois :

— le N/mm² qui vaut 1 MPa ;

— le newton-mètre (Nm) pour les moments ou plus couramment le kNm (1 000 Nm) et le MNm (10⁶ Nm).

On pourra faire la correspondance avec les unités anciennes encore utilisées par les relations suivantes :

Forces : 1 kg = 9,81 N 1 N = 0,1019 kg
1 t = 9,81 kN 1 kN = 0,1019 t

Contraintes : 1 bar = 100 kPa = 0,1 MPa 1 MPa = 10 bars
1 kg/cm² = 98,1 kPa = 0,0981 MPa
1 MPa = 10,19 kg/cm²

4. RÈGLEMENT

Béton armé		Béton précontraint	
Marchés publics (ponts)	Marchés privés (usines, bâtiments)	Marchés publics	Marchés privés
1. Circulaire 1904 (< 20 pages)	3. BA 45 (90 pages) 4. BA 60 (377 pages)	1. Instruction provisoire de 1953 (74 p.) contrainte > 0	ASP 65 Recommandation de l'Association Scien- tifique de la Précon- trainte
2. Circulaire 1934 (43 pages)		2. Instruction provi- soire de 1965 (88 p.) classe I, dite IP1 du 12-8-65	
5. Circulaire 1964 (< 80 pages)		3. Instruction provi- soire de 1973 (237 p.) classes I, II, III, aux états- limites, dite IP2 du 13-8-73	
6. CCBA 68 (199 pages) 7. BAEL 83 (315 pages)		4. BPEL 83 (310 p.)	

5. DÉFINITIONS

Ancre: (anchorage) du grec agkura (αγκυρα: ancre) (mot apparu pour la première fois en France en 1461).

Dispositif situé à l'extrémité du câble ou de la barre, destiné à transférer l'effort de traction du câble sur son appui et donc dans le béton de l'élément précontraint.

En général constitué d'une plaque d'ancrage, d'une plaque d'appui et de clavettes.

Précontrainte (prestressing) du latin astringere (serrer fortement, presser).

Ce mot créé par E. FREYSSINET en 1933 désigne en général l'effort de précontrainte exercé par le câble.

Câble: (tendon) du latin capulum (corde) (1310).

Ensemble d'armatures de précontrainte, fils ou torons, permettant d'assurer l'effort de précontrainte.

Toron: (strand) du latin torus (brin de corde) (1650).

Armature composée de 3 ou 7 fils enroulés en spirale.

Fil: (wire) du latin filum (fil) (1150).

Armature de précontrainte de diamètre inférieur ou égal à 12 mm.

Barre: (bar) du gaulois barro (extrémité) (1180).

Armature de précontrainte rigide de diamètre supérieur à 12 mm.

Gaine: (sheath, duct) du latin vagina (gaine, fourreau) (1150).

Conduit protecteur des armatures de précontraintes (câble, barre ou torons), permettant la mise en tension du câble après bétonnage, et devant être injecté par la suite pour éviter toute corrosion de l'acier de précontrainte.

Pré-tension: (pretensioning) type de précontrainte appliquée sur le béton avant le durcissement de celui-ci, donc avant son coulage.

Post-tension: (post-tensioning) à l'opposé de la pré-tension, l'effort de précontrainte est appliqué après durcissement du béton.

Béton: (concrete) du latin bitumen (bitume) (betun en 1180 = boue, gravats; béton en 1584 = mélange de mortier et de cailloux).

Matériau constitué à partir de sable, gravier, eau et ciment.

Coulis d'injection: (grout) du verbe couler (1150).

Mortier fin destiné à remplir les gaines après mise en tension des câbles. Ses fonctions principales sont de protéger les armatures contre la corrosion et d'assurer une bonne adhérence du béton par l'intermédiaire de la gaine.

Armatures: (reinforcing, reinforcement) du latin armatura (armure) (1694).

On distinguera les armatures actives ou armatures de précontrainte et les armatures passives ou armatures de béton armé (c'est-à-dire non tendues avant toute action extérieure).

6. PROSPECTIVE EN MATIÈRE D'OUVRAGES D'ART

Une étude a été entreprise aux Etats-Unis* pour essayer de préciser ce que sera la construction des ponts dans les années 1980 à 2000.

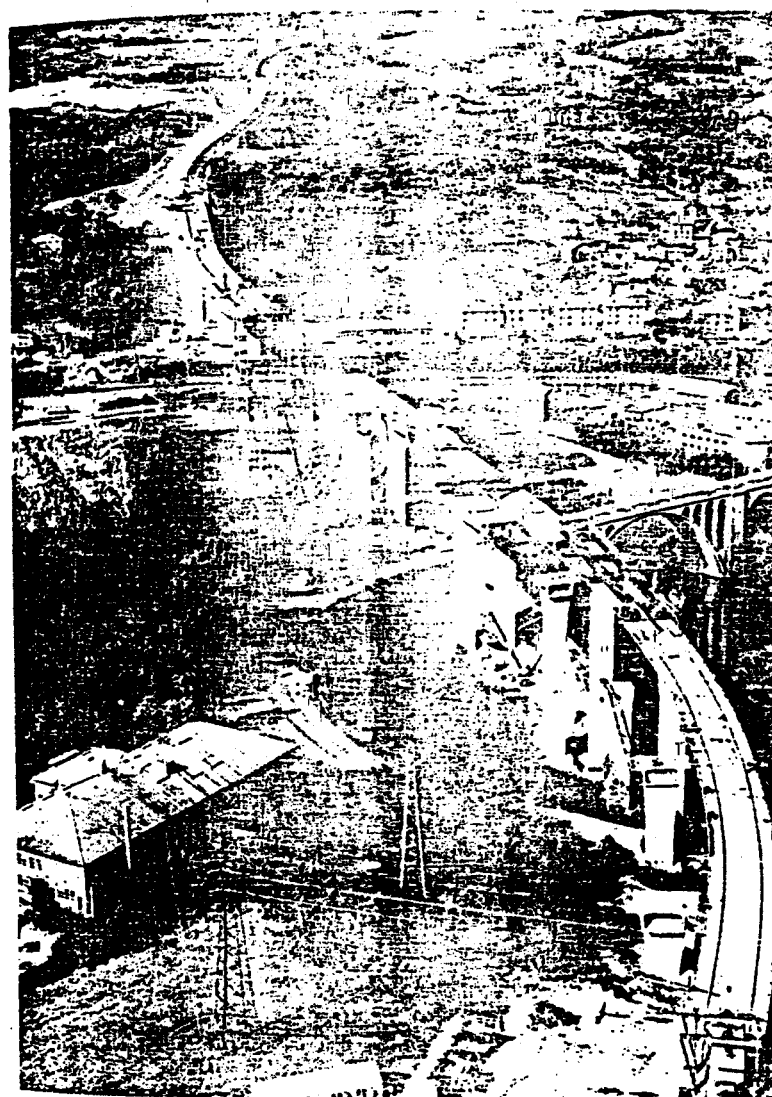
* A Forecast of Bridge Engineering: 1980-2000 — Virginia Highway and Transportation Research Council — Charlottesville Virginia, juin 1979 (extraits de *Prestressed concrete* de A.E. Naaman, op. cit.).

En ce qui concerne le béton précontraint, on peut retenir :

1. Une plus grande standardisation pour les petites et moyennes portées avec un emploi plus fréquent du béton précontraint que du béton armé.
Une progression de l'utilisation de ponts précontraints à caisson ou de ponts à haubans. Une plus grande recherche esthétique.
2. Emploi de béton et d'aciers de plus grande résistance. Peut-être l'emploi de câbles non métalliques (Kevlar).
3. La maintenance, la réhabilitation ou le remplacement des vieux ponts apportera un marché important de construction.
De nouveaux matériaux et méthodes de réparation apparaîtront.
Les vieux ponts seront soumis à des inspections rigoureuses.
4. Les ordinateurs permettront de mieux prendre en compte l'influence de la température, la fatigue, le fluage...
Des appareils et dispositifs d'enregistrement automatique permettront de mieux connaître les charges réelles, les contraintes, les déformations, la fissuration et leur évolution dans le temps.
5. Les coûts des matériaux et de la main-d'œuvre augmenteront de façon importante. Il sera de plus en plus fait appel à la préfabrication, à des procédés de constructions simplifiés ou automatiques.

Références bibliographiques

- AFPC-ITBTP — Innovation dans le domaine des ouvrages d'art en béton précontraint. Journée d'études AFPC-ITBTP du 25 novembre 1982. *Annales ITBTP*, décembre 1983-janvier 1984.
- BARETS, J. — Le béton précontraint : éléments de calcul. Eyrolles, 1962.
- DREUX, G. — Pratique du béton précontraint. Eyrolles, 1975. — Nouveau mémento du béton précontraint. Eyrolles, 1975.
- FAUCHART, J. — Cours de béton précontraint (tomes I et II). Cours du CHEBAP.
- FUENTES, A. — La précontrainte dans le bâtiment. Eyrolles, 1983.
- GERWICK, B. — Construction of prestressed concrete structures. Morris NY, 1971.
- GUYON, Y. — Constructions en béton précontraint (tomes I et II). Eyrolles, 1966.
- LACROIX, R., FUENTES, A. — Le projet de béton précontraint. Eyrolles, 1975.
- LEONHARDT, F. — Prestressed concrete design and construction. 1964.
- MATHIVAT, J. — Constructions par encorbellements des ponts en béton précontraint. Eyrolles, 1979.
- NAAMAN, A.E. — Prestressed concrete analysis and design. Mac Graw Hill, 1983.
- VIRLOGEUX, M. — Développement de l'innovation dans le domaine des grands ouvrages. *Revue Ponts et Chaussées et Mines (PCM)*, mai 1982.



Viaduc de Bellegarde (Ain, 1981) (doc. Coignet).

2

LA RÉGLEMENTATION LA SÉCURITÉ

L'acte de construire a fait l'objet de réglementation depuis fort longtemps. Ainsi, on retrouve dans le code d'HAMMOURABI* édicté voilà près de 4 000 ans, une prescription concernant la responsabilité du constructeur, en l'occurrence l'architecte :

« Si la maison s'écroule et écrase le fils du propriétaire, le fils de l'architecte sera mis à mort. »

La sécurité est donc un critère important du choix des matériaux en qualité et en quantité.

Il va de soi que, si la sécurité n'est pas réglementée, les différents concepteurs utiliseront des formules personnelles pour le calcul avec des critères qui leur seront propres, qui peuvent dans certains cas être néfastes à la sécurité ou à l'économie. Il faut donc trouver un compromis entre le coût et la sécurité.

En général, établi à l'échelon national par un organisme dépendant de l'Etat, un règlement est le fruit de l'expérience acquise avec les méthodes de calcul élaborées au cours des décennies précédentes, avec les analyses des sinistres et effondrements qui ont pu se produire dans le passé. Il est élaboré par une Commission d'experts reconnus dans la profession, appartenant en général au domaine public et au domaine privé et capables de mettre à la portée de tous les ingénieurs un outil simple, efficace et pas trop rigide pour ne pas jouer le rôle de frein au progrès.

Ce règlement doit tenir compte des derniers résultats de la technique tels que :

- amélioration de la qualité des matériaux acier et béton ;
- utilisation de la préfabrication ;
- mise au point de nouveaux procédés de construction ;
- résultat des essais en laboratoire.

* Roi de Babylone, auteur du premier code de lois connu vers 1750 avant J.-C.

C'est pourquoi un règlement doit être mis à jour régulièrement.

En France, le premier règlement de béton armé a été édicté en 1906, il mettait fin au calcul du béton armé en section non fissurée ce qui est le cas d'une section de matériau homogène calculée suivant la résistance des matériaux pure.

Le premier règlement de béton précontraint apparu en France est l'instruction provisoire de 1953 pour les marchés publics qui préconisait une contrainte minimum positive en tout point d'une pièce fléchiée égale à huit pour cent de la contrainte de compression du béton.

En 1965, apparurent deux documents :

— l'Instruction provisoire du 12 août 1965 relative à l'emploi du béton précontraint qui s'appliquait aux marchés publics et préconisait une contrainte positive ou nulle en tout point d'une section fléchiée (ce que nous appellerons maintenant la classe I) ;

— les recommandations de l'Association Scientifique de la Précontrainte (ASP 65) qui n'avaient pas valeur de Document Technique Unifié (DTU), car non reconnues par certains organismes, mais qui avaient le mérite de permettre le calcul des sections fléchies en admettant des tractions (classes II et III) en plus de la classe I et de faire ainsi la transition entre le béton armé et le béton précontraint. Ces recommandations ont été utilisées principalement pour le calcul des poutres précontraintes à fils adhérents d'utilisation très fréquente en bâtiment.

En 1973 est apparue l'Instruction Provisoire du 13 août 1973 dite IP 2 qui admettait le principe d'avoir des tractions dans les sections fléchies (classes I, II et III). Le contenu compliqué de sa rédaction et des méthodes de calculs ou formules utilisées ont fait qu'elle n'a pas reçu l'accord des professionnels des Marchés privés, qui n'avaient d'ailleurs pas participé à son élaboration.

En fait, pour les ouvrages publics, l'ancienne Instruction de 1965 (dite IPI) a subsisté en parallèle avec l'IP 2. Un document dit Béton Précontraint aux Etats-Limites (BPEL) vient de paraître. Ce document qui reprend les principes de l'IP 2 en les simplifiant, est le fruit d'une collaboration entre les représentants des Marchés publics et des Marchés privés et devrait mettre fin à une longue période de flou et de complication réglementaire.

Ainsi, la réglementation française en béton armé et précontraint aussi bien pour les Marchés privés que publics est homogène avec les règles BAEL et BPEL.

La sécurité doit donc être codifiée ; or elle peut l'être de différentes façons. Ainsi, on peut considérer trois types de réglementation.

1. LA RÉGLEMENTATION CLASSIQUE DITE AUX CONTRAINTES ADMISSIBLES

Cette réglementation a été la première élaborée. Elle compare les contraintes obtenues par la résistance des matériaux sous des sollicitations de service (c'est-à-dire sous les charges correspondant à leur phase d'utilisation) aux

contraintes de ruine f des matériaux, minorées par un coefficient dit coefficient de sécurité tels que :

$$\sigma \leq \frac{f}{\gamma}$$

Cette méthode dite aux contraintes admissibles a pratiquement disparu de tous les règlements de béton armé ou précontraint utilisés actuellement dans le monde, ceci pour plusieurs raisons :

— la contrainte de ruine f dépend d'un certain nombre de paramètres tels que la limite élastique du matériau si elle existe*, l'allongement à la rupture du matériau. En effet, l'existence d'un grand allongement à la rupture est un critère de sécurité supplémentaire grâce à la « ressource » dont dispose la section** ;

— l'inéquation ci-dessus ne tient pas compte suffisamment des augmentations accidentelles de telle ou telle sollicitation, en particulier dans le cas où les contraintes ne sont pas proportionnelles aux actions appliquées.

On peut se rappeler à ce sujet le cas, souvent cité par CAQUOT, de flexion composée d'une cheminée soumise à son propre poids G et à l'action du vent de résultante H située à une hauteur h .

Les sollicitations se ramènent à :

- un effort normal : G ;
- un moment fléchissant : $M = H.h$.

Pour une section de béton à la base S et un module d'inertie $\frac{I}{v}$, les contraintes ultimes maximum et minimum sont :

$$\sigma = \frac{G}{S} \pm \frac{M}{I/v}$$

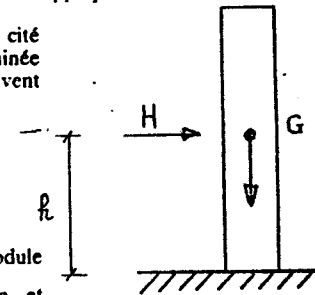


Fig. 2-1. Cheminée soumise à l'action du vent

• Exemple numérique : avec $\frac{G}{S} = 6 \text{ MPa}$, $\frac{M}{I/v} = 8 \text{ MPa}$, les contraintes admissibles étant : 2 MPa en traction et 14 MPa en compression avec un coefficient de sécurité égal à 2 (fig. 2-2).

Un dépassement de seulement 25 % de l'action du vent entraîne une contrainte de traction de - 4 MPa. En effet, avec un moment égal à 1,25 M, nous obtenons le diagramme des contraintes suivant (fig. 2-3) :

La contrainte de ruine est alors atteinte et l'on s'aperçoit que le coefficient de sécurité de 2 sur les contraintes se traduit en fait par un

* Pour le béton, la notion de limite élastique n'existe pas, car la transition entre zone élastique et plastique est très étalée.

** Cette notion connue sous le nom de ductilité revêt une importance particulière dans le cas des structures soumises à des séismes. L'énergie absorbée par les structures lorsque les matériaux ont une large plage de plasticité leur permet d'éviter l'effondrement au prix de grandes déformations.

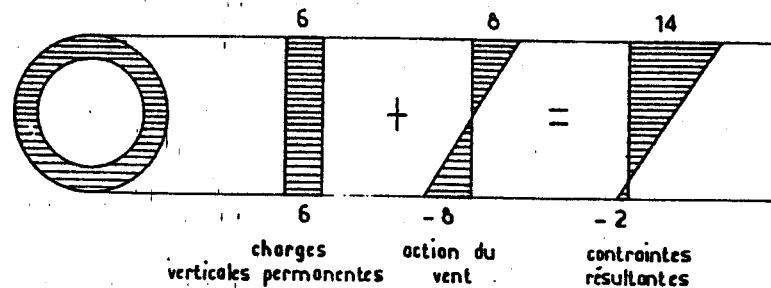


Fig. 2-2. Contraintes avec un vent H

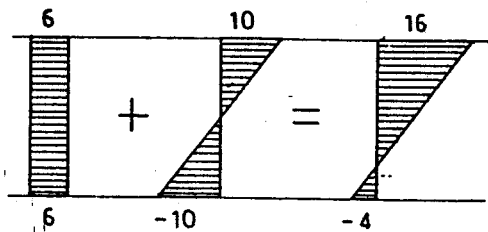


Fig. 2-3. Contraintes avec un vent 1,25 H

coefficient de sécurité sur les charges de 1,25 seulement. On voit le danger d'une telle définition.

Cette méthode de calcul ne tient pas compte de la nature des charges et de leur risque de dépassement. Ainsi, les charges permanentes ont très peu de chance d'être dépassées de façon importante. Il n'en est pas de même des charges de vent, neige ou séisme compte tenu de leur caractère aléatoire et de la méconnaissance de leurs valeurs maximum.

On peut citer l'exemple de la neige dans certaines régions, qui peut atteindre une épaisseur et donc une charge dépassant de façon importante la valeur retenue dans les calculs et entraînant la ruine de certains ouvrages.

Un autre paramètre, non pris en compte, est le rapport des charges variables aux charges permanentes. Ainsi, les toitures en charpente métallique, beaucoup moins lourdes que les toitures en béton, ont beaucoup moins bien résisté que ces dernières au surcroît de charge dû à une épaisseur de neige exceptionnelle.

Exemple : Soit une toiture métallique pesant 50 kg/m^2 , comparée à une toiture de béton pesant 400 kg/m^2 de poids propre et devant supporter une charge de neige théorique de calcul de 100 kg/m^2 . Dans le cas de la toiture métallique, la charge totale de calcul sera de 150 kg/m^2 et dans le cadre de la toiture en béton, cette même charge de calcul sera de 500 kg/m^2 .

Si le coefficient de sécurité sur les contraintes est de 1,5, la marge de sécurité, en charge de neige, sera de $0,5 \times 150 = 75 \text{ kg/m}^2$ supplémentaire pour la toiture métallique au lieu de $0,5 \times 500 = 250 \text{ kg/m}^2$ pour la toiture en béton. On constate combien la sécurité réelle est différente dans les deux cas :

- 1,75 pour la toiture métallique ;
- 3,50 pour la toiture en béton (cf. tableau 2-1).

Pour pallier ces inconvénients, les nouveaux règlements se sont orientés vers le plus grand nombre possible de paramètres.

Tableau 2.1

	Toiture béton	Toiture acier
Poids propre (G) kg/m^2	400	50
Neige (N)	100	100
Charge de calcul (S)	500	150
Capacité portante (1,5 S)	750	225
Sécurité sur les charges de neige $\frac{1,5 S - G}{N}$	$\frac{750 - 400}{100} = 3,5$	$\frac{225 - 50}{100} = 1,75$

2. THÉORIE PROBABILISTE DE LA SÉCURITÉ

Cette théorie essaye de prendre en compte le seuil de probabilité à partir duquel survient l'état de ruine. La certitude absolue n'existant pas en construction, on se pose *a priori* un seuil de probabilité par exemple 10^{-6} ou 10^{-9} pour que l'effondrement ne se produise pas.

Ce seuil dépend naturellement d'un grand nombre de paramètres.

En premier lieu de l'usage de l'ouvrage :

- établissement recevant du public ou au contraire seulement du personnel d'entretien ;
- ouvrage offrant des risques importants tels une centrale nucléaire ou une usine de retraitement des déchets radioactifs ;
- pont-rail ou pont-route, dans le dernier cas il est plus facile de dévier la circulation pour réparation que dans le cas des chemins de fer ;
- pont-routier situé sur une autoroute urbaine ou pont situé dans une région désertique.

On pourrait ainsi multiplier les exemples.

D'autre part, pour une étude sérieuse de la méthode probabiliste, il faudrait faire une analyse probabiliste des facteurs aléatoires dans le temps concernant les incertitudes sur :

- la résistance des matériaux mis en œuvre ;
- la géométrie des ouvrages compte tenu des méthodes d'exécution, des tolérances, des événements survenant à l'ouvrage (corrosion) ;
- la valeur des charges permanentes et variables ;
- les méthodes de calcul, les contraintes calculées.

La mise en équation de tous ces paramètres conduit à des calculs inextricables, combien même serait-on capable d'établir des lois de comportement probabiliste.

L'idée était bonne, mais l'application difficile ; c'est pourquoi on en est venu à une théorie simplifiée, dite semi-probabiliste.

3. THÉORIE SEMI-PROBABILISTE*

Tout d'abord, définissons quelques éléments de vocabulaire :

— on appelle *action*, toute influence extérieure à la structure qui entraîne une variation de contrainte dans la structure, telle que charges permanentes, charges d'exploitation, vent, neige, séisme, variation de température, tassement d'appui...

— on appelle *sollicitation*, tout effort interne à la structure engendré par les actions, tel que moment fléchissant, effort normal, effort tranchant, moment de torsion ;

— on appelle *état-limite*, l'état de sollicitation tel qu'au-delà de cet état, les conditions d'utilisation de l'ouvrage ne sont plus satisfaites. On définit ainsi un état-limite de service (ou d'utilisation normale : ELS) et un état-limite ultime (ELU).

Le principe de base de la méthode semi-probabiliste consiste à :

- définir des valeurs caractéristiques pour les *actions*, c'est-à-dire des valeurs que l'on estime ne pas être dépassées plus d'une fois sur 10^6 pour une période donnée (période d'occurrence dans la vie de l'ouvrage) ;
- définir des valeurs caractéristiques pour les *résistances*, et non plus des valeurs garanties par un fabricant. Ces valeurs correspondent également à des seuils de probabilité ;
- prendre en compte tous les éléments qui permettent de passer des actions aux contraintes : méthodes de calcul, caractères aléatoires non pris en compte ci-dessus, par un coefficient de réduction appliqué aux contraintes et de majoration appliquée aux actions ;
- vérifier que les sollicitations obtenues sont inférieures aux sollicitations résistantes de l'état-limite étudié.

* Cette théorie est exposée dans un fascicule du ministère de l'Équipement intitulé *Directives Communes relatives au calcul des constructions dites DC 79* du 13 mars 1979, fascicule spécial 79-12 bis.

3.1. Etat-limite

On définit deux types d'état-limite :

- les états-limites de service ou d'utilisation qui concernent la durabilité de l'ouvrage soumis aux sollicitations correspondant aux actions caractéristiques (action de service) ;
- les états-limites ultimes qui concernent la non-ruine de l'ouvrage donc sa capacité portante.

3.1.1. Etat-limite d'utilisation ou de service (ELS)

On trouve dans cette catégorie :

- les déformations qui peuvent être incompatibles avec le bon fonctionnement de l'ouvrage (flèche de plancher entraînant des désordres dans les cloisons qu'il supporte, flèche inesthétique de poutres...) ;
- la fissuration des zones tendues ;
- les dommages tels la corrosion ;
- les vibrations excessives.

3.1.2. Etat-limite ultime (ELU)

- La perte de stabilité, par exemple le renversement de la structure ;
- l'instabilité de forme tel le flambement ;
- la rupture des matériaux ;
- les déformations plastiques exagérées.

Un même ouvrage devra satisfaire à la fois à des conditions d'état-limite de service et d'état-limite ultime.

3.2. Valeurs caractéristiques

Par définition, la valeur caractéristique f_k de résistance d'un matériau correspond à une probabilité de ruine donnée *a priori*. Elle s'exprime donc en fonction des paramètres des calculs de probabilité que sont la moyenne f_m et l'écart-type s par la relation :

$$f_k = f_m - ks,$$

où k représente un coefficient correspondant à la probabilité d'occurrence.

Pour une loi gaussienne, le coefficient k a les valeurs suivantes :

Probabilité d'occurrence	0,5	0,2	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001
k	0	0,84	1,28	1,64	1,96	2,33	2,58	3,09

Pour les actions caractéristiques, une définition basée sur les mêmes principes est difficilement applicable devant la méconnaissance de la valeur moyenne et de l'écart-type d'une action.

Ainsi, il faudrait considérer chaque action comme un cas particulier en fonction de sa nature et de sa variation dans le temps.

Sur le graphique ci-après, on voit la variété des valeurs des actions en fonction de leur intensité, de leur durée, de leur répétition... (fig. 2-4) pour une salle de spectacle, un pont routier urbain, un dortoir, une aire de stockage.

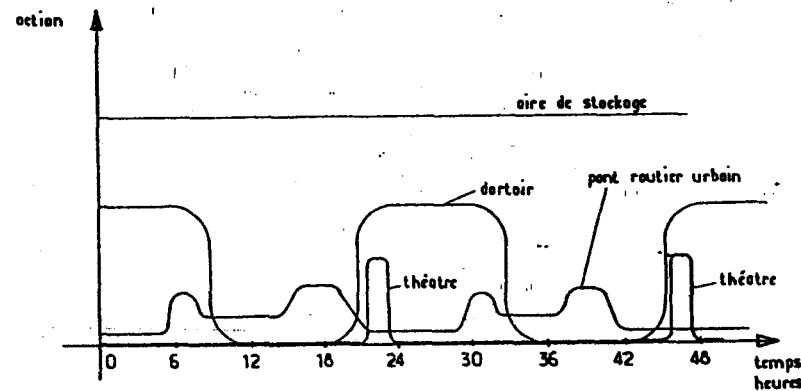


Fig. 2-4. Variation des charges dans le temps

3.3. Vérification

La vérification d'un ouvrage se traduira par une relation du type :

$$\text{Sollicitation de calcul agissante} < \text{sollicitation résistante}$$

$$S_a < S_r$$

avec une sollicitation agissante S_a de la forme :

$$S_a = \sum \psi_i \cdot \gamma_i \cdot Q_i$$

où : Q_i représente la valeur caractéristique de l'action i ,

γ_i un coefficient de pondération de cette action,

ψ_i un coefficient de non-occurrence simultanée de deux ou plusieurs actions à leur valeur caractéristique au même instant. En effet, la probabilité pour avoir en même temps la charge d'exploitation et le vent à leur valeur caractéristique est plus faible que d'avoir la charge d'exploitation caractéristique seule.

Ainsi, pour une combinaison d'actions dues à la charge permanente Q_G , aux

charges d'exploitation Q_1 et au vent W , on aura par exemple la sollicitation de calcul suivante :

$$S_a = \gamma_G Q_G + \gamma_{Q1} Q_1 + \psi_1 \gamma_W Q_W \quad (2.1)$$

ou

$$S_a = \gamma_G Q_G + \gamma_W Q_W + \psi_2 \gamma_{Q1} Q_1 \quad (2.2)$$

Formule où l'on définit une action de base agissant avec sa valeur caractéristique : charge d'exploitation dans la formule (2.1) et vent dans la formule (2.2) et une action d'accompagnement affectée d'un coefficient ψ inférieur ou égal à 1 : vent dans l'équation (2.1) et charge d'exploitation dans l'équation (2.2).

Ce qui précède n'est qu'une formulation simplifiée de la théorie telle qu'elle est décrite dans les Directives Communes DC 79.

• Résistances de calcul

La sollicitation résistante de calcul d'un matériau sera définie par : $S \left(\frac{f_k}{\gamma_m} \right)$

où f_k représente la contrainte caractéristique définie ci-dessus et γ_m un coefficient de sécurité appliqué au matériau.

Ce coefficient γ_m peut être différent d'un matériau à un autre en fonction de la connaissance que l'on peut avoir de ce matériau. On conçoit qu'il sera plus faible pour un matériau comme l'acier, fabriqué en usine, soumis à des contrôles périodiques avec une faible dispersion des résultats, que pour un matériau hétérogène comme le béton fabriqué sur chantier avec des granulats de provenance et de caractéristiques très diverses et des mises en œuvre très différentes d'un chantier à l'autre.

4. RÈGLEMENT FRANÇAIS DE BÉTON PRÉCONTRAIT

Contrairement aux règlements de certains pays étrangers, en particulier britannique et américain, le béton précontraint n'est pas considéré comme un chapitre du béton armé, mais fait l'objet d'un règlement à part.

Nous avons vu l'existence des deux règlements :

- l'Instruction Provisoire n° 1 du 12 août 1965 ;
- l'Instruction Provisoire n° 2 du 13 août 1973.

Le nouveau règlement de béton précontraint est une synthèse des connaissances théoriques, expérimentales et réglementaires. Il s'inspire de l'IP 2, de la circulaire DC 79, du Code-Modèle CEB-FIP 1978 et du BAEL. En particulier, il est en conformité avec ce dernier, ce qui donne aux ingénieurs français un outil cohérent pour les calculs du béton armé et du béton précontraint, ce que l'on n'avait pas vu depuis longtemps en France.

On distingue :

- les actions permanentes autres que la précontrainte dont l'intensité est constante, très peu variable, on varie toujours dans le même sens tendant vers une

limite (poids, poussée, pression de terre ou liquide dont les niveaux ne varient pas);

- l'action de la précontrainte P dont la valeur probable est P_m ;
- les actions variables Q_i dont la valeur caractéristique est Q_{ik} ;
- les actions accidentelles F_A (séisme, chocs, incendies).

Les actions sont associées suivant un certain nombre de combinaisons qui interviennent dans le calcul des sollicitations. On distingue alors:

4.1. Les combinaisons fondamentales en état-limite ultime ELU

$$S \left(P_m + 1,35G_{\max} + G_{\min} + \gamma_{Q1}Q_{1k} + \sum_{i>1} 1,3\psi_{oi}Q_{ik} \right)$$

avec:

- $G_{\max}$: l'ensemble des actions permanentes défavorables,
- $G_{\min}$: l'ensemble des actions permanentes favorables,
- Q_{1k} : la valeur caractéristique de l'action de base,
- $\psi_{oi}Q_{ik}$: la valeur de combinaison d'une action d'accompagnement.
- $\gamma_{Q1} = 1,5 \times 1,07 = 1,6$ pour les charges d'exploitation des ponts routiers (fasc. 61, titre II): charges sur chaussées, sur remblais, sur trottoirs, sur passerelles piétons, sur garde-corps.
- = ~~1,35~~ pour les charges d'exploitation étroitement bornées ou de caractère particulier (convois militaires, exceptionnels).
- = 1,35 pour les charges des bâtiments agricoles*.
- = 1,5 dans tous les autres cas.

ψ_{oi} est donné dans les tableaux 2.2, 2.3 et 2.4.

La précontrainte P_m est à majorer par le coefficient 1,35 ($1,35P_m$) dans certains cas particuliers lorsque:

- la précontrainte est considérée comme une action extérieure;
- et si $1,35P_m$ est plus défavorable que P_m .

Par exemple, pour des pièces à justifier aux états-limites de stabilité de forme lorsque les armatures de précontraintes sont extérieures au béton, sans liaison avec lui sauf aux extrémités, ou pour certains éléments bidimensionnels précontraints dans une direction lorsqu'on procède à une justification dans une direction perpendiculaire.

* A faible densité d'occupation humaine.

4.1.1. Ponts-routes

Tableau 2.2

Nature des charges	ψ_0	ψ_1	ψ_2
Charges d'exploitation des ponts*:			
— 1 ^{re} classe } selon le titre II	0**	0,6***	0
— 2 ^e classe } du fascicule 61		0,4	
— 3 ^e classe }		0,2	
Vent: — en exploitation	0	0,2	0
— en exécution	1	—	—
Température (variations uniformes)	0,6	0,5	0
Gradient thermique	0,5	0,5	0
Charges d'exécution aléatoires	1	—	—

* Il s'agit uniquement des charges d'exploitation sans caractère particulier Q_i .

** La valeur $\psi_0 = 0$ est valable dans les cas courants. Dans certains cas, notamment lorsque la température est considérée comme action de base, il convient de prendre une valeur non nulle (ex.: cas d'un arc surbaissé).

*** Les valeurs de ces coefficients ne sont valables que pour les charges réparties.

4.1.2. Bâtiment

• Charges climatiques

Tableau 2.3

Nature des charges	ψ_0	ψ_1	ψ_2
Vent	0,77	0,2	0
Neige: altitude < 500 m	0,77	0,15	0
altitude > 500 m	0,77	0,30	0,10
Température (variations uniformes)	0,60	0,50	0

• Charges d'exploitation

- Les valeurs de ψ_0 contenues dans le tableau 2.3 interviennent dans des combinaisons d'actions dans lesquelles l'action de base peut être le vent, la neige correspondant à une altitude ≤ 500 mètres, ou toute autre action dont $\psi_1 \leq 0,25$ et $\psi_2 = 0$.

Lorsqu'il s'agit de combinaisons d'actions dans lesquelles l'action de base est la neige correspondant à des altitudes > 500 mètres, ou tout autre action dont $\psi_1 > 0,25$ et $\psi_2 \neq 0$, la valeur de ψ_0 indiquée dans le tableau 2.4 pour les locaux à l'exception des archives et parcs de stationnement, doit être majorée de 10 %

- Les coefficients ψ_0 s'appliquent à la valeur de la charge qui résulte après les dégressions prévues par la norme pour grande surface ou pour grand nombre d'étages.
- Les coefficients ψ_1 et ψ_2 s'appliquent à la valeur de la charge n'ayant pas subi des dégressions, mais les produits ψ_1Q_k et ψ_2Q_k doivent être plafonnés à la valeur ψ_0Q_k , Q_k étant la valeur de la charge après dégression.

Tableau 2.4

Coefficients	N°	Nature du local	
ψ_0	1	Tous les locaux, à l'exception des archives et des parcs de stationnement	0,77
	2	Parcs de stationnement et archives	0,90
ψ_1	1	Salles de réunions à places assises, halles diverses, salles d'exposition, salles de classe, restaurants, dortoirs	0,65
	2	Locaux non visés en 1 et 3	0,75
	3	Archives	0,90
ψ_2	1	Halles diverses, salles d'exposition et autres locaux destinés principalement au transit des personnes. Salles de réunions, lieux de culte, salles, et tribunes de sport, salles de danse et tout autre lieu avec places debout et utilisation périodique	0,25
	2	Salles de classe, restaurants, dortoirs, salles de réunions avec places assises	0,40
	3	Locaux non visés en 1, 2 et 4	0,65
	4	Archives	0,80

— Les coefficients ψ_1 et ψ_2 sont utilisables également dans des combinaisons accidentelles si d'autres valeurs ne sont pas précisées par les règlements spécifiques.

— Les valeurs de ψ_2 indiquées sont utilisables pour déterminer les charges d'exploitation de longue durée intervenant dans le calcul de fluage pris en compte vis-à-vis des états ultimes de résistance.

Comme elles ne conduisent pas aux valeurs de charges les plus probables, il est possible de prendre pour certaines estimations (par exemple celle de la déformation la plus probable) des valeurs inférieures.

• Cas des bâtiments industriels

Les valeurs « de combinaison », « fréquentes » et « quasi permanentes » des charges à prendre en compte sur les planchers d'ateliers et d'usines sont déterminées comme suit (cf. norme NF P-06.001):

— $\psi_0 Q_k$ est constitué par la somme des trois catégories de charges indiquées au point b), paragraphe 3.4 de la norme, la dernière catégorie, notamment la charge uniformément répartie au m^2 , étant affectée par un coefficient réducteur égal à 0,77.

— $\psi_1 Q_k$ est pris égal à $\psi_0 Q_k$.

— $\psi_2 Q_k$ est constitué par la somme de la première et la troisième catégorie de charges indiquées au point b), paragraphe 3.4 de la norme, la troisième catégorie (charge uniformément répartie au m^2) étant affectée par le coefficient 0,65.

REMARQUES:

Le BPEL donne quelques précisions sur les valeurs des actions à prendre en compte dans les calculs:

— le vent normal des NV 65 est à multiplier par le coefficient 1,2 en ELU et 1,00 en ELS pour les bâtiments. Il n'est pas fait usage du vent extrême;

— la neige des NV 65 (bâtiments) est à majorer de $0,12(S_n - 0,5)$ kN/m^2 pour les actions de base supérieures à $0,5 kN/m^2$;

— pour les altitudes inférieures à 500 m, la neige et le vent sont supposés incompatibles sauf si les dispositions de la toiture rendent pratiquement impossible l'enlèvement de la neige par le vent;

— pour les altitudes supérieures à 500 m, on prendra vent plus demi-neige.

4.2. Les combinaisons accidentelles (ELU)

$$S \left(P_m + F_A + G_{max} + G_{min} + \psi_{11} Q_{1k} + \sum_{i>1} \psi_{2i} Q_{ik} \right)$$

où: F_A est la valeur de l'action accidentelle.

Les valeurs G_{max} , G_{min} , P_m , Q_{1k} ont les définitions, vues ci-dessus.

ψ_{11} et ψ_{2i} sont donnés dans les tableaux précédents.

4.3. Les combinaisons rares (ELS)

$$S \left(P_d^* + G_{max} + G_{min} + Q_{1k} + \sum_{i>1} \psi_{0i} Q_{ik} \right)$$

Pour les charges routières sans caractère particulier, on remplace Q_{1k} par $1,2 Q_{1k}$.

4.4. Les combinaisons fréquentes (ELS)

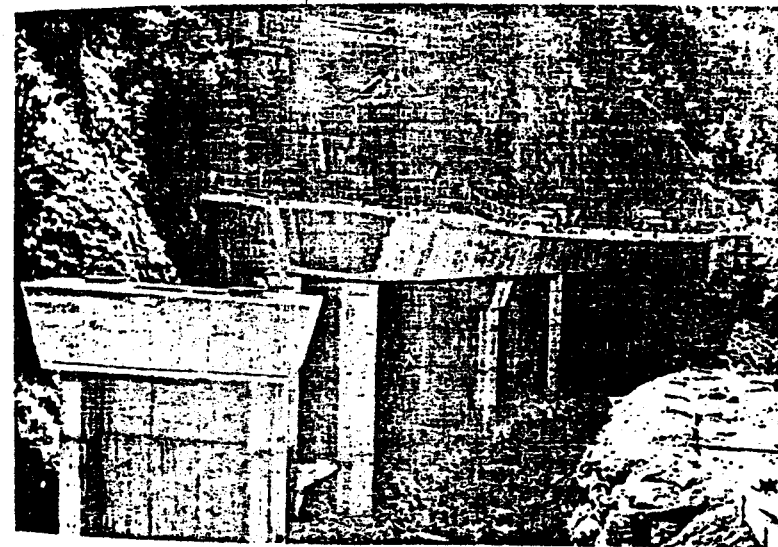
$$S \left(P_d + G_{max} + G_{min} + \psi_{11} Q_{1k} + \sum_{i>1} \psi_{2i} Q_{ik} \right)$$

* $P_d = P_m$ seulement si le CCTP l'autorise, sinon P_d représente la valeur caractéristique la plus défavorable P_1 ou P_2 .

4.5. Les combinaisons quasi permanentes

$$S \left(P_d + G_{\max} + G_{\min} + \sum_{i>0} \psi_{2i} Q_{ik} \right)$$

Considérations générales sur la sécurité (Coefficients de sécurité) DIRECTIVES COMMUNES DC 79 DU 13 MARS 1979-FASC. 79-12 BIS	
Charges de calcul <i>Ouvrages d'art</i> : Conception, calcul des ouvrages d'art. Programmes de charges et épreuves des ponts routiers: Fasc. 61 - Titre II du 28 déc. 1971 - modifié le 8 déc. 1980. Fasc. 72-21 bis et 80-52 <i>Bâtiment</i> : Norme NF P-06-001 pour les charges d'exploitation. Règles NV 65/67 pour les charges climatiques. Règles PS 69 pour les actions sismiques.	
Matériaux <i>Aciers de BA</i> : Fasc. 4-Titre I - Fasc. 68-3 quater. Normes NF A-35-015 à 022 <i>Aciers pour BP</i> : Fasc. 4-Titre II - Fasc. 83-14 ter. <i>Procédés de précontrainte</i> : Fascicules: Freyssinet : 78-27 bis et 77-22 bis CCL : 75-72 bis BBR : 75-96 bis PAC : 81-15 bis VSL : 78-28 bis <i>Béton</i> : Circulaire relative au contrôle de la qualité des bétons du 9 mars 1979. Fasc. 79-10 bis <i>Ciment</i> : NF P-15-301 <i>Granulats</i> : NF P-18-301 et 302 <i>Adjuvants</i> : NF P-18-103, 18-331 à 338, 18-430 <i>Eau</i> : NF P-18-303 <i>Béton prêt à l'emploi</i> : NF P-18-305	
Calcul des ouvrages en béton <i>Béton armé</i> : BAEL 83 <i>Béton précontraint</i> : BPEL 83	
Exécution des ouvrages <i>Ouvrages d'art</i> : CCTG-Fascicule 65 <i>Bâtiment</i> : DTU 21	



Pont de Morey (Jura) (doc. Campenon Bernard).

3

LES CEMENTS

Le but de ce chapitre est de souligner les principales caractéristiques des ciments.

La nature, la préparation, la composition et les caractéristiques des ciments sont abondamment décrits dans la littérature spécialisée. On pourra se référer à la bibliographie en fin de chapitre.

Nous rappellerons ci-après quelques caractéristiques:

1. CLASSES DE RÉSISTANCE DES CEMENTS

Les ciments sont répartis en classes suivant la résistance des éprouvettes normalisées à l'âge de 28 jours.

Leur dénomination est de la forme ABC-n où ABC représente la nature du ciment tels:

- CPA pour le ciment Portland artificiel;
- CPJ pour les ciments Portland avec ajouts (voir ci-après);
- CLK, CHF, CLC, CSS...

et la résistance *moyenne* du ciment *n* en MPa.

Les valeurs maximum et minimum garanties par le fabricant sont celles de la valeur moyenne majorée ou minorée de 10 MPa*.

Ainsi, un CPA 45 est un ciment Portland artificiel de 45 MPa de résistance moyenne, de 35 MPa de résistance minimum garantie et de 55 MPa de résistance maximum garantie.

* Ces valeurs sont garanties à 99 % pour la valeur minimale à 28 jours et à 90 % pour les autres valeurs.

Certaines classes possèdent une sous-classe appelée *rapide*: R qui correspond à des ciments de même résistance à 28 jours mais avec des résistances plus élevées dans les premiers jours.

Enfin une classe HP caractérise un ciment à haute performance.

2. QUALITÉS ATTENDUES POUR LES CEMENTS DES OUVRAGES EN BÉTON PRÉCONTRAIN

Le béton précontraint est très souvent utilisé pour les ouvrages à haute performance et de grande portée. C'est le domaine où il devient compétitif avec les structures en béton armé ou métalliques.

Or, les charges permanentes (poids propre de l'ouvrage principalement) croissant plus vite que la portée (cf. chapitre 14, fig. 14-21), font que le rapport charges permanentes sur charges totales prend des valeurs de plus en plus importantes.

Il importe donc de réduire le plus possible le poids propre de l'ouvrage en utilisant des bétons de plus grande résistance.

Comme la résistance d'un béton croît à peu près dans les mêmes proportions que celles du ciment et que le coût du ciment croît moins vite que sa résistance, on a donc tout intérêt à utiliser des ciments à haute résistance.

Une autre exigence du béton précontraint est de pouvoir mettre les câbles en tension le plus tôt possible car, alors seulement, on pourra procéder au décoffrage et au désétalement, condition indispensable pour assurer une rotation rapide du matériel (coffrages, étalements, matériel de précontrainte...).

Les ciments les plus utilisés seront donc du type 55 R-HP ou HPR. Pour faire le choix du type de ciment répondant le mieux aux qualités exigées, on pourra utiliser les tableaux 3.2 et 3.3.

3. COMPARAISON AVEC LES CEMENTS ÉTRANGERS

3.1. Ciments britanniques (British Standard: BS 12-1978, BS 1370-1974, part 2, BS 4027-1972, part 2)

Ce sont des ciments purs sans ajouts:

- OPC: ordinary Portland cement: ciment Portland ordinaire;
- RHPC: rapid hardening Portland cement: ciment Portland à durcissement rapide;
- LHPC: low heat Portland cement: ciment Portland à faible chaleur d'hydratation;

- SRPC: sulphate resisting Portland cement: ciment Portland résistant aux sulfates.

3.2. Ciments américains (American Society for Testing and Materials: ASTM.C.150-81)

Ce sont des ciments purs sans ajouts:

- type I: ciment Portland ordinaire;
- type II: ciment Portland ordinaire à chaleur d'hydratation et résistance aux sulfates modérées;
- type III: ciment Portland à durcissement rapide;
- type IV: ciment Portland à faible chaleur d'hydratation;
- type V: ciment Portland à haute résistance aux sulfates.

Les types I, II, III peuvent présenter une variante avec entraîneurs d'air et sont dénommés type IA, IIA et IIIA.

3.3. Tableau comparatif

Le tableau suivant donne les résistances minimum garanties équivalentes exprimées dans les mêmes conditions d'essais que les normes françaises:

Tableau 3.1. Résistances équivalentes (MPa)*

	Grande-Bretagne (BS)				Etats-Unis (ASTM)					France (AFNOR)					
	OPC	RHPC	LHPC	SRPC	I	II	III	IV	V	CPA35	45	45R	55	55R	HP
1 J							18,6								
2 J												12	10	17	22
3 J	20,7	26,1	7,2	14	18,6	15,1	36,2		12,5						
7 J			12,6	20,7	29	25,8		10,4	22,8	10	17,5				
28 J	36,9	41,4	25,2					25,8	21,1	25	35	35	45	45	55

* Selon une étude du CERILH. (Centre d'études et de Recherche de l'Industrie des Liants Hydrauliques, 23, rue de Cronstadt, 92110 Paris - tel.: 531-18-10).

4. TABLEAU D'UTILISATION DES CEMENTS

Tableau 3.2. Tableau général d'utilisation des ciment

Classe de résistance.....	35	45							55					HP	HPR
Désignation du ciment.....	CPI	CFA	CFA-R	CPI	CFA-R	CHF	CLK	CLK-R	CFA	CFA-R	CPI	CFA-R	CHF		
Emplois courants															
Maçonnerie.....	x			x	x	x									
Béton courant (non armé ou faiblement armé: remplissage, fondations, portées réduites, décoffrage différé).....	x			x	x	x	x								
Béton armé fortement sollicité (structures porteuses, etc.).....		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
Béton armé avec décoffrage accéléré.....			x		x			x	x	x	x	x	x	x	x
Produits préfabriqués en béton non armé (blocs, hourdis, etc.).....	x	x	x	x	x			x	x	x	x	x	x		
Éléments préfabriqués en béton armé (poutres, poutrelles, éléments de grande surface, etc.).....			x		x			x	x	x	x	x	x	x	x
Béton précontraint.....		x	x						x	x			x	x	x
Travaux exigeant des performances mécaniques exceptionnelles.....									x	x				x	x
Stabilisation des sols et graves ciment.....	x	x		x	x	x	x								
Bétons routiers.....		x	x	x	x			x	x	x	x	x	x		
Travaux en grandes masses (barrages, etc.).....	x	x		x		x	x								

Ce tableau, établi sous la responsabilité du Centre d'Information de L'Industrie Cimentière, constitue simplement un guide pour le choix des ciments, dans l'état actuel de la réglementation et des règles de l'art. Bien entendu, d'autres applications que celles mentionnées dans le tableau peuvent être envisagées. En outre, l'absence de signe dans une colonne ne signifie pas nécessairement que le ciment correspondant ne doive en aucun cas être utilisé, mais plutôt que d'autres types de ciment sont conseillés, pour des raisons d'ordre technique ou économique. Les utilisateurs ont de toute manière intérêt à demander toutes précisions utiles à leurs maîtres d'œuvre, à leurs organisations professionnelles et aux services des sociétés productrices.

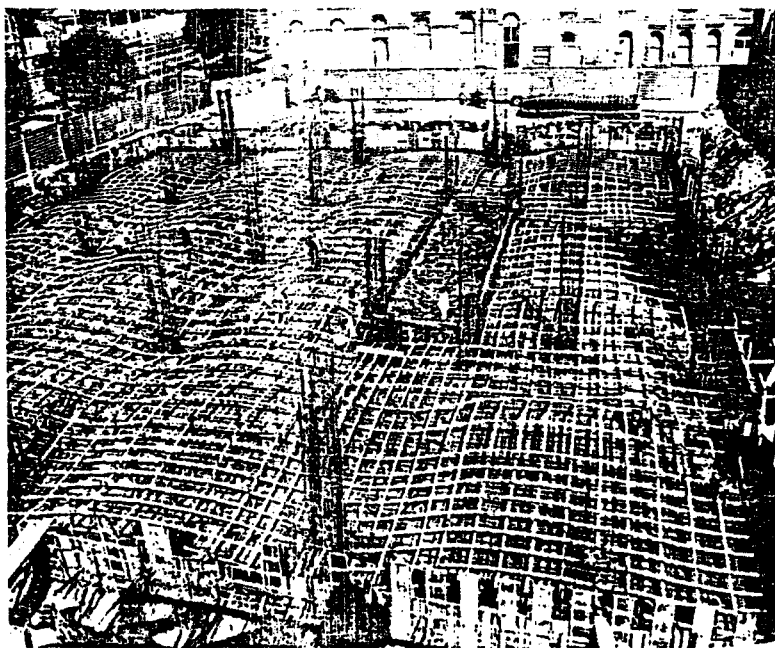
Tableau 3.3. Relation entre le type de ciment et ses caractéristiques ou l'usage

Type de ciment	Vitesse de durcissement	Résistance initiale	Gain de résistance à 28 jours	Chaleur initiale	Résistance au lessivage	Exposition aux sulfates	Sensibilité aux basses températures	Qualité d'adaptation pour les barres en béton
A. Ciments Portland sans constituants secondaires								
1. Ciment Portland extra prompt	très rapide	très élevée	négligeable	très élevée	médiocre	médiocre	nulle	non utilisable
2. Ciment Portland	rapide	élevée	léger	élevée	médiocre	médiocre	nulle	non utilisable
3. Ciment Portland artificiel (CPA)	moyenne	moyenne	moyen	assez élevée	assez	assez	moyenne	bonne
4. Ciment Portland à chaleur d'hydratation modérée	assez lente	moyenne	moyen	moyenne	moyenne	moyenne	moyenne	bonne
5. Ciment Portland résistant aux sulfates	moyenne	moyenne	moyen	moyenne	bonne	très bonne	sensible	bonne
6. Ciment Portland à faible chaleur d'hydratation	lente	faible	grand	faible	bonne	bonne	sensible	excellente
7. Ciment Portland à très faible chaleur d'hydratation	très lente	très faible	très grand	très faible	bonne	très bonne	très sensible	excellente
8. Ciment Portland blanc	moyenne	moyenne	moyen	moyenne	assez médiocre	médiocre	moyenne	moyenne
9. Ciment Portland coloré	moyenne	moyenne	moyen	moyenne	assez médiocre	médiocre	moyenne	moyenne
10. Ciment Portland hydrophobe	moyenne	moyenne	moyen	moyenne	assez médiocre	médiocre	moyenne	moyenne
B. Ciments contenant du laitier de haut fourneau								
1. Ciment Portland de laitier 10-20	moyenne	moyenne	moyen	moyenne	assez médiocre	assez médiocre	moyenne	moyenne
2. Ciment Portland de laitier 20-35	moyenne	faible	moyen	faible	bonne	bonne	sensible	bonne
3. Ciment Portland de laitier 35-60	assez lente	faible	grand	faible	bonne	bonne	très sensible	excellente
4. Ciment Portland de laitier 60-80	lente	faible	très grand	très faible	très bonne	très bonne	très sensible	excellente
5. Ciment Portland de laitier 85	lente	faible	très grand	très faible	bonne	bonne	très sensible	excellente
6. Ciment surchauffé	lente	faible	moyen	faible	bonne	bonne	très sensible	moyenne
7. Ciment de laitier à la chaux	lente	faible	moyen	faible	moyenne	bonne	moyenne	moyenne
C. Ciments contenant des pouzzolanes								
1. Ciment Portland-pouzzolane 10-20	assez lente	moyenne	moyen	moyenne	bonne	bonne	moyenne	bonne
2. Pouzzolane 20-45	assez lente	faible	grand	faible	bonne	bonne	moyenne	bonne
D. Autres ciments								
1. Ciment fondu	très rapide	très élevée	négligeable	très élevée	bonne	bonne	nulle	non utilisable
2. Ciment à prise contrôlée	très rapide	très élevée	moyen	élevée	moyenne	moyenne	nulle	non utilisable
3. Ciment expansif de type K	moyenne	moyenne	moyen	moyenne	moyenne	moyenne	sensible	éventuel
4. Ciment expansif de type S	moyenne	moyenne	moyen	assez élevée	moyenne	moyenne	sensible	éventuel
5. Ciment expansif de type M	assez lente	moyenne	moyen	moyenne	moyenne	moyenne	sensible	éventuel
6. Ciment à maçonner	assez lente	moyenne	moyen	moyenne	moyenne	moyenne	sensible	non utilisable
7. Ciment naturel	assez lente	moyenne	moyen	moyenne	assez médiocre	médiocre	sensible	moyenne

(Réf. Comité Français des Grands Barrages).

Références bibliographiques

- ADAM, M. — Guide pratique pour l'emploi des ciments. Eyrolles, 1976.
- ADAM, M., CHARRETON, C. — Les ciments d'aujourd'hui face aux besoins des chantiers. *Annales ITBTP*, février 1984.
- Centre d'Information de l'Industrie Cimentière* — La normalisation française des ciments. Janvier 1982.
- Comité International des Grands Barrages — Ciments utilisés pour le béton des grands barrages. *Bulletin* n° 36a, 1981.
- LACROIX, R., FUENTES, A., THONIER, H. — Traité de béton armé (chapitre 2). Eyrolles, 1982.
- Normes — NF-P-15: 299/300/301/306/307/308/310/312 sur les produits.
NF-P-15: 401/402/403/411/412/413/414/431/432/436/442/443/451/461/462/466 sur les appareils et méthodes d'essais.
- VENUAT, M. — La pratique des ciments et des bétons. Le Moniteur du BTP, 1976.



Radier de Bâtiment à Adelaïde (Australie) (doc. V.S.L.).

* 41, avenue de Friedland, 75008 Paris.

4

LES GRANULATS

1. GÉNÉRALITÉS

Deuxième constituant du béton après le ciment, les granulats sont d'origine beaucoup plus diverse et de qualité très variable.

Ils constituent le squelette résistant du béton et une attention toute particulière doit être faite au choix et à la composition des granulats.

Un béton est généralement composé de deux catégories de granulats (mélange binaire) : sable et gravillons. Il arrive, lorsque leur courbe granulométrique est trop étroite (fig. 4-1) que l'on soit obligé d'ajouter des granulats complémentaires pour assurer un remplissage aussi bon que possible de la matrice du béton (mélange ternaire ou quaternaire).

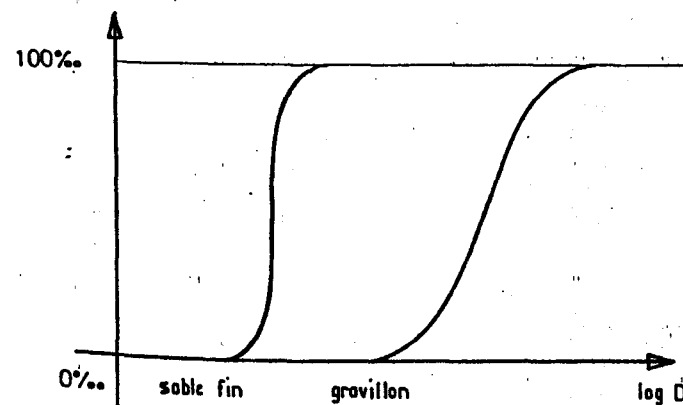


Fig. 4-1. Courbes granulométriques
— sable fin à dimension homogène ;
— gravillon à large champ de dimension des éléments ;
D : diamètre de la maille du tamis.

Les granulats sont définis par deux chiffres, par exemple 5/25, qui représentent la dimension du tamis normalisé (voir norme AFNOR NF-P-18-304).

La norme citée définit d'après leur grosseur les cailloux, gravillons, sables et fines.

		Module minimum des mailles de tamis (en mm)
Pierre, cailloux	gros.....	50/80
	moyens.....	31,5
	fins.....	20
Gravillons	gros.....	12,5
	moyens.....	8
	fins.....	5
Sables	gros.....	1,25
	moyens.....	0,31
	fins.....	0,08
Fines		< 0,08

2. LES CAILLOUX ET GRAVILLONS

De dimensions supérieures à 5 mm pour les gravillons et à 20 mm pour les cailloux, ils proviennent soit de concassages (gravillons concassés), soit directement de rivière ou sablière (granulats roulés).

Les qualités primordiales d'un caillou ou gravillon sont: sa résistance à l'écrasement et son adhérence avec la pâte de ciment. La résistance du béton dépend de ces qualités.

Comme la surface spécifique (surface du granulat/volume) est plus élevée pour les granulats concassés et que les aspérités favorisent l'adhérence, c'est vers ce type de granulat que doit s'orienter le choix. Par contre, les granulats roulés donnent des bétons plus maniables et moins fissurables.

La nature de la roche joue un rôle important par sa résistance à la compression. Les roches d'origine cristallines sont plus résistantes que les roches d'origine sédimentaires (calcaires). On évitera les matériaux friables en plaques (schistes) ou en aiguilles.

Qualités attendues:

- peu poreux sinon on obtient des bétons sensibles au gel;
- résistance aux ambiances agressives: éviter les granulats calcaires en milieu acide;
- stabilité du matériau: certaines roches porphyriques peuvent se décomposer (kaolinisation) au contact prolongé de l'eau;
- la résistance: on choisira des roches de résistance supérieure à 80 MPa;
- l'adhérence: on évitera les calcaires tendres ou demi-durs dont la surface est

Les granulats

recouverte d'une fine couche de filler (nuisible à une bonne adhérence), ainsi que les granulats lisses tels les silex roulés.

3. LES SABLES

Les sables peuvent être obtenus directement à partir de dragage ou extraction de rivière ou sablière, ou comme résidu de concassage des cailloux et gravillons. On peut faire les mêmes remarques que pour les gravillons en ce qui concerne les qualités de résistance, d'adhérence, de stabilité...

Qualités attendues des sables:

- une bonne résistance;
- une bonne adhérence;
- être débarrassés des impuretés: argiles, matières organiques. On mesure un sable par l'essai de l'équivalent en sable qui doit être au minimum de 80 pour un béton de qualité (80% de sable propre);
- ne prendre du sable de mer qu'après lavage du sel qu'il contient. On connaît l'effet néfaste des chlorures sur la résistance d'un béton.

4. GRANULATS LÉGERS

Pour lutter contre le poids mort des ouvrages, on utilise quelquefois en béton précontraint, des granulats légers.

Ceux-ci peuvent être soit d'origine naturelle tels les pierres ponce, pouzzolanes (Sicile, Massif Central), soit d'origine artificielle: argile expansé, vermiculite, schiste expansé, laitier de hauts-fourneaux expansé.

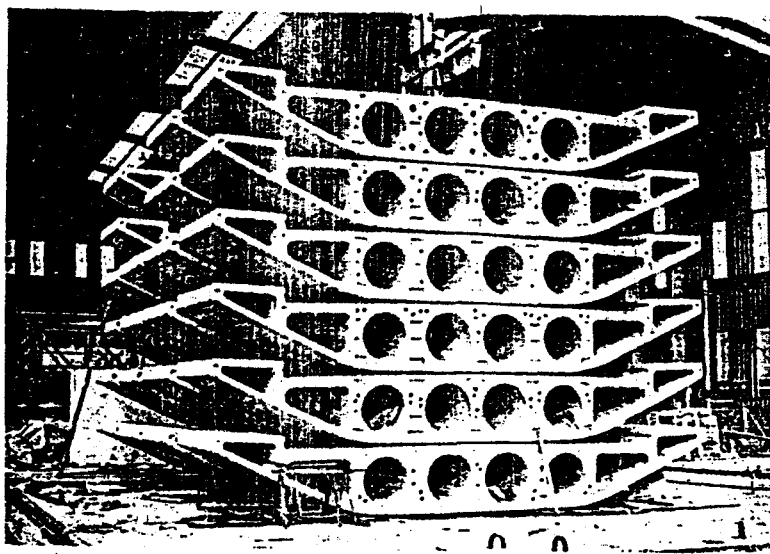
Le principal intérêt de ces types de granulats est leur masse spécifique qui varie de 500 kg/m³ à 900 kg/m³.

Pour les ouvrages d'art, on n'utilise pour des raisons de résistance, pratiquement que de l'argile expansée (à haute température par emprisonnement des bulles de gaz générées par les réactions chimiques provoquées par l'élévation de température)*.

Références bibliographiques

- ARQUIÉ, G., PANET, M., TOURENO, C. — Granulats. Presses de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1980.
- DURIEZ, M., ARRAMBIDE, J. — Nouveau traité des matériaux de construction. Dunod, 1961-1962.
- L'HERMITE, R. — Propriétés des granulats naturels destinés au béton. *Annales, ITBTP*, janvier 1971.
- Normes — NF-P-18: 101/301/304/554/555/556/557/561/571/572/573/576/582/583/584/585/586/587/591/592/593/595/598.

* Exemple: le pont d'Ottmarshcim dont les voussoirs en partie centrale de travée sont en béton léger.



Voussoirs préfabriqués pour pont-dalle. Autoroutes alpines AREA (doc. Freyssinet International).

5

LES BÉTONS

Le béton est un matériau qui offre les particularités suivantes :

- il est composé de matériaux abondants dans la nature et facilement disponibles directement comme les graviers et les sables ou indirectement comme le ciment ;
- il est facile à mettre en œuvre dans un moule de forme quelconque ; on dispose pour cela d'un temps suffisant (une demi-heure à une heure) ;
- il a des caractéristiques mécaniques intéressantes ;
- il est compatible avec d'autres matériaux, spécialement l'acier ;
- il a une bonne durabilité.

1. COMPOSITION DU BÉTON

Le béton du latin *bitumen* existait depuis les Romains, l'orthographe moderne datant du XII^e siècle avec le sens de mélange de mortier et de gravier.

Le béton a connu un grand développement avec la création du béton armé à la fin du XIX^e siècle.

Il est composé de ciment, sable, gravier, eau et éventuellement d'adjuvants.

Les qualités recherchées sont en général :

- la résistance mécanique à la compression simple et pour certains cas, la résistance à la traction, la résistance aux chocs ;
- la résistance aux agents agressifs tels l'eau de mer, les eaux séléniteuses*, les eaux acides, les produits industriels ;
- la maniabilité, c'est-à-dire la facilité de mise en œuvre (or, on verra que résistance et maniabilité varient en sens inverse suivant la proportion en eau) ;
- la déformabilité instantanée et différée, le retrait (fissures) ;

* Qui contiennent du sulfate de calcium.

- les qualités particulières telles la masse pour les bétons lourds (bétons de protection contre les radiations), la légèreté (bétons légers pour ouvrage d'art ou bâtiment), la faible conductivité thermique (béton léger)...
- l'aspect de surface finie, la couleur (béton blanc, coloré);
- la dimension des granulats: micro-béton pour de très petits ouvrages (maquettes) ou bétons cyclopéens avec des cailloux de 5 à 20 cm pour les gros ouvrages (barrages).

Pour un ouvrage donné, on procède de la manière suivante:

- on se fixe *a priori*, pour les calculs, une résistance de béton qui dépend des bétons déjà réalisés pour ce type d'ouvrage;
- on effectue, avant le démarrage des travaux, une étude préalable de composition du béton en fonction des ciments et granulats disponibles, pour obtenir les qualités exigées, principalement la résistance à la compression;
- puis une épreuve de convenance en début des travaux pour s'assurer que le béton réalisé dans les conditions exactes du chantier aura bien les caractéristiques attendues;
- enfin, des épreuves de contrôle en cours de travaux pour s'assurer que les résistances obtenues gardent une constance dans le temps.

1.1. Dosage en ciment

Le dosage en ciment varie suivant les caractéristiques exigées: résistance mécanique, résistance aux agents chimiques (eau de mer, eaux séléniteuses), compacité (pour éviter la corrosion des aciers).

Les valeurs usuelles pour des bétons maigres ou non armé varient de 150 à 300 kg de ciment par m³ de béton mis en œuvre.

Pour le béton armé, ces valeurs sont de 350 à 400 kg/m³ et pour le béton précontraint, elles peuvent atteindre 500 kg/m³.

La résistance d'un béton est sensiblement proportionnelle au dosage en ciment. Différentes formules permettent de la calculer (formule de Ferret par exemple).

1.2. Dosage en granulats

Le dosage en granulats est représenté par les dimensions et proportions des différentes catégories de granulats allant du sable au gravier.

On distingue habituellement deux catégories de granulats:

- les sables de la classe 0/25;
- les graviers de la classe 5/20 ou 5/25.

La détermination du dosage optimal procure la meilleure compacité (il faut naturellement avoir une gamme assez complète de dimension de granulats pour bien remplir les vides situés entre les granulats les plus gros).

Différentes méthodes ont été élaborées par BOLOMEY, VALETTE, FAURY, le Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, JOISEL.

On peut réaliser des bétons dont la granulométrie continue correspond à des bétons plus plastiques, faciles à mettre en œuvre mais pas forcément plus résistants. Les bétons à granulométrie discontinue sont en général plus résistants à dosage égal mais exigent une vibration plus intense pour les mettre en œuvre.

2. MISE EN ŒUVRE DU BÉTON

La mise en œuvre intervient de façon importante dans les qualités attendues du béton telles la résistance mécanique, la compacité et à l'inverse la porosité.

Cette mise en place est favorisée par:

- une plus grande quantité d'eau*;
- une bonne vibration**;
- une granulométrie continue;
- des adjuvants appelés plastifiants, voire des fluidifiants***.

Inversement, la mise en œuvre est freinée ou gênée par:

- une densité importante de ferrailage, surtout si la distance entre aciers est faible;
- les faibles températures;
- les épaisseurs de coulage importantes.

Il est recommandé, lors de la mise en œuvre du béton, de ne pas le laisser tomber d'une hauteur importante (plus de 1 m par exemple) sans prendre des précautions spéciales pour éviter la ségrégation, c'est-à-dire l'accumulation des granulats lourds en fond de moule et la montée de l'eau et de la laitance en partie supérieure, ce qui nuirait à sa compacité et à sa résistance.

On évitera plus particulièrement « les nids de cailloux » que l'on observe parfois en partie inférieure d'éléments de hauteur importante coulés en une seule fois (pieds de poteaux, talons de poutres de grande hauteur), et dus à un manque de vibration ou à une chute de béton de trop grande hauteur.

La plasticité d'un béton se mesure facilement et couramment par son affaissement au moyen du cône d'Abrams. On mesure l'affaissement en centimètre du « paté » réalisé avec un « seau » (appelé cône d'Abrams) de 30 cm de hauteur en le renversant sur une surface plane.

Ainsi, on parlera de:

- béton raide ou ferme pour des affaissements de 4 à 6 cm (on utilise également le terme anglo-saxon slump, ainsi on parle d'un slump de 6 pour 6 cm d'affaissement);

* On fera très attention à la résistance mécanique du béton qui varie en sens inverse, et on s'interdit de rajouter de l'eau sur le chantier pour améliorer sa mise en œuvre.

** A ce sujet, on pourra se référer à l'étude de Michel VÉNUAT (cf. bibliographie en fin de chapitre).

*** Les fluidifiants à base de produits sulfo-carbonés ont la qualité de mouiller le ciment au sens de le rendre fluide. On peut, par adjonction de quelques kilogramme par m³ de ce produit, réaliser un béton de slump égal à 15 au lieu de 8 pour un même béton, ayant la même résistance mécanique.

- béton normalement plastique pour des slumps de 6 à 9 cm ;
- béton plastique ou mou pour des slumps de 9 à 12 cm ;
- béton fluide (voire de « soupe aux chats ») pour des slumps supérieurs à 12 cm.

3. RÉSISTANCE DU BÉTON

3.1. Résistance à la compression simple

Par résistance du béton, on entend résistance à la compression à j jours (habituellement 28 jours), que l'on note f_{c28} et que l'on nomme résistance caractéristique.

- Variation dans le temps de f_{c28}

Le BPEL donne la relation suivante à prendre dans les calculs :

$$f_{cj} = 0,685 \log(j + 1) f_{c28} \text{ pour } j \leq 28 \text{ jours}$$

$$f_{cj} = f_{c28} \text{ pour } j \geq 28 \text{ jours}$$

où j représente l'âge du béton exprimé en jours et en utilisant le logarithme de base 10.

Le code CEB, quant à lui, donne les valeurs suivantes :

Tableau 5.1

Age du béton en jours.....	3	7	28	90	360
Ciment Portland normal.....	0,40	0,65	1,00	1,20	1,35
Ciment Portland à haute résistance initiale.....	0,55	0,75	1,00	1,15	1,20

On constate que les ciments à haute résistance atteignent plus rapidement leurs valeurs maximum que les bétons normaux et ont moins de ressource au-delà de 28 jours.

- Les résistances sont mesurées par écrasement d'éprouvettes cylindriques circulaires de 200 cm² de section et de hauteur double du diamètre ($D = 16$ cm).

Certains règlements étrangers utilisent des éprouvettes de dimensions différentes ou de formes différentes (prisme à base carrée*).

L'effet d'échelle jouant un rôle important, on ne peut prendre les mêmes valeurs pour des résultats sur éprouvettes de tailles différentes.

* Etats-Unis: cylindre $H = 300$ mm, $\varnothing = 150$.
Grande-Bretagne: cube $H = a = 150$ mm.
Allemagne: cube $H = a = 200$ mm.

Quant aux éprouvettes prismatiques à base carrée, à section égale, la résistance est supérieure d'environ 20 %, ce qui est dû à une sorte de fretage des quatre coins de l'éprouvette.

La réalisation des essais demande beaucoup de soins pour s'assurer de la validité des résultats (plateaux de presse rigides d'un parallélisme rigoureux, sections d'extrémité de l'éprouvette rectifiées avec soin).

- Autres méthodes de mesure de la résistance mécanique des bétons

On peut citer un appareil facile à mettre en œuvre sur les chantiers : le *scléromètre* (3,1 cm de long et 10 cm de diamètre environ) qui, par la mesure du rebondissement d'une masselotte après choc sur le béton, en mesure la dureté de surface (comme son nom l'indique). Sa précision est de l'ordre de 5 à 10 %, à condition d'être régulièrement étalonné, mais cette précision peut être suffisante par exemple pour déterminer l'instant du décoffrage des poutres, dalles ou poteaux qui exige une résistance minimale donnée.

D'autres méthodes comme la mesure de la résistivité électrique ou de la vitesse de propagation d'ondes sonores sur des ouvrages déjà réalisés n'offrent pas une grande précision et sont assez onéreuses.

Enfin, en cas d'absolue nécessité, on pourra procéder à des prélèvements par carottage à la couronne de diamant, d'éprouvettes qui seront écrasées dans des presses. C'est pratiquement le seul moyen de connaître la résistance réelle du béton en place, avec comme inconvénient d'être un essai coûteux et destructif (on diminue la section de l'ouvrage d'un cylindre de 5 à 15 cm de diamètre).

3.2. Résistance caractéristique

La connaissance d'un résultat d'essai ou de la moyenne d'une série de résultats n'est pas suffisante pour caractériser un béton.

La fiabilité d'un béton dépend également de la dispersion des résultats, d'où l'intervention de l'écart-type dans la définition de la contrainte caractéristique (de compression).

$$f_{c28} = f_{cm} - k \cdot s$$

avec : f_{cm} , moyenne arithmétique des résultats d'essai : $\sum_{i=1}^n \frac{f_i}{n}$;

s , écart-type* ;

k , un coefficient**.

Pour un nombre infini d'éprouvettes, on a une probabilité sur 20 que la valeur caractéristique soit dépassée avec un coefficient $k = 1,64$ (valeur retenue par le BAEL et le code modèle FIP-CEB). Pour le CCBA 68, ce coefficient n'était que de 0,80 (une probabilité sur cinq d'être dépassé).

* On rappelle que l'écart-type vaut $s = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{(f_i - f_{cm})^2}{n}}$ pour n essais dont les valeurs mesurées valent $f_1, f_2, f_3, \dots, f_n$.

** Voir chapitre 2, article 3.2.

Cette formule n'est valable que pour un nombre infini d'essais.

3.3. Facteurs influençant la résistance des bétons

Les différents facteurs ayant une influence sur la résistance mécanique d'un béton sont :

- l'âge du béton (comme on l'a vu plus haut);
- la température atmosphérique (la résistance est d'autant meilleure que la température est plus élevée);
- l'humidité (résistance meilleure pour un béton conservé en milieu humide qu'en milieu sec) d'où l'intérêt de la cure du béton;
- la durée de chargement: la résistance d'un béton soumis à des charges importantes de longue durée voit sa résistance diminuer de 10 à 20 % (voir plus loin chapitre 9, l'existence d'un coefficient 0,85);
- la teneur en eau: le rapport eau sur ciment E/C a une très grande influence sur la résistance du béton. Cependant, vouloir trop bien faire ($E/C \leq 0,30$) a pour conséquence l'obtention de béton très difficile à mettre en œuvre avec le risque de trouver des nids de cailloux ou des manques de béton, ce qui est beaucoup plus grave qu'une résistance diminuée par un dosage en eau légèrement plus élevé;
- le dosage en ciment (comme on l'a vu plus haut);
- la qualité du ciment (par exemple, le ciment CPA 55 est meilleur que le CPA 45).

Un compromis entre une bonne mise en œuvre et une bonne résistance peut être obtenu par l'emploi de fluidifiant qui permettent à la fois de diminuer le rapport E/C (donc d'augmenter la résistance) et d'augmenter le slump (12 à 15).

3.4. Résistance à la traction

3.4.1. Essais de résistance à la traction

On trouve généralement deux méthodes d'essais pour la mesure de la résistance à la traction du béton :

- l'essai de flexion d'une éprouvette prismatique carrée (fig. 5-1) soumise à une charge concentrée à mi-portée, la résistance se déduisant de la formule classique :

$$\sigma = \frac{Mv}{I}$$

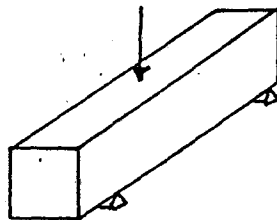


Fig. 5-1. Essai de résistance à la traction par flexion

Cependant, pour des raisons de plastification de la zone tendue, les résultats obtenus sont très optimistes dans un rapport pouvant varier de 1 à 1,6;

- l'essai d'écrasement par fendage dit essai Brésilien (fig. 5-2).

La résistance est obtenue par la formule empirique :

$$\sigma = 0,55 \frac{F}{d \cdot \ell}$$

où ℓ représente la longueur de l'éprouvette et F la force appliquée.

Les résultats obtenus sont moins dispersés que dans le cas précédent.

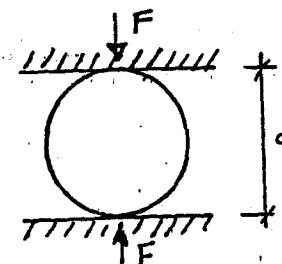


Fig. 5-2. Essai brésilien

3.4.2. Formule de calcul

La résistance à la traction peut être liée à la résistance, à la compression par différentes formules :

- celle du BAEL et du PBEL (formule linéaire valable pour $f_{cj} \geq 20$ MPa) :

$$f_{tj} = 0,06 f_{cj} + 0,6 \quad (\text{MPa})$$

- celle du CCBA 68, de l'IP1 :

$$\sigma_j = 0,06 \sigma_j + 0,7 \quad (\text{MPa})$$

- celle du règlement américain ACI-318-83 :

$$\sigma = 6\sqrt{\sigma'} \quad (\text{en psi et notations françaises})$$

$$\sigma = 0,5\sqrt{\sigma'} \quad (\text{MPa})$$

- autre formule (entre 15 et 50 MPa) :

$$\sigma = 0,28 \sqrt[3]{\sigma'^2} \quad (\text{MPa})$$

3.4.3. Variation dans le temps de la résistance à la traction

Les recommandations du CEB indiquent dans le tableau suivant la variation de résistance à la traction d'un béton en fonction de son âge.

Tableau 5.2

Age du béton en jours.....	3	7	28	90	360
Ciment Portland normal.....	0,40	0,70	1	1,05	1,10

La résistance à la traction joue un rôle important dans tous les problèmes de fissuration, de traction et de cisaillement.

En béton précontraint, on a souvent à déterminer la résistance d'une section sous sollicitations composées de compression dans une ou deux directions (précontraintes longitudinale et transversale) et de cisaillement.

Il faut donc connaître le comportement du béton sous ces sollicitations, ce qui peut être réalisé par étude de la courbe intrinsèque dans le plan de Mohr (contrainte de compression en abscisse, contrainte de cisaillement en ordonnée*).

4. AUTRES CARACTÉRISTIQUES DU BÉTON

4.1. Déformations instantanées

• Diagramme contrainte-déformation du béton

Le béton n'a un comportement élastique que pour des contraintes ne dépassant pas la moitié de la contrainte de rupture. Au-delà, la déformation croît plus vite jusqu'à la rupture pour des déformations de 2,5 à 4‰.

On voit sur la figure 5-3 comment varie le raccourcissement à la rupture et que la déformation correspondant au maximum est voisine de 2‰, quelle que soit la résistance du béton f_c .

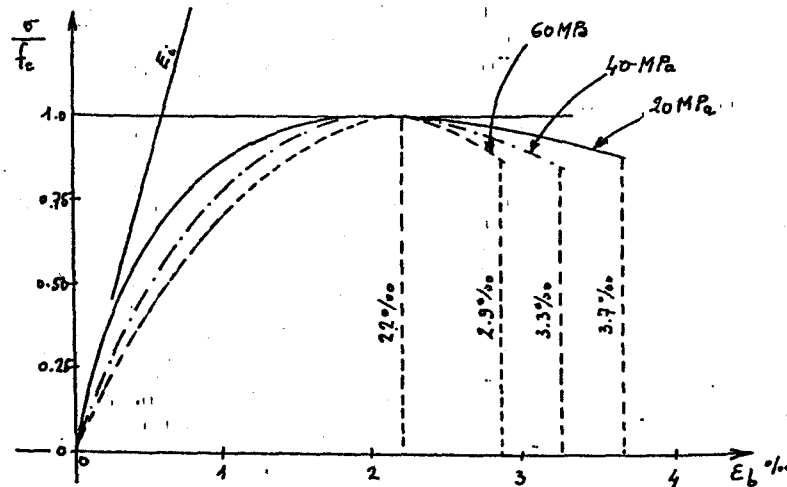


Fig. 5-3. Diagramme contrainte-déformation des bétons

Pour un matériau élastique, on définit un module de déformation longitudinal E dit module d'Young tel que la proportionnalité contrainte σ -déformation ϵ s'écrive :

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E}$$

Ceci suppose une représentation linéaire sur le diagramme contrainte-déformation.

* Voir *Traité de béton armé*. Op. cit. à la fin du chapitre 3.

La rupture est atteinte pour une déformation de l'ordre de 3,5‰ et la courbe est droite jusqu'à des valeurs de σ de l'ordre de $0,5\sigma_j$ (fig. 5-4).

On sera donc amené à parler de :

- module tangent à l'origine pour des contraintes inférieures à $0,5\sigma_j$;
- module tangent pour un point P de contrainte σ_i plus élevée (pente de la droite 1) que l'on pourra prendre égal à $11\,000 \sqrt{f_{c,j}}$;
- module sécant pour des contraintes variant dans une plage donnée 0 à σ_i (pente de la droite 2).

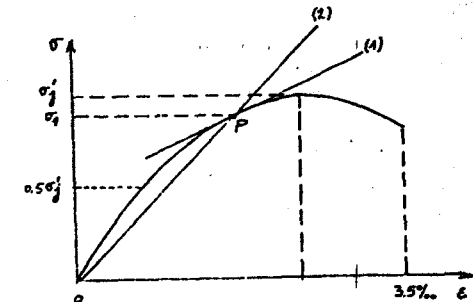


Fig. 5-4. Modules d'Young tangent et sécant.

Les valeurs retenues par les différents règlements sont :

$$E_i = 21\,000 \sqrt{\sigma_{28}} \text{ en bars pour l'IP1 ;}$$

$$E_i = 6\,640 \sqrt{\sigma_{28}} \text{ en MPa pour l'IP1.}$$

où σ_{28} représente la résistance nominale du béton à 28 jours ;

$$E_{i,j} = 7\,590 \sqrt{\sigma_j} \text{ en MPa pour l'IP2,}$$

où σ_j représente la résistance caractéristique du béton à j jours (avec $j > 28$ jours, on prendra σ_{28}) ;

$$E_{i,j} = 11\,000 \sqrt{f_{c28}} \text{ en MPa pour le BEPL où } f_{c28} \text{ représente la résistance caractéristique du béton à j jours (on prendra également } f_{c28} \text{ pour } j > 28).$$

Les coefficients différents tiennent compte de la valeur de la résistance, qui pour un même béton, diffère d'un règlement à l'autre et des résultats d'essais réalisés ces dernières années.

Exemple : Pour un même béton et compte tenu des résultats obtenus sur les résistances des éprouvettes, on peut avoir :

$$\sigma_{28} = 35 \text{ MPa pour l'IP1 ;}$$

$$\sigma_{28} = 32 \text{ MPa pour l'IP2 ;}$$

$$f_{c28} = 32 \text{ MPa pour le BEPL.}$$

On obtient ainsi un module d'Young :

$$E_i = 6\,640 \sqrt{35} = 39\,280 \text{ MPa pour l'IP1 ;}$$

$$E_i = 7\,590 \sqrt{32} = 42\,935 \text{ MPa pour l'IP2 ;}$$

$$E_i = 11\,000 \sqrt{32} = 34\,923 \text{ MPa pour le BEPL et le BAEL.}$$

4.2. Déformation différée

Deux déformations différées apparaissent dans la vie d'un ouvrage en béton :

4.2.1. Le retrait

Il est dû à l'évaporation de l'eau qui chimiquement n'était pas nécessaire à la prise du ciment, mais qui était indispensable pour obtenir une consistance plastique du béton pour faciliter sa mise en œuvre.

L'importance du retrait dépend d'un certain nombre de paramètres :

- l'humidité relative de l'air ambiant ; le retrait augmente quand l'humidité diminue ;
- les dimensions de la pièce ; le retrait est plus grand pour les pièces peu épaisses ou peu massives ;
- la quantité d'armatures situées à l'intérieur de la pièce qui freinent le retrait ;
- la quantité d'eau mise en œuvre ; le retrait augmente avec cette valeur ;
- le dosage de ciment ; le retrait augmente avec la quantité de ciment ;
- le temps écoulé.

4.2.2. Le fluage

Il correspond à une déformation croissante dans le temps sous contrainte constante.

Une pièce soumise à la compression simple se raccourcit à la mise en application de la charge d'une certaine valeur que l'on appelle raccourcissement élastique instantané :

$$\frac{\Delta \ell}{\ell} = \frac{\sigma}{E_i}$$

Mais dans le temps, la pièce continue à se raccourcir pour atteindre une limite pour un temps infini (plusieurs années) qui est de l'ordre de 3 fois le raccourcissement instantané.

Le fluage dépend d'un certain nombre de paramètres :

- de la contrainte à laquelle est soumis l'élément étudié et de l'évolution de cette contrainte dans le temps ;
- du dosage de ciment ;
- de la teneur en eau (rapport E/C : eau/ciment) ;
- de l'humidité relative de l'air ;
- du durcissement du béton à l'âge de la mise en charge ;
- de la température extérieure entre la mise en charge et le moment où l'on calcule le fluage ;
- de l'épaisseur moyenne de la pièce.

Dans une première approximation, on pourra utiliser la formule suivante (tirée du BPEL) :

$$\epsilon_{\text{th}} = \epsilon_{\text{ic}} K_{\text{th}} f(t)$$

où ϵ_{th} est la déformation conventionnelle instantanée sous l'effet de la contrainte

$$\epsilon_{\text{ic}} = \frac{\sigma_b}{E_{i28}}$$

K_{th} est un coefficient de fluage qui dépend notamment de l'âge t_0 du béton au moment où il subit la contrainte σ_b : $K_{\text{th}} = 2$ dans les cas courants.

Pour une plus grande précision est recherchée, on pourra se reporter à l'annexe A du présent cours.

$f(t)$ est une fonction de la durée du chargement t exprimée en jours, qui varie de 0 pour $t = 0$ à 1 pour t égal à l'infini :

$$f(t) = \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t} + 5\sqrt{t_m}}$$

avec t = durée de chargement en jours à contrainte constante σ_b et t_m = rayon moyen de la pièce en cm (section transversale sur demi-périmètre).

Dans le cas plus complexe de chargement suivi de déchargement partiel ou total, il doit être tenu compte des fluages sur des périodes de chargement constant et des retours de fluage (c'est-à-dire à un fluage négatif) dans les cas de déchargement.

On se reportera à l'annexe du BPEL pour trouver la méthode de calcul du fluage pour des chargements variables (voir également l'annexe A du présent cours).

4.3. Coefficient de Poisson

Le coefficient de Poisson ν représente la variation relative de dimension transversale d'une pièce soumise à une variation relative de dimension longitudinale.

Le coefficient de Poisson du béton pour un chargement instantané est de l'ordre de 0,20, mais il diminue avec le temps pour se rapprocher de la valeur 0,2. Quant au cas d'un béton fissuré, ν devient nul. On retiendra pour les calculs de béton précontraint la valeur $\nu = 0,20$ pour un béton non fissuré (ELS) et $\nu = 0$ pour un béton fissuré (ELU).

4.4. Coefficient de dilatation thermique

On sait que le béton armé et donc le béton précontraint n'auraient jamais pu exister, si les coefficients de dilatation des deux matériaux béton et acier avaient été très différents.

Le coefficient de dilatation de l'acier valant 10^{-5} , celui du béton varie de 0,8 à $1,2 \cdot 10^{-5}$. On pourra dans les calculs, retenir la valeur 10^{-5} par degré Celsius.

4.5. Masse volumique du béton

La masse volumique d'un béton est fonction de :

- la nature des granulats : calcaires, siliceux, granulats lourds pour béton lourd (baryte, minerai de fer...), granulats légers (argile expansée...);
- la quantité d'armatures mise en place.

Pour les bétons normaux de béton armé, le CCBA 68 proposait la formule :

$$w = 2,37 + 5,4p_s \text{ t/m}^3$$

où p_s représente le rapport de la section d'acier A_s à la section de béton B .

Pour le béton précontraint, la densité d'armatures étant plus faible que pour le béton armé, on serait tenté de prendre une valeur inférieure à $2,5 \text{ t/m}^3$, valeur imposée par les règles BAEL. Les règles BPEL imposent cependant une masse volumique de calcul de $2,5 \text{ t/m}^3$ (article 4.1.2).

4.6. Pression sur les coffrages

Le béton se comporte comme un fluide dont la cohésion (ou viscosité) augmente avec le temps (temps de prise). Ce fluide exerce donc une pression sur les parois du coffrage qui dépend :

- de la hauteur de béton frais;
- de l'âge du béton et donc de sa vitesse de bétonnage;
- de la température du béton — une température faible ralentit la prise du béton.

Pour connaître la poussée sur le coffrage, on pourra utiliser le graphique de la figure 5-5.

4.7. Chauffage du béton

On accélère la prise et le durcissement du béton en le maintenant pendant quelques heures, voire quelques jours à une température élevée de l'ordre de 40°C à 100°C . On pourra, pour connaître la résistance du béton en fonction de la température et de la durée du traitement, déterminer la résistance du béton par l'abaque ci-après dû à M. MAMILLAN (béton dosé à 350 kg CPA 400 avec un rapport eau/ciment de $0,50$ en masses) (fig. 5-6).

On constate le gain que l'on peut faire sur la rotation des coffrages ou des moules. Par exemple, 10 MPa sont obtenus en 2 heures au lieu de 21 heures.

* On remarquera que pour $p_s = 1$, on retrouve à peu de choses près, la densité de l'acier : $2,37 + 5,4 = 7,77 \sim 7,85$.

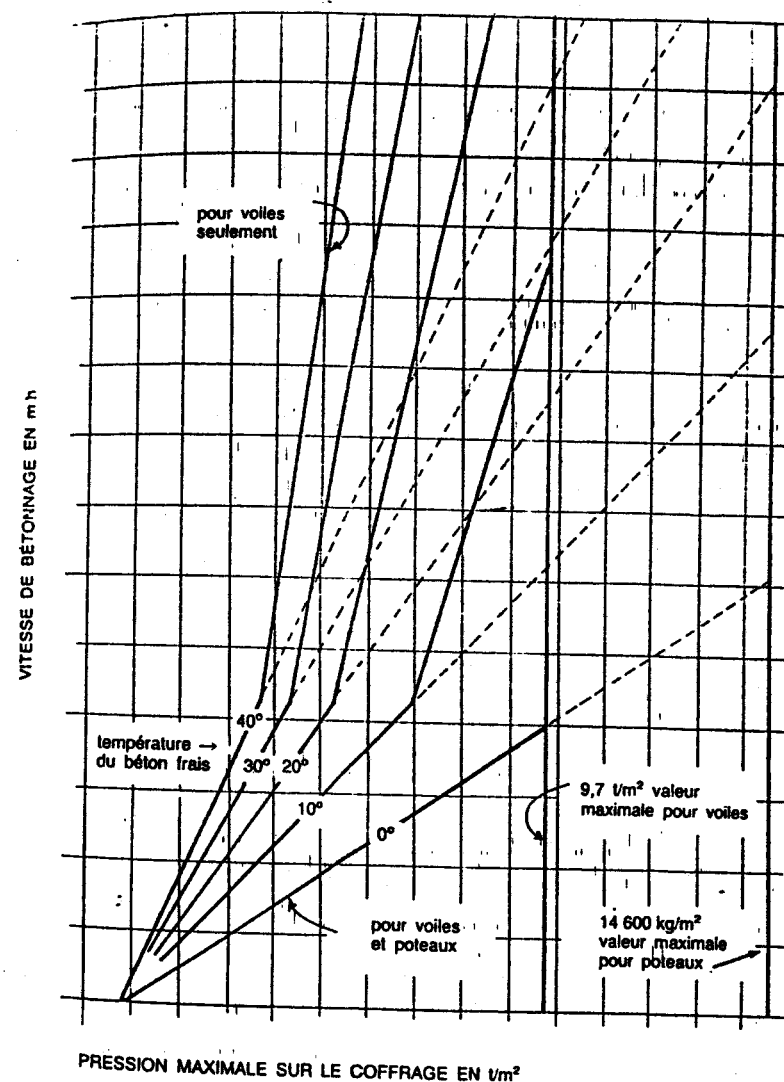


Fig. 5-5. Pression sur le coffrage en fonction de la vitesse de bétonnage et de la température du béton frais

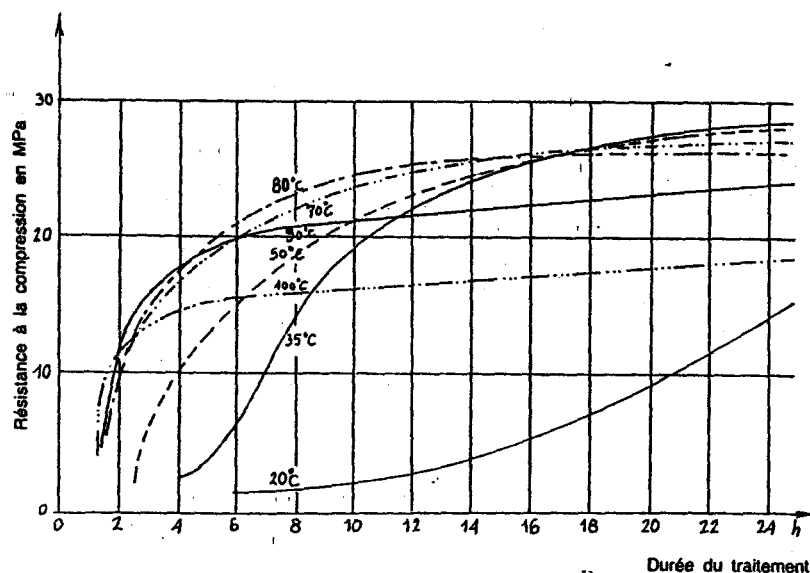


Fig. 5-6. Résistance en compression, en fonction de la durée du traitement

5. ADJUVANTS

Pour améliorer la mise en place du béton, ses caractéristiques ou sa durabilité, on peut être amené à ajouter des produits en faible quantité (quelques kilogrammes par m³) lors de la confection du béton.

Pour le béton précontraint, on utilise plus spécialement :

- des *accélérateurs de prise* pour bétonnage par temps froid. En libérant en un temps plus court la chaleur de prise du béton, on évite un abaissement de température qui pourrait conduire à une résistance trop faible au décoffrage, ou même au gel du béton ;
- des *accélérateurs de durcissement* pour obtenir de fortes résistances dans les premiers jours et ainsi accélérer la rotation des coffrages ;
- des *entraîneurs d'air* qui, facilitant la création de bulles d'air, donnent des bétons plus isolants et plus résistants au gel ;
- les *plastifiants* destinés à améliorer la « fluidité » du béton pour sa mise en place ;
- les *retardateurs de prise* pour les bétonnages de longue durée, les reprises de coulage, les bétonnages en grande masse (en étalant dans le temps l'émission de la chaleur de prise), les bétonnages par temps chaud ;

- les *antigels* pour empêcher le béton de geler sous des températures négatives pas trop basses ;
- les *hydrofuges de masse* pour limiter la perméabilité du béton.

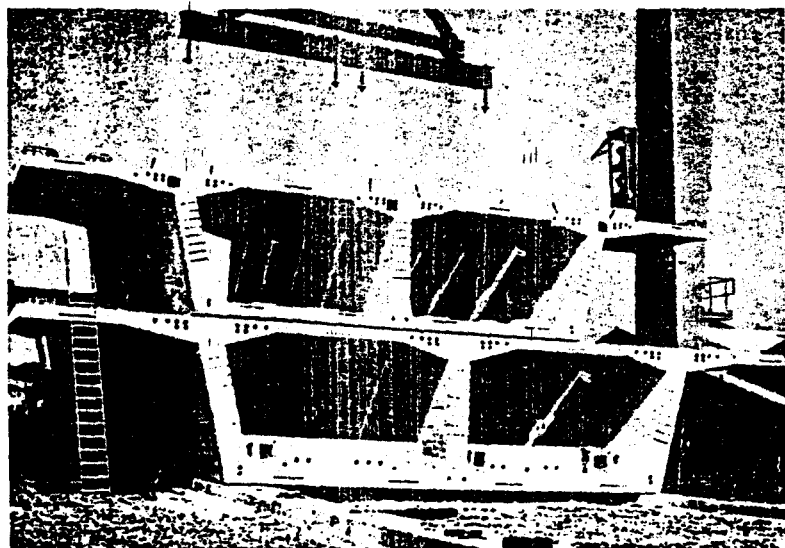
6. LES QUALITÉS ATTENDUES D'UN BÉTON POUR OUVRAGES PRÉCONTRAINTS

Ces qualités sont :

- une très bonne résistance à la compression à court terme (quelques jours) et à long terme (28 jours et plus) ;
- une bonne résistance aux agents agressifs, aux intempéries, à l'eau de mer éventuellement ou aux eaux séléniteuses ;
- une déformabilité instantanée et différée la plus faible possible ;
- une maniabilité pour mise en œuvre aussi bonne que possible.

Références bibliographiques

- Annales ITBTP — Composition des bétons. Méthode Dreux-Gorisse. *Annales*, mai 1983.
- BARON, J., SAUTEREY, R. — Le béton hydraulique : connaissance et pratique. Presses de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1982.
- Bâtir — Influence de la nature des ciments fabriqués en 1977 et 1978 sur les caractéristiques mécaniques des bétons. *Le Bâtiment, Bâtir*, mars 1979.
- Deux grands ponts en béton léger : le pont de Tricastin, sur le Rhône, le pont d'Ottmarsheim sur le canal d'Alsace, par P. CORMON. *Le Bâtiment, Bâtir*, juin 1979.
- Documentation française du matériel — Le béton. Matériel de fabrication et de mise en œuvre. *Le Moniteur du BTP*.
- Normes — NFP-18-102. Détermination des caractéristiques mécaniques des bétons. Définition relative aux essais des bétons.
- NFP-18-305. Bétons prêts à l'emploi, préparés en usine.
- VÉNUAT, M. — Coffrage et vibration du béton. *Le Moniteur du BTP*, mai 1975.
- La pratique des ciments et des bétons. *Le Moniteur du BTP*, 1976.



Pont A 86. Carrefour Pompadour (Val-de-Marne). Voussoirs préfabriqués pour pont construit par encorbellement (1984).

6

LES ACIERS

Les aciers utilisés dans les ouvrages de béton précontraint sont de deux natures différentes :

- les aciers actifs qui créent et maintiennent la précontrainte sur le béton ;
- les aciers passifs nécessaires pour reprendre les efforts tranchants (en l'absence d'étriers précontraints), pour limiter la fissuration ; les aciers de montage pour constituer une cage d'armatures maintenant les autres aciers.

1. ACIERS DE PRÉCONTRAINT

L'augmentation des résistances des aciers de précontrainte a été une condition nécessaire pour le développement du béton précontraint.

En effet, pour des aciers dont la limite élastique est de l'ordre de 200 à 400 MPa, les pertes de précontrainte (cf. chapitre 11) peuvent représenter de 50 % à 80 % de cette limite élastique.

Il a fallu développer des aciers de haute limite élastique (de 1 400 à 1 600 MPa) pour que ces mêmes pertes ne représentent plus que 15 à 20 %. A ce moment là, le béton précontraint devenait compétitif avec les autres matériaux tels l'acier ou le béton armé.

1.1. Types d'aciers

Les aciers de précontraintes ont été classés par :

- catégories : fils, barres, torons,
- classes de résistances,

dans un document émis par les ministères de l'Urbanisme et du Logement, des Transports, de l'Environnement et de la Qualité de la Vie, intitulé *Cahier des Clauses Techniques Générales* (CTG) applicables aux marchés de travaux relevant

des services de ces ministères; Fascicule n° 4: Fournitures d'aciers, Titre II: «Armatures en acier à haute résistance pour construction en béton précontraint par pré- ou post-tension» (fascicule spécial 83-14ter au *Journal officiel*).

1.2. Catégories d'aciers de précontrainte

1.2.1. Les fils

On distingue:

- les fils d'aciers ronds et lisses de symbole L,
- les fils autres que ronds et lisses de symbole L.

Leur diamètre varie de 4 à 12,2 mm. Ils sont livrés en couronne d'un diamètre minimum de 250 fois leur diamètre*.

Les diamètres les plus courants en post-tension sont 5, 7 et 8 mm.

Les fils non-lisses sont surtout utilisés en précontrainte par pré-tension où de bonnes conditions d'adhérence sont particulièrement recherchées. Il est en particulier interdit d'utiliser des fils ronds et lisses pour la pré-tension.

1.2.2. Les torons

Les torons sont constitués d'un ensemble de 3 ou 7 fils enroulés en hélice en usine. Ce façonnage appelé toronnage conduit à un câble relativement souple, mais dont les fils restent solidaires dans toutes les opérations de manutention des torons.

Les torons à 3 fils, de faible section (13,6 mm²) ne sont utilisés qu'en précontrainte par pré-tension. Les autres torons (à 7 fils) sont utilisés en pré-tension (bonnes qualités d'adhérence) et en post-tension.

Les torons les plus utilisés en post-tension sont de 7 fils, 6 fils en hélice autour d'un fil central, de diamètre:

- un demi-pouce (12,4 mm nominal) de 93 mm² de section constitué de fils de 4,2 mm enroulé sur un fil de 4,3 mm, souvent dénommé T13;
- 6/10^e de pouce (15,2 mm nominal) de 139 mm² de section constitué de 6 fils de 5 mm enroulé sur un fil de 5,2 mm, souvent dénommé T15.

Comme en général, les résistances des aciers croissent en sens inverse des diamètres, les torons ont des limites élastiques supérieures aux fils de 7 ou 8 mm, offrant des sections plus importantes et des résistances supérieures à poids égal, les torons sont en train de prendre une place prépondérante sur le marché des aciers de précontrainte.

* La contrainte de flexion correspondante doit rester dans le domaine élastique.

$$\text{En effet: } \sigma = \frac{Mv}{I}, \text{ avec } \frac{1}{r} = \frac{M}{EI} \text{ et } v = \varnothing/2$$

$$\text{on trouve } \sigma = \frac{E.v}{r} = \frac{200\,000 \times 0,5}{125} = 800 \text{ MPa.}$$

Un nouveau type de toron est apparu sur le marché récemment, les 7 fils «super» de 12,9 mm (100 mm²) et de 15,7 mm (150 mm²).

1.2.3. Les barres

Les barres sont définies comme étant de section supérieure aux fils (diamètre supérieur à 12 mm) et livrables en éléments rectilignes; ce qui réduit leur usage à de faible longueur, sauf à utiliser des coupleurs.

Les barres les plus courantes ont un diamètre nominal de 26 mm. Plus rarement, on trouve des barres de 18 et 32 mm de diamètre.

Leur longueur maximale disponible est de l'ordre de 18 m.

Leur limite élastique est nettement plus faible que celle des fils et des torons.

Tableau 6.1. Caractéristiques des barres de précontraintes (voir les marques dans le tableau 6.2)

Diamètre de barres (mm)	18,6 15,1	26 26,5	32 32,6
Diamètre des gaines (mm)	25	32	38
Rayon minimal de courbure (m)	14	20	24
Entr'axe minimum des ancrages (mm)	120	160	220
Distance minimum d'un ancrage à une paroi (mm)	80	100	150

Tableau 6.2

Qualité	Producteur	Diamètre nominal mm	Nature	f _{yk} (MPa)	f _{yk} (MPa)	F _{yk} (kN)	F _{yk} (kN)	A _s (%)	p ₁₀₀₀ (%)	Dénomination
Dywidag	Krupp Hütten Werke	18,6	lisse	1 000	784	265	208	2,5	9	St. 85/105
		26	lisse	1 000	784	520	408	2,5	9	St. 85/105
		32	lisse	1 000	784	790	619	2,5	9	St. 85/105
	Peine	15,1	nervurée	1 078	882	193	158	5,2	7	St. 90/110
		26,5	nervurée	1 000	784	550	431	5	7	St. 85/105
		32,6	nervurée	1 000	784	835	655	5	7	St. 85/105
DJP 110	Creusot-Loire	26	lisse	1 080	880	573	467	4	5,5	DJP 110

Les tableaux 6.1 et 6.2 donnent les caractéristiques des barres disponibles sur le marché. Le CCTG fascicule 4 précité, donne la classification de barres suivante.

Tableau 6.3

Diamètre nominal (mm)	Section nominale (mm ²)	Classe (MPa)	F _r (kN)	F _e (kN)	f _{prg} (MPa)	f _{peg} (MPa)	Relaxation à 1 000 heures à 0,7 F _r
20	314	1 030	325	260	1 030	828	4 %
20	314	1 230	385	340	1 230	1 083	
26	531	1 030	547	443	1 030	834	
26	531	1 230	653	575	1 230	1 083	
32	804	1 030	830	670	1 030	833	
32	804	1 230	990	870	1 230	1 082	
36	1 018	1 030	1 050	850	1 030	835	
36	1 018	1 230	1 250	1 100	1 230	1 081	

1.3. Caractéristiques mécaniques

1.3.1. Résistance

La résistance à prendre en compte dans les calculs est la charge maximale garantie que supporte l'éprouvette d'armature dans l'essai de traction jusqu'à rupture et que l'on désigne par F_{prg} , la contrainte correspondante s'appelant f_{prg} .

Ces essais de traction sont définis dans la norme NFA-03-151.

Les différentes catégories d'aciers sont réparties en classes de résistance, définissant parfaitement pour chaque catégorie, la valeur de la résistance, quel que soit le fabricant.

Les valeurs actuelles oscillent entre 1 570 et 1 770 MPa pour les fils, 1 030 à 1 230 MPa pour les barres et 1 770 à 1 960 MPa pour les torons.

1.3.2. La limite élastique

Un deuxième paramètre utilisé dans les calculs est la limite d'élasticité des aciers de précontrainte.

Comme ces aciers n'ont pas de palier de plasticité, on définira la limite élastique comme étant la contrainte qui, après retour à une contrainte nulle, laisse un allongement résiduel de 1%.

La limite élastique conventionnelle des aciers représente 80 à 90 % de la résistance garantie.

1.3.3. Module d'Young

Le module d'élasticité longitudinale E_p des aciers de précontrainte est pris égal à :

- 200 000 MPa pour les fils et les barres,
- 190 000 MPa pour les torons*

* Des essais effectués au Laboratoire Central des Ponts et Chaussées (LCPC) ont montré que le module des torons est de 200 000 MPa rapporté à la section réelle. La différence entre la valeur théorique et la valeur réelle est plutôt due à des différences de longueur de torons d'un même câble.

Ce module d'Young intervient fréquemment en béton non seulement dans le calcul des déformations d'éléments (poutres, etc.), mais également dans le calcul des pertes de précontrainte (calcul des allongements lors de la mise en tension servant de base au calcul des tensions, dans le calcul des contraintes au moyen du diagramme contrainte-déformation pour la vérification en état-limite ultime.

1.3.4. Diagramme contrainte-déformation

Le calcul en état-limite ultime sortant du domaine élastique, il est nécessaire de connaître la relation entre contrainte et déformation aux différents stades de calcul.

Une mise en équation des courbes réelles a dû être faite pour en assurer un emploi simple.

Le BPEL donne les équations suivantes :

- Pour les fils tréfilés et les torons (fig. 6-1)

$$\epsilon_p = \frac{\sigma_p}{E_p} + 100 \left(\frac{\sigma_p}{f_{prg}} - 0,9 \right)^5$$

pour les valeurs de σ_p supérieures à $0,9f_{prg}$,

$$\text{et } \epsilon_p = \frac{\sigma_p}{E_p}$$

pour les valeurs de σ_p comprises entre 0 et $0,9f_{prg}$;

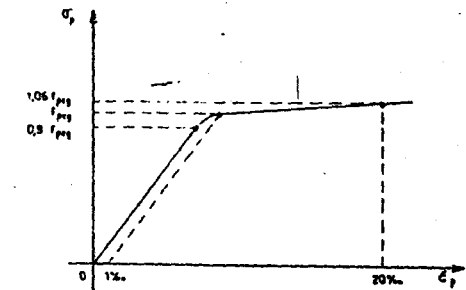


Fig. 6-1. Diagramme contrainte-déformation des torons et fils tréfilés

- Pour les fils trempés et revenus et pour les barres (fig. 6.2)

Le diagramme contrainte-déformation est idéalisé sous la forme de 2 droites ; les valeurs de la contrainte sont les suivantes :

$$\sigma_p = E_p \epsilon_p \text{ pour } \epsilon_p < \frac{f_{prg}}{E_p}$$

et

$$\sigma_p = f_{prg} \text{ pour } \epsilon_p > \frac{f_{prg}}{E_p}$$

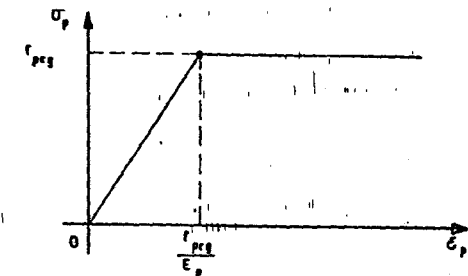


Fig. 6-2. Diagramme contrainte-déformation pour barres et fils trempés

• Lorsque la nature de l'acier est ignorée, on pourra utiliser le diagramme bi-linéaire ci-dessus. Si une grande précision n'est pas recherchée, ce même diagramme peut être utilisé pour les torons et les fils tréfilés.

1.3.5. Tableau des caractéristiques des aciers les plus courants (tableau 6.4)

!!! Ce tableau est extrait du CCTG — Fascicule 4 — Titre II précité (décret du 29 mars 1983)*.

1.4. Autres caractéristiques

1.4.1. Résistance à la fatigue

Les armatures de précontraintes sont plus sensibles à la fatigue que les armatures de béton armé car :

— elles travaillent à des taux de contraintes élevés, de l'ordre de 60 à 65 % de leur résistance et 70 % de leur limite élastique, aussi bien sous moment minimum que maximum, c'est-à-dire de façon permanente**;

— elles sont soumises à des surtensions sous charges variables qui sont d'autant plus répétées que l'ouvrage est un pont-routier ou un pont-rail situé sur une voie à grand trafic.

La fatigue d'un matériau se définit comme l'endommagement de sa structure et de sa texture provoqué par les variations de déformation que lui impose les actions variables.

Le problème de fatigue se pose rarement pour le béton tant que la contrainte ne dépasse pas $0,5 f_{c28}$, ce qui est pratiquement toujours le cas en béton précontraint.

Dans une armature, l'endommagement se traduit par des microfissures qui peuvent se transformer rapidement en fissures pouvant entraîner la rupture de l'armature.

Les règles BPEL ont consacré une annexe (n° 10) à l'étude de ce phénomène en donnant un processus opérationnel de calcul.

1.4.2. Corrosion sous-tension

Une armature tendue est plus sensible à la corrosion qu'au repos***. C'est la raison pour laquelle une attention toute particulière est apportée à la protection des armatures de précontrainte par des enrobages importants, une limitation des contraintes de traction du béton au niveau de l'armature, une injection soignée des gaines de câbles.

Des désordres importants sont apparus sur des ouvrages, qui seraient dus à la corrosion sous-tension.

Cependant, une étude récente**** tendrait à prouver au contraire qu'il n'y a pas de corrosion sous-tension en tant que variété intrinsèque de la corrosion.

* Par rapport à l'ancien fascicule 4, titre II, les caractéristiques mécaniques des fils, des barres et des torons ont été légèrement modifiées. Les exercices du présent cours ont été faits sur la base des caractéristiques des aciers figurant sur le précédent fascicule (fascicule spécial 73-81 bis).

** Les aciers de béton armé habituels de limite élastique 400 MPa ont une résistance de 550 MPa, ils travaillent donc en état limite de service à 275/550 soit 50 % de la rupture seulement en valeur maximum.

*** Voir l'article de Mme BRACHET paru dans les *Annales ITBTP* de mars-avril 1970, intitulé : « Bilan de quelques années d'observation des phénomènes de corrosion sous-tension des aciers à haute résistance ».

**** Voir l'article de R.M. BERTHIER paru dans les *Annales ITBTP* de décembre 1980.

Tableau 6.4. Caractéristiques des aciers usuels pour câbles

Nature de l'armature	Diamètre nominal (mm)	Section nominale (mm ²)	Poids nominal (kg/m)	Caractères garantis	Classe		
					tréfilé à froid classe 1570	tréfilé à froid classe 1670	tréfilé et revenu classe 1570
FILS	7	38,5	0,302	f_{pe} (MPa) = f_{pr} (MPa) =	1 403 1 570	1 481 1 670	1 377 1 570
	8	50,3	0,395	f_{pe} (MPa) = f_{pr} (MPa) =	1 412 1 570	1 491 1 670	1 392 1 570
TORONS 7 fils « standard »	12,5 (0,5 pouce) T 13	93	0,730	f_{pe} (MPa) = f_{pr} (MPa) =	—	classe 1770 1 570 1 770	classe 1860 1 636 1 860
	15,2 (0,6 pouce) T 15	139	1,091	f_{pe} (MPa) = f_{pr} (MPa) =	classe 1670 1 489 1 670	classe 1770 1 583 1 770	—
TORONS 7 fils « super »	12,9	100	0,785	f_{pe} (MPa) = f_{pr} (MPa) =	—	—	classe 1860 1 660 1 860
	15,7	150	1,178	f_{pe} (MPa) = f_{pr} (MPa) =	—	classe 1770 1 573 1 770	—

Toutes les relaxations ρ_{rel} à 1 000 heures et à 0,7 f_{pe} valent 2,5 % pour les aciers TBR et 8 % pour les aciers RN (fils ou torons).

1.4.3. Coefficient de dilatation thermique

On prendra un coefficient de dilatation thermique de 10^{-5} par degré.

1.4.4. Coefficient d'adhérence des torons

$$\eta = \psi_s = 1,3$$

1.4.5. Autres caractéristiques

D'autres caractéristiques des aciers de précontraintes sont utilisées ou utiles à connaître telles :

— la relaxation à 1 000 heures pour les calculs de pertes de précontrainte;

— l'allongement garanti sous charge maximale A_g , qui représente la capacité de déformation totale de l'armature avant que ne soit engagé le processus de déformation plastique localisée qui conduit à la rupture et qui est appelée striction (fig. 6-3). La valeur courante de A_g est de 30%;

— le coefficient de striction Z_g représente la réduction relative de l'aire de la section droite de l'éprouvette dans la section de rupture lors de l'essai de traction. Pour les armatures courantes, cette réduction de section par striction est de 25 %.

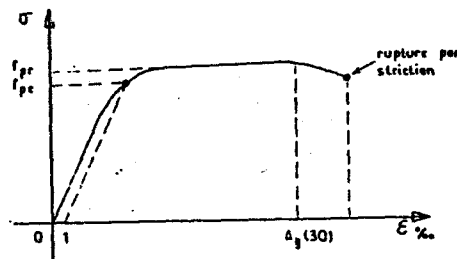


Fig. 6-3. Diagramme contrainte-déformation

1.5. Fabrication des câbles

Les armatures de précontrainte par post-tension sont en général constituées de câbles, rarement de monofil ou de monotorons.

Dans le cas le plus fréquent de câbles placés dans des gaines injectées, la préparation des câbles peut se réaliser soit en atelier, soit sur le chantier.

Prenons le cas le plus courant de câbles constitués de torons.

Les torons sont livrés en bobines (coils) de 2 000 kg et de 1,66 m de diamètre.

Dans le cas de fabrication des câbles en atelier (10 à 20 % de la production), les torons sont déroulés sur un banc de 50 à 100 m de longueur, les uns après les autres, jusqu'à former le nombre nécessaire pour constituer un câble.

Le câble ainsi obtenu est enroulé sur un touret de 2,50 m de diamètre extérieur maximum pour des raisons de transport routier. Il est alors expédié sur le chantier où l'on procède au déroulage et à l'enfillement du câble par traction d'un fil dans la gaine préalablement posée et après coulage du béton (pour éviter une perforation des gaines qui se rempliraient de béton lors du coulage).

Les gaines sont livrées en longueur de 9 à 12 m, vissées par des manchons exécutés dans des gaines de diamètre juste supérieur*. Les raccords sont entourés de rubans plastiques autocollants pour assurer l'étanchéité de la gaine lors du coulage (toujours le souci de laisser la gaine vide de tout obstacle pour pouvoir enfiler les câbles sans problème).

Elles sont solidement arrimées sur les cages d'armatures passives de l'élément pour éviter tout déplacement lors du coulage du béton et, ainsi, assurer un respect de la géométrie du câble par rapport au tracé calculé.

Les câbles complets avec gaine sont très rarement réalisés en atelier, compte tenu des diamètres d'enroulement nécessaires pour ne pas les détériorer et du gabarit routier. D'autre part, trop de risques de détérioration de la gaine se présentent pendant le transport et à la manutention qui ne permettent plus à la gaine d'être étanche (le problème n'est plus de ne pouvoir enfiler les câbles, mais de bien injecter le coulis qui risque d'être bloqué par des caillots de béton qui auraient pénétré indûment dans la gaine).

Dans le cadre de la fabrication des câbles sur le chantier, les torons sont enfilés dans les gaines après coulage du béton, toron par toron.

2. ARMATURES PASSIVES

2.1. Généralités

Les armatures passives par opposition aux armatures actives de précontrainte (qui sont sous tension même sans aucune sollicitation extérieure à l'inverse des armatures passives qui ne sont tendues que sous des sollicitations extérieures) sont des armatures comparables à celles du béton armé. On retrouve ainsi :

- des armatures de traction pour les zones tendues de béton en classe II et III ;
- des armatures de peau ;
- des armatures d'effort tranchant (cadres, épingles, étriers, barres longitudinales) ;
- des armatures de construction...

Les aciers utilisés sont les aciers courants à haute adhérence de béton armé des classes FeE40 et FeE50.

2.2. Diagramme contrainte-déformation

La limite élastique f_e des aciers les plus courants FeE40 est de 400 MPa (norme AFNOR NF-A35-016 et A 35-017).

On distingue deux types :

* Sur un mètre de longueur environ.

2.2.1. Les aciers de type I

Dits aciers à paliers, correspondent à des aciers naturellement durs et qui représentent la grande majorité des aciers de béton armé utilisés (fig. 6-4).

Le diagramme contrainte-déformation est constitué de deux droites :

- pour $\varepsilon_s < f_c/E_s$, la contrainte vaut $\sigma_s = \varepsilon_s E_s$;
- pour $\varepsilon_s > f_c/E_s$, la contrainte est constante et égale à f_c .

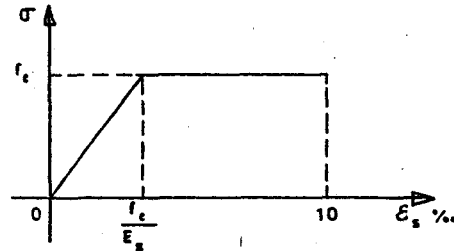


Fig. 6-4. Diagramme contrainte-déformation des aciers passifs à palier

2.2.2. Les aciers du type II

Dits aciers écrouis, correspondent à des aciers écrouis généralement par torsion ou traction pour améliorer leur capacité (fig. 6-5).

Ce type d'acier a pratiquement disparu.

Le diagramme contrainte-déformation est constitué de :

- une droite passant par l'origine pour $\sigma_s < 0,7f_c$;
- une courbe du 5^e degré pour $\sigma_s > 0,7f_c$ et dont l'équation est :

$$\varepsilon_s = \frac{\sigma_s}{E_s} + 0,823 \left(\frac{\sigma_s}{f_c} - 0,7 \right)^3$$

La limite d'élasticité conventionnelle de ce type d'acier correspond à un allongement résiduel de 2‰.

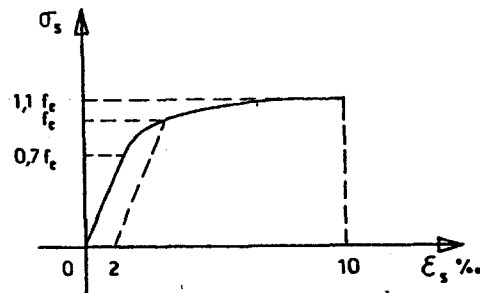


Fig. 6-5. Diagramme contrainte-déformation des aciers passifs écrouis

2.3. Mandrins de cintrage

Le diamètre D des mandrins de cintrage des barres auront les valeurs minimales indiquées dans le tableau 6.5 (extrait du Fascicule 65 du CCTG des Marchés Publics).

Tableau 6.5

Diamètre nominal de l'armature (mm)		4	5	6	8	10	12	14	16	20	25	32	40
Etriers et cadres	Fe TE 400 Fe E 400	20	20	20	30	40	50	70	100	sans objet			
	Fe TE 500 Fe E 500	30	30	40	50	70	70	100	150				
Ancrages		40	50	70	70	100	100	150	150	200	250	300	400
Coudes		sans objet				150	200	200	250	300	400	500	500

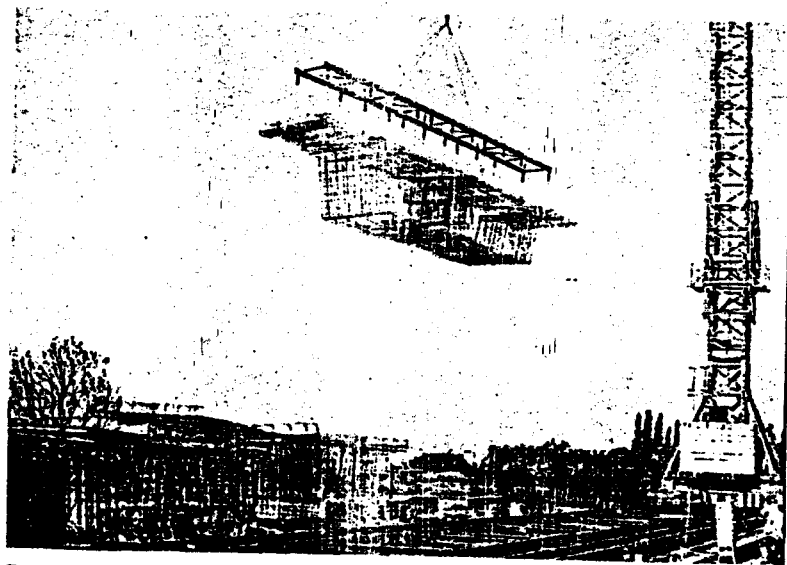
2.4. Longueur des cadres, étriers et épingles

Si b et h désignent la largeur et la hauteur de la pièce, D le diamètre du mandrin de cintrage, a la couverture de l'acier de diamètre $\varnothing$, les longueurs développées sont les suivantes :

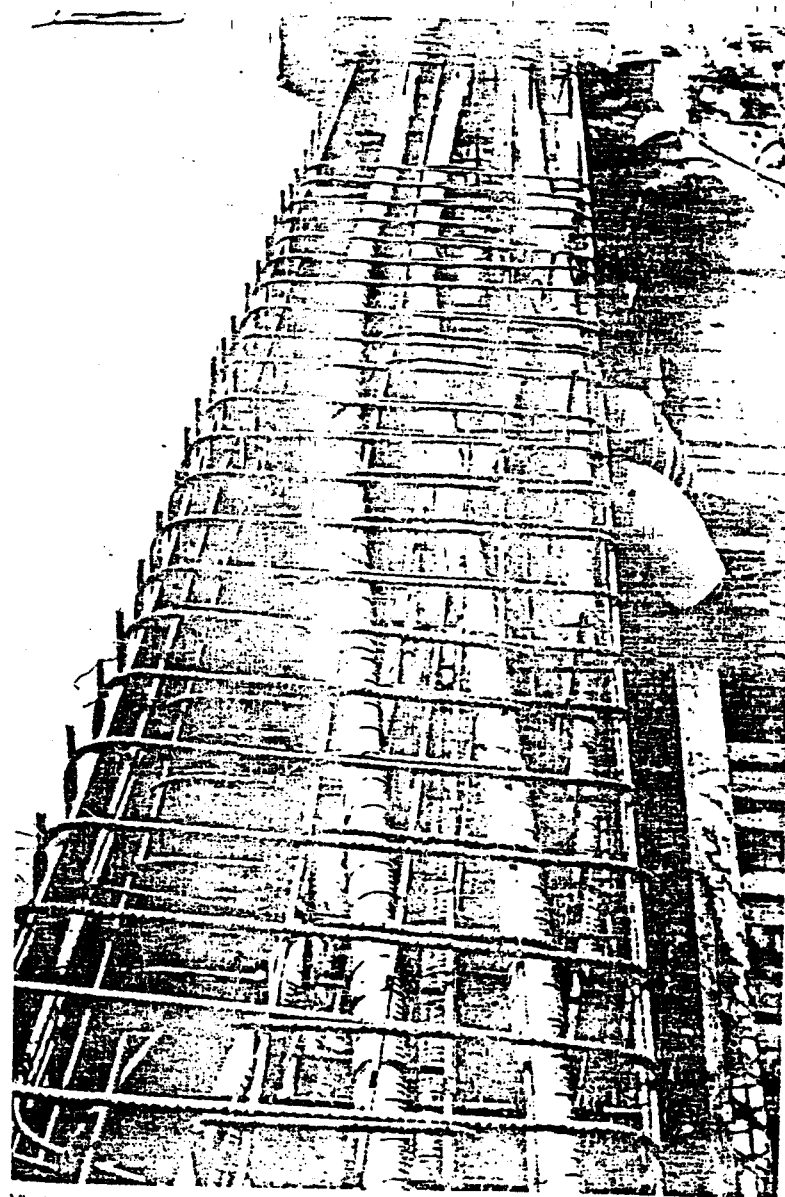
- épingles $\ell_{ep} = h - 2a + \varnothing(8 + \pi) + D(\pi - 1)$;
- étriers $\ell_{et} = 2h - 4a + \varnothing(6 + 3\pi/2) + D(3\pi/2 - 2)$;
- cadres $\ell_{cad} = 2(b + h) - 8a + \varnothing(12 + 3\pi/2) + D(3\pi/2 - 4)$.

Pour des diamètres au plus égal à 12 mm, ces formules deviennent simplement :

- épingles $\ell_{ep} = h - 2a + 20\varnothing$
- étriers $\ell_{et} = 2h - 4a + 22\varnothing$
- cadres $\ell_{cad} = 2(b + h) - 8a + 20\varnothing$



Pont A 86. Carrefour Pompadour (Val-de-Marne). Cage d'armatures de voussoir préfabriqué avant mise en place dans le coffrage (1984).



Viaduc SNCF de Nanterre (Hauts-de-Seine). Ferrailage et câblage d'une âme de pont-caisson coulé sur plate-forme (1977).



Stockage des bobines T 15 (Coils) (doc. S.F.P.).

7

LES PROCÉDÉS DE PRÉCONTRAINTÉ

La mise en œuvre de la précontrainte nécessite l'utilisation de matériel spécifique de mise en tension et de blocage des armatures qui font l'objet de divers brevets.

Ces différents procédés peuvent se classer en deux principales catégories :

- la précontrainte par pré-tension ;
- la précontrainte par post-tension.

1. PRÉCONTRAINTÉ PAR PRÉ-TENSION*

On entend par précontrainte par pré-tension, la mise en tension des armatures avant le coulage du béton. Cela suppose donc que l'on doive tendre les aciers en s'appuyant, soit sur le coffrage lui-même, soit sur des culées ancrées dans le sol ou tout autre dispositif qui permet de transférer l'effort d'une extrémité à l'autre.

Ce procédé peut être réalisé en usine ou sur chantier.

1.1. PRÉ-TENSION EN USINE

Pour des raisons de commodités et de coût de transport, ce type de précontrainte est particulièrement adapté à la fabrication de petits éléments : poutres, poutrelles, dalles, poteaux électriques..., plus rarement à des éléments précontraints de formes spéciales tels des coques en paraboloïde hyperbolique (coques HP Silberkuhl).

L'avantage de la préfabrication en usine autorise :

- une résistance élevée du béton obtenue le plus souvent par étuvage (40 à 55 MPa pour f_{cm}) ;

* Cf. chapitre 23 : « Précontrainte par pré-tension ».

- une résistance initiale élevée pour accélérer la rotation des coffrages (un cycle de fabrication par jour);
- une meilleure qualité des produits: régularité des résistances, aspects de surface de qualité;
- une réduction des coûts de main-d'œuvre et des amortissements du matériel.

La méthode de préfabrication et de mise en tension suit généralement les cycles suivant (fig. 7-1):

1. Nettoyage des moules (coffrages métalliques de grande longueur, articulés pour faciliter le décoffrage);
2. Mise en place d'huile de décoffrage sur les moules pour empêcher le béton de coller aux parois du moule;
3. Déroulement des armatures (fils non lisses ou torons) et blocage aux extrémités dans des plaques d'ancrage. La longueur de tels bancs peut atteindre, voire dépasser 100 mètres;
4. Mise en place des armatures passives: cadres, étriers, armatures longitudinales pour reprendre les efforts de traction (classe II et III);
5. Mise en place des moules dans leur position finale, mise en place des masques d'extrémités des éléments pour empêcher le béton de s'échapper hors du coulage;
6. Mise en place des déviateurs éventuels*;
7. Mise en tension des fils (ou torons) par des vérins situés à une des extrémités. L'allongement des fils, pour une longueur de 100 m, peut atteindre:

$$\Delta l = \ell \alpha / E_s = 100 \times 1500 / 200\,000 = 0,75 \text{ m}$$

Cette phase de travail est particulièrement dangereuse car, si un fil vient à casser, il peut tout balayer sur son passage par enroulement. C'est pourquoi, on dispose des blindages en bois très épais autour des points de travail derrière les dispositifs d'ancrage;

8. Mise en place du béton par pont-roulant ou grue, lissage de la partie supérieure à la règle pour assurer une surface correcte;
9. Vibration du béton en général par vibration extérieure grâce à des vibreurs excentriques placés sur les moules ou sous le banc;
10. Etuvage ou chauffage du béton pour accélérer son durcissement et un décoffrage rapide;
11. Décoffrage;
12. Détension des fils aux plaques d'ancrages des extrémités du banc lorsque la résistance du béton est suffisante pour supporter l'effort de précontrainte;
13. Découpage des fils situés entre deux éléments préfabriqués;
14. Manutention et stockage des éléments en prenant soin de ne pas les retourner, ni de les stocker avec des points d'appui intermédiaires.

* Dispositifs permettant de transformer le tracé rectiligne du fil ou toron en une ligne brisée pour limiter le moment isostatique de précontrainte qui est toujours défavorable aux extrémités des poutres.

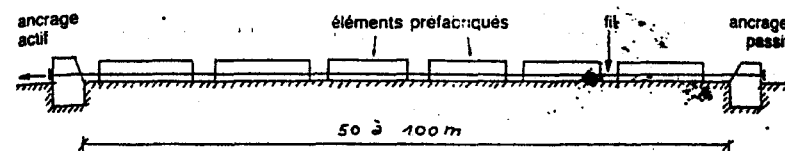


Fig. 7-1. Banc de précontrainte

1.2. Pré-tension sur chantier

Il peut être intéressant de faire de la préfabrication d'éléments précontraints par pré-tension sur le chantier lorsque:

- le nombre élevé d'éléments permet d'amortir les installations;
- le coût des transports est trop élevé;
- les dimensions des éléments sortent du gabarit routier.

A défaut de construire des culées ancrées dans le sol qui sont coûteuses à ériger et à démolir, on peut « appuyer » l'effort de précontrainte sur le coffrage lui-même, quitte à le renforcer, ou sur un dispositif de poutres extérieures de grande inertie pour éviter le flambement (poutres treillis, tubes de gros diamètre...).

Les différentes étapes de travail sont alors les mêmes qu'en usine, mais dans des conditions moins bonnes en général pour la qualité du produit fini et la rapidité.

1.3. Calcul des éléments précontraints par pré-tension

Du fait de la spécialisation des fabricants et de leurs modes d'exécution, les calculs de tels éléments (la plupart vendus sur catalogue) sont faits par le fabricant lui-même qui, en suivant les recommandations du règlement de béton précontraint (BPEL) concernant ce type de précontrainte, utilise des programmes de calculs sur mini-ordinateurs.

2. PRÉCONTRAINTÉ PAR POST-TENSION

A l'opposé, la précontrainte par post-tension suppose le coulage du béton avant la mise en tension des armatures de précontrainte. En général, on utilise la résistance du béton pour « s'appuyer » lors de la mise en tension et transmettre l'effort d'un ancrage à l'autre extrémité.

On distingue différentes possibilités de post-tension:

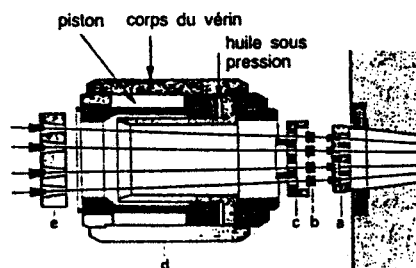
- par câbles ou fils adhérents: cela suppose que le câble puisse glisser dans le béton sans créer des frottements exagérés. Ce procédé peu courant peut utiliser un produit retardateur enduisant les câbles avant le coulage du béton (graisse spéciale, LUBABON...);
- par câbles glissants dans des conduits (gainés métalliques, gaines plastiques, tubes métalliques).

Les gaines, procédé le plus courant, sont en général constituées de feuillets de 4/10 ou 6/10 de mm enroulés en spirale.

2.1. Phases d'exécution

Nous ne décrivons ici que le cas le plus courant de post-tension par câbles et gaines avec câbles réalisés sur le chantier :

1. Mise en place du coffrage ;
2. Mise en place des armatures passives : cadres, épingles, étriers, aciers longitudinaux, chaises de support des gaines* ;
3. Mise en place des gaines et fixation solide sur la cage d'armature pour éviter tout déplacement lors du coulage du béton.
Mise en place de l'étanchéité des gaines par collage de rubans adhésifs sur les raccords ou trous accidentels faits lors des travaux ;
4. Mise en place des plaques d'appui et des frettages adjacents aux extrémités des gaines sous l'emplacement futur des ancrages ;
5. Coulage du béton ;
6. Durcissement du béton pour atteindre la résistance minimum spécifiée par le bureau d'études pour autoriser la mise en tension ;
7. Pendant le durcissement du béton, enfilage des câbles :
 - fil par fil ou toron par toron pour les câbles réalisés sur le chantier. On procède alors par poussage à l'intérieur de la gaine. Un accrochage avec la gaine n'a pas grande importance car le béton extérieur servira, à défaut de la gaine, de coffrage ou coulis d'injection ;
 - le câble en entier, par traction au moyen d'un fil préenfilé dans la gaine est attaché à une « chaussette » en tête de câble pour en faciliter le glissement. Ceci suppose que les câbles sont préassemblés en atelier. Cette méthode permet d'avoir des câbles réguliers et évite les enchevêtrements et croisements de fils.
8. Mise en place des plaques d'ancrage et des clavettes de blocage des torons (ou fils) dans le vérin d'ancrage et dans la plaque d'ancrage.
9. Mise en tension (fig. 7-2) d'un seul côté pour les câbles courts (un ancrage actif à une extrémité et un ancrage mort à l'autre : moins de 50 m par exemple) ou des deux côtés pour les câbles longs (un ancrage actif à chaque extrémité).
On mesure la longueur de câble sortant derrière le vérin à chaque étape de mise en tension (5 ou 6 étapes) pour les comparer aux valeurs calculées par le bureau d'études et s'assurer que la mise en tension du câble tout au long de son tracé est correcte.



1. MISE EN PLACE

Ordre de mise en place du vérin et de ses accessoires :

- a. bloc d'ancrage avec clavettes ;
- b. torons ;
- c. plaque de blocage ;
- d. vérin ;
- e. bloc d'ancrage arrière avec clavettes spéciales.

* Espacées de 0,50 à 1 m suivant le diamètre des gaines.

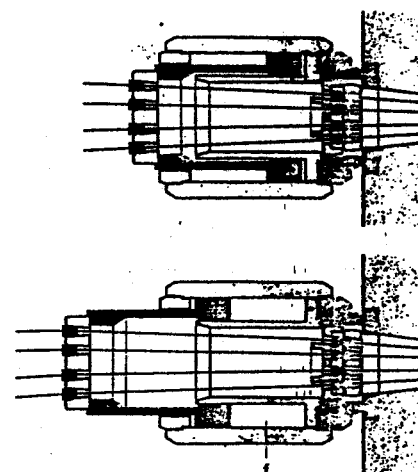


Fig. 7-2. Schéma de mise en extension

Cela fait l'objet d'une feuille de mise en tension tenue par le chantier et ayant l'allure du tableau suivant :

— date mise en tension : 8 juillet 1982 — élément de béton : poutre n° 18 — n° du câble : n° 6 — type d'acier : 8 T 15 — provenance (fabricant) : CHIERS — date de bétonnage : 27 juin 1982 — nom du responsable : WENCKER				
Pression au manomètre (bars)	Allongements mesurés (mm)			
	coté : Sud	coté : —	Total	Corrigé
100	0	—	—	21
100 à 200	21	—	21	42
300	41	—	41	62
400	59	—	59	80
500	77	—	77	98
545	86	—	86	107
Allongement prévu : 111 Pression de tension prévue : 560 Pression de blocage : 420				

Pour s'assurer d'un bon début de mise en tension des câbles, on ne mesure pas l'allongement obtenu entre 0 et 10 MPa, car il correspond à une remise en ordre des torons ou fils et à une régularisation des tensions dans chaque fil par rapport à la moyenne. On corrigera cet oubli en comptant 2 fois l'allongement de 10 à 20 MPa (100 à 200 bars).

Lorsque l'allongement du câble est supérieur à la course du vérin, on est obligé de bloquer les clavettes de la plaque d'appui, débloquer les clavettes du vérin, remettre le vérin en position fermé, remettre les clavettes de vérin, remettre en tension le vérin pour une deuxième course.

A la fin de l'opération, on procède de même pour bloquer les clavettes, remettre le vérin en position fermée et enlever le vérin pour procéder à la mise en tension d'un nouveau câble.

2.2. Injection

Pour assurer une bonne protection des câbles de précontrainte contre la corrosion, on procède ensuite dans un délai maximum de deux semaines à l'injection des câbles pour remplir le vide d'air compris entre le câble et la gaine.

On procède auparavant à un lavage à l'eau sous pression pour chasser les corps étrangers pouvant se trouver dans la gaine (laitance du béton...) pour enlever l'huile soluble qui a pu être utilisée pour améliorer le glissement du câble dans la gaine lors de sa mise en place et lors de la mise en tension. Un soufflage à l'air comprimé est ensuite effectué pour chasser l'eau et sécher la gaine.

Ce travail d'injection doit être fait très soigneusement, car trop de malfaçons sont constatées et des radiographies exécutées *a posteriori* sur des ouvrages en exploitation ont réservé bien des surprises.

Le coulis d'injection utilisé est composé d'une pâte de ciment et d'eau qui peut avoir la composition suivante :

- ciment classe CPA 55;
- eau dosée à 35 % du poids du ciment;
- plastifiant éventuel (2 % de SIKA « Y » par exemple).

La préparation de ce coulis est faite dans un malaxeur spécial disposé à côté des câbles à injecter.

On a disposé des événements (tuyaux en plastiques) aux points hauts et aux extrémités de la gaine pour permettre au coulis de chasser tout l'air contenu dans la gaine.

La plasticité du coulis doit être telle qu'il s'écoule facilement dans les gaines (on mesure la plasticité au moyen du cône de Marsh en adoptant comme critère qu'un litre de coulis doit s'écouler par l'orifice du cône en 15 à 25 secondes).

La pression d'injection du coulis dans les gaines est de l'ordre de 0,6 à 0,8 MPa à l'entrée de la gaine.

Outre le rôle de protection des armatures contre la corrosion, le coulis d'injection permet également une bonne adhérence entre les aciers et le béton. Ce rôle est primordial pour satisfaire aux calculs sinon, le comportement d'armatures de précontrainte non adhérentes est plus défavorable que celui des armatures adhérentes.

3. PROCÉDÉS DE PRÉCONTRAINTE PAR POST-TENSION

3.1. Généralités

Les sociétés détentrices des procédés de précontrainte peuvent intervenir sur le chantier :

- soit en tant que fournisseurs de plaques d'appui, plaques d'ancrages et clavettes et loueurs de vérins et de matériel d'injection. Les travaux de mise en place des gaines et des câbles, les opérations de mise en tension et d'injection sont réalisées par l'entrepreneur;
- soit en tant que sous-traitant global de toute fourniture, mise en place et injection de l'ensemble de la précontrainte du chantier;
- soit toute solution intermédiaire.

On notera que les sociétés spécialistes de précontrainte ne souhaitent pas poser les gaines lors de la mise en place des cages d'armatures passives. Cette opération se déroulant à une époque différente des opérations suivantes crée des perturbations dans le planning de travail et des interférences avec la société chargée de poser les armatures passives qui peut être soit l'entrepreneur lui-même, soit un autre sous-traitant.

Les études ne sont pas réalisées par l'exploitant du procédé mais par l'entrepreneur ou tout autre bureau d'études spécialisé dans les problèmes de béton précontraint.

Les procédés de précontraintes font l'objet de brevet et sont fabriqués par leurs exploitants. Les principaux procédés sont :

- le système Freyssinet exploité par la STUP (Société Technique d'utilisation de la Précontrainte) ou Freyssinet-International, 66, route de la Reine, 92100 Boulogne-Billancourt, tél. : (1) 604.91.40;
- le système PAC, exploité par la SFP (Société Française pour la Précontrainte), 2, route de Longjumeau, 91380 Chilly-Mazarin, tél. : (1) 920.81.25;
- le système BBR-B exploité par la CIPEC, 29, avenue Gustave-Mesureur, 78170 La Celle-Saint-Cloud, tél. : (1) 918.06.54;
- le système CCL exploité par CIPEC;
- le système VSL (Losinger), 154, rue du Vieux-Pont-de-Sèvres, 92100 Boulogne-Billancourt, tél. : (1) 621.49.42.

3.2. Procédé Freyssinet

Le procédé Freyssinet utilise des câbles composés de fils Ø 5, Ø 7 et Ø 8 et de torons T 13 de 12,7 mm (1/2 pouce) et T 15 de 15,2 mm (0,6 pouce)*.

Les forces de rupture nominales varient par étapes de 18,7 t pour un monotoron T 13 à 1 028 t pour un câble de 55 T 13 (0,183 MN à 10 MN).

* T étant l'initiale du mot toron.

3.2.1. Les types de câbles

Tableau 7.1. Caractéristiques nominales des aciers

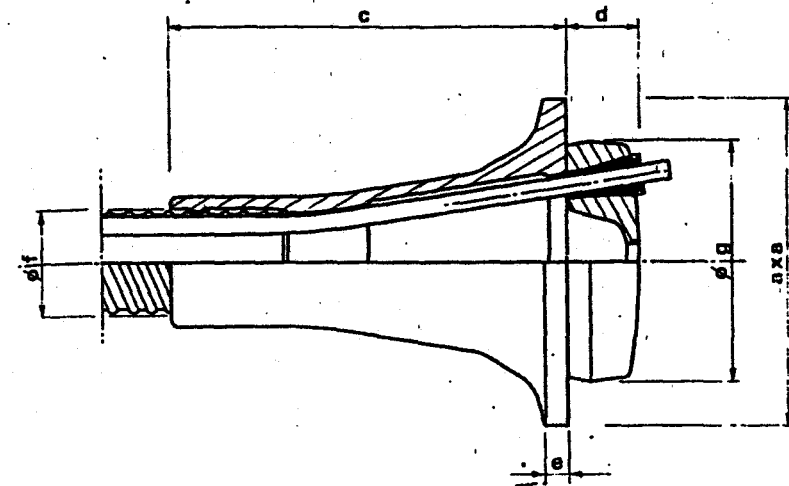
FILS			TORONS		
Diamètre (Ø mm)	Résistance (MPa)	Poids (kg/m)	Diamètre (mm) (pouce)	Résistance (kN)	Poids (kg/m)
5	1 580	0,154	12,7 (0,5")	183	0,758
7	1 485	0,302			
8	1 495	0,395	15,2 (0,6")	260	1,124

Tableau 7.2. Systèmes multifils (12 fils)

Type du câble	Section du câble (mm ²)	Force de rupture nominale (kN)	Poids du câble (kg/m)	Diamètre intérieur de la gaine (mm)
12 F 5	235	372	1,9	30
12 F 7	461	686	3,7	40
12 F 8	603	902	4,8	45

Tableau 7.3. Système Torons T 13 - T 15

Par pas de 1 toron	Section de câble (mm ²)	Poids du câble (kg/m)	Force de rupture nominale (kN)	Force maximale sous ancrage (kN)
1 T 13 à 55 T 13	93 5 115	0,76 41,7	173,6 9 548	146,3 7 829
1 T 15 à 37 T 15	139 5 143	1,12 41,6	252,1 9 327	241,3 7 648

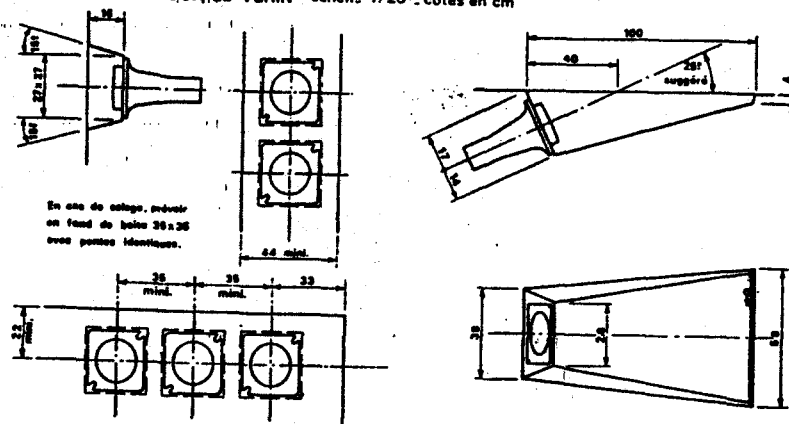


Ø f : diamètre maximum extérieur de la gaine

Cotes en mm

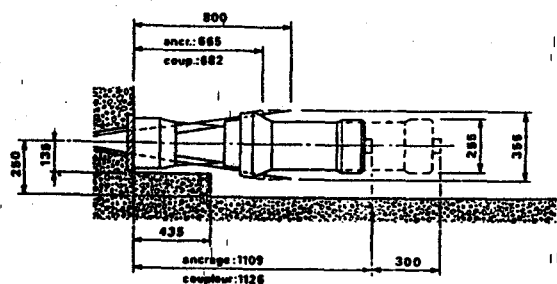
Ancrage	a	b	c	c'	d	e	f	g		
12 V 13	220		267		49	20	70 ^a	162		
12 V 15	260		354		49	25	80 ^a	185		

Fig. 7-3. Ancrages pour câbles 12T13 - 12T15

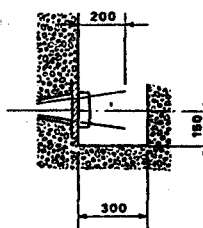
RESERVATIONS POUR LE VERIN échelle 1/20^e, cotes en cm

ENCOMBREMENT DU VERIN V300

cotes en mm - sans échelle



ANCRAGE AUTOBLOQUE



CARACTERISTIQUES DU VERIN V300

• Force du vérin	304 t
• Course maxi de tension	300 mm
• Section de tension	426 cm ²
• Section de blocage	113 cm ²
• Section de retour	119,7 cm ²
• Pression maxi de tension	700 bars
• Pression maxi de blocage	400 bars
• Pression maxi de retour	200 bars
• Poids du vérin équipé	265 kg

CABLE 12T15

Composé de 12 torons
de diamètre 15 mm
Chaque toron comporte
• 6 fils de diamètre 5
• 1 fil de diamètre 5,2
Aire de la section 1668 mm²
Poids au ml (sans gaine) 13,5 kg

Fig. 7-4. Unité 12T15

3.2.2. Données nécessaires aux calculs

• Coefficient de frottement angulaire

Tableau 7.4. Valeurs moyennes de f et ϕ pour des câbles composés de torons et de fils ronds lisses trefilés

Nature de la gaine	Valeurs observées	Valeurs conseillées	
		Câble huilé	Câble sec non oxydé
Feuillard agrafé	$f : 0,17 \text{ à } 0,25$ $\phi : 0,0016 \text{ à } 0,0040$	$f : 0,18$ $\phi : 0,0018$	$f : 0,20$ $\phi : 0,0020$
Tube lisse	$f : 0,15 \text{ à } 0,20$ $\phi : 0,0010 \text{ à } 0,0020$	$f : 0,16$ $\phi : 0,0010$ $\phi : 0,0015$	$f : 0,18$ pour tubes rectilignes pour tubes courbes

• Glissement à l'ancrage g

Les pertes d'allongements g (recul à l'ancrage) sont de 6 à 8 mm lors de la mise en tension pour les torons. Il est possible toutefois d'ajuster la tension à la valeur voulue en utilisant un bloc d'ancrage extérieur et une bague de calage. L'auteur du projet décide de préconiser cette opération si l'abaissement de la tension à l'extrémité du câble a un effet sur les sections d'acier déterminantes de l'ouvrage.

3.2.3. Autres productions

Freyssinet-International a développé également :

— Des haubans à torons parallèles pour ponts haubanés de puissances 9,6 MN pour le 37 H 15 à 23,64 MN à la rupture pour le 91 H 15 ;

— Des vérins plats (fig. 7-5) : ce procédé a été inventé en 1934 par Eugène Freyssinet. Ils servent à résoudre de nombreux problèmes tels que :

- précontrainte entre culées,
- réglage des réactions d'appuis,
- mise en charge des structures,
- opérations de levage,
- mesure des efforts,
- changement des appareils d'appui...

Ils sont constitués de tôle mince de forme généralement circulaire.

Leur faible amplitude de levage peut être compensée par la superposition de plusieurs vérins. Ils sont gonflés à l'huile ou à l'eau pour usage temporaire, ou bien au mortier de ciment, ou résine époxy pour utilisation de façon permanente. Les pressions hydrauliques peuvent atteindre 15 MPa.

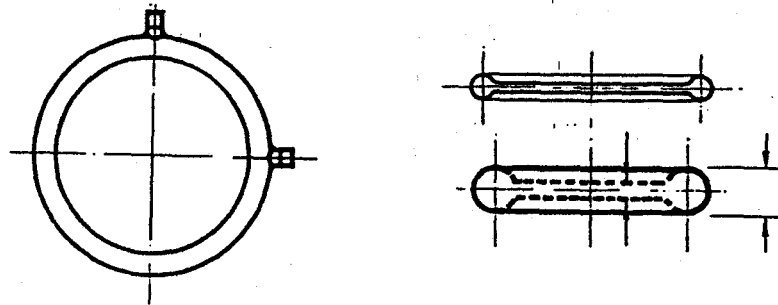


Fig. 7-5. Vérins plats

Diamètre	mm	70	120	150	220	250	270	300
Force max. approx. (1)	T kN	3 29,4	10 98	17 167	40 392	50 490	60 588	80 784
Ouverture maximum	mm	15	25	25	25	25	25	25
Diamètre	mm	350	420	480	600	750	870	920
Force max. approx. (1)	T kN	110 1 078	170 1 666	240 2 352	370 3 626	600 5 880	830 8 134	910 8 918
Ouverture maximum	mm	25	25	25	35	35	35	35

(1) Avec une pression de 150 kg/cm².

3.3. Procédé PAC

Le procédé PAC utilise des câbles composés de torons T 13 ou T 15.

3.3.1. Les câbles

De 2 T 15 à 12 T 15 plus le 19 T 15 en acier de classe 1770-TBR.

3.3.2. Les ancrages (fig. 7-6)

• Les ancrages

Les ancrages dits actifs et morts sont de constitution identique.

Chaque ancrage comporte une *tête d'ancrage* en acier, de forme ronde, percée de trous coniques servant à ancrer les torons au moyen de clavettes 3 brins de 45 mm de longueur. La tête d'ancrage prend appui sur la *plaque d'appui* noyée dans le béton.

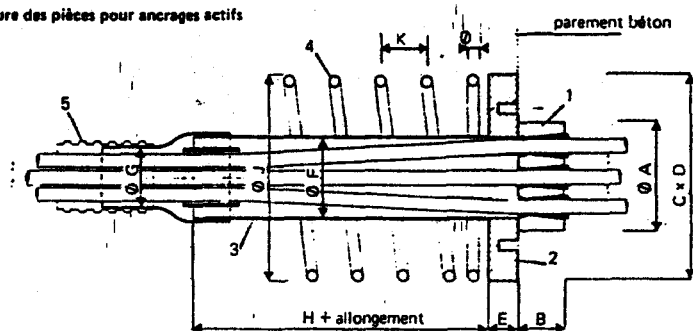
Tableau 7.5. Unités courantes en toron Ø 15,2 mm

Unités, nombre de torons			2	3	4	5	6	7
Force maximum sous ancrage	T		43,7	65,5	87,4	109,2	131,1	153,0
	kN		428	642	857	1 071	1 285	1 500
Force de rupture	T		51,4	77,1	102,8	128,5	154,3	180,0
	kN		504	756	1 008	1 260	1 513	1 765
Section nominale	mm ²		278	417	556	695	834	973
Poids au ml	kg		2,24	3,36	4,48	5,60	6,72	7,84
Câbles enfilés sur chantier	diamètre des gaines en mm	ext. int.	53 46	53 46	62 55	71 64	71 64	71 64
	Volume de coulis en litre/ml		2,00	2,13	1,99	2,72	2,58	2,45
Câbles enfilés en usine	diamètre des gaines en mm	ext. int.	47 40	53 46	53 46	62 55	62 55	62 55
	Volume de coulis en litre/ml		0,98	1,24	1,11	1,70	1,55	1,41
Unités, nombre de torons			8	9	10	11	12	19
Force maximum sous ancrage	T		174,8	196,7	218,5	240,4	262,2	400,6
	kN		1 714	1 928	2 142	2 356	2 570	3 928
Force de rupture	T		205,7	231,4	257,1	282,8	308,6	488,6
	kN		2 017	2 269	2 521	2 773	3 025	4 790
Section nominale	mm ²		1 112	1 251	1 390	1 520	1 668	2 641
Poids au ml	kg		8,96	10,08	11,20	12,32	13,44	21,28
Câbles enfilés sur chantier	diamètre des gaines en mm	ext. int.	75 68	79 74	79 74	79 74	79 74	105 100
	Volume de coulis en litre/ml		2,73	2,60	3,39	3,24	3,11	5,50
Câbles enfilés en usine	diamètre des gaines en mm	ext. int.	71 64	71 64	75 68	75 68	75 68	
	Volume de coulis en litre/ml		2,11	1,97	2,24	2,10	1,96	

Les boîtes d'extrémité permettent l'épanouissement des torons depuis la bague de guidage jusqu'à la plaque d'ancrage.

Les boîtes d'extrémité, disposées à l'extrémité des gaines, sont des boîtes métalliques de section circulaire, en tube de 2 mm d'épaisseur.

Nomenclature des pièces pour ancrages actifs



	1 tête d'ancrage		2 plaque d'appui			3 boîte d'extrémité			4 frette hélicoïdale			5 gaine
cotes en mm	Ø A	B	C	D	E	Ø F	Ø G	H	Ø I	Ø J	K	Ø int.
2 T 15	85	45	140	140	20	65	45	200	10	140	50	46
3 T 15												
4 T 15	90	45	160	160	20	65	54	200	10	160	50	55
5/6/7 T 15	115	50	220	220	30	85	63	320	12	220	50	64
8 T 15	150	50	240	240	30	120	67	450	12	240	50	68
9 T 15												
10 T 15	150	55	260	260	30	120	73	450	12	260	50	74
11 T 15												
12 T 15	150	55	280	280	30	120	73	450	12	280	50	74
19 T 15	190	65	380	380	40	138	97	950	12	380	50	100

Fig. 7-6. Système PAC

• Les gaines

Les câbles sont enfilés dans des tubes minces lisses ou dans des gaines en feuillard ondulé.

L'épaisseur du feuillard est de 5/10 mm quand les câbles sont enfilés sur le chantier.

L'épaisseur du feuillard est de 3/10 mm lorsque les câbles sont fabriqués en usine et livrés gainés sur le chantier.

Les diamètres des gaines sont donnés dans le tableau des unités.

Les jonctions des gaines sont assurées bout à bout par des manchons qui sont des éléments de gaines de diamètre immédiatement supérieur à celui de la gaine à raccorder. L'étanchéité du raccord est obtenue par un ruban adhésif.

• Tracé des câbles

En général, les rayons de courbure utilisés pour le tracé des câbles ne sont pas inférieurs à 100 fois le diamètre nominal de la gaine.

3.2.3. Dispositions constructives (fig. 7-7)

Résistance du béton sous les ancrages et disposition des plaques d'appui.

unité PAC	résistance du béton sous ancrage bars	A cm	B cm	C cm	D cm	unité PAC	résistance du béton sous ancrage bars	A cm	B cm	C cm	D cm
2 T 15	300	14	14	4	6	8 T 15	300	24	24	6	8
3 T 15	250	14	14	6	8		250	24	24	8	10
	220	14	14	7	10		220	24	24	9	12
	220	14	20	5	6		220	24	34	6	8
4 T 15	300	16	16	4	6	9 T 15	300	26	26	6	10
	250	16	16	6	8		250	26	26	8	12
	220	16	16	7	10	10 T 15	220	26	26	9	14
	220	16	24	5	6		220	26	38	5	10
5 T 15	300	22	22	5	6	11 T 15	300	28	28	6	12
6 T 15	250	22	22	7	8		250	28	28	8	14
	220	22	22	8	10	12 T 15	220	28	28	9	16
	220	22	30	6	6		220	28	42	6	12
						19 T 15	300	38	38	7	10

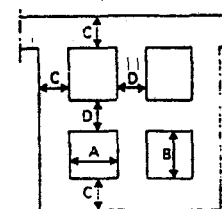


Fig. 7-7.

3.3.4. Données nécessaires aux calculs

- *Frottement* : les valeurs moyennes de f et φ sont :

$$f = 0,17 \text{ rd}^{-1} \text{ et } \varphi = 0,0016 \text{ m}^{-1}$$

Pour les câbles huilés, ces valeurs peuvent être diminuées de 15%.

- *Glissement à l'ancrage* :

$$g = 5 \text{ mm}$$

3.3.5. Encombrement des vérins (fig. 7-8)

vérin	course mm	force T	dimensions mm							encombrement mm				poids kg
			D	d	e	f	g	i	J	G	K	S	N	
100 T	170	100	230	190	250	120	320	565	735	180	1230	500	40	120
200 T	215	200	330	240	550	160	440	670	885	240	1300	540	50	250
300 T	215	300	400	280	585	215	515	700	915	275	1500	580	60	360
400 T	270	400	420	310	600	225	530	850	1120	285	1500	580	70	550

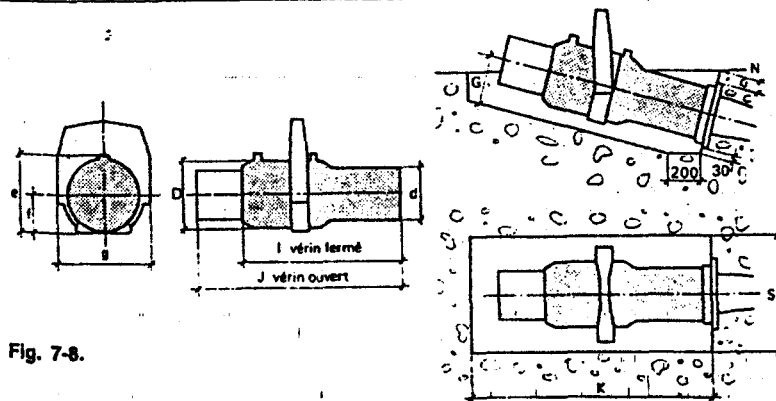


Fig. 7-8.

3.4. Procédé BBR-B

Le procédé BBR-B créé à partir d'un procédé Boussiron de 1952 et d'un procédé suisse BBR-V est utilisé sous sa forme actuelle depuis 1954.

3.4.1. Les câbles

Il utilise des câbles multifils de 7 mm de diamètre, composés en câbles standards de 9, 14, 18, 22, 30, 54 et 84 $\varnothing$ 7.

Toute force intermédiaire peut être obtenue en supprimant un certain nombre de fils sur les ancrages standards.

Chaque fil est terminé à ses extrémités par une tête ou bouton forgé à froid*. Enfilé dans un trou réservé dans les pièces d'ancrage, il est de ce fait ancré individuellement et indépendamment des autres fils.

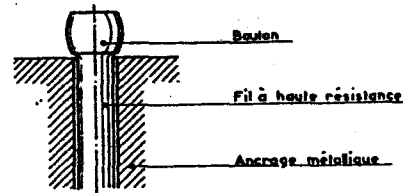


Fig. 7-9.

3.4.2. Caractéristiques des câbles

$$f_{\text{prg}} = 1\,670 \text{ MPa.}$$

	9 $\varnothing$ 7	14 $\varnothing$ 7	18 $\varnothing$ 7	22 $\varnothing$ 7	30 $\varnothing$ 7	54 $\varnothing$ 7	84 $\varnothing$ 7
Section nominale (mm ²).....	346	539	693	847	1 155	2 078	3 233
Poids nominal (kg/m)	2,72	4,23	5,44	6,65	9,06	16,37	25,38
Force de rupture nominale (kN).....	580	903	1 162	1 420	1 936	3 485	5 421
Force maximale sous ancrage (kN)...	494	768	987	1 206	1 645	2 961	4 454

3.4.3. Données pour les calculs

- Coefficient de frottement

* A froid pour ne pas transformer un acier à haute limite élastique en acier doux.

Tableau 7.6

Composition du câble	Valeurs moyennes
Câbles 55 à 84 $\varnothing$ 7.....	$f = 0,18$ $\varphi = 0,0015$
Câbles 30 à 54 $\varnothing$ 7.....	$f = 0,18$ $\varphi = 0,0015$
Câbles 22 $\varnothing$ 7.....	$f = 0,19$ $\varphi = 0,0015$
Câbles 18 $\varnothing$ 7.....	$f = 0,20$ $\varphi = 0,0016$
Câbles 14 $\varnothing$ 7.....	$f = 0,215$ $\varphi = 0,0019$
Câbles 9 $\varnothing$ 7.....	$f = 0,23$ $\varphi = 0,0023$

- Glissement à l'ancrage

Le glissement à l'ancrage, du fait de la nature des extrémités (boutons) est inférieur à 1 mm.

3.5. Procédé CCL

3.5.1. Les câbles

Le procédé CCL utilise des câbles à torons parallèles T13 ou T15 de 4T13 372 mm² à 19T15 2 641 mm².

Tableau 7.8

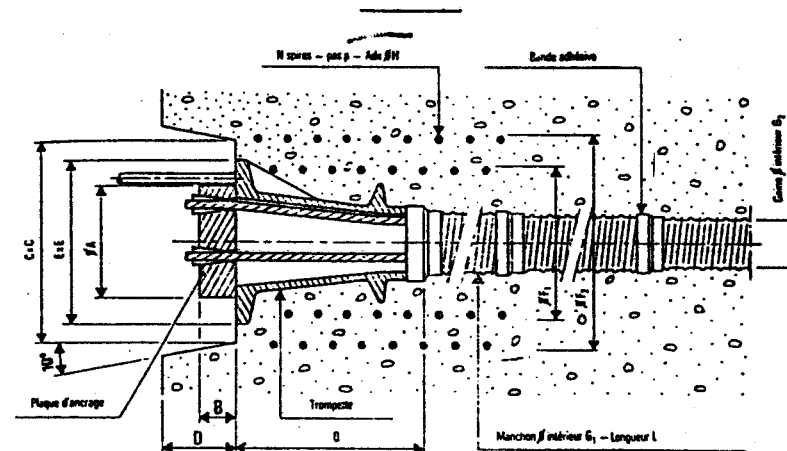
Diamètre des gaines.....	12 T 13	4 T 15	7 T 15	12 T 15
Câble façonné en usine	55	45	55	70
Câble enfilé sur le chantier	60	50	60	75

Tableau 7.7. Caractéristiques mécaniques des unités agréées

Unité	4 T 13	7 T 13	12 T 13	19 T 13	25 T 13	31 T 13	4 T 15	7 T 15	12 T 15	19 T 15
Section (mm ²)	372	651	1 116	1 767	2 325	2 883	556	973	1 668	2 641
Constitution du câble (Ø en mm)	4 tor. de Ø 12,4	7 tor. de Ø 12,4	12 tor. de Ø 12,4	19 tor. de Ø 12,4	25 tor. de Ø 12,4	31 tor. de Ø 12,4	4 tor. de Ø 15,2	7 tor. de Ø 15,2	12 tor. de Ø 15,2	19 tor. de Ø 15,2
Force maximale sous l'ancrage à la mise en tension kN (t)....	585 (59,7)	1 024 (104,4)	1 756 (179,0)	2 780 (283,4)	3 559 (362,9)	4 413 (449,9)	857 (87,4)	1 500 (153,0)	2 572 (262,2)	3 928 (400,4)
Contrainte initiale max. corres- pondante hectobar (kg/mm ²)...	157,3 (160,4)	157,3 (160,4)	157,3 (160,4)	157,3 (160,4)	153,1 (156,1)	153,1 (156,1)	154,2 (157,2)	154,2 (157,2)	154,2 (157,2)	148,7 (151,6)
Effort de rupture nominal de l'unité muni de ses ancrages: kN (t)	694 (70,8)	1 215 (123,9)	2 083 (212,4)	3 298 (336,3)	4 340 (442,5)	5 382 (548,7)	1 008 (102,8)	1 765 (179,9)	3 025 (308,4)	4 790 (488,3)
Contrainte de rupture corres- pondante hectobar (kg/mm ²)...	186,7 (190,3)	186,7 (190,3)	186,7 (190,3)	186,7 (190,3)	186,7 (190,3)	186,7 (190,3)	181,4 (184,9)	181,4 (184,9)	181,4 (184,9)	181,4 (184,9)

(*) Les unités couramment employées sont 12 T 13, 4 T 15, 7 T 15 et 12 T 15 pour les ouvrages d'art, et 19 T 15 pour le génie nucléaire. Les autres unités sont d'un emploi moins fréquent.

ANCRAGES MOBILES ET FIXES ACCESSIBLES POUR CABLES T 15



Désignation	4 T 15	7 T 15	12 T 15	19 T 15	37 T 15
A	130	150	200	250	335
B	60	55	65	85	120
C	240	265	320	400	600
D	105	105	115	135	170
E	175	215	265	335	445
G	240	250	360	520	645
F1	/	200	280	330	450
F2	190	280	360	450	600
G1	54	76	80	100	150
Façonage usine G2 Ø1	45	55	70	90	130
Enfilage chantier	50	60	80	95	140
L	300	500	300	300	500
H	10	10	12	12	16
N	9	8	10	14	10
pas p	30	40	45	35	60

Fig. 7-10. Ancrages mobiles et fixes accessibles pour câbles T15

(cotes en mm)

3.5.2. Données nécessaires aux calculs

• Frottement

$$f = 0,17 \text{ et } \varphi = 0,0016$$

Pour les câbles huilés ou graissés, les coefficients f et φ sont diminués de 10 à 15 %.

• Glissement à l'ancrage

$$g \leq 5 \text{ mm}$$

3.6. Procédé VSL (ou système Losinger)

3.6.1. Les types de câbles

Le procédé VSL utilise des câbles composés de 1 à 55 torons de 13 mm (93 mm² de symbole 5-1 à 5-55) et de 1 à 37 torons de 15 mm (139 mm² de symbole 6-1 à 6-37).

Les ancrages sont constitués d'une plaque d'appui généralement carrée et d'une tête d'ancrage cylindrique.

3.6.2. Données nécessaires au calcul

• Coefficient de frottement

Les valeurs moyennes retenues sont:

$$f = 0,17 \text{ rd}^{-1} \text{ et } \varphi = 0,0016 \text{ m}^{-1}$$

Ces valeurs peuvent être diminuées pour des câbles huilés ou graissés.

• Glissement à l'ancrage

Le recul à l'ancrage lors du blocage des clavettes est de 6 mm.

3.7. Fascicule 65 du CCTG*

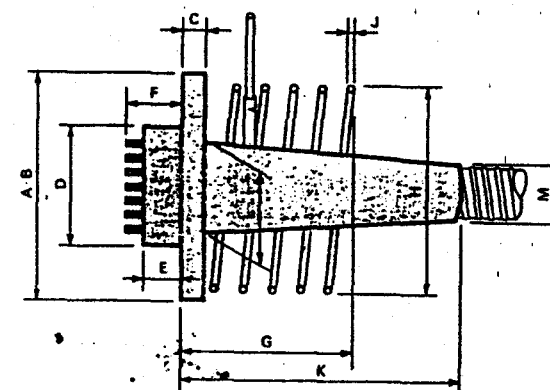
Ce document, dans son annexe T34-1, donne un certain nombre de prescriptions minimales concernant les armatures de précontrainte, les conduits et leurs accessoires.

3.7.1. Conduits

Ils peuvent être:

- métalliques rigides en feuillards d'au moins 0,4 mm d'épaisseur;
- métalliques enroulables en feuillards minces de 0,2 à 0,4 mm d'épaisseur pour les câbles prêts à l'emploi et intérieurs au béton (cas très peu fréquent);

* Cahier de Clauses Techniques Générales des Marchés de Travaux de l'Etat.



PLAQUES EN ACIER

Pour torons 0,5" 93 mm²

	5-1	5-3	5-7	5-12	5-19	5-22	5-31
A	80	130	190	240	310	350	400
B	80	130	190	270	310	250	400
C	15	15	20	30	40	55	65
D ϕ	42	80	110	150	180	200	230
E	45	60	60	60	75	85	100
F	75	90	90	90	105	115	130
G	-	203	282	346	358	373	383
H ϕ	-	130	190	260	370	400	440
J ϕ	-	8	12	16	18	18	18
K	70	300	230	280	440	565	775
L ϕ ext	35	50	74	104	135	150	172
M ϕ ext	35	50	60	77	92	97	112

Dimensions en mm

PLAQUES EN FONTE SPHEROIDALE

	5-22	5-31	5-55
A	360	400	585
B	360	400	585
C	75	80	130
D ϕ	200	230	320
E	85	100	150
F	115	130	180
G	360	360	450
H ϕ	400	440	660
J ϕ	18	18	25
K	565	790	920
L ϕ ext	150	172	230
M ϕ ext	97	112	155

Pour torons 0,6" 139 mm²

	6-1	6-2	6-3	6-4	6-7	6-12
A	85	130	155	180	235	310
B	85	130	155	180	235	310
C	15	15	20	25	35	45
D ϕ	53	80	85	110	132	170
E	50	60	60	60	70	80
F	80	90	90	90	100	110
G	-	200	255	260	300	360
H ϕ	-	130	155	180	235	370
J ϕ	-	8	10	12	14	18
K	135	300	165	250	340	600
L ϕ ext	35	50	56	65	84	118
M ϕ ext	35	50	52	52	67	87

Dimensions en mm

	6-19	6-31	6-37
A	400	510	585
B	400	510	585
C	80	110	130
D ϕ	220	270	298
E	100	130	150
F	130	180	180
G	360	415	450
H ϕ	440	580	660
J ϕ	18	22	25
K	895	900	1160
L ϕ ext	150	182	215
M ϕ ext	107	135	145

Fig. 7-11. Ancrage mobile VSL type E

- métalliques en tube mince de 2 à 3 mm d'épaisseur pour armatures à forte courbure ou précontrainte extérieure;
- plastiques d'au moins 3 mm d'épaisseur, sauf pour les monotorons gainés, gainés où l'épaisseur de la gaine est voisine de 1 mm.

La section intérieure du conduit doit être au moins égale à 2,5 fois la section de l'armature. Cette prescription permet de s'assurer d'une bonne injection du coulis.

Le diamètre extérieur des gaines rigides est égal au diamètre intérieur majoré de 8 mm environ.

3.7.2. Rayon de courbure des conduits

Le rayon de courbure des conduits doit être:

- supérieur à 100 fois le diamètre intérieur de la gaine pour les gaines rigides en feuillard;
- supérieur à 3 m pour les gaines enroulables et les tubes en acier.

3.7.3. Calage et arrimage

Les conduits sont calés et arrimés pour éviter le festonnage, des supports de gaine sont disposés tous les 50 cm à 1 m.

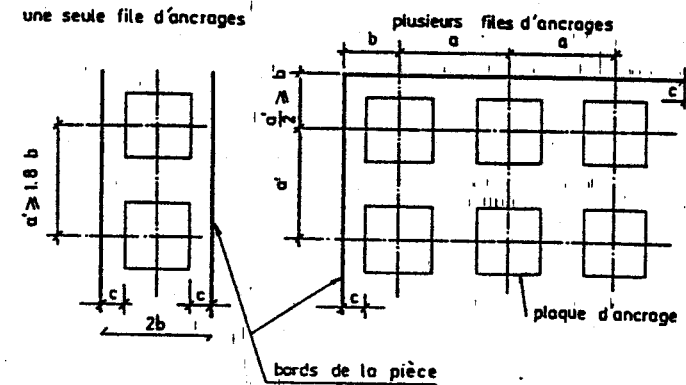
3.7.4. Dispositifs accessoires

Les événements, pipes d'injection, purges... doivent avoir un diamètre intérieur minimum donné dans le tableau 7.9.

Tableau 7.9

Diamètres intérieurs en mm	Armatures constituées de torons		Pipes d'injection	Events	Purges
	12,5 ou 12,9	15,2 ou 15,7			
Nombre de torons	7	5	15	15	15
	12	8	20	15	15
	19	12	26	20	15
	31	19	33	26	20
	55	37	40	33	26

3.7.5. Enrobage latéral et entr'axe des ancrages



pour { une seule file d'ancrages: $a' \geq 1,8b$
plusieurs files d'ancrages: $\frac{a'}{2} \geq b$ et $a \times a' \geq 3,2b^2$

Force à l'ancrage à la mise en tension (kN).....	< 500	500 à 1 500	1 500 à 3 000	3 000 à 4 000	> 4 000
Enrobage minimal théorique c (cm).....	3	5	7	8	10

Fig. 7-12. Enrobage latéral et entr'axe des ancrages

4. QUALITÉS ATTENDUES DES DIFFÉRENTS ÉLÉMENTS PARTICIPANT A LA MISE EN ŒUVRE DE LA PRÉCONTRAINTÉ

• Les aciers:

- acier à très haute limite élastique pour ne pas trop subir l'influence des pertes de précontrainte;
- stockés dans des endroits à l'abri de l'eau, trempés dans l'huile avant stockage pour éviter la corrosion.

• Les gaines:

- en feuillards d'acier mince, rigides, raccordables par vissage de manchon, assurant un faible frottement sur les câbles, une bonne adhérence du béton extérieur et du coulis intérieur;
- en tube métallique pour les parties très sollicitées (faible rayon de courbure).

ou en forme de trompette métallique pour permettre un épanouissement des fils ou torons près des appuis pour fixation dans la plaque d'ancrage;

— en plastique plus rarement, injecté ou rempli de graisse; solution adoptées pour les monotrons dans les éléments de faible épaisseur (dalle, coque...).

• *Les plaques d'appui (ou plaques d'extrémités)*

Elles doivent:

- assurer une bonne répartition de l'effort concentré de l'ancrage sur le béton;
- posséder un trou pour permettre l'injection de coulis dans la gaine.

• *Les plaques d'ancrage*

Elles doivent:

- servir d'élément de blocage du câble au moyen de clavette (ou de bouton d'ancrage ou toute autre dispositif);
- posséder un trou pour permettre l'injection de coulis dans la gaine;
- résister à des efforts très localisés de chaque toron ou fil (0,21 MN, près de 22 tonnes pour un toron T15).

On distingue:

- les ancrages actifs par lesquels s'effectuent la mise en tension des câbles;
- les ancrages passifs ou ancrages morts correspondant à une extrémité du câble non soumise à la mise en tension pour les câbles tendus par une seule extrémité;
- les coupleurs qui permettent un accouplement de deux câbles trop courts pour être de toute longueur, ou pour assurer la continuité d'un câble pour un élément de grande longueur coulé en plusieurs phases successives (ponts multitravées).

• *Les vérins*

Ils doivent:

- servir à la mise en tension des câbles;
- être aussi légers que possible (d'où une pression d'huile élevée jusqu'à 80 MPa).

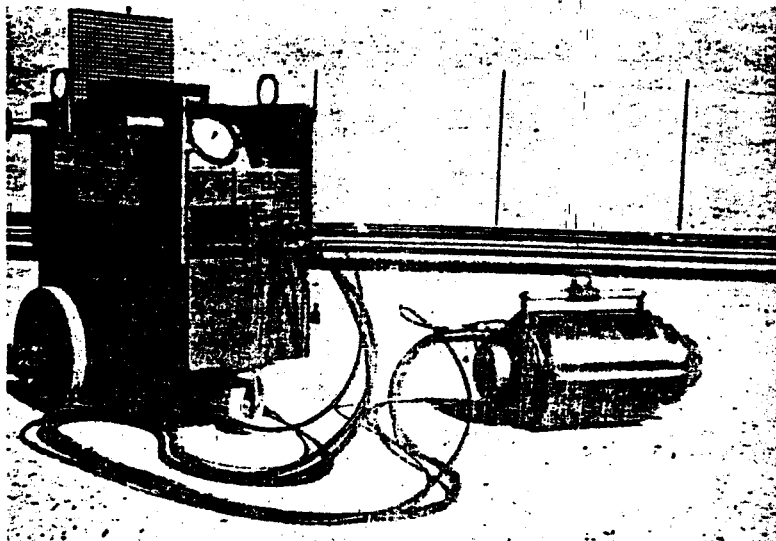
• *Les pompes hydrauliques*

Elles doivent:

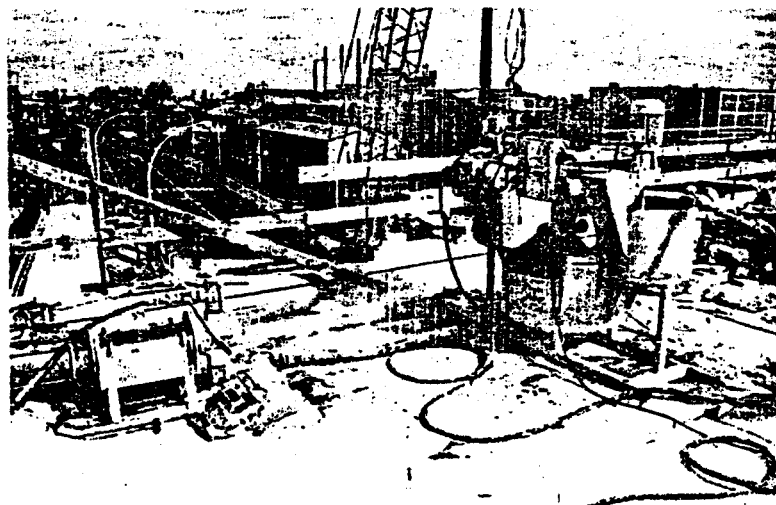
- fournir la pression nécessaire au fonctionnement du vérin;
- être étalonnées régulièrement pour s'assurer de la validité des pressions mesurées.

Tableau 7.10. Forces utiles de précontrainte ($\approx 0,6 F_{pg}$)

Force utile (kN) ...	100	200	300	400	500	600	700	800
Force de rupture (kN) ...	160	330	500	670	830	1 000	1 170	1 330
Freyssinet	1 T 13 1 T 15	12 Ø 5 2 T 13	3 T 13 2 T 15	12 Ø 7 4 T 13 3 T 15	5 T 13	12 Ø 8 6 T 13 4 T 15	7 T 13 5 T 15	
PAC et CCL	1 T 13 1 T 15	2 T 13	3 T 13 2 T 15	4 T 13 3 T 15	5 T 13	6 T 13 4 T 15	7 T 13 5 T 15	8 T 13
BRR-B	3 Ø 7	6 Ø 7	9 Ø 7	12 Ø 7	15 Ø 7	18 Ø 7	20 Ø 7	23 Ø 7
Dywidag	Ø 15,1 Ø 18,6		Ø 26 Ø 26,5		Ø 32 Ø 32,6			
VSL	5-1 6-1	5-2	5-3 6-1	5-4 6-3	5-5	5-6 6-4	5-7 6-5	5-8
Force utile (kN)		900	1 000	2 000	3 000	5 000	8 000	10 000
Force de rupture (kN)		1 500	1 670	3 330	5 000	8 330	13 300	16 600
Freyssinet		9 T 13 6 T 15	10 T 13 7 T 15	20 T 13 14 T 15	30 T 13 20 T 15	50 T 13 33 T 15	55 T 15	
PAC et CCL		9 T 13 6 T 15	10 T 13 7 T 15	14 T 15				
BRR-B		26 Ø 7	29 Ø 7	58 Ø 7	84 Ø 7			
Dywidag								
VSL		5-9 6-6	5-10 6-7	5-20 6-14	5-30 6-20	5-50 6-33	6-55	



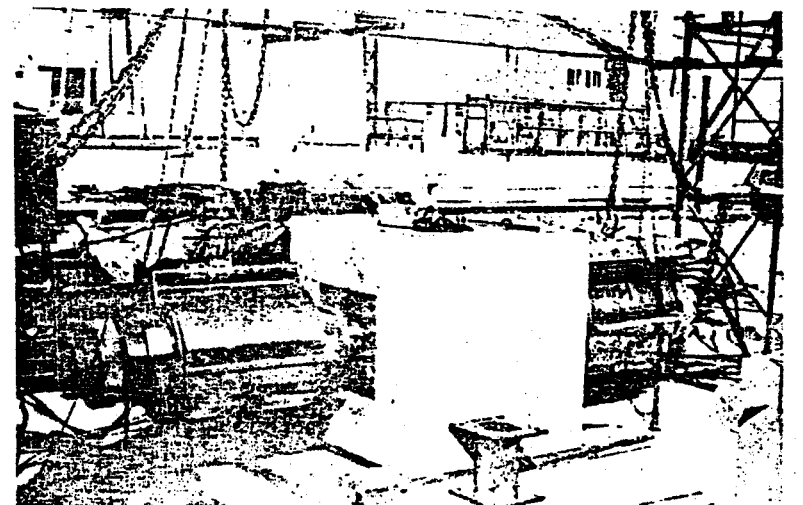
Pompe hydraulique et vérin 8 T 15 (photo S.F.P.)



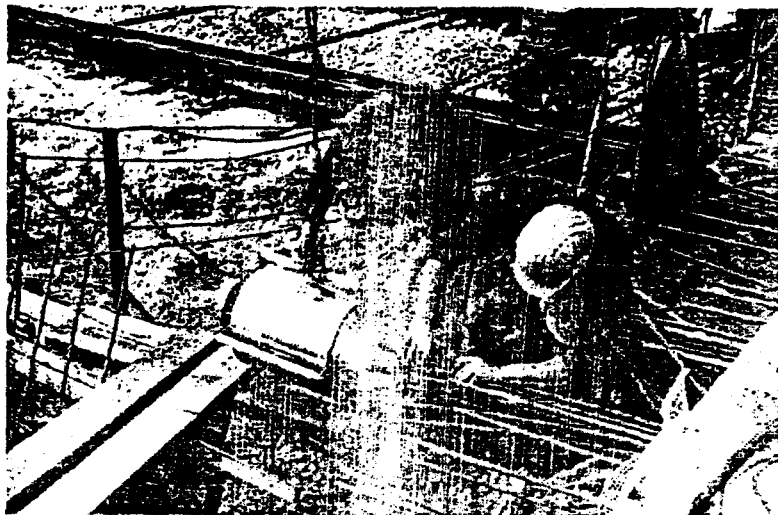
Malaxeur et pompe d'injection de coulis (photo S.F.P.)



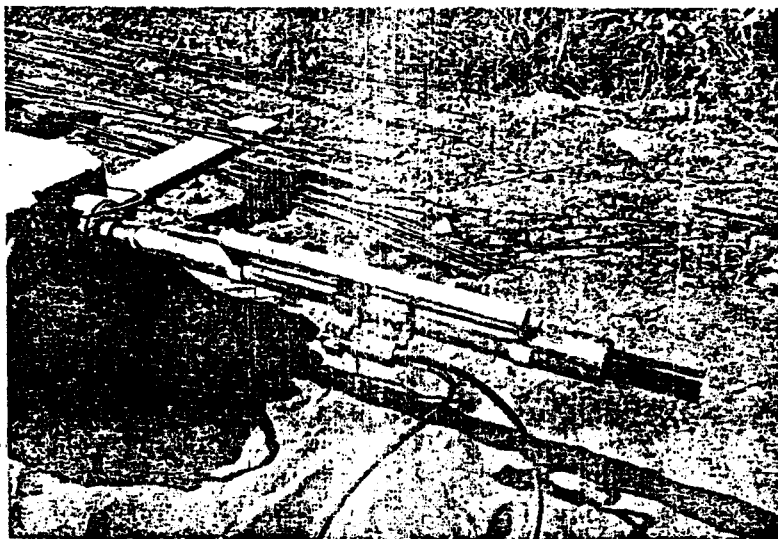
Ancrage monotoron T 15 noyé (photo S.F.P.)



Etalonnage de deux vérins (photo S.F.P.)



Enfilage de torons dans le vérin (photo S.F.P.)



Vérin monotoron T 13-T 15 (photo S.F.P.)

8

LES SOLLICITATIONS

1. GÉNÉRALITÉS

Les sollicitations sont les efforts ou moments, produits par les actions extérieures ou intérieures à l'élément étudié.

Nous distinguons le moment fléchissant et le moment de torsion, l'effort tranchant et l'effort normal.

Les actions peuvent être :

- permanentes ou peu variables dans le temps ;
- de précontrainte ;
- variables ;
- accidentelles.

Elles peuvent être dues au poids propre des éléments, aux surcharges, à la poussée de l'eau ou des terres, à un tassement d'appui, à la dilatation thermique, au retrait, au fluage.

Les sollicitations s'exercent sur les sections droites des éléments qui sont généralement perpendiculaires à la fibre moyenne. Elles sont déterminées à partir des actions, par les formules classiques de la « résistance des matériaux » pour les poutres isostatiques ou hyperstatiques, les portiques, les arcs, et plus difficilement pour des ouvrages comportant deux grandes dimensions par rapport à la troisième tels les plaques, dalles, coques, voiles...

2. ACTIONS

Les actions sont généralement définies dans le cahier des charges par des valeurs imposées ou par référence à un autre document. Par exemple à défaut de précision dans le cahier des charges :

• Les charges permanentes sont définies à partir des dimensions exactes des éléments, le volume ainsi trouvé étant multiplié par la masse spécifique du matériau: 1 t/m³ pour l'eau, 2,5 t/m³ pour le béton armé ou précontraint, 2,2 t/m³ pour le gros béton ou béton maigre, 1,5 à 2 t/m³ pour les sols, 7,85 t/m³ pour l'acier;

• Les charges d'exploitation sont définies dans le fascicule 61 titre II, appelé « Calcul et épreuves des ouvrages d'art » n° 72-21 bis, édité par le *Journal Officiel* pour les charges de circulation de voirie et de routes.

Sont ainsi définies les charges de camions (camions de 30 t), charges réparties de chaussée dite charges A(ℓ), charges concentrées dues aux roues, convois militaires, convois exceptionnels, chocs de bateaux ou de camions.

Pour les charges d'exploitation de bâtiments, on se reportera à la norme NF-P-06-001, qui donne pour chaque type de constructions (bureaux, habitations, hôpitaux, scolaires...) les charges unitaires au m² à prendre en compte ainsi que les dégressions possibles en fonction de la surface chargée et du nombre d'étages chargés;

• Les charges climatiques dues au vent et à la neige, sont définies dans un DTU intitulé « Règles NV 65 Neige et Vent 1965, révisées 67 » qui, en fonction de la localisation de l'ouvrage étudié, indique les charges au m² à prendre en compte.

Pour les ouvrages d'art, on se référera au fascicule 61 au titre II cité plus haut;

• Les effets du séisme sont donnés par un document intitulé « Règles PS69 » (parasismique 1969);

• Les actions dues à la température

En zone tempérée, on adoptera des variations globales de température variant de + 30 °C à - 40 °C.

Ces variations globales peuvent se décomposer en une partie rapidement variable d'amplitude ± 10 °C dont les effets sont calculés avec le module d'Young instantané E_i , et une partie lentement variable complémentaire dont les effets se calculent en tenant compte du fluage avec un module d'Young E_v pris conventionnellement égal à $E_i/3$.

3. COMBINAISONS D'ACTIONS

La détermination de la section d'un ouvrage ou sa vérification sera faite en recherchant les combinaisons d'action les plus défavorables. Pour l'application du règlement BPEL et compte tenu des combinaisons indiquées au chapitre 2, les coefficients multiplicateurs des différentes actions à prendre en compte peuvent être lues dans les tableaux ci-après:

1^{er} exemple

Tableau 8.1. Pont routier de 1^{re} classe

Combinaisons	Cas n°	Charges en cours d'exécution : Q	Charges permanentes défavorables : G _{max}	Charges permanentes favorables : G _{min}	Précontrainte : P	Charges A (ℓ) : Q	Charges B : Q	Vent : Q	Accidentelles : séisme, choc bateau, camion : F _A
ELS: pour le calcul des contraintes du béton et des aciers (précontrainte la plus défavorable: maxi P ₁ ou mini P ₂)									
Rares	1	1	1	1	P _d	—	—	1	—
	2	—	1	1	P _d	1,2	—	1	—
	3	—	1	1	P _d	—	1,2	1	—
	4	—	1	1	P _d	0	0	—	—
Fréquentes	5	—	1	1	P _d	0,72	—	0	—
	6	—	1	1	P _d	—	0,72	0	—
	7	—	1	1	P _d	0	0	0,2	—
Quasi permanentes	8	—	1	1	P _d	0	0	0	—
ELU: résistance									
Fondamentales	1	*	1,35	1	P _m	—	—	1,3	—
	2	**	1,35	1	P _m	—	—	1,5	—
	3	—	1,35	1	P _m	1,6	—	0	—
	4	—	1,35	1	P _m	—	1,6	0	—
	5	—	1,35	1	P _m	0	0	1,5	—
Accidentelles	6	—	1	1	P _m	0,642	—	0	1
	7	—	1	1	P _m	—	0,642	0	1
	8	—	1	1	P _m	0	0	0,2	1

* 1,35 pour les charges connues (cf. 1 du commentaire ci-après).

1,60 pour les engins de terrassement (cf. 2 du commentaire ci-après).

1,50 pour les autres charges.

** 1,3 × 1,00 respectivement suivant :

1,3 × 1,07.

1,3 × 1,00.

COMMENTAIRES

1. Les charges d'exécution connues en position et grandeurs sont traitées comme des charges permanentes avec les coefficients 1,35 ou 1,00.
2. Les charges correspondant aux engins de terrassement sont à multiplier par 1,2 en ELS et 1,07 en ELU (comme les charges routières sans caractères particulier: $1,6 = 1,5 \times 1,07$).
3. Le coefficient 0,642, vient de $0,6 \times 1,07$ (charges routières ELU).
4. Le coefficient 0,72 vient de $0,6 \times 1,2$ (d°).
5. La précontrainte P_d est égale à la plus défavorable des deux valeurs caractéristiques P_1 ou P_2 , à moins que le Cahier des Charges autorise de prendre P_m , la valeur probable.

2^e exemple

Tableau 8.2. Poutre de reprise PH RdCh de bâtiment supportant des planchers de bureaux (altitude = 45 m < 500 m; charges d'exploitation après dégression/charges avant dégression = $Q/Q = 0,835$)

Combinaisons	Cas n°	Charges en cours d'exécution : Q	Charges permanentes défavorables : G_{max}	Charges permanentes favorables : G_{min}	Précontrainte : P	Charges sur planchers : Q	Vent : Q	Neige : Q	Séisme : F_A
ELS: pour le calcul des contraintes du béton et des aciers									
Rares	1	1	1	1	P_d	—	1	0	—
	2	—	1	1	P_d	0,835	0,77	0	—
	3	—	1	1	P_d	ψ_0	1	0	—
	4	—	1	1	P_d	0,835	0	0,77	—
	5	—	1	1	P_d	ψ_0	0	1	—
Fréquentes	6	—	1	1	P_d	ψ_1	0	0	—
	7	—	1	1	P_d	ψ_2	0,2	0	—
	8	—	1	1	P_d	ψ_2	0	0,15	—
Quasi permanentes	9	—	1	1	P_d	ψ_2	0	0	—

Combinaisons	Cas n°	Charges en cours d'exécution : Q	Charges permanentes défavorables : G_{max}	Charges permanentes favorables : G_{min}	Précontrainte : P	Charges sur planchers : Q	Vent : Q	Neige : Q	Séisme : F_A
ELU: résistance									
Fondamentales	1	*	1,35	1	P_m	—	1,2	0	—
	2	*	1,35	1	P_m	—	0	1	—
	3	1,3	1,35	1	P_m	—	1,8	0	—
	4	1,3	1,35	1	P_m	—	0	1,5	—
	5	—	1,35	1	P_m	1,253	1	0	—
	6	—	1,35	1	P_m	1,253	0	1	—
	7	—	1,35	1	P_m	$1,3 \psi_0$	1,8	0	—
	8	—	1,35	1	P_m	$1,3 \psi_0$	0	1,5	—
Accidentelles	9	—	1	1	P_m	ψ_1	0	0	1
	10	—	1	1	P_m	ψ_2	0,24	0	1
	11	—	1	1	P_m	ψ_3	0	0,15	1

$$Q/Q = 0,835 \quad 1,253 = 1,5 \times 0,835$$

$$\begin{aligned} \text{Vent ELU} &= 1,2 \times \text{coeff.} = 1,2 \times 1 = 1,2 \\ &= 1,2 \times 1,5 = 1,8 \\ &= 1,2 \times 0,2 = 0,24 \end{aligned}$$

* Les charges de chantier sont affectées du coefficient 1,35 (ou 1,00) en ELU si elles sont connues en grandeur et en position. Les autres charges de chantier sont à multiplier par 1,50.

COMMENTAIRES

Les coefficients de ce tableau sont à appliquer à la charge Q (avant dégression)

1. Neige et vent sont incompatibles car l'altitude est inférieure à 500 m.
2. On remarquera que $0,77 \times 1,3 = 1,00$ en ELU.
3. Les coefficients ψ_0, ψ_1, ψ_2 valent : $\psi_0 = 0,77$
 $\psi_1 = 0,75$
 $\psi_2 = 0,65$
 or ψ_0 s'applique à la charge Q' après dégression des surcharges suivant la norme NF P 06-001, alors que ψ_1 et ψ_2 s'appliquent à la charge Q avant dégression.

On devra limiter $\psi_1 Q$ et $\psi_2 Q$ à $\psi_0 Q'$, soit :

$$\varphi_0 = \psi_0 \frac{Q'}{Q} \text{ au lieu de } \psi_0$$

$$\varphi_1 = \text{Min} \left(\psi_1; \psi_0 \frac{Q'}{Q} \right) \text{ au lieu de } \psi_1$$

$\varphi_2 = \text{Min} \left(\psi_2; \psi_0 \frac{Q'}{Q} \right)$ au lieu de ψ_2 , soit dans notre exemple les coefficients appliqués à Q :

$$\varphi_0 = 0,77 \times 0,835 = 0,643$$

$$\varphi_1 = \text{Min}(0,75; 0,77 \times 0,835) = 0,626$$

$$\varphi_2 = \text{Min}(0,65; 0,77 \times 0,835) = 0,626$$

Tableau 8.3. Chargements d'une poutre de bâtiment soumise aux seules charges permanentes et d'exploitation (Bureaux ou logements)

			Charges permanentes G	Charges d'exploitation Q
ELU	En service	Combinaison fondamentale	1,35/l	~ 1,50 φ
	En construction	Combinaison fondamentale	1,35/l	1,50
ELS	En service	Combinaison quasi-permanente	1	φ_2
		Combinaison fréquente	1	φ_1
		Combinaison rare	1	φ
	En construction	Combinaison quasi-permanente	1	0
		Combinaison rare	1	1

Coefficients à appliquer à Q , charges avant dégression avec :

$$\varphi = Q'/Q$$

$$\varphi_1 = \text{Min}(0,75; 0,77 \varphi)$$

$$\varphi_2 = \text{Min}(0,65; 0,77 \varphi)$$

$$Q' = \text{charges avant dégression, } Q'' = \text{charges après dégression.}$$

Pour remplir les tableaux précédents, on pourra s'aider de l'aide-mémoire suivant rappelant les coefficients à prendre en compte dans les combinaisons.

Combinaisons	Action de base	Actions d'accompagnement	Remarques
ELS : rares	1	ψ_0	Bâtiment : remplacer ψ_1 par φ_1
fréq.	ψ_1	ψ_2	
QP	ψ_2	ψ_2	
ELU : fond.	γ_{Q1}	1,3 ψ_0	
acc.	ψ_1	ψ_2	

4. CALCUL DES SOLLICITATIONS

4.1. Moments et efforts tranchants dus aux charges permanentes

On utilisera les méthodes classiques de la résistance des matériaux. Pour les poutres continues, par exemple, on utilisera l'équation des 3 moments rappelée ci-après (§ 4.2).

4.2. Calcul des moments dus aux charges variables

• Recherche du cas de chargement entraînant les moments maximum et minimum dans une section donnée.

Pour trouver le cas de chargement le plus déterminant on utilisera les lignes d'influences*.

Dans le cas de travées d'inertie constante, l'équation des 3 moments s'écrit :

$$\frac{\ell_{i-1}}{l_{i-1}} M_{i-1} + 2 \left(\frac{\ell_{i-1}}{l_{i-1}} + \frac{\ell_i}{l_i} \right) M_i + \frac{\ell_i}{l_i} M_{i+1} = 6E(\omega_d - \omega_e)$$

Dans le cas où les inerties sont constantes et identiques pour toutes les travées, on obtient :

$$\ell_{i-1} M_{i-1} + 2(\ell_{i-1} + \ell_i) M_i + \ell_i M_{i+1} = -6EI(\omega_e - \omega_d)$$

On écrit ainsi cette équation pour chaque appui intermédiaire et on obtient un système de $(n-2)$ équations à $(n-2)$ inconnues si n désigne le nombre total d'appui.

Les valeurs des rotations dues aux charges extérieures appliquées aux travées supposées isostatiques sont :

$$\omega_e = \int_0^{\ell_{i-1}} \mu_{i-1}(x) \frac{dx}{EI_{i-1}} \cdot \left(\frac{x}{\ell_{i-1}} \right)$$

$$\omega_d = - \int_0^{\ell_i} \mu_i(x) \frac{dx}{EI_i} \cdot \left(1 - \frac{x}{\ell_i} \right)$$

où $\mu_i(x)$ représente la valeur du moment dû aux charges extérieures pour la travée supposée isostatique.

Pour une charge répartie uniforme p , on a par exemple :

$$\omega_e = \frac{p\ell^3}{24EI}$$

Pour d'autres types de charges on pourra utiliser le tableau suivant :

* Voir « Résistance des matériaux » de J. Courbon.

Tableau 8.4

Cas de chargement	$\beta(x)$ (Eff. Tr.)	$\mu(x)$ (Moment)	$6EI\omega$ (Rotation ω)
	$P \left(1 - \frac{a}{l}\right)$ $P \frac{a}{l}$	$P \left(1 - \frac{a}{l}\right) x$ $P a \left(1 - \frac{x}{l}\right)$	$6EI\omega_A = - \frac{Pab(l+b)}{l}$ $6EI\omega_B = - \frac{Pab(l+a)}{l}$
	$-px + \frac{pl}{2}$	$-\frac{px^2}{2} + \frac{plx}{2}$	$6EI\omega_A = - \frac{pl^3}{4} = -6EI\omega_B$
	$-px + pa \left(1 - \frac{a}{2l}\right)$ $-\frac{pa^2}{2l}$	$-\frac{px^2}{2} + pa \left(1 - \frac{a}{2l}\right) x$ $-\frac{pa^2x}{2l} + \frac{pa^3}{2}$	$6EI\omega_A = - \frac{pa^2(2l-a)^2}{4l}$ $6EI\omega_B = \frac{pa^2(2l^2-a^2)}{4l}$
	$\frac{pb}{2}$ $\frac{pb}{2} - p(x-a)$	$\frac{pbx}{2}$ $\frac{pbx}{2} - \frac{p}{2}(x-a)^2$	$6EI\omega_A = - \frac{pb(3l^2-b^2)}{8}$ $6EI\omega_B = -6EI\omega_A$
	$pa - px$ 0	$pax - \frac{px^2}{2}$ $\frac{pa^2}{2}$	$6EI\omega_A = - \frac{pa^2(3l-2a)}{2}$ $6EI\omega_B = -6EI\omega_A$
	$-\frac{Px^2}{l^2} + \frac{P}{3}$	$-\frac{P}{3l^2}x^3 + \frac{Px}{3}$	$6EI\omega_A = - \frac{7Pl^2}{30}$ $6EI\omega_B = \frac{8Pl^2}{30}$
	$-\frac{2P}{l^2}x^2 + \frac{P}{2}$	$-\frac{2P}{3l^2}x^3 + \frac{Px}{2}$	$6EI\omega_A = - \frac{5Pl^2}{16} = -6EI\omega_B$
	$\frac{2P}{l^2}x^2 - \frac{2P}{l}x + \frac{P}{2}$	$\frac{2P}{3l^2}x^3 - \frac{P}{l}x^2 + \frac{Px}{2}$	$6EI\omega_A = - \frac{3Pl^2}{16} = -6EI\omega_B$
	P 0	Px Pa	$6EI\omega_A = -3Pa(l-a)$ $= 6EI\omega_B$ $-6EI\omega_B$
	P 0	Px $\frac{Pl}{3}$	$6EI\omega_A = - \frac{2Pl^2}{3} = -6EI\omega_B$
	$\frac{1}{6l}[(2p_1+p_2)l^2 - 6p_1x + 3(p_1-p_2)x^2]$	$\frac{x}{6l}[(2p_1+p_2)l^2 - 3p_1lx + (p_1-p_2)x^2]$	$6EI\omega_A = - \frac{8p_1+7p_2}{60}l^3$ $6EI\omega_B = \frac{7p_1+8p_2}{60}l^3$

Pour le calcul des moments dus à la précontrainte (moments hypersécanes), on se reportera au chapitre 19.

4.3. Calcul des moments à l'abscisse x

Pour calculer le moment dû aux charges extérieures à l'abscisse x, on calculera le moment $\mu(x)$ des charges appliquées à la travée isostatique. Le moment vaut alors :

$$M(x) = \mu(x) + \left(1 - \frac{x}{l_i}\right) M_i + \frac{x}{l_i} M_{i+1}$$

5. LES HYPOTHÈSES FONDAMENTALES DU BÉTON ARMÉ ET PRÉCONTRAIT

Nous supposons que les hypothèses suivantes sont vérifiées :

5.1. Conservation des sections planes

Une section plane reste plane après déformation.

C'est l'hypothèse classique de la résistance des matériaux (loi de Navier) qui est à la base de tous les calculs de flexion, puisqu'il en résulte que la déformation est une fonction linéaire des coordonnées des points de la section.

5.2. Relations entre contraintes et déformations

Il faut ici distinguer deux cas : celui de l'utilisation normale de la pièce (ELS) et celui de l'état-ultime (ELU). Dans le cas des sollicitations de service normal, les contraintes de traction ou de compression de l'acier et de compression du béton sont inférieures à la limite de proportionnalité, et l'on peut ainsi admettre que les contraintes sont proportionnelles aux déformations suivant l'hypothèse classique de la résistance des matériaux dans le domaine élastique dite loi de Hooke, soit :

$$\sigma_s = \varepsilon_s \cdot E_s, \quad \sigma_b = \varepsilon_b \cdot E_b$$

Au contraire, pour une évaluation de la capacité portante de la pièce en ELU, il est nécessaire de tenir compte de la courbe de déformation complète des matériaux ; là encore, certaines hypothèses que nous examinerons dans le paragraphe consacré à l'état-limite ultime, permettent de représenter ces courbes par des fonctions simples, qui rendent possible le calcul.

Ainsi, dans le cas général, la section comprend une partie comprimée et une partie tendue, séparées par une droite le long de laquelle la déformation et la contrainte sont nulles, droite appelée axe neutre de la section (fig. 8-1).

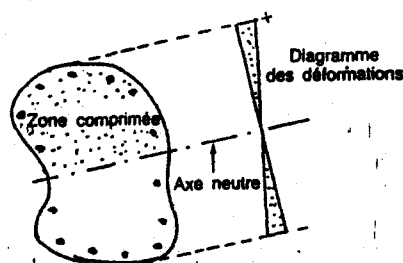


Fig. 8-1. Section quelconque fléchie

Bien entendu, la position de l'axe neutre varie suivant les sollicitations appliquées à la section : on conçoit, par exemple, qu'en augmentant N , M restant inchangé, on provoque un déplacement de l'axe neutre vers les régions tendues de la section. Cette variation constitue une difficulté importante du calcul des poutres de béton précontraint fléchies, car, le béton étant pris en compte ou non suivant qu'il est comprimé ou tendu, la définition même de la section est variable en fonction des sollicitations, ainsi que la position même du centre de gravité.

Pour la détermination des contraintes dues à un état de sollicitations donné, il faut donc rechercher l'axe neutre, puis écrire que les contraintes admettent comme résultante et moment résultant les efforts N , M ; on remarquera que le problème est théoriquement soluble puisque le plan de la déformation est défini par trois paramètres, et que les équations d'équilibres sont elles-mêmes au nombre de 3.

5.3. Non-glissement des aciers par rapport au béton

Cette hypothèse exprime qu'il y a égalité des déformations de l'acier et du béton au droit de cet acier ; on sera amené à définir un coefficient d'équivalence :

$$n = E_s/E_b.$$

6. SECTIONS A PRENDRE EN COMPTE

Pour le calcul des contraintes en état-limite de service on distingue* :

- la section brute ;
- la section nette ;
- la section homogène.

• La section brute correspond au seul béton, calculé d'après les dimensions de coffrage figurant sur les plans sans tenir compte des armatures ou vides correspondant aux conduits, évidements ou encoches destinés à recevoir les armatures de précontrainte ou leurs ancrages.

* Voir § 3.1 du chapitre 14.

Elle est utilisée, pour le calcul :

- du poids propre de l'élément ;
- des rigidités relatives des différents éléments de la structure en vue de déterminer les sollicitations hyperstatiques ;
- des déformations pour les parties d'ouvrages à vérifier en classe I et II.

• La section nette est calculée à partir de la section brute en déduisant les sections brutes des vides longitudinaux et transversaux même s'ils sont ultérieurement remplis*. On peut faire intervenir les armatures passives (donc adhérentes) avec un coefficient d'équivalence égal à 5 pour les charges instantanées et 15 pour les charges de longue durée.

La section nette sert à calculer les contraintes dues aux charges permanentes (qui existent déjà lors de l'injection) en état-limite de service.

• La section homogène est égale à la section nette majorée de n fois la section des armatures longitudinales de précontrainte, sous réserve de l'adhérence entre ces armatures avec le béton (ce qui est le cas de la pré-tension et le cas de la post-tension avec injection des conduits par un coulis adéquat).

Par simplification, il est admis de prendre un coefficient d'équivalence n égal à 5 qui correspond à des chargements de courte durée.

La section homogène sert à calculer les contraintes dues aux charges appliquées après l'injection des conduits, ce qui correspond en général aux charges variables.

• La section fissurée est obtenue en négligeant la partie de béton tendu. Elle se calcule à partir de la seule section de béton comprimé, des aciers passifs avec un coefficient d'équivalence égal à 15 (à condition de satisfaire aux articles A.6 et A.8.1 du BAEL 80) et des aciers de précontrainte avec un coefficient d'équivalence égal à :

- 15 dans le cas de pré-tension ;
- 0 pour les armatures non-adhérentes en post-tension ;
- 15/2 pour les armatures adhérentes en post-tension**.

La section fissurée est utilisée pour le calcul des contraintes en classe III.

• Exemple de calcul de section brute

Soit la poutre en T suivante, dont on voudra déterminer la section, l'inertie et le rendement (fig. 8-2).

* Pour les vides transversaux, même s'ils sont injectés ultérieurement, il faut s'assurer que leur plus grande dimension n'excède pas 30% de l'épaisseur du panneau, qu'ils ne soient pas situés du bord transversal à moins de leur propre largeur ni à 5 cm et, qu'enfin, leur espacement transversal soit au moins égal à 8 fois leur propre épaisseur.

** Cet abattement de moitié correspond à l'incertitude sur l'efficacité de l'injection des conduits.

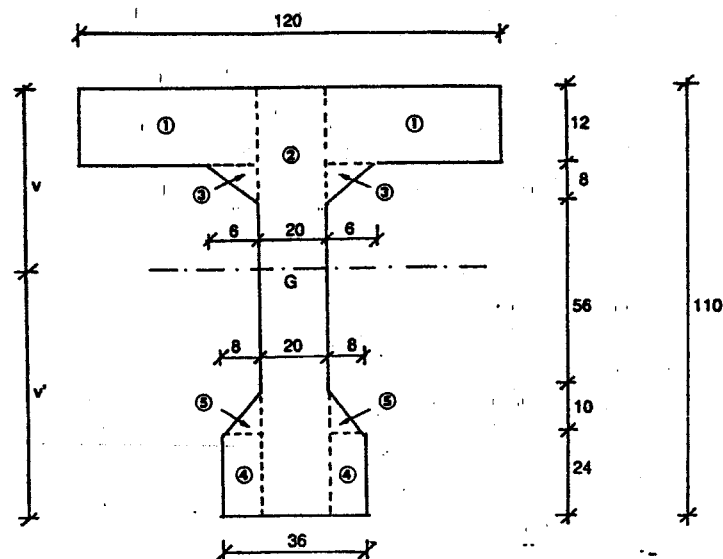


Fig. 8-2. Décomposition de la section droite

élément	largeur b	hauteur h	kh	moment statique	k'h	moment d'inertie
①	1	0,12	0,12000	$\times 0,12/2 = 0,00720$	$\times 2/3 \times 0,12 = 0,000576$	
②	0,2	1,10	0,2200	$\times 1,10/2 = 0,12100$	$\times 2/3 \times 1,10 = 0,088733$	
③	0,06	0,08	0,0048	$\times (0,08/3 + 0,12) = 0,00070$	$\times (0,08/3 + 0,12) = 0,00103$	
④	0,16	0,24	0,0384	$\times (1,10 - 0,12) = 0,03763$	$\times (1,10 - 0,12) = 0,036877$	
⑤	0,08	0,10	0,0080	$\times (0,76 + 2/3 \times 0,1) = 0,00681$	$\times (0,76 + 2/3 \times 0,10) = 0,005464$	
	$S = 0,3912 \text{ m}^3$			$\mu = 0,17315 \text{ m}^3$		$I_A = 0,131944 \text{ m}^4$

Le centre de gravité G est situé à une distance $v = \frac{\mu}{S}$ de la fibre supérieure:

$$v = \frac{\mu}{S} = 0,4426 \text{ m}$$

et

$$v' = h - v = 0,6574 \text{ m.}$$

Le moment d'inertie par rapport au centre de gravité G vaut d'après le théorème de Huyghens:

$$I = I_A - Sv^2 = 0,131944 - 0,3912 \times 0,4426^2 = 0,055310 \text{ m}^4$$

d'où le rendement:

$$\rho = \frac{I}{Sv'v} = \frac{0,055310}{0,3912 \times 0,4426 \times 0,6574} = 0,486.$$

• Exemple de calcul de section nene (fig. 8-3)

Considérons la même section avec 4 gaines de 70 mm de diamètre situées respectivement à 105 mm et 245 mm de la fibre inférieure. Le centre de gravité des gaines est à 0,925 m de la fibre supérieure.

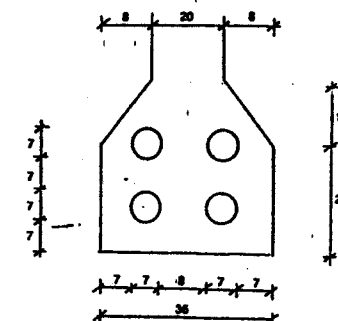


Fig. 8-3. Géométrie du talon

$$S_n = S - 4 \times \pi \frac{0,07^2}{4} = 0,3912 - 0,01539 = 0,37581 \text{ m}^3$$

$$\mu_n = \mu - 0,01539 \times 0,925 = 0,15891 \text{ m}^3$$

$$v_n = \mu_n / S_n = 0,4228 \text{ m et } v'_n = 1,10 - 0,4228 = 0,6772 \text{ m}$$

$$I_{nA} = I_A - 0,01539 \times 0,925^2 = 0,118776$$

$$I_n = I_{nA} - S_n v_n^2 = 0,118776 - 0,37581 \times 0,4228^2 = 0,0516 \text{ m}^4$$

$$\rho_n = \frac{I_n}{S_n v_n v'_n} = 0,479$$

• Exemple de section homogène

Les gaines de l'exemple ci-dessus contiennent chacune un câble 9 T 15 de $9 \times 139 = 1\,251 \text{ mm}^2$;

d'où:

$$S_h = S_n + nS_p, \text{ le coefficient d'équivalence est pris égal à 5.}$$

$$S_h = 0,37581 + 4 \times 1\,251 \times 10^{-6} \times 5 = 0,37581 + 0,02502 = 0,40083$$

$$\mu_h = \mu_n + 0,02502 \times 0,925 = 0,182053 \text{ m}^3$$

$$v_h = \mu_h / S_h = 0,45419 \text{ m et } v'_h = 1,10 - v_h = 0,64581 \text{ m}$$

$$I_{hA} = I_{nA} + 0,02502 \times 0,925^2 = 0,140184$$

$$I_h = I_{hA} - S_h \cdot v_h^2 = 0,057497$$

$$\rho_h = 0,489$$

• Exemple de calcul du bras de levier z

Le bras de levier z est nécessaire pour le calcul des contraintes de cisaillement dans la section. Il se calcule à partir de la section brute :

$$z = \frac{1}{\mu_G}$$

avec μ_G , moment statique de la partie de section située au-dessus du centre de gravité par rapport à ce même centre de gravité.

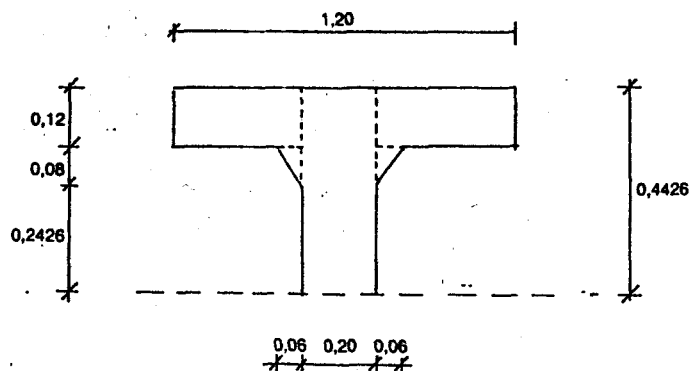


Fig. 8-4. Géométrie de la table

$$\begin{aligned} \mu_G &= 0,12 \times 1 \times (0,4426 - 0,06) \\ &\quad + 0,08 \times 0,06 \times (0,2426 + 2/3 \times 0,08) \\ &\quad + 0,20 \times 0,4426^2/2 = 0,04591 + 0,00142 + 0,01959 = 0,06692 \text{ m}^3 \end{aligned}$$

d'où :

$$z = \frac{0,05531}{0,06692} = 0,8265 \text{ m (0,75 h)}$$

• Sections à prendre en compte dans les calculs des moments de structure hyperstatique

A titre de simplification des calculs et lorsque les inconnues hyperstatiques ne dépendent pas de la valeur du module d'élasticité, il est possible de substituer aux constantes mécaniques qui semblent caractériser le mieux la déformabilité réelle des pièces, celles qui s'attachent aux sections brutes de ces pièces supposées non fissurées et abstraction faite de leurs armatures, sous réserve toutefois que les rapports des déformabilités des différents éléments structuraux ne soient pas fondamentalement changés par cette substitution.

On devra cependant apporter aux simplifications précédentes des restrictions concernant les ouvrages exécutés en plusieurs phases.

Lorsqu'un ouvrage est exécuté en plusieurs phases, il en est tenu compte dans l'évaluation des sollicitations aussi bien en cours d'exécution qu'en service.

On admet, en règle générale, le principe de superposition des états de déformations partiels successifs en supposant, pour le calcul des efforts, la visco-élasticité en l'absence de fissuration du béton.

Il convient de tenir compte des phases successives de chargement de l'ouvrage et, à cet effet, de procéder à une analyse précise de leur succession tout au long de son exécution : opérations successives de bétonnage, de mise en tension, de décintrement, de transfert d'appuis, de réglage...

La gêne apportée par le phasage de la construction au libre développement des déformations du béton (par retrait et fluage) engendre des redistributions d'efforts et (ou) de contraintes que seule une analyse visco-élastique tenant compte de la chronologie des opérations permet d'appréhender rigoureusement.

Deux cas peuvent se présenter, et éventuellement se combiner :

— une section de béton composée de plusieurs parties coulées à des dates différentes.

Les déformations différées différentielles (retrait et fluage) des diverses parties entraînent une redistribution des contraintes dans la section et, si l'ouvrage est hyperstatique, une redistribution des sollicitations ;

— un ouvrage hyperstatique dans sa configuration de service, mais dont le schéma varie en cours de construction.

Le bridage progressif des déformations, consécutifs à l'augmentation du degré d'hyperstaticité du système, provoque une modification des réactions d'appui, donc une redistribution des efforts.

Il est cependant possible, pour des structures classiques, de conserver le modèle élastique en superposant, s'il y a lieu, aux efforts et contraintes calculés dans cette hypothèse, compte tenu des phases successives de construction de l'ouvrage, les variations d'efforts et de contraintes dues aux déformations différées du béton (retrait et fluage) évaluées de façon forfaitaire, compte tenu de l'expérience acquise sur ce type de structure.

7. LARGEUR DES TABLES DE COMPRESSION DES POUTRES EN T — CHANGEMENT DE SECTION

Voir le chapitre 14, § 6.

8. PORTÉE DE CALCUL

Pour la plupart des ouvrages, la portée à prendre en compte pour les calculs des moments correspond aux distances entre axes des appuis.

Contrairement au béton armé où l'on peut prendre la distance entre nus des appuis pour des appuis liés rigidement à l'élément calculé, on doit être prudent en béton précontraint, car la précontrainte, par son action instantanée et par son action différée (retrait, fluage), peut entraîner des efforts parasites dans les appuis. On

recherchera, dans la mesure du possible, des appuis tels que la rotation puisse être libre ou peu gênée, de même pour les déplacements longitudinaux engendrés par les actions précitées.

Pour l'effort tranchant, la portée à prendre en compte est entre nus des appuis avec quelques aménagements que l'on verra au chapitre 16 « Effort tranchant ».

9

CONTRAINTES ADMISSIBLES CONTRAINTES DE CALCUL

1. CLASSES DE VÉRIFICATION

Pour les justifications des seules contraintes normales vis-à-vis des états-limites de service, les constructions, éléments de construction ou sections sont rattachés à l'une des trois classes de vérification I, II ou III classées en ordre de sévérité décroissante.

Les classes correspondantes sont des classes de vérification et non pas des classes de qualité. Les états-limites qui leur sont associés doivent être considérés comme des repères plutôt que comme des seuils précis de changement d'état :

- en classe I, l'état-limite de décompression ne doit pas être dépassé sous l'effet des combinaisons rares ;
- en classe II, dans la section d'enrobage (définie au chapitre 14, on ne doit dépasser ni l'état-limite de formation des fissures sous l'effet des combinaisons rares, ni l'état-limite de décompression sous l'effet des combinaisons fréquentes ;
- en classe III, on ne doit dépasser ni un certain état-limite d'ouverture des fissures défini pour l'ensemble de la section sous combinaisons rares, ni un autre état-limite d'ouverture des fissures défini sur la section d'enrobage sous combinaisons fréquentes, ni enfin l'état-limite de décompression dans la section d'enrobage sous combinaison quasi permanente.

Différentes parties d'un même ouvrage peuvent, dans la mesure où le cahier des charges le précise, être justifiées selon des classes distinctes. La notion de classe est, par ailleurs, liée à celle de situation, une même partie d'ouvrage pouvant être vérifiée selon les modalités d'une classe particulière dans une certaine situation d'exploitation et d'une autre classe lorsque la situation d'exploitation (au sens des directives communes DC 79) vient à changer.

Le choix d'une classe de vérification pour un ouvrage ou pour une partie d'ouvrage est basé sur la considération de nombreux facteurs techniques et économiques parmi lesquels on peut citer :

- l'ambiance plus ou moins agressive dans laquelle est placée la structure ;
- le type d'ouvrage, son mode de construction (exécution fractionnée ou non...), le mode de fabrication de ses éléments (préfabrication, pré ou post-tension) ;
- l'importance relative des sollicitations permanentes et variables ainsi que la distribution dans le temps de ces dernières ;
- l'expérience acquise compte tenu des réalisations antérieures.

Le recours à la classe I est, en principe, exceptionnel. En sont justifiables, toutefois, les pièces soumises à traction simple : tirants, parois de réservoirs circulaires, surtout si ces derniers sont destinés à stocker des fluides dangereux ; et également les pièces susceptibles d'être très sollicitées à la fatigue.

La classe II est particulièrement destinée aux éléments exposés à une ambiance agressive (cas de certains bâtiments industriels) et à ceux qui comportent de nombreux joints.

La classe III, enfin, intéresse essentiellement les pièces en atmosphère peu agressive (éléments de bâtiments courants par exemple).

2. CONTRAINTES NORMALES ADMISSIBLES DE FLEXION EN ÉTAT-LIMITE DE SERVICE

2.1. Contraintes de compression du béton

Quelle que soit la classe de vérification retenue, les contraintes de compression du béton ne peuvent dépasser :

- $0,50 f_{c28}$ sous l'effet de la combinaison quasi-permanente (voir chapitre 8) ;
- $0,60 f_{c28}$ sous l'effet des combinaisons rares ;
- $0,60 f_{cj}$ en cours de construction, sauf pour les pièces fabriquées en usine faisant l'objet d'une procédure de justification de qualité où cette limite est portée à $2/3 f_{cj}$.

Cette valeur est ramenée à $0,55 f_{cj}$ pour j inférieur à 3 jours.

Toutes les valeurs précédentes sont diminuées de 10 % lorsque le marché prescrit de prendre la valeur probable P_m pour la précontrainte, de calcul.

Ces valeurs sont à rapprocher de la valeur indiquée par le BAEL qui est $0,6 f_{c28}$. Nous désignerons cette contrainte admissible par σ_c .

2.2. Contraintes admissibles de traction du béton

Nous désignerons cette contrainte admissible par σ_t .

2.2.1 Classe I

Aucune traction n'est admise sur l'ensemble de la section quel que soit le cas de charge envisagé. Eventuellement, le cahier des charges peut imposer une contrainte

résiduelle de compression pour des ouvrages ne devant subir aucune fissuration en présence de milieux très agressifs.

2.2.2. Classe II

En classe II, le calcul des contraintes normales est toujours effectué sur la section non fissurée. Il doit être vérifié que les contraintes de traction du béton sont limitées aux valeurs suivantes :

- en situation d'exploitation, sous l'effet des combinaisons rares, aussi bien qu'en situation de construction : f_{tj} dans la section d'enrobage ; $1,5 f_{tj}$ ailleurs ;
- en situation d'exploitation, sous l'effet des combinaisons fréquentes : 0 dans la section d'enrobage.

2.2.3. Classe III

En classe III, les contraintes normales sont calculées uniquement sur la section fissurée :

- en situation d'exploitation, sous l'effet de la combinaison quasi-permanente, la section d'enrobage demeure entièrement comprimée.

Dans le cas du bâtiment, on peut restreindre cette exigence de non-décompression de la section d'enrobage au seul cas des actions permanentes.

2.3. Contrainte admissible pour les aciers

2.3.1. Aciers actifs

- *Classe I et II* : aucune exigence.

- *Classe III* :

En situation d'exploitation sous l'effet des combinaisons rares et en situation de construction, les surtensions dans les aciers de précontrainte ne doivent pas dépasser $0,10 f_{py}$ dans le cas de post-tension et le maximum de $150 \eta_p$ et $0,10 f_{py}$ pour la pré-tension.

La surtension correspond à la valeur $\sigma_s - \sigma_1$ du chapitre 15 (fig. 15.2).

Au cas où il n'y a pas d'armatures passives dans la section d'enrobage (voir chapitre 14, § 6.4), on doit également vérifier que cette surtension ne dépasse pas 60 MPa.

2.3.2. Aciers passifs

- *Classe I* : aucune exigence.

- *Classe II* : aucune exigence particulière, car les aciers tendus nécessaires pour couler les zones tendues sont déterminés forfaitairement par une formule faisant intervenir la section de béton tendu et l'effort de traction correspondant (voir chapitre 14, § 5.4.2).

• **Classe III:**

— en situation d'exploitation sous l'effet des combinaisons rares et en situation de construction, les armatures passives doivent vérifier les conditions de contraintes admissibles de fissuration préjudiciable du BAEI à savoir:

$$\bar{\sigma}_s = \text{Min} \left(\frac{2}{3} f_{ct}; 150 \eta \right)$$

c'est-à-dire $\sigma_s = 240$ MPa pour les aciers à haute adhérence des classes Fe E 400 ou au-dessus;

— en situation d'exploitation sous l'effet des combinaisons fréquentes, la contrainte de traction des aciers passifs n'excède par 60 MPa dans la section d'enrobage.

3. DISTRIBUTION DES DÉFORMATIONS EN ÉTAT-LIMITE ULTIME — DIAGRAMME DES 3 PIVOTS

• **Distribution des déformations**

Un état-limite ultime est caractérisé par le fait que le diagramme des déformations de la section appartient à l'un des domaines ci-dessous (fig. 9-1).

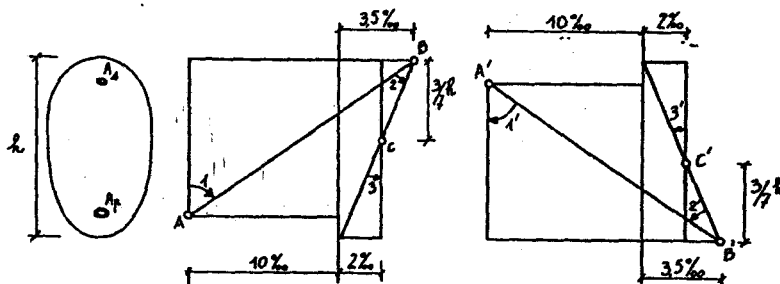


Fig. 9-1. Diagramme des 3 pivots

Dans le domaine 1 (ou 1'), le diagramme passe par le point A (ou A') qui correspond pour l'armature la plus excentrée à un accroissement d'allongement de 10‰ au-delà du retour à 0 de la déformation du béton adjacent.

Dans le domaine 2 (ou 2'), le diagramme passe par le point B (ou B') qui correspond à un raccourcissement de 3,5‰ de la fibre la plus comprimée du béton.

Dans le domaine 3 (ou 3'), le diagramme passe par le point C (ou C') qui correspond à un raccourcissement de 2‰ du béton à une distance de la fibre la plus comprimée égale à 3/7 de la hauteur totale h de la section.

• **Précontrainte adhérente (pré-tension ou post-tension avec injection)**

— les sections droites restent planes;

— les matériaux ne subissent aucun glissement relatif.

En appliquant les hypothèses, on a donc, à l'état-limite ultime, sur un diagramme linéaire:

- les déformations ϵ_b du béton;
- les déformations ϵ_s des aciers passifs;
- les variations de déformation $\Delta \epsilon_s$ des aciers de précontrainte comptées à partir du retour à 0 de la déformation du béton adjacent (fig. 9-2).

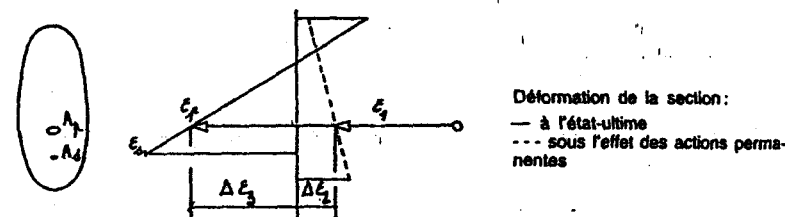


Fig. 9-2. Allongement de l'acier de précontrainte

La déformation à l'état ultime d'une armature de précontrainte est ainsi la somme de trois termes:

- l'allongement préalable: ϵ_s ;
- un accroissement d'allongement accompagnant le retour de la déformation du béton adjacent, évalué forfaitairement à: $5 \frac{\sigma_{bc}}{E_p}$, σ_{bc} représentant la contrainte du béton, au niveau de l'armature considérée sous l'effet des actions permanentes et de la précontrainte prise avec sa valeur probable P_m ;
- une variation de déformation complémentaire $\Delta \epsilon_s$ qui apparaît directement sur le diagramme des déformations de la section.

4. CONTRAINTES NORMALES DE CALCUL DE FLEXION EN ÉTAT-LIMITE ULTIME

4.1. Béton

La contrainte de calcul en état-limite ultime est déduite de la courbe contrainte-déformation du béton dans une affinité parallèle à l'axe des contraintes et de rapport 0,85/ γ_b .

La contrainte maximale de calcul vaut donc:

$$\bar{\sigma}_{bcu} = \frac{0,85}{\gamma_b} f_{cj}$$

avec $\gamma_b = 1,5$ pour tous les cas de combinaisons sauf pour les combinaisons accidentelles où $\gamma_b = 1,15$.

Le diagramme de calcul de contrainte-déformation à l'allure de la figure 9-3.

Ce diagramme composé d'une demi-parabole et d'une partie rectangulaire est appelé « diagramme parabole-rectangle ». Il peut être simplifié en remarquant que sa surface vaut $\frac{17}{21}$ du rectangle enveloppe de côtés σ_{bcu} , ϵ_{cu} et que le moment statique de la partie hachurée par rapport à l'axe des contraintes vaut $\frac{99}{238}$, valeurs comparables à quelques pour cent près à un rectangle de longueur $0,8 \epsilon_{cu}$, de hauteur σ_{bcu} et d'abscisse comprise entre 0,70‰ et 3,5‰.

Ce diagramme appelé diagramme rectangulaire simplifié est très commode pour les calculs.

Pour plus d'informations sur l'usage et les limites d'emploi de ce diagramme, on peut se reporter à un cours de béton armé*.

4.2. Aciers actifs

Les contraintes de calcul des aciers actifs se déduisent du diagramme contrainte-déformation de ces aciers par une affinité de rapports $1/\gamma_p$ parallèle à la droite d'élasticité (de façon à conserver le même module d'Young E_p , figure 9-4).

On a ainsi $\frac{AC}{AB} = \gamma_p$.

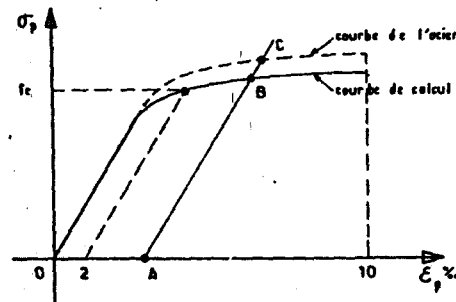


Fig. 9-4. Diagramme contrainte-déformation des torons et fils tréfilés

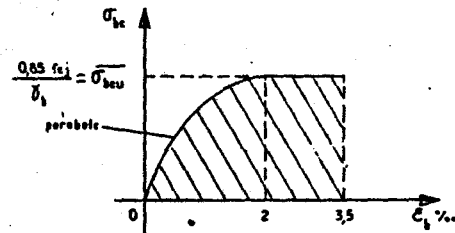


Fig. 9-3. Diagramme parabole-rectangle

La valeur de γ_p retenue par le BPEL est 1,15 pour les deux types d'aciers, la contrainte de calcul σ_p se déduit de l'un des diagrammes suivants:

4.2.1. Fils tréfilés et torons (voir chapitre 6, § 1.3.4)

La contrainte de calcul vaut $\sigma_p = \epsilon_p \cdot E_p$ pour:

$$\epsilon_p < \frac{0,9 f_{pea}}{E_p \gamma_p} \quad \text{avec } \gamma_p = 1,15.$$

Pour $\epsilon_p > \frac{0,9 f_{pea}}{E_p \gamma_p}$, σ_p est déterminé par l'équation du 5^e degré:

$$\epsilon_p = \frac{\sigma_p}{E_p} + 100 \left(\frac{\gamma_p \sigma_p}{f_{peg}} - 0,9 \right)^5.$$

Equation que l'on peut résoudre par approximation successives en partant d'une valeur *a priori* de σ_p , par exemple $\left(\frac{0,9 f_{pea}}{\gamma_p} \right)$ dans:

$$u = \left(\frac{\epsilon_p - \frac{\sigma_p}{E_p}}{100} \right)^{0,2} \quad \text{et} \quad \sigma_p = (u + 0,9) \frac{f_{peg}}{\gamma_p}$$

où f_{peg} désigne la limite d'élasticité garantie de l'acier.

4.2.2. Fils trempés et revenus, barres (voir chapitre 6, § 1.3.5)

Le diagramme de calcul bilinéaire se déduit facilement du diagramme contrainte-déformation (fig. 9-5).

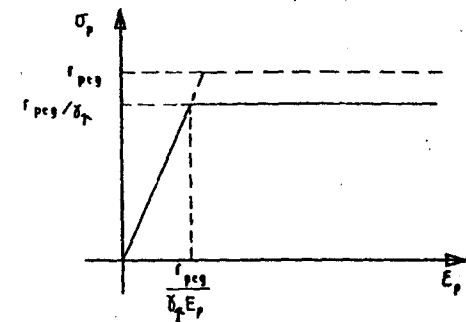


Fig. 9-5. Diagramme contrainte-déformation des fils trempés et des barres

4.3. Aciers passifs

Le module d'Young vaut $E_s = 200\,000$ MPa. Nous distinguons deux cas:

4.3.1. Les aciers naturels ou naturellement durs (type I)

Le même raisonnement que pour l'acier actif et avec le même coefficient de sécurité $\gamma_s = 1,15$, donne le diagramme de calcul de la figure 9-6.

* R. Lacroix, A. Fuentes, H. Thonier: Traité de béton armé, chapitre 14.

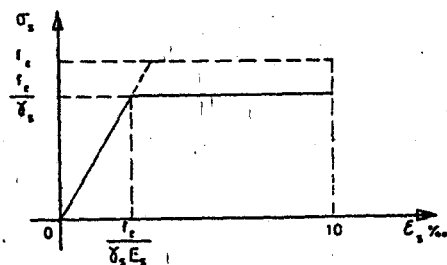


Fig. 9-6. Diagramme contrainte-déformation des aciers passifs

Pour un acier à haute adhérence de la classe Fe E 400 pour lequel $f_k = 400$ MPa, on obtient le diagramme suivant (fig. 9-7) :

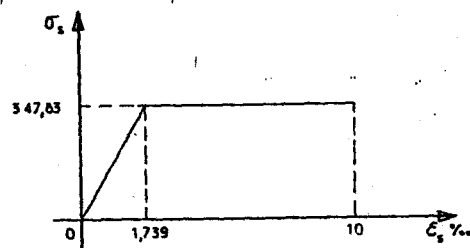


Fig. 9-7. Diagramme contrainte-déformation des aciers de 400 MPa de limite élastique

4.3.2. Les aciers écrouis par torsion et/ou tension (rares)

Le coefficient de sécurité $\gamma_s = 1,15$ appliqué à ce type d'acier conduit aux équations :

$$\epsilon_s = \frac{\sigma_s}{E_s} \text{ pour } \sigma_s < \frac{0,7f_k}{\gamma_s},$$

$$\epsilon_s = \frac{\sigma_s}{E_s} + 0,823 \left(\frac{\sigma_s \gamma_s}{f_k} - 0,7 \right)^5 \text{ pour } \sigma_s > \frac{0,7f_k}{\gamma_s}$$

Pour les aciers habituellement utilisés de la classe Fe E 400 avec $f_k = 400$ MPa, le diagramme de calcul devient le suivant (fig. 9-8).

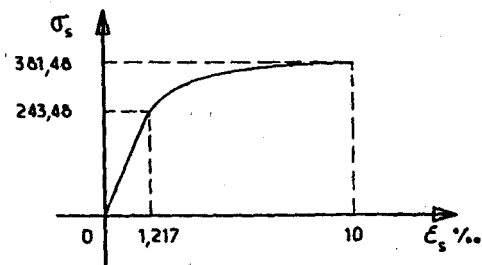


Fig. 9-8. Diagramme contrainte-déformation des aciers écrouis de 400 MPa de limite élastique

REMARQUE :

Pour les actions accidentelles, les coefficients des aciers, γ_p et γ_s sont égaux à 1,00.

5. CONTRAINTES ADMISSIBLES D'EFFORT TRANCHANT

Les contraintes admissibles d'effort tranchant correspondent à l'état-limite de service. Elles dépendent d'un certain nombre de paramètres et seront traitées au chapitre 16.

ELS - CONTRAINTES ADMISSIBLES

	Classe I	Classe II	Classe III
En Construction			
Combinaisons quasi-permanentes			
Combinaisons fréquentes			
Combinaisons rares			

$\Delta\sigma_p \leq 0,10 f_{tk}$
 $\sigma_s \leq \text{Min} [2/3 f_k; 150 \eta]$
 $\sigma_s \leq 60$ MPa en section d'enrobage.

ELS CONTRAINTES ADMISSIBLES

Béton compression $\bar{\sigma}_c$ σ_d	Combinaisons quasi-permanentes Combinaisons fréquentes Combinaisons rares En situation de construction	Classe			Classe III
		I	II	III	
Béton traction $\bar{\sigma}_t$ σ_u	Combinaisons quasi-permanentes	0	0	0	0
	Combinaisons fréquentes	0	0	0	0
	Combinaisons rares	0	0	0	0
	En construction	0	0	0	0
		0	0	0	0
Aciers actifs surtension : $\Delta\sigma_p = \Delta\sigma_2 + \Delta\sigma_3$ (1)	Combinaisons quasi-permanentes	—	—	—	—
	Combinaisons fréquentes	—	—	—	—
	Combinaisons rares	—	—	—	—
	En construction	—	—	—	—
		—	—	—	—
Aciers passifs $\bar{\sigma}_s$	Combinaisons quasi-permanentes	—	—	—	—
	Combinaisons fréquentes	—	—	—	—
	Combinaisons rares	—	—	—	—
	En construction	—	—	—	—
		—	—	—	—

(1) $\Delta\sigma_2$ = surtension de l'acier entre le cas correspondant à une contrainte nulle du béton au niveau du câble et l'état des combinaisons quasi-permanentes.

(2) Pour les aciers à haute adhérence de la classe FeE400 et au-dessus, lire $\bar{\sigma}_s = 240$ MPa.

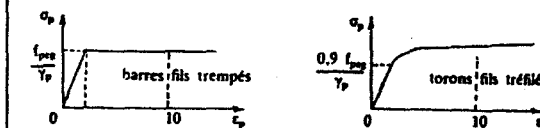
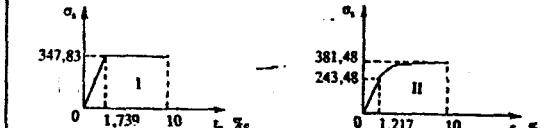
$\bar{\sigma}_c$ = contrainte admissible de compression sur la fibre inférieure.

σ_d = contrainte admissible de traction sur la fibre inférieure.

$\bar{\sigma}_t$ = contrainte admissible de traction sur la fibre inférieure.

σ_u = contrainte admissible de traction sur la fibre inférieure.

ELU CONTRAINTES DE CALCUL

Béton	$\bar{\sigma}_{bcu}$ MPa	$f_{ctk} =$	25	30	35	40
$\bar{\sigma}_{bcu} = 0,85 \frac{f_{ct}}{\gamma_b}$	Comb. fondamentales	$\gamma_b = 1,5$	14,17	17,0	19,83	22,67
	Comb. accidentelles	$\gamma_b = 1,15$	18,48	22,17	25,87	29,57
Aciers actifs $\gamma_p = 1,15$ $\sigma_p = f(e_p)$						
Aciers passifs $\sigma_s = f(e_s)$ (courbes aciers) HA FeE400 $f_e = 400$ MPa $\gamma_s = 1,15$						

10

L'ADHÉRENCE

1. QU'EST-CE QUE L'ADHÉRENCE

La transmission de la variation de l'effort normal de compression ou de traction dû aux moments de flexion, entre le béton et les aciers se fait par adhérence entre ces derniers. Cette liaison est due à des aspérités de l'acier qui s'arc-boutent sur le béton. Ceci est particulièrement vrai pour les aciers nervurés ou crantés, mais plus difficilement explicable pour les aciers lisses.

Pour les aciers de béton armé, la rouille en accroissant la rugosité, améliore l'adhérence; par contre, en béton précontraint, toute trace de rouille étant prohibée, l'adhérence ne pourra être valablement obtenue qu'avec des aciers nervurés ou crantés, ou à la rigueur avec des torons. C'est pourquoi, il est interdit d'utiliser des aciers lisses pour des armatures dites adhérentes par pré-tension.

En béton précontraint par post-tension avec gaines, on distinguera deux types d'adhérence:

- l'adhérence des torons ou fils au coulis d'injection;
- l'adhérence des gaines, d'une part au coulis d'injection sur leur face interne, d'autre part au béton situé autour de la gaine.

L'adhérence se caractérise par une contrainte τ_a dite contrainte d'adhérence.

1.1. Calcul de la contrainte d'adhérence τ_a

Soit une section quelconque d'une structure isostatique ou hyperstatique, soumise à un effort de précontrainte P et à un moment extérieur M dont le diagramme des contraintes est représenté sur la figure 10-1.

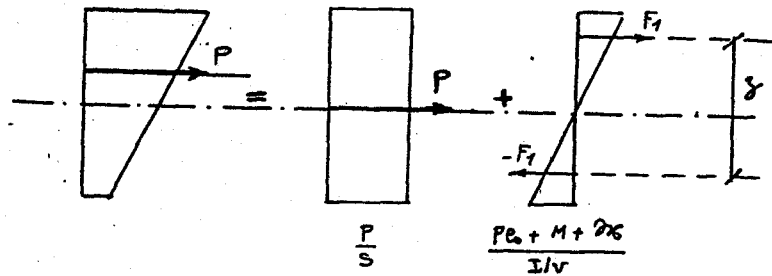


Fig. 10-1. Contraintes d'une section fléchie

où e_0 représente l'excentricité de la précontrainte et M , le moment hyperstatique éventuel dû à la précontrainte. L'équilibre du couple élastique s'écrit :

$$Pe_0 + M + \mathcal{M} = F_1 z$$

d'où :

$$F_1 = \frac{Pe_0 + M + \mathcal{M}}{z}$$

Or, la variation par unité de longueur de cet effort normal F_1 dû à la flexion s'écrit :

$$F' = \frac{dF_1}{dx} = \frac{1}{z} \left[\frac{dM}{dx} + \frac{d(Pe_0)}{dx} + \frac{dM}{dx} \right]$$

or : $\frac{de_0}{dx} = \operatorname{tg} \alpha(x)$... pente du câble

$\frac{dM}{dx} = V(x)$... effort tranchant

$\frac{d\mathcal{M}}{dx} = \gamma_1$... effort tranchant hyperstatique, constant dans la travée l , d'où :

$$F' = \frac{\gamma_1}{z} + \frac{P}{z} \operatorname{tg} \alpha + \frac{V}{z}$$

La contrainte d'adhérence τ_a est obtenue en divisant F' par le périmètre de contact acier-béton p :

$$\tau_a = \frac{F'}{p} = \frac{dF_1}{pdx} = \frac{\gamma_1 + P \operatorname{tg} \alpha + V}{pz}$$

Ce périmètre est indiqué sur la figure 10-2 suivant le nombre de gaines associées.

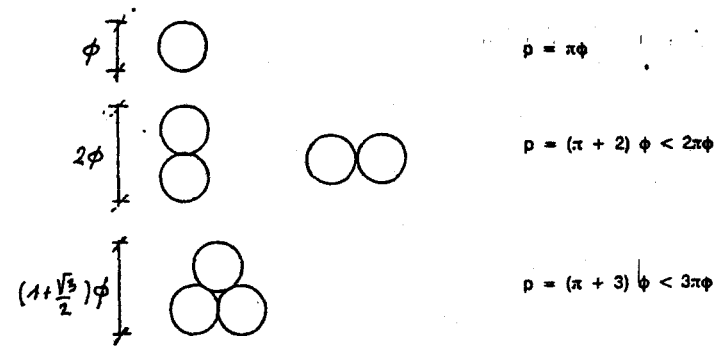


Fig. 10-2. Périmètre des gaines ou groupes de gaines

On a d'autre part (fig. 10-3) :

$$\gamma_1 = \frac{M_{i+1} - M_i}{l_i}$$

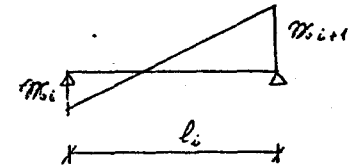


Fig. 10-3. Moment hyperstatique de précontrainte dans une travée de poutre, continue

V étant l'effort tranchant dû aux actions extérieures, z le bras de levier du couple élastique $= \frac{I}{\mu}$; on remarquera que par rapport au béton armé, deux termes supplémentaires apparaissent :

$\frac{P}{z} \operatorname{tg} \alpha$ dû à la précontrainte isostatique ;

$\frac{\gamma_1}{z}$ dû à la précontrainte hyperstatique.

On notera que le relèvement d'un câble entraîne une réduction de l'effort tranchant $P \operatorname{tg} \alpha$, la valeur de $\operatorname{tg} \alpha$ étant en général de signe contraire à celui de V .

1.2. Types d'adhérence

Dans ce qui suit, nous distinguerons quatre types d'adhérence :

- l'adhérence de béton armé pour les armatures passives ;
- l'adhérence des fils ou torons de précontraintes par pré-tension sans gaine ;
- l'adhérence des câbles de précontrainte par post-tension avec gaine injectée d'un coulis de ciment ;
- la non-adhérence des câbles dits « non-adhérents » placés dans des gaines graissées.

2. ADHÉRENCE DE BÉTON ARMÉ

Pour les armatures passives utilisées en béton précontraint plus spécialement en classe II et III, les prescriptions à suivre seront celles du BAEL 83.

En particulier, la longueur de scellement droit ℓ_s est rappelée dans le tableau ci-après.

f_{c28} MPa	Acier FeE240 $f_t = 235$ MPa acier lisse	FeE400 $f_t = 400$ MPa acier HA	FeE450 $f_t = 450$ MPa acier HA	FeE500 $f_t = 500$ MPa acier HA
20	$\ell_s = 55 \varnothing$	42 $\varnothing$	47 $\varnothing$	52 $\varnothing$
25	47 $\varnothing$	36 $\varnothing$	40 $\varnothing$	45 $\varnothing$
30	41 $\varnothing$	31 $\varnothing$	35 $\varnothing$	39 $\varnothing$
35	37 $\varnothing$	28 $\varnothing$	31 $\varnothing$	35 $\varnothing$
40	33 $\varnothing$	25 $\varnothing$	28 $\varnothing$	31 $\varnothing$

La jonction des aciers par recouvrement est assurée sur une longueur égale à ℓ_s .

• Variation de la contrainte d'adhérence

Dans la zone de scellement de l'acier de longueur ℓ_s , la contrainte d'adhérence est habituellement supposée constante. En réalité, elle varie comme indiqué sur la figure 10-4. De même, on admet généralement une contrainte linéaire pour l'acier.

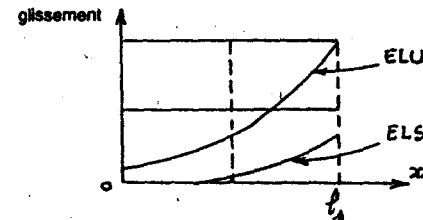
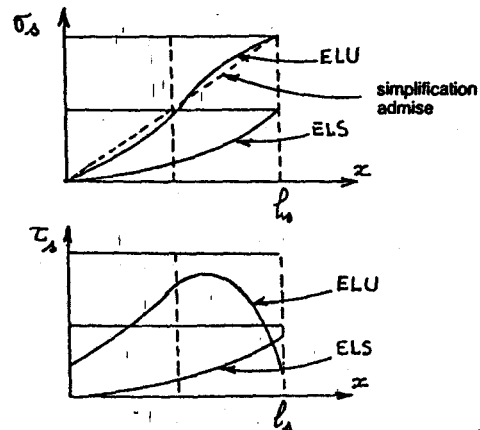


Fig. 10-4. Variation de la contrainte de traction dans l'acier, de la contrainte d'adhérence, du glissement

La contrainte d'adhérence d'entraînement vaut :

$$\tau_s = \frac{V}{pz} \quad \text{d'après la formule du § 1.1 ci-dessus.}$$

3. ADHÉRENCE ACIER-BÉTON EN PRÉ-TENSION

3.1. Adhérence d'entraînement

Comme en béton armé, les aciers utilisés en pré-tension ont à satisfaire la condition d'entraînement, c'est-à-dire de non-glissement dans la zone d'effort tranchant non nul. La contrainte, on l'a vu ci-dessus, vaut :

$$\tau_s = \frac{V_i + P \operatorname{tg} \alpha + V}{pz}$$

avec : $z = \frac{I}{\mu}$ bras de levier du couple élastique ;

V_i : effort tranchant dû au moment hyperstatique éventuel de précontrainte ;

α : angle d'inclinaison du câble sur l'horizontale ;

V : effort tranchant dû aux charges extérieures.

On devra vérifier que :

$$\tau_s \leq \tau_s^* = 0,7\psi_s f_{tj}$$

où : ψ_s est un coefficient de scellement dépendant de la nature de l'acier et indiqué sur sa fiche d'homologation ;

f_{tj} est la contrainte caractéristique de traction du béton à j jours.

3.2. Scellement aux extrémités

L'absence de dispositif d'ancrage suppose que les fils ou torons deviennent parfaitement ancrés sur une longueur ℓ_s relativement courte, où l'effort de précontrainte P est transmis progressivement de l'acier au béton.

La valeur de la contrainte d'adhérence sur la longueur ℓ_a a l'allure de la courbe de la figure 10-5.

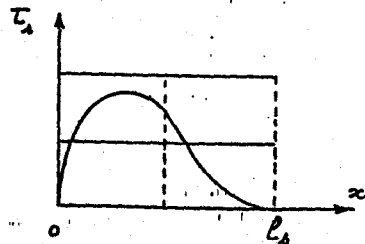


Fig. 10-5. Contrainte d'adhérence de fils « adhérents »

On remarquera la différence entre cette courbe et celles de la figure 10-4 correspondant à des aciers de béton armé. On peut expliquer cette forte contrainte d'adhérence près de l'extrémité libre, par le fait que, contrairement à l'acier de béton armé qui voit son diamètre diminuer (effet Poisson) quand l'acier est tendu, l'acier de précontrainte voit son diamètre augmenter près de son extrémité libre, car sa contrainte devient presque nulle lors de la détension. Ce gonflement de l'acier augmente son adhérence avec le béton.

On pourra supposer par souci de simplification que la contrainte dans l'acier suit une loi de variation parabolique ainsi que pour la contrainte de compression du béton (fig. 10-6).

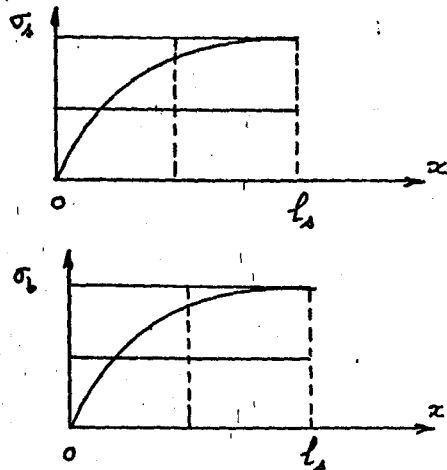


Fig. 10-6. Contrainte de traction de l'acier et de compression du béton

3.3. Règles BPEL

On distingue :

— la longueur conventionnelle de scellement ℓ_{cs} obtenue par interprétation d'essais et figurant dans la décision d'agrément de l'acier ;

— la longueur nominale de scellement ℓ_{ns} à utiliser dans les calculs qui dépend de la résistance du béton :

$$\ell_{ns} = \frac{\mu}{0,85} [\ell_{cs} + 2(40 - f_{cm})]$$

où : $\mu = \frac{\sigma_{pR}}{f_{prg}}$

σ_{pR} : tension des armatures avant relâchement ;

f_{cm} : valeur moyenne de la résistance du béton au moment du relâchement des armatures, en MPa et plafonnée à 40 MPa ; on pourra prendre $f_{cm} = 1,25f_{cj}$.

En pratique, on pourra retenir :

ℓ_{cs} : 75 × diamètre nominal pour les torons à 7 fils ;

ℓ_{cs} : 100 × diamètre nominal pour les torons à 3 fils et les fils autres que ronds et lisses.

4. ADHÉRENCE ACIER-BÉTON EN POST-TENSION

4.1. Adhérence vis-à-vis du cisaillement du béton dû à l'effort tranchant

Jusqu'au nouveau règlement BPEL, on négligeait la résistance au cisaillement du coulis d'injection des gaines en prenant pour largeur nette b_n , la largeur de l'âme diminuée du diamètre des gaines rencontrées sur une même horizontale.

Le BPEL, pour tenir compte de l'adhérence existant entre gaine, coulis et acier de précontrainte admet de ne retrancher que la demi-section des gaines.

4.2. Adhérence d'entraînement

Comme l'injection assurant une bonne adhérence entre les câbles et le béton, n'est réalisée qu'après la mise en tension, la contrainte d'adhérence τ_a devient :

$$\tau_a = \frac{V'_0 + V_0}{pz}$$

où : V'_0 représente la part de l'effort tranchant dû aux charges permanentes appliquées après l'injection ;

V_0 l'effort tranchant dû aux charges variables appliquées après l'injection.

Les coefficients d'adhérence ψ_a à prendre en compte éventuellement sont déduits de résultats expérimentaux.

4.3. Une parfaite adhérence acier-béton est supposée lors des calculs de flexion en état-limite ultime par la prise en compte de la surtension des aciers ($\Delta\sigma_s$ et $\Delta\sigma_b$, cf. chapitre 15) et par la compatibilité des déformations de l'acier et du béton.

5. CÂBLES NON-ADHÉRENTS

La non-adhérence acier-béton, obtenue par graissage des aciers et injection de graisse dans les gaines, entraîne un fonctionnement de la poutre fléchie comme une pièce en béton armé en flexion composée avec une compression P . La valeur de P est égale à l'effort de précontrainte éventuellement majoré s'il y a une surtension de l'acier, c'est-à-dire un allongement du câble. On ne peut prendre en compte la résistance de l'acier actif en état-limite ultime. On peut classer dans cette catégorie de câbles non adhérents, les câbles extérieurs au béton.

11

LES PERTES DE PRÉCONTRAINT

La contrainte de travail des aciers ne peut être déterminée de façon réglementaire comme en béton armé par exemple, où la contrainte admissible des aciers est limitée à une fraction de la limite élastique.

En effet, certains phénomènes qui n'avaient pas d'action sur la contrainte de l'acier en béton armé, interviennent de façon non négligeable, tels le frottement à la mise en tension des câbles, le recul à l'ancrage, la non-simultanéité de mise en tension des différents câbles, le retrait du béton, la relaxation des aciers, le fluage du béton. Les trois premières pertes sont instantanées, les trois dernières sont des pertes différées, c'est-à-dire qu'elles atteignent leur valeur maximale au bout d'un certain nombre de mois, voire d'années.

La mise en tension des câbles de précontrainte s'effectue grâce à l'action de vérins hydrauliques. Au point le plus sollicité du câble, on évitera d'atteindre une valeur trop proche de la rupture de l'acier, c'est pourquoi on a fixé réglementairement une traction maximale de mise en tension appelée tension à l'origine et notée σ_{po} .

Dans le cas de post-tension ou de pré-tension, σ_{po} prend la valeur suivante*

$$\sigma_{po} = \text{Min}(0,8 f_{prg}; 0,90 f_{peg})$$

avec f_{prg} : contrainte de rupture garantie
 f_{peg} : limite conventionnelle d'élasticité à 0,1 %.

Dans le cas de produits industrialisés en pré-tension et faisant l'objet d'un système fiable d'assurance de qualité, cette valeur peut être prise égale à :

$$\sigma_{po} = \text{Min}(0,85 f_{prg}; 0,95 f_{peg})$$

Pour les barres, la tension à l'origine est prise égale à :

$$\sigma_{po} = 0,7 f_{prg}$$

* La valeur admise dans les précédents règlements était $0,85 f_{prg}$. Le coefficient 0,80 a été introduit pour tenir compte d'un nombre croissant de ruptures de câble à la mise en tension.

Pour les tirants d'ancrage, dans le sol (murs de soutènements, pieux...) on retiendra comme valeur de mise en tension :

- pour les tirants provisoires : $\sigma_{po} = 0,75 f_{peg}$
- pour les tirants définitifs : $\sigma_{po} = 0,60 f_{peg}$

On dispose ainsi d'une marge de sécurité de 20% sur la rupture d'un câble, d'un toron ou d'un fil pour « couvrir » les incertitudes de mesures de pression du vérin, de correspondance entre pression et effort de traction, de frottement parasite ; ce qui peut entraîner des variations de contrainte dans les différents torons d'un même câble.

Comme par suite des pertes, la contrainte de traction ne peut que diminuer dans le temps, l'épreuve de la mise en tension est une garantie de résistance du câble en service.

1. PERTES PAR FROTTEMENT

Les pertes par frottement sont provoquées par le frottement de l'acier des câbles sur la gaine métallique, ou plastique servant de conduit aux câbles. Lors de la mise en tension, le câble tiré du côté du vérin est fixe du côté opposé (ancrage mort dans le cas d'une mise en tension d'un seul côté). Le déplacement du câble à l'intérieur de la gaine est gêné par sa courbure s'il n'est pas rectiligne (le câble est « plaqué » sur le côté du centre de courbure), il en est de même en ligne droite, la gaine ni le câble ne sont rigoureusement rectilignes ; on admet en général une variation parasite de l'ordre de 0,5 à 0,75° d'angle équivalent par mètre de câble.

1. Câble courbe : relation courbure-force radiale

Supposons un élément de câble de longueur ds , de rayon de courbure r soumis à un effort de traction F (fig. 11-1). La force radiale p a pour résultante $P = pds$. La variation d'angle entre les deux extrémités de cet élément de câble vaut $d\alpha$. On a

naturellement $r = \frac{ds}{d\alpha}$.

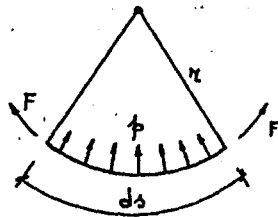


Fig. 11-1. Force répartie radiale due à la courbure d'un câble tendu

L'équilibre des efforts donne : $P = Fd\alpha = pds$

soit : $p = F \frac{d\alpha}{ds} = \frac{F}{r}$

$$p = \frac{F}{r}$$

Cette formule est bien connue en hydraulique, elle donne la force de traction exercée par un liquide sur son enveloppe circulaire $F = pr$.

• Exemple : Soit un câble parabolique de 30 m de longueur (fig. 11-2) tendu à 1,7 MN et ayant une flèche de 1 m.

Pour une parabole d'équation $y = ax^2$, le rayon de courbure vaut $r = \frac{1}{2a}$. On trouve :

$$y = \frac{x^2}{225}, \text{ soit } r = \frac{225}{2} = 112,5 \text{ m.}$$

La pression radiale exercée par le câble sur le béton vaut :

$$p = \frac{1,7}{112,5} = 0,0151 \text{ MN/ml (soit } 1,54 \text{ t/ml) dirigée vers le haut.}$$

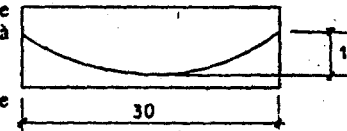


Fig. 11-2.

1.2. Frottement en courbe

Si f représente le coefficient de frottement, p la force radiale, par unité de longueur, le frottement par mètre linéaire vaut (fig. 11-3) :

$$\phi = -fp = -fF \frac{d\alpha}{ds}$$

et la résultante du frottement dF vaut :

$$dF = \phi ds = -fF d\alpha$$

d'où l'équation différentielle : $\frac{dF}{F} = -f d\alpha$ qui s'intègre en $F = F_0 e^{-f\alpha}$.

La valeur de α à prendre en compte est représentée par la somme des variations d'angle du câble entre l'ancrage et le point étudié.

On détermine α en additionnant les angles du câble avec l'horizontale en chaque point d'inflexion, à son extrémité et au point étudié.

Dans le cas d'un câble gauche, on pourra, par souci de simplification, prendre la somme des déviations angulaires par rapport aux plans verticaux et horizontaux, parallèle à l'axe longitudinal de la poutre.

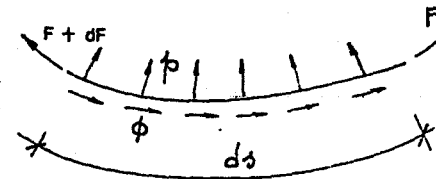


Fig. 11-3. Force répartie radiale due à la courbure et linéaire due au frottement d'un câble tendu

Valeurs courantes des variations d'angle α

- Pont-dalle (fig. 11-4)

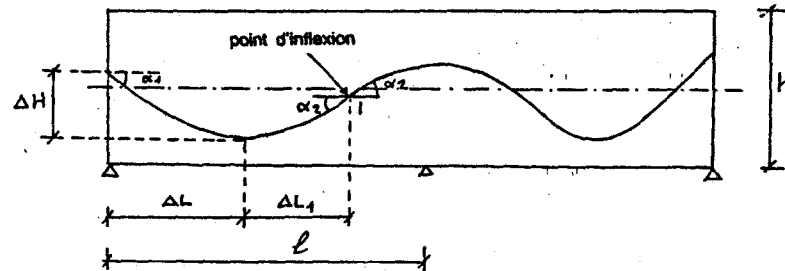


Fig. 11-4. Variation d'angles d'un câble.

La valeur de α à prendre en compte sur l'appui intermédiaire vaut :

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_2.$$

Les angles unitaires α_i sont de l'ordre de : $\text{tg}\alpha_1 = \frac{2 \Delta H}{\Delta L}$ en assimilant

la courbe à une fraction de parabole de sommet situé à l'abscisse ΔL , avec : $\Delta L = l/2$ et $\Delta H = h/2$.

d'où : $\text{tg}\alpha_1 = \frac{2h}{l}$ avec $\frac{h}{l} \approx 1/25$ à $1/35$

$$\text{tg}\alpha_1 = \frac{1}{15} = 0,067 \text{ d'où : } \alpha_1 = 3^\circ 50'$$

de même : $\text{tg}\alpha_2 = \frac{\Delta H}{\Delta L_1} = \frac{h}{l/4} = \frac{4}{30} \rightarrow \alpha_2 \approx 7^\circ 35'$

Pour une dalle isostatique on aurait : $\text{tg}\alpha_1 = \frac{2 \times 0,6 h}{l/2} \approx 0,08$

soit : $\alpha_1 = 4^\circ 30'$.

- Poutre (fig. 11-5)

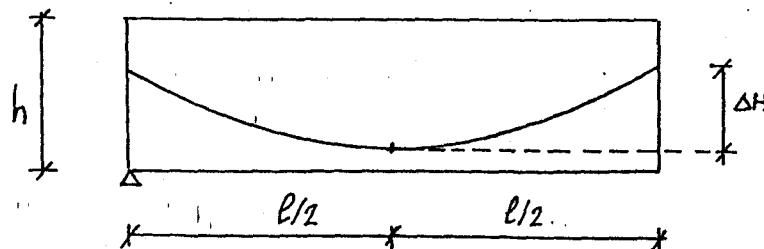


Fig. 11-5.

Avec $\frac{h}{l}$ variant de $\frac{1}{15}$ à $\frac{1}{20}$:

$$\Delta H \sim 0,60 h$$

$$\text{tg}\alpha_1 = \frac{2 \times \Delta H}{l/2} = \frac{4\Delta H}{l} = 0,14 \text{ soit } \alpha_1 \sim 8^\circ.$$

On retiendra comme angle de relevage à l'appui :

- dalles : 3 à 5°
- poutres : 6 à 12°
- pont en encorbellement 25 à 30° pour les câbles de fléau
- câbles relevés en travées : 20 à 25°.

1.3. Frottement en ligne droite

Les ondulations parasites du câble correspondent à un angle équivalent par unité de longueur. On définit un coefficient de frottement par mètre linéaire φ et la formule générale du frottement devient :

$$F = F_0 e^{-f\alpha - \varphi x}$$

Par une approximation de quelques pour cent, on peut développer en série l'exponentielle et n'en prendre que le premier terme. L'approximation réalisée ainsi n'est pas supérieure à l'incertitude existant sur les valeurs des coefficients de frottement.

On obtient alors :

$$\Delta F = F - F_0 = F_0(f\alpha + \varphi x)$$

Les valeurs des coefficients f et φ varient suivant la nature du câble et la nature des ingrédients utilisés pour améliorer le glissement.

• Exemple : Considérons la section d'un câble située à 60 m de l'ancrage actif et une variation totale d'angle de 30° (cette valeur représente la somme de toutes les variations d'angle de point d'inflexion à point d'inflexion) avec $f = 0,18$ et $\varphi = 0,0020$ nous obtenons par la formule exacte :

$$F = F_0 e^{-0,18 \times \frac{\pi}{6} - 0,002 \times 60} = 0,807 F_0$$

et par la formule approchée :

$$F = F_0 (1 - f\alpha - \varphi x) = 0,786 F_0$$

soit 3% de pertes de plus.

Valeurs numériques des coefficients de frottement en post-tension

Pour plus de précisions, on pourra prendre les valeurs données dans l'annexe 3 du BPEL reproduite ci-après.

Dans le cas fréquent où les câbles sont logés dans des conduits intérieurs au béton et où ils sont constitués soit de fils tréfilés ronds et lisses, soit de torons, on peut, pour l'évaluation *a priori* des pertes de tension dues au frottement, s'appuyer sur les valeurs moyennes des coefficients f et φ figurant au tableau ci-après. Ces valeurs ne sont utilisables que si les conditions suivantes sont toutes remplies :

— les armatures ne sont pas oxydées et comportent un revêtement de protection provisoire (huile ou graisse) ;

— les conduits sont en bon état, c'est-à-dire qu'ils ne présentent ni oxydation intérieure prononcée, ni ovalisation ou déformations locales dues par exemple à des chocs lors des manutentions ou lors du bétonnage, ni dégrafage du feuillard ou déchirure ;

— le tracé réel des câbles est conforme au plan, avant bétonnage, et les dispositions prises pour le maintien en position des conduits sont suffisantes pour qu'il n'y ait pas de déplacement sensible lors du bétonnage ;

— toutes dispositions ont été prises pour permettre la mise en place de câbles supplémentaires au cas où la tension probable ne serait pas obtenue sur chantier.

Cas	Nature des armatures	f		φ
		$3 \leq R \leq 6$ (en m)	$R \geq 6$ (en m)	
I Câbles ne traversant pas des joints ou surfaces de reprise	fils tréfilés ronds et lisses	$\frac{22 - R}{100}$	0,16	0,002
	torons	$\frac{24 - R}{100}$	0,18	
II Câbles traversant de nombreux joints ou reprises de bétonnage	fils tréfilés ronds et lisses	$\frac{24 - R}{100}$	0,18	0,003
	torons	$\frac{26 - R}{100}$	0,20	

Des valeurs intermédiaires entre celles qui correspondent aux cas I et II du tableau ci-dessus peuvent être choisies en fonction du nombre de joints ou de surfaces de reprise, des possibilités de contrôle, du maintien effectif en position des conduits et des mesures précédemment effectuées sur des ouvrages analogues.

1.4. Représentation graphique

Si l'on assimile les angles à des longueurs fictives, on obtient une représentation linéaire dans un système de coordonnées semi-logarithmiques.

En raisonnant sur les contraintes σ et σ_0 et non sur les efforts F et F_0 , nous obtenons : $\sigma = \sigma_0 e^{-f\alpha - \varphi x}$ avec α en radians

soit : $\sigma = \sigma_0 e^{-f\alpha/57,3 - \varphi x}$ avec α en degrés

et en prenant le logarithme décimal (en se rappelant que $\log_{10} e = 0,434$), on obtient :

$$1\,000 \log \frac{\sigma_0}{\sigma} = \frac{434}{57,3} f\alpha^0 + 434 \varphi x$$

$$\text{ou } 1\,000 \log \frac{\sigma_0}{\sigma} = 7,58 f\alpha^0 + 434 \varphi x$$

Cette représentation due à G. DREUX permet une recherche facile des contraintes en n'importe quel point (fig. 11-6).

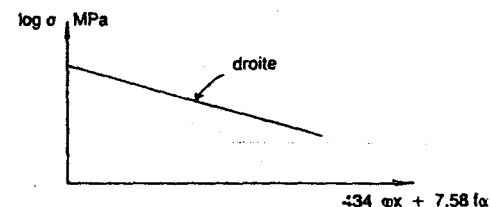


Fig. 11-6. Représentation semi-logarithmique de la contrainte après frottement

2. PERTES PAR GLISSEMENT A L'ANCRAGE

Ces pertes correspondent à un glissement des torons ou fils dans les clavettes et des clavettes dans les plaques d'ancrages lors de la détension du vérin et du blocage des clavettes. L'effort de traction exercé par le câble bloque par effet de coin les clavettes dans les ancres. Ce glissement prend des valeurs de 1 à 12 mm suivant la puissance de l'ancrage et le procédé de précontrainte utilisé. Il figure dans la fiche d'agrément.

Ce mouvement qui a lieu en sens inverse de celui qui a été créé par la mise en tension, provoque un frottement de signe opposé au précédent. Dans le diagramme contrainte-abscisse, la droite représentative de la contrainte est de pente opposée à celle qui représente le frottement. La pente de cette droite, en valeur absolue, représente la perte de tension par unité de longueur.

En raisonnant sur un diagramme basé sur l'équation, $\sigma = \sigma_0(1 - f\alpha - \varphi x)$, la tension sous vérin vaut σ_0 , et, après blocage des clavettes et glissement à l'ancrage σ_1 .

Le glissement à l'ancrage (g en mètre) se répercute jusqu'à l'abscisse λ de tension σ_1 (fig. 11-7).

La symétrie des pentes entraîne :

$$\sigma_0 - \sigma_2 = 2(\sigma_0 - \sigma_3) = 2p\lambda\sigma_0$$

si p désigne la valeur $f\alpha + \varphi x$.

A l'abscisse x , on a :

$$\Delta\sigma = (\sigma_0 - \sigma_2) \frac{\lambda - x}{\lambda}$$

$$= 2\sigma_0 p \lambda \frac{\lambda - x}{\lambda} = 2\sigma_0 p (\lambda - x)$$

Un élément de câble de longueur dx subit un raccourcissement dû à $\Delta\sigma$ égal à $dx \Delta\sigma/E_p$. Or, le glissement g représente l'intégrale de ces raccourcissements, soit :

$$g = - \int_0^\lambda \frac{\Delta\sigma}{E_p} dx = - \int_0^\lambda \frac{2\sigma_0}{E_p} p(\lambda - x) dx = \frac{\sigma_0 p \lambda^2}{E_p}$$

d'où la longueur d'influence du glissement g :

$$\lambda = \sqrt{\frac{g E_p}{\sigma_0 p}}$$

avec : $p = f\alpha + \varphi x$, $\sigma_0 p$ représente la pente de la droite $\sigma_0 \sigma_3$, et $g E_p$ l'aire du triangle $(\sigma_0 \sigma_2 \sigma_3)$.

• Application numérique de la méthode

Soit un câble composé de :

- une partie courbe AB de 8,50 m de longueur et de 24° de variation d'angle ;
- une partie droite de 23 m (BN) ;
- une partie droite de 12,5 m (NC) ;
- une partie courbe de 7,50 m et de variation d'angle 21°30' (CD).

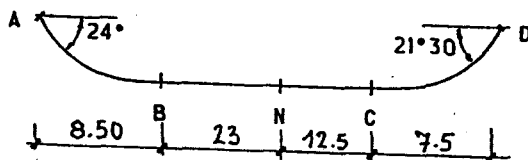


Fig. 11-8.

Le point N est le point critique où l'on souhaite calculer la contrainte après pertes de frottement et de glissement à l'ancrage.

La mise en tension sera effectuée à partir des deux extrémités.

a) Pour avoir une contrainte en N de 1 200 MPa

Quelles doivent être les contraintes de traction aux deux extrémités ?

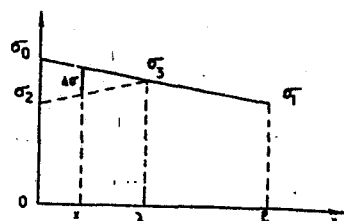


Fig. 11-7. Action du glissement à l'ancrage sur la contrainte de l'acier

Avec : $\varphi = 0,0018$ et $f = 0,20$, l'abscisse de calcul vaut :

$$7,58f\alpha^0 + 434\varphi x = 1,516\alpha^0 + 0,781x$$

Les longueurs représentatives sur le diagramme valent :

$$AB: 1,516 \times 24^\circ + 0,781 \times 8,50 = 43 \text{ mm, cumulé } 43 \text{ mm}$$

$$BN: 1,516 \times 0 + 0,781 \times 23 = 18 \text{ mm, cumulé } 61 \text{ mm}$$

$$NC: 1,516 \times 0 + 0,781 \times 12,5 = 10 \text{ mm, cumulé } 71 \text{ mm}$$

$$CD: 1,516 \times 21^\circ 5' + 0,781 \times 7,5 = 38,5 \text{ mm, cumulé } 109,5 \text{ mm}$$

En menant une droite à 45° à partir du point N (voir graphique 11-9), on lit :

$$\sigma_A = 1\,384 \text{ MPa}$$

$$\sigma_B = 1\,253 \text{ MPa}$$

$$\sigma_C = 1\,225 \text{ MPa}$$

$$\sigma_D = 1\,340 \text{ MPa}$$

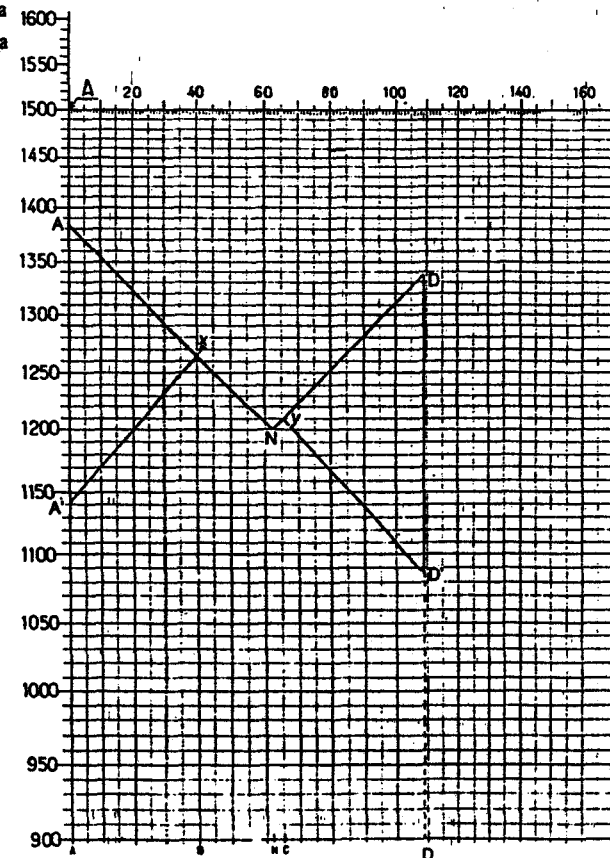


Fig. 11-9.

b) Calcul des allongements du câble en A et B

L'allongement du câble est égal à la somme des produits :

longueur de l'élément $\times$ contrainte moyenne

Tronçon	ℓ	σ moyen	$\ell \times \sigma$	
AB	8,50	1 318,5	11 207	AN = 39 417 ND = 24 775
BN	23	1 226,5	28 210	
NC	12,50	1 212,5	15 156	
CD	7,5	1 282,5	9 619	

Avec $E = 190\,000$ MPa pour les torons, on obtient :

$$\ell_A = \frac{39\,417}{190\,000} \times 10^3 = 207 \text{ mm}$$

$$\ell_D = \frac{24\,775}{190\,000} \times 10^3 = 130 \text{ mm}$$

c) Glissement à l'ancrage

Le glissement indiqué pour le procédé de précontrainte utilisé est de 5 mm ($g = 0,005$).

La droite représentative de la tension après glissement à l'ancrage a une pente de 45° en A' (-45° en D') telle que l'aire du triangle AXA' = gE_p (de même en D = aire DYD' = gE_p).

$$gE_p = 190\,000 \times 0,005 = 950.$$

Tronçon AB : pente $\sigma_{op} = \frac{\sigma_B - \sigma_A}{AB} = \frac{1\,384 - 1\,253}{8,5} = 15,41 \text{ MPa/m.}\ell$

$$\lambda = \sqrt{\frac{gE_p}{\sigma_{op}}} = \sqrt{\frac{950}{15,41}} = 7,85 \text{ m} < 8,50 \text{ (soit l'abscisse du point X:}$$

$$43 \text{ mm} \times 7,83/8,5 = 39,7 \text{ mm sur la figure 11-9).}$$

L'influence du glissement à l'ancrage du côté A ne s'exerce pas jusqu'au point B.

La contrainte en A' lue sur le graphique (pente 45°) vaut 1 142 MPa.

Du côté B, on a le schéma suivant si le glissement a une influence jusqu'en N (fig. 11-10) :

$$g_1E_p = \frac{(1\,340 - 1\,225)}{2} \times 7,50 = 431,25$$

$$g_2E_p = \frac{(1\,225 - 1\,175)}{2} \times 12,50$$

$$= 312,50$$

$$g_3E_p = (1\,225 - 1\,175) \times 7,50 = 375$$

$$gE_p = 2g_1E_p + g_2E_p + g_3E_p = 1\,550$$

$$g = \frac{1\,550}{190\,000} = 0,0082 \text{ m}$$

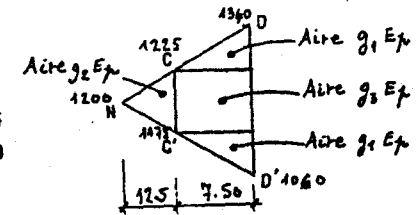


Fig. 11-10.

La valeur trouvée étant supérieure à 5 mm, le point Y limite de l'influence du glissement d'ancrage en B, n'atteint pas le point N.

Dépasse-t-il le point C? oui car :

$$2g_1E_p = \left(\frac{1\,340 - 1\,225}{190\,000} \right) \times 7,5 = 0,0045 < 0,005 \text{ m.}$$

Recherche du point Y (fig. 11-11) entre C et N.

$$g_1E_p = 431,25 \text{ (vu plus haut)}$$

$$g_3E_p = 2y^2$$

$$g_2E_p = 4y \times 7,50 = 30y$$

$$\text{d'où : } gE_p = 190\,000 \times 0,005 = 2 \times 431,25 + 2y^2 + 30y$$

$$\text{ou } 2y^2 + 30y - 87,5 = 0 \text{ dont la racine vaut : } y = 2,50 \text{ m}$$

$$\sigma_y = 1\,225 - 2 \times 2,50 = 1\,220 \text{ MPa}$$

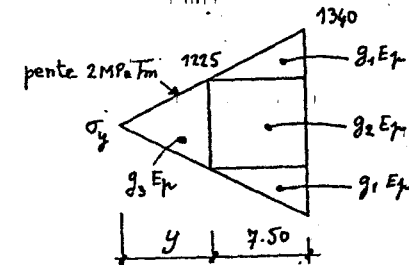


Fig. 11-11.

$$\text{Abscisse du point Y sur le graphique} = AC - \frac{2,5}{12,5} \times NC = 71 - 2 = 69 \text{ mm.}$$

Par lecture, on obtient les tensions après recul à l'ancrage :

$$1\,142 \text{ MPa en A' ;}$$

$$1\,110 \text{ MPa en D' .}$$

La courbe représentative des contraintes est donc A'XNYD'.

• Cas des grands glissements avec câbles courts

Lorsque la formule $\lambda = \sqrt{\frac{gE_p}{\sigma_{op}}}$ donne une valeur λ supérieure à la longueur du câble, l'influence du recul à l'ancrage s'exerce jusqu'à l'autre extrémité.

Pour un câble tendu d'un seul côté, ce qui est le cas pour les câbles courts, on obtient le diagramme suivant (fig. 11-12) :

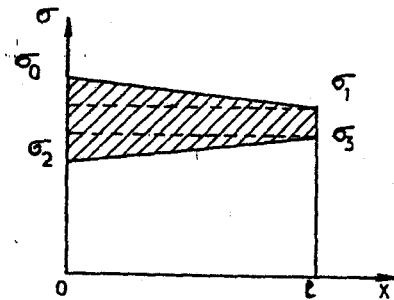


Fig. 11-12. Cas de grande valeur de glissement. Câble tendu à partir d'une seule extrémité

L'aire hachurée devant être égale à gE_p .

Exemple: $g = 10 \text{ mm}$ avec: $\varphi = 0,0015/\text{m}$
 $\ell = 25 \text{ m}$ $E_p = 190\,000 \text{ MPa}$ (torons)
 $\sigma_o = 1\,600 \text{ MPa}$

on trouve $\lambda = \sqrt{\frac{190\,000 \times 0,01}{0,0015 \times 1\,600}} = 28,14 \text{ m} > 25 = \ell$.

La pente vaut $0,0015 \times 1\,600 = 2,4 \text{ MPa/m}$.

Aire = $\ell^2 \cdot \text{pente} + \ell \cdot (\sigma_1 - \sigma_3) = gE_p = 0,01 \times 190\,000 = 1\,900$

soit l'inconnue: $\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{1\,900 - 2,4 \times 25^2}{25} = 16$

d'où: $\sigma_o = 1\,600 \text{ MPa}$
 $\sigma_1 = 1\,600 \ell \cdot \text{pente} = 1\,540$
 $\sigma_3 = 1\,540 - 16 = 1\,524$
 $\sigma_2 = 1\,524 - 60 = 1\,464$

• Cas de mise en tension par les deux extrémités

Le phénomène que nous venons de décrire se reproduit donc aux deux extrémités du câble. Il faut considérer deux cas.

1^{er} cas

Les longueurs d'influence du recul à l'ancrage n'interfèrent pas (câbles longs, frottements élevés, faible recul à l'ancrage) (fig. 11-13).

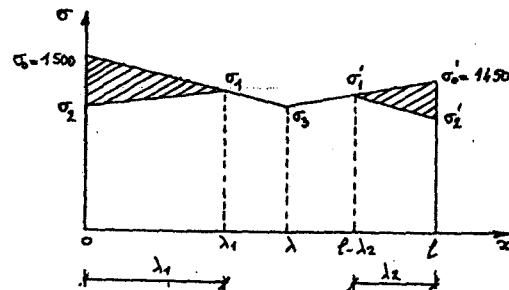


Fig. 11-13. Câble tendu à partir des deux extrémités (câble long)

Exemple: $\ell = 100 \text{ m}$, câble non symétrique
 $g = 4 \text{ mm} = 0,004 \text{ m}$
 $f = 0,25$
 $\varphi = 0,0028$
 $E_p = 200\,000 \text{ MPa}$ (fils)

avec une pente moyenne sur la première partie du câble (0 à 50 m) supposée égale à:

$$(p\sigma_o)_1 = 1\,500 \left(0,0028 \times 50 + 0,25 \times \frac{35^\circ}{180^\circ} \right) / 50 = 5,66 \text{ MPa/m}$$

et sur la deuxième partie:

$$(p\sigma_o)_2 = 1\,450 \left(0,0028 \times 50 + 0,25 \times \frac{27^\circ}{180^\circ} \right) / 50 = 5,15 \text{ MPa/m}$$

λ et σ_3 sont calculés par:

$$\sigma_3 = \sigma_o - \lambda(p\sigma_o)_1 = \sigma_o' - (\ell - \lambda)(p\sigma_o)_2$$

soit:

$$\lambda = \frac{1\,500 - 1\,450 + 5,15 \times 100}{5,66 + 5,15} = 52,27 \text{ m}$$

$$\sigma_3 = 1\,500 - 52,27 \times 5,66 = 1\,204,1 \text{ MPa}$$

et λ_1 par $(\sigma_o - \sigma_1)\lambda_1 = gE_p = 800 = (p\sigma_o)_1\lambda_1^2$

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{800}{5,66}} = 11,89$$

de même pour λ_2 :

$$\lambda_2 = \sqrt{\frac{800}{5,15}} = 12,46$$

On vérifie bien que $\lambda_1 + \lambda_2 = 24,35 \text{ m}$, est inférieur à la longueur du câble.

2^e cas

Les longueurs d'influence du recul à l'ancrage interfèrent, si par la méthode précédente on obtient:

$$\lambda_1 + \lambda_2 > \ell$$

C'est le cas de câbles courts, tirés des deux côtés avec des frottements faibles et des reculs à l'ancrage importants.

Exemple: $\ell = 40 \text{ m}$ $\sigma_o = 1\,500 \text{ MPa}$
 $g = 20 \text{ mm}$ (valeur peu commune) $\sigma_o' = 1\,450 \text{ MPa}$
 $f = 0,16$
 $\varphi = 0,0016$
 $E_p = 190\,000 \text{ MPa}$ (torons)

avec une pente moyenne en première partie (de 0 à 20 m) de câble égale à:

$$(p\sigma_o)_1 = 1\,500 \left(0,0016 \times 20 + 0,16 \times \frac{18^\circ}{180^\circ} \right) / 20 = 3,60 \text{ MPa/m}$$

et en deuxième partie (20 à 40 m):

$$(\sigma_0)_2 = 1450 \left(0,0016 \times 20 + 0,16 \times \frac{13^\circ}{180^\circ} \right) / 20 = 3,16 \text{ MPa/m}$$

Le point d'intersection des deux droites de frottement a pour valeur:

$$\lambda = \frac{3,16 \times 40 + 1500 - 1450}{3,60 + 3,16} = 26,09 \text{ m}$$

$$\sigma_3 = 1500 - 26,09 \times 3,6 = 1406 \text{ MPa}$$

si $\lambda_1 = \lambda$ et $\lambda_2 = \ell - \lambda$, l'aire hachurée du 1^{er} cas vaudrait:

$$(\sigma_0 - \sigma_3)\lambda + (\sigma_0 - \sigma_3)(\ell - \lambda) = (1500 - 1406) \times 26,09 + (1450 - 1406) \times 13,91$$

soit 3 064,50 MPa.m

or, gE_p vaut $190\,000 \times 0,020 = 3\,800 > 3\,064,5$.

La contrainte σ_4 à l'abscisse λ va diminuer pour augmenter l'aire hachurée (fig. 11-14) telle que:

$$(\sigma_3 - \sigma_4) \times \ell = 3\,800 - 3\,064,5 = 735,5$$

$$\text{d'où: } \sigma_4 = \sigma_3 - 18,4 = 1\,387,6 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \sigma_4 - (\sigma_0 - \sigma_3) = 1\,293,6 \text{ MPa}$$

$$\sigma'_2 = \sigma_4 - (\sigma'_0 - \sigma_3) = 1\,343,6 \text{ MPa (fig. 11-15)}$$

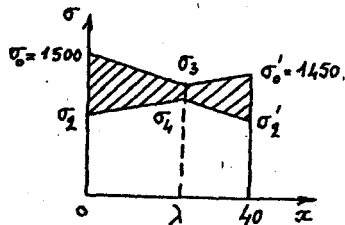


Fig. 11-14. Câble court tendu à partir des deux extrémités

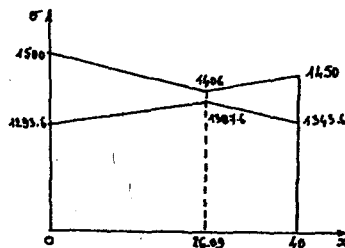


Fig. 11-15.

3. NON-SIMULTANÉITÉ DE MISE EN TENSION (RACCOURCISSEMENT ÉLASTIQUE)

Supposons qu'une poutre soit armée avec plusieurs câbles de précontrainte. La mise en tension des câbles ne pouvant s'effectuer que câble par câble, la mise en tension du deuxième câble va entraîner un raccourcissement de la poutre et du premier câble; de même la mise en tension du troisième câble va entraîner un raccourcissement de la poutre et les deux premiers câbles et ainsi de suite.

Prenons l'exemple d'une poutre à deux câbles, chaque câble reprend un effort $P/2$, le raccourcissement du béton à la mise en tension d'un câble vaut:

$$\frac{\Delta \ell_b}{\ell} = \frac{\sigma_b}{E_{bi}} = \frac{P}{2 SE_{bi}}$$

si: S désigne l'aire de béton,

E_{bi} le module instantané du béton,

$$\Delta \ell_b = \text{raccourcissement du béton} = \frac{P\ell}{2SE_{bi}}$$

À la mise en tension du deuxième câble, le béton se raccourcit de $\Delta \ell_b$, il en est donc de même pour le premier câble qui subit un raccourcissement:

$$\Delta \ell_p = \Delta \ell_b = \ell \frac{\Delta \sigma_p}{E_p} = \frac{P\ell}{2SE_{bi}}$$

La chute de contrainte (perte de tension) dans le premier câble à la mise en tension du deuxième câble vaut:

$$\Delta \sigma_p = \frac{1}{2} \frac{E_p \sigma_b}{E_{bi}}$$

Comme le deuxième câble n'est pas influencé, la perte moyenne des deux câbles vaut:

$$\Delta \sigma_p = \frac{1}{4} \frac{E_p \sigma_b}{E_{bi}}$$

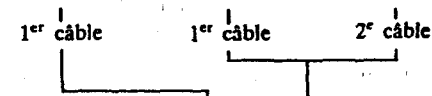
Pour trois câbles, on obtient à la mise en tension du deuxième câble, un effort $\frac{P}{3}$ et un raccourcissement du béton $\Delta \ell = \frac{P}{3SE_{bi}}$, donc un raccourcissement du premier câble $\frac{P}{3SE_{bi}}$ pour un effort $\frac{P}{3}$.

Pour la mise en tension du troisième câble, le raccourcissement du béton (et donc des deux premiers câbles) vaut:

$$\frac{P}{3SE_{bi}}$$

soit un raccourcissement moyen égal à:

$$\frac{1}{SE_{bi}} \times \frac{1}{3} \left(\frac{P}{3} + \frac{P}{3} + \frac{P}{3} \right) = \frac{1}{3} \frac{P}{SE_{bi}}$$



à la mise en tension du: 2^e câble 3^e câble

$$\text{d'où une perte moyenne: } \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \right) \frac{E_p \sigma_b}{E_{bi}} = \frac{1}{3} \frac{E_p \sigma_b}{E_{bi}}$$

Pour 4 câbles on obtient:

$$\frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4} \right) \frac{E_p \sigma_b}{E_{bi}} = \frac{3}{8}$$

Et pour n câbles :

$$\frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \dots \right) = \frac{n(n-1)}{2n^2} \cdot \frac{E_p \sigma_{bo}}{E_{bi}}$$

$$\Delta \sigma_n = \frac{(n-1)}{2n} \cdot \frac{E_p \sigma_{bo}}{E_{bi}}$$

avec : n = nombre de câbles

E_p = module d'Young des aciers de précontrainte (200 000 MPa pour les fils et 190 000 MPa pour les torons) ;

σ_{bo} = contrainte moyenne du béton au niveau du câble à la mise en tension.

E_{bi} = module instantané du béton.

Pour $n = 2$ le coefficient vaut 1/4.

Pour $n = 3$ le coefficient vaut 1/3.

Pour $n = 4$ le coefficient vaut 3/8.

Pour $n = \infty$ le coefficient vaut 1/2.

Exemple : Pour un béton de contrainte caractéristique $f_{28} = 30$ MPa, $\sigma_{bo} = 7,5$ MPa, $E_p = 190\,000$ avec 8 câbles, $E_{bi} = 34\,200$ MPa

$$\Delta \sigma_n = \frac{7}{2 \times 8} \times \frac{190\,000 \times 7,5}{34\,200} = 18,2 \text{ MPa.}$$

Le BPEL préconise de prendre un coefficient 2 pour les variations de contraintes dues à la contrainte relative à la phase de mise en tension et aux actions permanentes appliquées simultanément à cette mise en tension : $(\sigma_{bo})_1$, et la valeur 1 pour les variations de contrainte dues aux actions permanentes postérieures à cette phase de précontrainte, y compris celles dues aux armatures de précontrainte mises en tension ultérieurement $(\sigma_{bo})_2$ avec :

$$(\sigma_{bo})_1 + (\sigma_{bo})_2 = (\sigma_{bo})$$

et :

$$\Delta \sigma_n = \frac{E_p}{E_{bi}} \left[\frac{1}{2} (\sigma_{bo})_1 + (\sigma_{bo})_2 \right]$$

4. PERTE DUE AU RETRAIT

Le retrait est un phénomène de raccourcissement du béton dans le temps, dû à une évaporation de l'eau excédentaire contenue dans le béton et à des réactions chimiques. Ce retrait a lieu dans les premiers mois après le coulage du béton*.

Forfaitairement pour le calcul des pertes, le règlement BPEL admet de prendre les valeurs suivantes :

* Voir annexe A.

BPEL	ϵ_r
Quart Sud-Est de la France.....	$3 \cdot 10^{-4}$
Autres régions de France.....	$2 \cdot 10^{-4}$

La valeur de la perte de précontrainte due au retrait vaut :

$$\Delta \sigma_r = \epsilon_r E_p$$

5. PERTE DUE AU FLUAGE

Le fluage est caractérisé par une augmentation de la déformation du béton dans le temps. Ainsi pour une pièce comprimée qui subit un raccourcissement instantané ϵ_i à la mise en charge, on constate que la déformation totale augmente et peut atteindre 3 fois la déformation instantanée.

Le fluage correspond à une déformation dans le temps à effort constant (et donc à longueur variable), la relaxation correspondant à une chute de tension (ou de compression) à longueur constante.

Le raccourcissement instantané vaut :

$$\frac{\Delta \ell}{\ell} = \frac{\sigma_{bc}}{E_{bi}}$$

Le raccourcissement final vaut environ $3 \frac{\Delta \ell}{\ell}$, la part due au fluage vaut donc :

$$\epsilon_{ff} = \frac{2\sigma_{bc}}{E_{bi}}$$

Le raccourcissement des aciers de précontrainte vaut donc ϵ_{ff} , ce qui entraîne une perte de précontrainte $\Delta \sigma_n$:

$$\Delta \sigma_n = 2\sigma_{bc} \frac{E_p}{E_{bi}}$$

où σ_{bc} représente la contrainte moyenne du béton au niveau du câble que l'on peut supposer calculée à un temps infini.

Pour plus de précision, on pourra utiliser la formule donnée par le BPEL :

$$\Delta \sigma_n = (\sigma_b + \sigma_M) \frac{E_p}{E_{bi}}$$

où σ_b représente la contrainte finale et σ_M la contrainte maximale supportées par le béton dans la section considérée, au niveau du centre de gravité des armatures de précontrainte sous l'action de la précontrainte et aux actions permanentes qui peuvent être variables dans le temps (précontrainte qui diminue et contraintes dues aux charges permanentes qui peuvent varier en hausse ou en baisse dans le temps).

6. PERTE PAR RELAXATION

La relaxation de l'acier est un relâchement de tension à longueur constante.

Elle n'apparaît pour les aciers à haute limite élastique utilisée en béton précontraint que pour les contraintes supérieures à 30 ou 40 % de leur contrainte de rupture garantie.

Elle dépend de la nature de l'acier, de son traitement et l'on distingue des aciers :

- à relaxation normale, RN ;
- à très basse relaxation, TBR.

Compte tenu de la faible différence de coût existant entre ces aciers, l'économie réalisée sur les aciers par une perte par relaxation plus faible, fait choisir en général les aciers TBR.

Un acier est caractérisé par sa relaxation à :

$$1\ 000 \text{ heures exprimée en } \% = \rho_{1\ 000}.$$

En général : $\rho_{1\ 000} = 2,5\%$ pour les aciers TBR
et : $\rho_{1\ 000} = 8\%$ pour les aciers RN.

La perte par relaxation s'écrit alors :

$$\Delta\sigma_p = \frac{6}{100} \left(\frac{\sigma_{pi}}{f_{prg}} - \mu_0 \right) \cdot \sigma_{pi} \cdot \rho_{1\ 000}$$

σ_{pi} étant la tension initiale de l'acier, c'est-à-dire après pertes instantanées, f_{prg} la contrainte de rupture garantie, μ_0 un coefficient pris égal à :

- 0,43 pour les aciers, TBR ;
- 0,3 pour les aciers, RN ;
- 0,35 pour les autres aciers.

7. VARIATION DANS LE TEMPS DES PERTES DIFFÉRÉES

La perte différée finale est prise égale à :

$$\Delta\sigma_d = \Delta\sigma_r + \Delta\sigma_n + \frac{5}{6} \Delta\sigma_p.$$

Le coefficient $\frac{5}{6}$ tient compte de la non-indépendance des pertes. La perte par relaxation diminue sous l'effet du retrait et du fluage du béton.

La valeur des pertes de précontrainte différée à l'âge j varie dans le temps en fonction de sa valeur finale $\Delta\sigma_d$:

$$\Delta\sigma_{d,j} = r(j) \cdot \Delta\sigma_d$$

$$\text{avec } r(j) = \frac{j}{j + 9r_m}$$

(j en jours, r_m vu plus haut à propos du fluage, exprimé en cm).

8. PERTES DE PRÉCONTRAINTES DANS LE CAS DE PRÉCONTRAINT PAR PRÉ-TENSION

Les phénomènes sont légèrement différents dans le cas de la pré-tension. On pourra se reporter au chapitre des pertes de précontraintes du BPEL et au chapitre 23 du présent cours.

9. EXEMPLE

Soit une poutre de 40 m de longueur, précontrainte par des câbles formés de torons de classe 1770 de résistance à très basse relaxation (TBR) avec une relaxation garantie à 1 000 heures : $\rho_{1\ 000} = 2,5\%$, de contrainte de rupture garantie $f_{prg} = 1\ 770$ MPa et de limite d'élasticité $f_{peg} = 1\ 583$ MPa.

La mise en tension a lieu à 12 jours sur un béton de résistance $f_{c12} = 30$ MPa et $f_{c28} = 35$ MPa. Le chantier se trouve en région parisienne, le glissement à l'ancrage est de 5 mm, les coefficients de frottement valent : $f = 0,17$, $\varphi = 0,0016$.

Le câble a une allure parabolique de 40 m de longueur et 1,10 m de flèche.

La contrainte au centre de gravité des armatures due à l'action des charges permanentes existantes à la mise en tension et à l'action de la précontrainte σ_{b12} vaut :

$$\sigma_{b12} = 7,5 \text{ MPa.}$$

La contrainte supplémentaire apportée par les actions permanentes, appliquées à 50 jours valent 1 MPa. La contrainte finale valant 7,2 MPa (fig. 11-16).

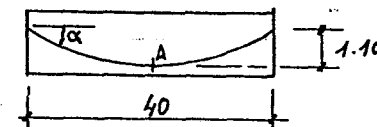


Fig. 11-16.

a) Frottement

Le calcul est effectué à mi-portée, point critique en flexion. L'angle α est tel que :

$$\tan \alpha = \frac{1,1 \times 2}{20} = 0,11 \quad \alpha = 6^\circ,28 = 0,11 \text{ rd}$$

$$\Delta\sigma_f = \sigma_{po} [1 - e^{-f\alpha - \varphi x}]$$

avec $\sigma_{po} = \text{Min} (0,80 f_{prg}; 0,90 f_{peg})$

$$\sigma_{po} = \text{Min} (0,80 \times 1\ 770; 0,90 \times 1\ 583) = 1\ 416 \text{ MPa}$$

$$\Delta\sigma_f = 1\ 416 [1 - e^{-0,17 \times 0,11 - 0,0016 \times 20}] = 70,5 \text{ MPa (5\%)}$$

b) Recul à l'ancrage

La perte moyenne de frottement par mètre vaut $\frac{70,5}{20} = 3,525 \text{ MPa/m}$;

la longueur d'influence λ de l'action du recul à l'ancrage vaut:

$$\lambda = \sqrt{\frac{AE_p}{3,525}} = \sqrt{\frac{190\,000 \times 0,005}{3,525}} = 16,42 \text{ m} < 20.$$

Le recul à l'ancrage n'a donc pas d'influence sur la contrainte de l'acier à mi-portée: $\Delta\sigma_s = 0$.

c) Non-simultanéité de mise en tension

$$\Delta\sigma_n = \sum kE_p \frac{\sigma_{bi}}{E_{ij}}, \text{ avec: } \sigma_{bi2} = 7,5 \text{ MPa.}$$

$$E_{i12} = 11\,000 \sqrt[3]{f_{cj}} = 11\,000 \sqrt[3]{30} = 34\,180 \text{ MPa}$$

$$E_{i28} = 11\,000 \sqrt[3]{f_{c28}} = 11\,000 \sqrt[3]{35} = 36\,000 \text{ MPa}$$

$$\Delta\sigma_n = \left(\frac{1}{2} \times \frac{7,5}{34\,180} + 1 \times \frac{1}{36\,000} \right) \times 190\,000 = 26,1 \text{ MPa (1,8 \%)}$$

d) Retrait

$$\epsilon_r = 2,10^{-4}$$

$$\Delta\sigma_r = 2,10^{-4} \times 190\,000 = 38 \text{ MPa (2,7 \%)}.$$

e) Fluage

En supposant que dans le cas étudié, la contrainte finale du béton au niveau du centre de gravité des câbles correspond à la contrainte maximale:

$$\sigma_b = \sigma_M = 7,2 \text{ MPa}$$

ce qui signifie qu'il n'y a pas de phases provisoires plus défavorables pour le béton à ce niveau:

$$\Delta\sigma_n = (\sigma_b + \sigma_M) \frac{E_p}{E_{ij}}$$

$$\text{avec: } E_{ij} = E_{i28} = 36\,000 \text{ MPa,}$$

$$\Delta\sigma_n = (7,2 + 7,2) \frac{190\,000}{36\,000} = 76 \text{ MPa (5,4 \%)}.$$

f) Relaxation

Avec:

$$\sigma_{pi} = \sigma_{po} - \Delta\sigma_i$$

$$\Delta\sigma_i = \text{pertes instantanées} = \Delta\sigma_r + \Delta\sigma_s + \Delta\sigma_n = 96,6 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{pi} = 1\,416 - 96,6 = 1\,319,4 \text{ MPa}$$

$$\mu_o = 0,43 \text{ pour aciers TBR;}$$

$$\Delta\sigma_p = \frac{6}{100} \left(\frac{1\,319,4}{1\,770} - 0,43 \right) 1\,319,4 \times 2,5 = 62,4 \text{ MPa (4,4 \%)}$$

g) Contrainte finale

Pertes différées:

$$\Delta\sigma_d = 38 + 76 + \frac{5}{6} \times 62,4 = 166,0 \text{ MPa}$$

$$\sigma_p = \sigma_{po} - \Delta\sigma_i - \Delta\sigma_d \text{ ou } \sigma_{pi} - \Delta\sigma_d = 1\,319,4 - 166 = 1\,153,4 \text{ MPa}$$

La perte totale valant 262,6 MPa soit 18,6 % de la tension initiale au vérin.

10. PRÉCONTRAINTÉ DE CALCUL EN BPEL: P_d

10.1. En état-limite de service

Sauf indication contraire du Cahier des Charges (CCTP), la précontrainte de calcul est égale à la plus défavorable des deux valeurs:

— précontrainte maximale $P_1 = 1,02P_o - 0,8\Delta\sigma_p$;

— précontrainte minimale $P_2 = 0,98P_o - 1,2\Delta\sigma_p$

avec: $\Delta\sigma_p$ = pertes totales de précontraintes instantanées plus différées:

$$P_d = P_1 \text{ ou } P_2$$

On prend ainsi en compte deux incertitudes:

— l'une de 2 % sur la valeur de la précontrainte à la mise en tension P_o (lecture, étalonnage du vérin et de la pompe hydraulique);

— l'autre de 20 % sur l'évaluation des pertes de précontrainte.

10.2. En état-limite ultime

La précontrainte de calcul vaut:

$$P_d = P_o - \Delta\sigma_p$$

11. ESTIMATION FORFAITAIRE DES PERTES

Les pertes de précontrainte, comme on l'a vu, dépendent d'un grand nombre de paramètres. Cependant, les méthodes de calcul ne peuvent représenter la réalité, ce qui a amené la prise en compte dans les calculs de deux précontraintes P_1 et P_2 . On peut écrire la relation suivante:

$$P_1 = P_o(1 + \lambda)$$

$$P_2 = P_o(1 - \lambda)$$

en utilisant un paramètre λ qui, on va le voir, varie assez peu.

PERTES DE PRÉCONTRAINTE

σ_{po} : Tension à l'origine = Min ($0,85f_{pg}$; $0,95f_{peg}$) si Assurance Qualité en pré-tension industrielle.

Min ($0,80f_{pg}$; $0,90f_{peg}$) dans le cas contraire.

f_{pg} : Contrainte de rupture garantie.

f_{peg} : Limite élastique conventionnelle à 1%.

σ_{pi} : Tension initiale = $\sigma_{po} - \Delta\sigma_{pi}$.

$\Delta\sigma_{pi}$: Pertes instantanées.

$\Delta\sigma_{pd}$: Pertes différées.

$\Delta\sigma_p = \Delta\sigma_{pi} + \Delta\sigma_{pd}$ = pertes totales (en cas de post-tension).

$\sigma_{pm} = \sigma_{po} - \Delta\sigma_p$ = valeur probable (et moyenne) de la précontrainte.

$\sigma_{p1} = 1,02\sigma_{po} - 0,8\Delta\sigma_p$ = valeur caractéristique maximale de la précontrainte.

$\sigma_{p2} = 0,98\sigma_{po} - 1,2\Delta\sigma_p$ = valeur caractéristique minimale de la précontrainte.

irrottement = $\frac{x}{p}$

$\lambda = \sqrt{\frac{g E_p}{p}}$ = abscisse de la limite d'influence du glissement à l'ancrage.

$$PERTES DIFFÉRÉES = \Delta\sigma_{pd} = \Delta\sigma_r + \Delta\sigma_n + \frac{5}{6} \Delta\sigma_p$$

4. $\Delta\sigma_r$: Perte due au retrait = $\epsilon_r (1 - r(j)) E_p$

$\epsilon_r = 3,10^{-4}$ dans le quart Sud-Est, = $2,10^{-4}$ ailleurs en France.

$$r(j) = \frac{j}{j + 9r_m}$$

j: Age du béton à la date de mise en précontrainte.

r_m : Rayon moyen de la pièce = section/demi-périmètre exposé à l'air en cm.

5. $\Delta\sigma_n$: Perte due au fluage du béton = $K \frac{(\sigma_M + \sigma_n) E_p}{E_i}$

σ_n : Contrainte de compression du béton au niveau du câble en phase finale.

σ_M : idem en valeur maximum.

E_i : Module d'Young instantané du béton à un âge infini.

$$6. \Delta\sigma_p: \text{Perte due à la relaxation de l'acier} = \frac{6}{100} \rho_{1000} \left(\frac{\sigma_{pi}}{f_{pg}} - \mu_0 \right) \sigma_{pi}$$

ρ_{1000} : Relaxation des aciers à 1 000 heures en %.

$\mu_0 = 0,43$ pour des aciers TBR (très basse relaxation).

$\mu_0 = 0,30$ pour des aciers RN (relaxation normale).

$\mu_0 = 0,35$ pour les autres aciers.

VARIATIONS DANS LE TEMPS: les pertes différées peuvent être calculées à t jours après mise en précontrainte par la relation:

$$\Delta\sigma_{pd}(t) = \Delta\sigma_{pd} \times r(t)$$

avec $r(t) = \frac{t}{t+9r_m}$ (r_m voir perte de retrait ci-dessus)

12

LES TIRANTS

1. GÉNÉRALITÉS

Considérons, pour se fixer les idées, un tirant soumis à un effort de traction pure N correspondant à la poussée d'un arc.

Une solution en béton armé consisterait à reprendre l'ensemble de l'effort de traction N par des aciers passifs (car les contraintes n'apparaissent dans l'acier qu'au décintrement de l'arc), le béton ne servant qu'à protéger les aciers contre la corrosion.

Une autre solution consiste à remplacer les aciers passifs par des aciers à haute limite élastique que l'on tendrait en prenant appui sur le béton de manière à comprimer le béton.

Si l'effort de précontrainte P ainsi exercé est supérieur à l'effort extérieur N , le béton reste toujours comprimé, contrairement à celui du tirant en béton armé qui se fissurerait largement, car s'allongeant de la valeur:

$$\frac{\Delta\ell}{\ell} = \frac{\bar{\sigma}_s}{E_s} \sim \frac{240}{200\,000} = 1,2\%.$$

La protection de l'acier en est alors d'autant mieux assurée.

D'autre part, lors du décintrement de l'arc, l'allongement du tirant précontraint serait celui qui correspond à une décompression du béton. Cet allongement, comme nous le verrons dans l'exemple ci-après, est bien moindre qu'en béton armé.

2. CALCUL DU TIRANT

Le béton du tirant doit être capable de supporter l'effort de compression P amené par la mise en précontrainte et ceci naturellement avant décintrement, donc avant l'action de l'effort de traction N .

Compte tenu des pertes de précontrainte, l'effort P sera plus important lors de la mise en précontrainte qu'en phase finale.

Les aciers de précontrainte doivent être déterminés pour résister, toutes pertes faites, à l'effort de traction extérieur et éviter toute décompression de béton.

Le règlement BPEL interdit toute traction de béton dans la zone d'enrobage sous combinaisons quasi permanentes (en état-limite de service) quelle que soit la classe, ce qui revient pour un tirant à le calculer toujours en classe I.

La section nette (gaines déduites) de béton est déterminée par $B = \frac{N}{\bar{\sigma}}$, si $\bar{\sigma}$ désigne la contrainte admissible ou de calcul suivant la vérification faite.

Cette section doit également satisfaire :

- aux conditions d'enrobage des câbles ;
- aux conditions de dimensions minimum aux abouts pour loger les plaques d'appuis des ancrages.

• Comportement du tirant à la rupture

À l'état-limite ultime de résistance, le béton se fissure, car l'effort extérieur pondéré est supérieur à l'effort de décompression capable du béton.

L'allongement du tirant passe par trois phases :

- une phase (1) dite élastique, de faible déformation relative car le béton se décomprime ;
- une phase (2) dite fissurée où seul l'acier résiste en phase élastoplastique ;
- une phase (3) dite plastique où l'acier atteint son palier horizontal de contrainte.

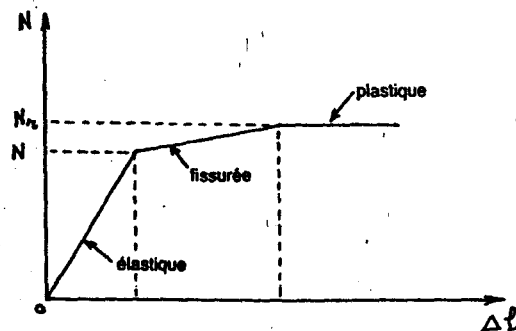


Fig. 12-1. Tirant.
Allongement en fonction de l'effort

3. EXEMPLE N° 1

Déterminons la section de béton et d'acier d'un tirant de 40 m de longueur soumis à un effort de traction N_0 de 1 MN dû aux charges permanentes et $N_0 = 0,3$ MN dû aux charges d'exploitation.

Le béton utilisé aura une résistance caractéristique $f_{c28} = 25$ MPa, les aciers seront des torons T 15 avec $f_{peg} = 1 623$ MPa et $f_{prg} = 1 814$ MPa, relaxation à 1 000 heures $\rho_{1000} = 2,5\%$, coefficients de frottement $\varphi = 0,002$ m⁻¹ et $f = 0,18$ rd⁻¹, glissement à l'ancrage = 6 mm.

3.1. Première approche de la section de béton en ELS

En état-limite de service, la section de béton doit vérifier lors de la mise en précontrainte et avant décintrement :

$$B_{net} \geq \frac{P_0}{\sigma_{bc}}$$

où P_0 représente l'effort de précontrainte avant pertes instantanées que nous estimerons en première approche égales à 10 % et pertes différées égales à 10 %.

En état-limite de service au bout d'un temps infini, on devra avoir :

$$P \geq N_G + N_Q = 1,3 \text{ MN}$$

soit :

$$P_0 = 1,2 P = 1,56 \text{ MN}$$

comme $\bar{\sigma}_{bc}$ en cours d'exécution vaut $0,6 f_{cj}$:

$$B_{net} \geq \frac{1,56}{0,6 f_{cj}}$$

Supposons j égal à 28 jours, on aura :

$$B_{net} \geq \frac{1,56}{0,6 \times 25} = 0,104 \text{ m}^2, \text{ en section brute,}$$

soit un carré de $0,35 \times 0,35$ en section nette.

3.2. Calcul des pertes

- Contrainte de mise en tension (tension à l'origine)

$$\sigma_{po} = \text{Min} (0,90 f_{peg} ; 0,80 f_{prg}) = 1 451 \text{ MPa}$$

- Pertes par frottement

$$\Delta \sigma_f = \sigma_{po}(f\alpha + \varphi x), \text{ avec } \alpha = 0, x = 40 \text{ m}$$

$$\Delta \sigma_f = 1 451(0,002 \times 40) = 116 \text{ MPa}$$

- Pertes par raccourcissement élastique dues à une non-simultanéité de mise en tension

$$\Delta \sigma_n = 0, \text{ car nous supposons qu'il n'y a qu'un seul câble.}$$

- Pertes par glissement à l'ancrage

La longueur d'influence du recul à l'ancrage est donné par la valeur approchée :

$$\lambda = \sqrt{\frac{gE_a}{p}}$$

où: g = glissement à l'ancrage = 0,006 m

E_p = module d'Young des torons = 190 000 MPa

p = pente du diagramme des contraintes en fonction de l'abscisse après frottement:

$$p = \frac{\Delta\sigma_f}{x} = \frac{116}{40} = 2,90 \text{ MPa/m}$$

d'où:

$$\lambda = \sqrt{\frac{0,006 \times 190\,000}{2,90}} = 19,82 \text{ m.}$$

Cette valeur est inférieure à la 1/2 portée du tirant, donc la valeur minimale de la précontrainte aura lieu à l'ancrage passif (fig. 12-2).

La précontrainte après pertes instantanées en ce point vaut:

$$\sigma_{pi} = \sigma_{po} - \Delta\sigma_f - \Delta\sigma_n - \Delta\sigma_g = 1451 - 116 = 1335 \text{ MPa}$$

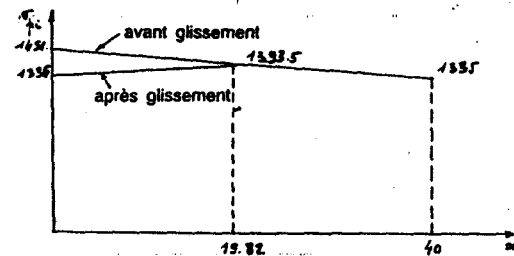


Fig. 12-2. Contraintes de l'acier avant et après glissement

• Pertes dues au retrait (Région parisienne)

$$\epsilon_r = 2,10^{-4}$$

$$\Delta\sigma_r = \epsilon_r(1 - r(j))E_p$$

où $r(j)$ représente la part du retrait effectuée entre le coulage du béton et sa mise en précontrainte.

Cet intervalle de temps peut être estimé a priori égal à 28 jours.

$$r(j) = \frac{j}{j + 9r_m}$$

avec: $j = 28$

r_m = rayon moyen de la pièce en cm

$$= \frac{\text{surface à l'air}}{\text{périmètre}} = \frac{0,35 \times 0,35}{0,35 \times 4} = 0,0875 \text{ m} = 8,75 \text{ cm}$$

soit:

$$r(j) = \frac{28}{28 + 9 \times 8,75} = 0,262$$

d'où:

$$\epsilon_r = 2 \times 10^{-4}(1 - 0,262) \times 190\,000 = 28 \text{ MPa}$$

• Pertes dues au fluage

$$\Delta\sigma_n = K \cdot \frac{\sigma_{oc}}{E_i} E_p$$

avec: $K = 2$

$$E_i = 11\,000 \sqrt[3]{25} = 32\,164 \text{ MPa}$$

σ_{oc} est la contrainte au niveau du câble que l'on peut estimer égale à:

$$\frac{N_G}{B} = \frac{1 \text{ MN}}{0,35 \times 0,35} \text{ sous charges quasi-permanentes, soit } 8,16 \text{ MPa}$$

$$\text{d'où: } \Delta\sigma_n = 2 \times \frac{8,16}{32\,164} \times 190\,000 = 96 \text{ MPa.}$$

• Pertes dues à la relaxation de l'acier

$$\Delta\sigma_p = \frac{6}{100} \rho_{1000} \times \left(\frac{\sigma_{pi}}{f_{ps}} - \mu_0 \right) \sigma_{pi}$$

avec: $\rho_{1000} = 2,5$

$$\sigma_{pi} = 1335 \text{ MPa (voir fig. 12-2)}$$

$$\mu_0 = 0,43 \text{ pour des aciers TBR}$$

$$\text{d'où: } \Delta\sigma_p = \frac{6}{100} \times 2,5 \left(\frac{1335}{1814} - 0,43 \right) 1335 = 61 \text{ MPa}$$

d'où le total des pertes:

— instantanées $\Delta\sigma_i = 116 \text{ MPa,}$

— différées $\Delta\sigma_d = 28 + 96 + \frac{5}{6} 61 = 175 \text{ MPa,}$

— totales $\Delta\sigma_p = 291 \text{ MPa.}$

et les précontraintes en phase finale:

— probable $\sigma_{pm} = \sigma_{po} - \Delta\sigma_p = 1160 \text{ MPa,}$

— maximum $\sigma_{p1} = 1,02\sigma_{po} - 0,9\Delta\sigma_p = 1247 \text{ MPa,}$

— minimale $\sigma_{p2} = 0,98\sigma_{po} - 1,2\Delta\sigma_p = 1073 \text{ MPa.}$

3.3. Détermination du câble (ELS)

En service, au bout d'un temps infini, toutes pertes faites, pour que le béton reste entièrement comprimé, il faut que sous la précontrainte minimum, l'on ait:

$$P_2 \geq N_G + N_Q = 1,3 \text{ MN}$$

$$\text{soit } A_p = \frac{1,3}{1073} \times 10^6 = 1212 \text{ mm}^2$$

$$\text{soit un nombre de torons T15 égal à: } n = \frac{1212}{139} = 8,72$$

soit : **1 câble 9T15** , $A_p = 1\,251\text{ mm}^2$

La contrainte dans l'acier est donc plus faible que prévue (section d'acier surabondante). Les pertes devraient être plus faibles. Par sécurité et pour éviter de refaire les calculs, nous les supposons inchangées ($\Delta\sigma_p = 291\text{ MPa}$).

En phase finale, la précontrainte minimale doit être égale ou supérieure à 1,3 MN, or :

$$P_2 = 0,98P_0 - 1,2\Delta P$$

avec : $\Delta P = 291 \times 1\,251 \times 10^{-6} = 0,364\text{ MN}$

d'où : $P_0 = 1,772\text{ MN}$

et $\sigma_{p0} = 1\,417\text{ MPa}$ au lieu de $1\,451\text{ MPa}$, valeur maximum autorisée.

3.4. Détermination de la section de béton (ELS)

Le moment le plus défavorable pour le béton a lieu à la mise en tension des armatures de précontrainte et avant l'action des charges extérieures.

L'effort de compression maximum du béton vaut $1,02P_0 = 1,81\text{ MN}$.

La contrainte admissible du béton en phase de construction vaut $0,6 f_{cj}$ et comme nous utiliserons des ancrages 9T15, les dimensions minimum aux appuis sont liées aux dimensions de la plaque d'appui (système PAC) (fig. 12-3).

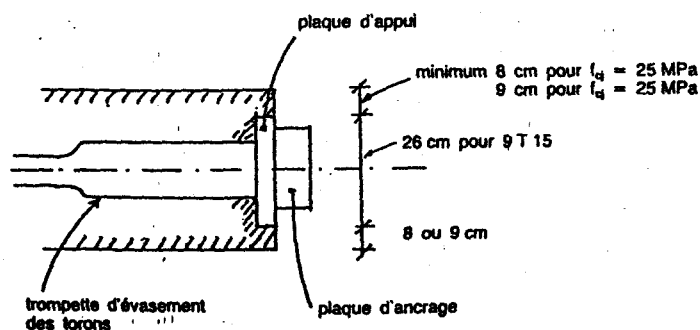


Fig. 12-3. Dispositif d'ancrage

Une valeur f_{cj} de 25 MPa donnerait une section de béton :

$$B_{net} = \frac{1,81}{0,6 \times 25} = 0,121\text{ m}^2$$

soit, avec une gaine $\varnothing 79\text{ mm}$, une section brute :

$$B = B_{net} + \frac{\pi\varnothing^2}{4} = 0,126\text{ m}^2.$$

B m ²	Dimension minimum en partie courante	Dimension minimum à l'ancrage
$f_{cj} = 25\text{ MPa}$	$0,126\text{ m}^2 = 0,36 \times 0,36$	$0,42 \times 0,42 = 0,176\text{ m}^2$

Pour des raisons d'économies nous pouvons retenir les dispositions suivantes :

- épaisseur du tirant près des extrémités : $42 \times 42\text{ cm}$;
- dimension courante du tirant : $36 \times 36\text{ cm}$;
- $f_{cj} = 25\text{ MPa}$, soit une mise en précontrainte 28 jours après le coulage.

Ayant déterminé les dimensions du béton et la section d'acier, il faudrait procéder à un nouveau calcul des pertes de précontrainte. Les modifications sont cependant minimales et nous pourrions les négliger compte tenu de l'incertitude existant sur ce mode de calcul.

3.5. Vérification en ELU de la section de béton

Nous prendrons la précontrainte probable à la mise en tension $P_0 = 1,772\text{ MN}$.

L'effort capable du béton vaut :

$$\bar{P}_b = B \cdot \bar{\sigma}_{bcu}$$

$$\text{avec : } \bar{\sigma}_{bcu} = 0,85 \frac{f_{cj}}{\gamma_b} = \frac{0,85 \times 25}{1,5} = 14,17\text{ MPa}$$

$$\text{soit } \bar{P}_b = 0,36 \times 0,36 \times 14,17 = 1,836 > P_0 = 1,772\text{ MN}.$$

3.6. Vérification en ELU de la section d'acier

Nous devons vérifier que :

- la contrainte en ELU ne dépasse pas la valeur f_{peg}/γ_p ;
- l'allongement de surtension ne dépasse pas 10‰.

Les sollicitations extérieures maximum (sollicitations rares) entraînent un effort de traction dans le tirant :

$$N_u = 1,35 N_G + 1,5 N_Q = 1,35 \times 1 + 1,5 \times 0,3 = 1,8\text{ MN}$$

La résistance du tirant vaut :

$$\bar{P}_u = A_p \cdot \frac{f_{res}}{\gamma_p} = 1\,251 \times 10^{-6} \times \frac{1\,623}{1,15} = 1,766\text{ MN}.$$

En fait l'acier de toron à une résistance dépassant f_{peg} pour un allongement suffisant du fait de la représentation par une courbe du 3^e degré du diagramme contrainte-déformation (cf. chapitre 6).

Étudions les différentes étapes de tension de l'acier (fig. 12-4).

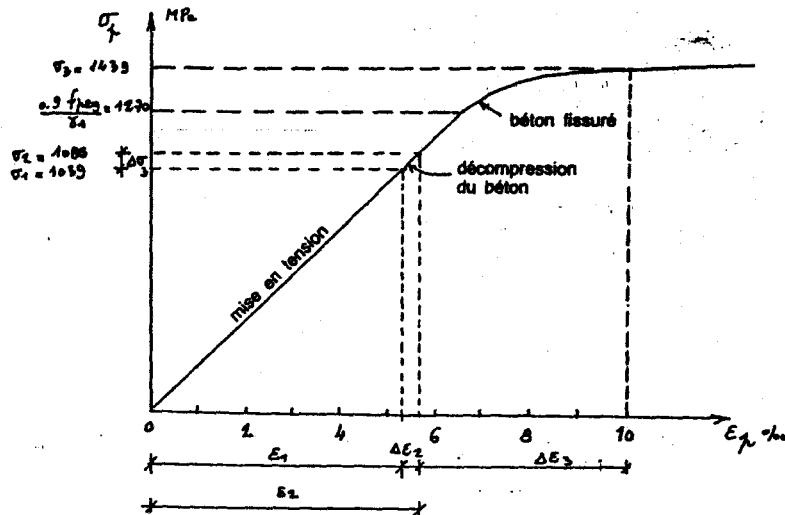


Fig. 12-4. Diagramme contrainte-déformation de l'acier de précontrainte

• Valeur finale de précontrainte

$$\sigma_1 = \sigma_{pm} = \frac{1,3}{1\,251} \times 10^6 = 1\,039 \text{ MPa}$$

• Surtension due à l'action extérieure :

Due à $N = N_G + N_Q$, l'allongement est dû à une décompression du béton de sa

contrainte : $\sigma_b = \frac{1,3}{0,36^2} = 10,03 \text{ MPa}$ à 0 MPa,

$$\Delta \epsilon_2 = 5 \frac{\sigma_b}{E_p} = \frac{5 \times 10,03}{190\,000} = 0,26\text{‰}$$

Sur la partie élastique du diagramme contrainte-déformation de l'acier c'est-à-dire pour :

$$\sigma_p \leq \frac{0,9 f_{peg}}{\gamma_1} = \frac{0,9 \times 1\,623}{1,15} = 1\,270 \text{ MPa},$$

nous avons :

$$\sigma_1 = 1\,039 \text{ MPa et } \epsilon_1 = \frac{1\,039}{190\,000} = 5,47\text{‰},$$

$$\Delta \epsilon_2 = 0,26\text{‰ et } \Delta \sigma_2 = \frac{0,26}{1\,000} \times 190\,000 = 49 \text{ MPa},$$

$$\sigma_2 = \sigma_1 + \Delta \sigma_2 = 1\,039 + 49 = 1\,088 \text{ MPa} < 1\,270.$$

Nous sommes bien toujours dans le domaine linéaire.

• Surtension de l'acier après fissuration du béton

L'acier seul résiste à un effort :

$$N_u - \sigma_2 A_p = 1,80 - 1\,088 \times 1\,251 \times 10^{-6} = 0,439 \text{ MN}$$

$$\text{soit : } \Delta \sigma_3 = \frac{0,439}{1\,251} \times 10^6 = 351 \text{ MPa}$$

$$\text{et : } \sigma_3 = \sigma_2 + \Delta \sigma_3 = 1\,088 + 351 = 1\,439 \text{ MPa} > 1\,270 \text{ MPa}.$$

Nous ne sommes plus dans le domaine élastique.

• Calcul de l'allongement $\Delta \epsilon_3$

$$\begin{aligned} \epsilon_3 &= \frac{\sigma_3}{E_p} + 100 \left(\frac{\sigma_3 \gamma_0}{f_{peg}} - 0,9 \right)^5 \\ &= \frac{1\,439}{190\,000} + 100 \left(\frac{1,15 \times 1\,439}{1\,623} - 0,9 \right)^5 \\ &= 0,0100 \text{ soit } 10\text{‰} \end{aligned}$$

$$\text{donc : } \Delta \epsilon_3 = \epsilon_3 - \Delta \epsilon_2 - \epsilon_1 = 10 - 0,26 - 5,47 = 4,27\text{‰}$$

on vérifie bien : $\Delta \epsilon_3 < 10\text{‰}$.

3.7. Ferrailage passif de la section

Nous supposons que le tirant soumis à son poids propre est accroché à des suspentes espacées de 8 m (4 suspentes) et armé longitudinalement de 4HA12 avec des cadres HA6 espacés de 0,40 m.

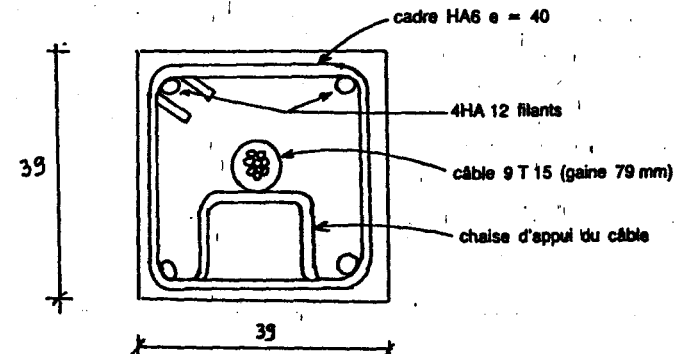


Fig. 12-5. Schéma de ferrailage

La position des aciers tendus est calculée d'après la fig. 12-6:

$$d' = 15 + 6 \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \frac{D}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\varnothing}{2}$$

$$= 21 + 0,146 \times 30 + 0,354 \times 12$$

$$= 29,6 \text{ mm}$$

soit $d' = 30 \text{ mm}$

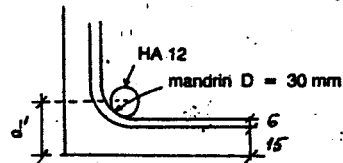


Fig. 12-6. Distance des armatures aux parois

Bien que l'enrobage minimal des armatures passives soit de 10 mm en atmosphère protégée, nous retiendrons 15 mm.

La hauteur utile du tirant est donc de 33 cm. Nous négligerons dans le calcul du moment résistant de flexion du tirant, le câble de précontrainte dont la position près de l'axe neutre n'a pas grande influence, et les aciers comprimés, qui n'étant pas tenus tous les 15 diamètres, sont susceptibles de flamber.

De l'équilibre de la section, nous pouvons écrire en ELU (cf. Traité de béton armé):

$$F_b = 0,8bx\sigma_{bcu} = A_s \frac{f_s}{\gamma_s} = F_s$$

avec: $\sigma_{bcu} = 0,85 \times 25/1,5 = 14,17 \text{ MPa}$

$$F_s = A_s \frac{f_s}{\gamma_s} = \frac{2,26 \times 10^{-4} \times 400}{1,15} = 0,0786 \text{ MN}$$

d'où: $x = 0,0193 \text{ m}$

et: $z = d - 0,4x = 0,33 - 0,4x = 0,332 \text{ m}$.

D'où le moment résistant à la section:

$$\bar{M}_u = F_s \times z = 0,0786 \times 0,332 = 0,0253 \text{ MN}.$$

Le moment ultime extérieur est égal à:

$$M_u = 1,35 g \frac{\ell^2}{12} \text{ (continuité parfaite)}$$

avec: $g = 0,36^2 \times 2,5 \times 9,81 \times 10^{-3} = 0,00318 \text{ MN/m}$

d'où: $M_u = 1,35 \times 0,00318 \times \frac{8^2}{12} = 0,0229 < 0,0253 \text{ MN}.$

Le pourcentage d'acier passif est de $\frac{2,26 \times 10^{-2}}{0,36 \times 0,36} = 0,17\%$. On est certain que

la contrainte de compression du béton en ELS est inférieure à $0,6 f_{c28}$.

En ELS, on trouverait une contrainte de traction de l'acier de 245 MPa, valeur proche à 2% près de la contrainte admissible de 240 MPa en fissuration préjudiciable.

3.8. Déformée transversale du tirant

Sous son poids propre et entre deux suspentes, le tirant aura une flèche égale à:

$$f = \frac{g \ell^4}{384 E_s I}$$

avec: $E_s = 11\,000 \sqrt{25/3} = 10\,721 \text{ MPa}$

$$I = \frac{0,36^4}{12} = \frac{1,40}{1\,000} \text{ en négligeant les aciers dont le pourcentage est faible}$$

d'où: $f = 12,26 \times 10^{-3} \text{ m}$

soit: $\frac{f}{\ell} = \frac{1}{3\,540}$ négligeable.

3.9. Allongement du tirant après décintrement jusqu'en phase finale

• Instantané par décompression du béton sous charges permanentes: N_G

$$\frac{\Delta \ell_1}{\ell} = \frac{N_G - P_m}{E_s S} = \frac{1 - 1,451}{0,36 \times 0,36 \times 32\,164} = -1,08 \times 10^{-4}$$

avec: $E_s = 11\,000 \sqrt{25/3} = 32\,164$

$$P_m = 1\,160 \text{ MPa} \times 1\,251 \times 10^{-6} = 1,451 \text{ MN}$$

• Instantané sous charges d'exploitation: N_Q

$$\frac{\Delta \ell_2}{\ell} = \frac{0,3}{0,36^2 \times 32\,164} = 7,2 \times 10^{-5}$$

• Différée due à G

$$\frac{\Delta \ell_3}{\ell} = \frac{1 - 1,451}{0,36^2 \times (32\,164/2)} = -2,16 \times 10^{-4}$$

• Différée due à Q

$$\frac{\Delta \ell_4}{\ell} < \frac{0,3}{0,36^2 \times (32\,164/2)} = 1,44 \times 10^{-4}$$

4. DÉTERMINATION RAPIDE D'UN TIRANT BÉTON ARMÉ POUR LE MÊME EXEMPLE

Section d'acier passif en ELU:

$$A = \frac{1,35 N_G + 1,5 N_Q}{f_s \gamma_s} = \frac{1,8 \times 1,15}{400} \times 10^4 = 51,75 \text{ cm}^2$$

soit : $4\text{HA}32 + 4\text{HA}25 = 51,80 \text{ cm}^2$ et une dimension béton minimum, compte tenu des enrobages en zone de recouvrement (fig. 12-7).

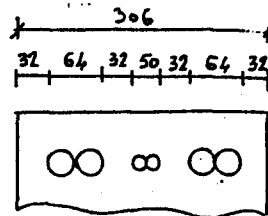


Fig. 12-7. Détermination de la largeur du tirant BA

Calcul de l'allongement sous l'action des charges à partir du décintrement :

$$\frac{\Delta \ell}{\ell} = \frac{\sigma_s}{E_s} = \frac{1,3 \times 10^4}{51,80 \times 200\,000} = 1,254 \times 10^{-3}$$

soit pour 40 m : $\Delta \ell = 50 \text{ mm}$.

5. COMPARAISON BP-BA

En prenant le prix du kilo d'acier actif comme base 1 U, nous supposons :

- 1 kg d'acier passif = 0,6 U
- 1 m³ de béton = 25 U
- 1 ancrage 9T15 = 30 U
- 1 m² de coffrage = 15 U

La comparaison en coûts donne :

	Béton armé	Béton précontraint
Dimensions.....	0,32 × 0,32	0,36 × 0,36
Acier passif.....	4 HA 32 + 4 HA 25	4 HA 12
Acier actif.....	—	9 T 15 = 1 251 mm ²
Ancrage.....	—	9 T 15
Coût en unités U : (pour 40 m)		
— béton.....	102	130
— acier passif.....	976	85
— acier actif.....	0	393
— 2 ancrages.....	0	60
— coffrage.....	768	864
Total.....	1 846	1 532
Allongement en mm dû : à G.....	38,5	— 13,0
à Q.....	11,65	2,9 à 8,6

On constate :

- l'économie est à l'avantage de la solution en béton précontraint ;

— l'allongement du tirant est plus faible en béton précontraint, ce qui limitera les flexions dans l'arc, dues à un déplacement de ses appuis.

6. EXEMPLE N° 2: PIEU PRÉCONTRAIT PAR TIRANT

Soit un bâtiment de 6 niveaux en superstructures et de 5 niveaux en infrastructure, fondé sur pieux et situé dans une nappe phréatique proche du sol et variant de façon importante (fig. 12-8).

Le poids du bâtiment étant insuffisant pour équilibrer la poussée hydrostatique, nous disposerons des tirants d'ancrage à l'intérieur des pieux qui « accrocheront » le bâtiment dans le substratum du terrain et empêcheront tout soulèvement.

Deux solutions sont offertes :

- l'une avec des tirants passifs ;
- l'autre avec des tirants actifs.

Nous comparerons les deux solutions.

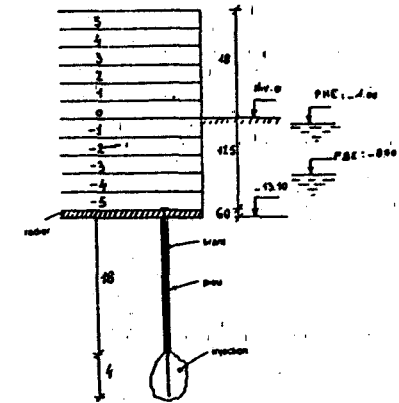


Fig. 12-8. Coupe verticale du bâtiment fondé sur pieux

La nappe phréatique varie de -1,00 en plus hautes eaux à -8,00 en plus basses eaux.

Les données sont les suivantes :

- charges permanentes d'un plancher : 6 kN/m² ;
- charges d'exploitation d'un plancher : 1,5 kN/m², de la terrasse : 1 kN/m² ;
- trame des pieux : 6 × 7 m ;
- poids propre du radier de 0,60 m d'épaisseur : $g = 0,6 \times 25 = 15 \text{ kN/m}^2$;
- charges permanentes de calcul pour un pieu :

$$G = \underbrace{(6 \times 11 \text{ niveaux} + 15)}_{\text{planchers}} \times \underbrace{6 \times 7}_{\text{radier trame}} = 3\,402 \text{ kN}$$

$$G = 3,402 \text{ MN}$$

- charge variable de calcul pour un pieu :

$$Q = (1,5 \times 11 + 1) \times 6 \times 7 = 735 \text{ kN} = 0,735 \text{ MN}$$

6.1. Solution béton armé

La section d'acier du tirant doit être capable de reprendre la différence entre la poussée d'Archimède et les charges permanentes:

pression hydrostatique: $(13,10 - 1,0) \times 10 = 121 \text{ kN/m}^2$

avec: niveau inférieur du radier = - 13,10 m

niveau maximum de la nappe = - 1,00 m

poids spécifique de l'eau = 10 kN/m^3

soit: $P_A = 121 \times 42 \times 10^{-3} = 5,082 \text{ MN}$.

Comme la solution étudiée est une solution béton armé, nous vérifierons la section d'acier en ELS avec une contrainte admissible de 240 MPa correspondant à une fissuration préjudiciable, et en ELU.

6.1.1. ELS

L'effort de traction dans l'acier vaut:

$$N = P_A - G = 5,082 - 3,402 = 1,68 \text{ MN}$$

et la section d'acier:

$$A_s = \frac{N}{\sigma_s} = \frac{1,68 \times 10^4}{240} = 70 \text{ cm}^2 \text{ à concentrer dans l'axe du pieu:}$$

6.1.2. ELU

Nous prendrons le minimum de:

$1,35 \times \left(\frac{13,10}{13,10 - 1} \right) \times 5,082 = 7,428 \text{ MN}$ correspondant au cas où l'eau atteindrait le niveau du sol entraînant une inondation des sous-sols* et donc la disparition de la poussée d'Archimède, et $1,50 \times 5,082 = 7,623 \text{ MN}$ correspondant à une charge variable;

d'où: $N_u = 7,428 - G = 7,428 - 3,402 = 4,026 \text{ MN}$

soit une section d'acier:

$$A_s = \frac{4,026}{400/1,15} \times 10^4 = 115,74 \text{ cm}^2, \text{ soit } 15 \text{ HA } 32$$

6.1.3. Soulèvement du bâtiment dû à la poussée d'Archimède

Nous négligerons le soulèvement du bâtiment correspondant à la décompression du sol, et ne prendrons en compte que les seuls allongements des aciers et décompression du béton du pieu.

* Diamètre du pieu $\varnothing$ travaillant à 5 MPa

Nous prenons la charge totale G correspondant à la fin des travaux avant

* Charge étroitement bornée justiciable du coefficient 1,35.

l'enlèvement du système de rabattement de nappe ou la charge $G + Q$ avec une poussée hydrostatique de $(13,10 - 8) = 5,10 \text{ m}$ d'eau en plus basses eaux:

soit: $3,402 \text{ MN}$

$$2,142 \text{ MN}$$

soit: $3,402 + 0,735 - 5,10 \times 10 \times 10^{-3} \times 42 = 1,995 \text{ MN}$

d'où la section de pieu travaillant à 5 MPa pour $3,402 \text{ MN}$:

$$\frac{\pi \varnothing^2}{4} = \frac{G}{5} \rightarrow \varnothing = 0,93 \text{ m}$$

Nous retiendrons:

$$\varnothing = 1 \text{ m}$$

* Soulèvement dû à la poussée hydrostatique du niveau - 8 m à - 1 m

Ce soulèvement se traduit par une décompression du béton du pieu jusqu'à ce que la poussée hydrostatique soit égale au poids mort G , puis par allongement des aciers au-delà (avec un module d'Young moyen du béton de $20\,000 \text{ MPa}$):

$$\frac{\Delta \ell_1}{\ell} = \frac{3,402 - 2,142}{\frac{\pi \times \ell^2}{4} \times 20\,000} = 0,08\%$$

L'effort restant vaut:

$$5,082 - 3,402 = 1,68 \text{ MN}$$

d'où:

$$\frac{\Delta \ell_2}{\ell} = \frac{1,68}{15 \times 8,04 \times 20\,000 \times 10^{-4}} = 0,697\%$$

d'où:

$$\Delta \ell = \Delta \ell_1 + \Delta \ell_2$$

$$\text{avec: } \ell = 18 + \frac{4}{2} = 20 \text{ m}$$

$$\Delta \ell = (0,080 + 0,697) \times 20 = 15,54 \text{ mm}$$

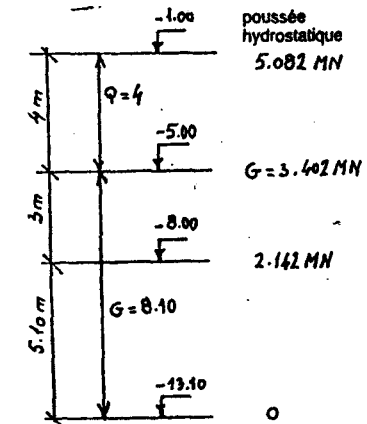


Fig. 12-9. Coupe verticale

6.2. Solution en béton précontraint

La précontrainte doit être capable de reprendre l'effort de poussée au-delà du poids mort:

$$N = P_A - G = 1,68 \text{ MN}$$

pour s'assurer que la contrainte dans le béton du pieu ne devient jamais négative (corrosion des aciers = classe I pour les tirants);

d'où: $P = 1,68 \text{ MN}$.

6.2.1. Détermination de la précontrainte

En supposant que les pertes de précontrainte représentent 200 MPa et pour une limite d'élasticité f_{pe} de 1 623 MPa, les recommandations TA 77 (voir tableau en fin du présent chapitre) donnent la valeur suivante à la mise en tension: $\sigma_{po} = \text{Min}(1,3 \times 0,6 \times 1\,623; 0,9 \times 1\,623) = 1\,266 \text{ MPa}$

et la tension finale: $\sigma_p = \text{Min}(\sigma_{po} - 200; 0,6 \times 1\,623) = 974 \text{ MPa}$;

d'où la section d'acier nécessaire:

$$A_p = P/\sigma_p = 1,68 \times 10^6 / 974 = 1\,725 \text{ mm}^2$$

En ELU, le même effort N_u que pour le béton armé nécessite une section d'acier:

$$A_p = \frac{N_u}{f_{pe}/1,15} = \frac{4,026 \times 10^6}{1\,814/1,15} = 2\,552 \text{ mm}^2$$

et un nombre de torons de: $\frac{2\,552}{139} = 18,4$

soit un câble: **19 T 15**

6.2.2. Détermination du diamètre du pieu

Si l'on met les câbles en tension avant l'enlèvement du système de rabattement de la nappe, le béton du pieu devra être capable de reprendre la charge $1,15 P + G$ (avec 15 % de pertes de précontrainte),

$$\text{soit: } \frac{\pi \phi^2}{4} \times 5 = 1,15P + G = 1,68 \times 1,15 + 3,402 = 5,334 \text{ MN}$$

d'où: $\phi = 1,16$, nous retiendrons **$\phi = 1,20 \text{ m}$**

5.2.3. Soulèvement du bâtiment de - 8 m à - 1 m

Ce soulèvement correspond entièrement à une décompression du pieu. L'effort vaut $N = 5,082 - 2,142 = 2,94 \text{ MN}$ (ou $10 \text{ kN/m}^2 \cdot 7 \text{ m} \cdot 42 \text{ m}^2$)

$$\text{d'où: } \frac{\Delta \ell}{\ell} = \frac{N}{SE} = \frac{2,94}{\pi \times \frac{1,2^2}{4} \times 20\,000} = 0,13\%$$

$$\Delta \ell = 20 \times 0,13 = 2,6 \text{ mm}$$

6.3. Comparaison des deux solutions (unité de prix: 1 kg d'acier HLE tout compris)

En estimant le prix du:

- béton + forage à 50 U/m³;
- acier BA à 0,6 U/kg;
- acier BP à 1 U/kg;
- ancrage 12 T 15 à 35 U.

	Solution BA
Diamètre du pieu.....	Ø 100
Aciers.....	15 HA 32
Béton + forage	$\frac{\pi}{4} \times 1^2 \times 18 \times 50 = 707$
Acier BA	$15 \times 8,04 \times 0,785 \times 22 \times 0,6 = 1\,250$
Acier BP	—
Ancrage	—
Total	1 957
Soulèvement du bâtiment pour la variation de la nappe	15,54 mm
	Solution BP
Diamètre du pieu.....	Ø 120
Aciers.....	19 T 15
Béton + forage	$\frac{\pi}{4} \times 1,2^2 \times 18 \times 50 = 1\,018$
Acier BA	—
Acier BP	$19 \times 1,39 \times 0,785 \times 22 \times 1 = 456$
Ancrage	35
Total	1 509
Coût comparé	- 23 % par rapport au BA
Soulèvement du bâtiment pour la variation de la nappe	2,6 mm soit 6 fois moins

7. EXEMPLE N° 3: TIRANT D'ANCRAGE

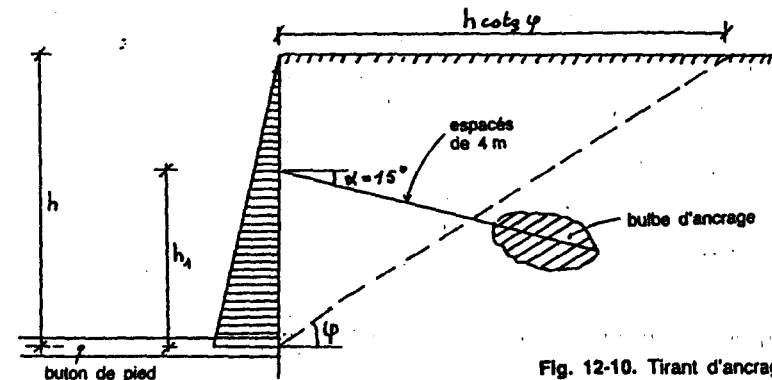


Fig. 12-10. Tirant d'ancrage

Soit un tirant d'ancrage destiné à retenir un mur de 10 m de hauteur buté en pied (fig. 12-10).

Les caractéristiques du sol sont les suivantes :

- densité : $\gamma = 1,8 \text{ t/m}^3$;
- angle de frottement interne : $\varphi = 30^\circ$;
- coefficient de poussée : $K_a = \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) = 0,333$.

• Recherche de la hauteur h_1 optimale (fig. 12-11)

La position optimale du tirant dépend de la recherche d'un moment minimal dans la paroi verticale avec $M_1 = M_2$ et de la longueur minimum du tirant nécessaire en abaissant au maximum le niveau de l'ancrage donc la valeur h_1 .

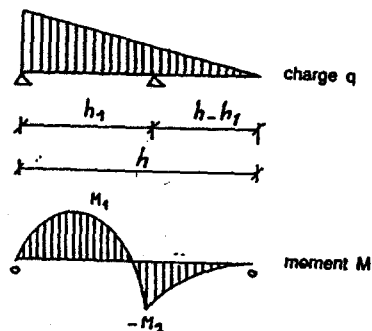


Fig. 12-11. Courbe des moments

Essayons de satisfaire la première condition.

Posons $\lambda = \frac{h - h_1}{h}$, les portées deviennent (fig. 12-12) :

λh et $(1 - \lambda)h$

et les moments à mi-travée et sur appui sont égaux pour λ racine de l'équation :

$$3\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1 = 0$$

soit : $\lambda = 0,47$

d'où : $h_1 = (1 - 0,47) \times 10 = 5,3 \text{ m}$.

Le moment sur appui vaut :

$$M_2 = \frac{q\lambda^3 h^2}{6}$$

La réaction d'appui qui représente l'effort de traction dû à la poussée des terres dans le tirant au cosinus près vaut :

$$R = \frac{qh}{6(1 - \lambda)}$$

soit pour : $\lambda = 0,47$

$$M_2 = 0,0173qh^2$$

$$R = 0,3145qh$$

avec : $q = K_a \gamma h = 0,333 \times 1,8 \times 10 = 6 \text{ t/m}^2$, soit : $6 \times 4 = 24 \text{ t/m}$

$$q = 0,24 \text{ MN/m}$$

$$M_2 = 0,0173 \times 0,24 \times 10^2 = 0,415 \text{ MN/m}$$

$$R = 0,3145 \times 0,24 \times 10 = 0,755 \text{ MN}$$

$$N = \frac{R}{\cos \alpha} = \frac{0,755}{\cos 15^\circ} = 0,782 \text{ MN}$$

La tension initiale à l'ancrage étant limitée à : $\sigma_{pi} = 0,7 f_{prg}$, on obtient avec 15 % de pertes de précontrainte : $\sigma_{po} = 0,85 \sigma_{pi} = 0,85 \times 0,7 f_{prg}$.

Si nous utilisons des torons T 15 avec $f_{prg} = 1 814 \text{ MPa}$, il vient :

$$\sigma_{po} = 0,85 \times 0,7 \times 1 814 = 1 079 \text{ MPa}$$

d'où le nombre de torons T 15 de 139 mm^2 de section unitaire :

$$n = \frac{0,782}{1 079 \times 139 \times 10^{-6}} = 5,21, \text{ soit un câble } 6 \text{ T } 15.$$

REMARQUE :

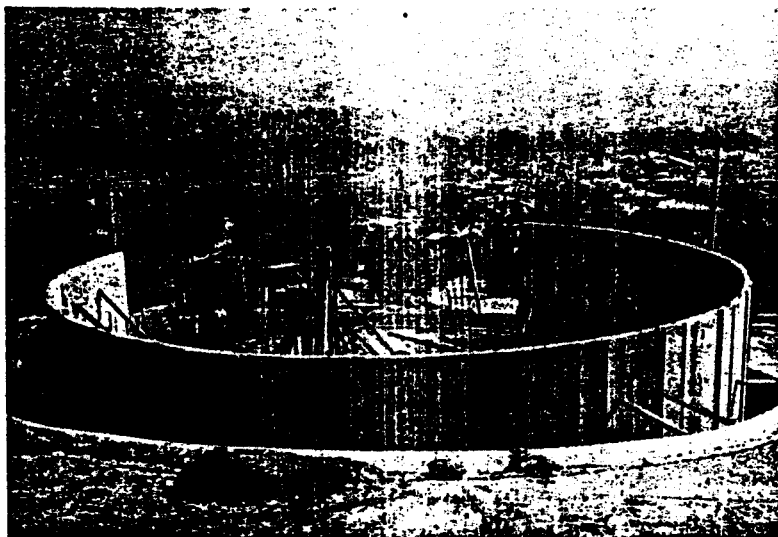
L'utilisation d'un tirant précontraint par rapport à un tirant passif offre un certain nombre d'avantages :

- un essai en vraie grandeur de l'ancrage dans le sol et la vérification d'une injection correcte et efficace du bulbe d'ancrage avec un coefficient de sécurité pour le sol égal à 1,15 (car nous avons supposé 15 % de pertes) ;
- un faible allongement du tirant sous la pression des terres, ce qui entraîne une décompression pratiquement nulle du terrain et évite tout désordre en surface (pas de tassement des fondations voisines éventuelles) ;
- possibilité de retendre le tirant en cas de fluage du terrain ou de diminution de l'effort de précontrainte important. Cette possibilité peut servir de test de contrôle du bon comportement du terrain.

RECOMMANDATIONS TA 77

Recommandations concernant la conception, le calcul, l'exécution et le contrôle des Tirants d'Anchages, établies par le Bureau Sécurité (septembre 1977)

	Tirants provisoires $\leq 18 \text{ mois}$	Tirants définitifs $> 18 \text{ mois}$
Tension définitive $T_d \leq$	$0,75 f_{prg}$	$0,60 f_{prg}$
Tension d'épreuve $T_e \geq$	$1,20 T_d$	$1,30 T_d$
	$0,90 f_{prg}$	$0,90 f_{prg}$
Tension initiale $T_i \leq$	T_e	T_e



Réservoir en éléments préfabriqués assemblés par post-tension. Arbodelos (Mexique)
(doc. Freyssinet).

13

MÉTHODE INTERNE MÉTHODE EXTERNE

Comme nous avons eu l'occasion de le voir au chapitre 11, un câble de tracé non linéaire, de rayon de courbure r exerce sur le béton une force radiale p (c'est-à-dire perpendiculaire en tout point au câble), proportionnelle à l'effort de traction P exercé dans le câble :

$$p = \frac{P}{r}$$

Nous pouvons donc considérer l'action de la précontrainte comme :

- une action intérieure entraînant en tout point un moment dit isostatique $M_0 = Pe_0$ pour une excentricité e_0 . La méthode de calcul correspondante s'appelle méthode interne ou méthode *directe*;
- ou bien une action extérieure appliquée aux ancrages et radialement le long de son tracé si ce dernier n'est pas rectiligne (méthode externe).

1. MÉTHODE DIRECTE (OU INTERNE)

1.1. Structure isostatique

La précontrainte exerce en tout point de la section étudiée d'abscisse x :

- un effort normal à la section $P(x) \cdot \cos \alpha(x)$;
- un moment dit moment isostatique : $M_0 = P(x) \cdot \cos \alpha(x) \cdot e_0(x)$.

$\alpha(x)$ désigne l'angle du tracé du câble avec l'horizontale. Comme les valeurs des angles sont généralement inférieures à $\text{Arctg}(1/10)$ ou 6° , on peut négliger les termes du 2^e ordre dans la valeur du cosinus ($\cos 6^\circ = 0,994$) et adopter $P(x)$ au lieu de $P(x) \cdot \cos \alpha(x)$.

On peut donc en tout point déterminer les contraintes dues à l'action de la précontrainte seule par la formule classique :

$$\sigma = \frac{P}{S} \pm \frac{Pe_0}{I/v}$$

1.2. Structure hyperstatique

Si la structure est hyperstatique, sous l'action de la seule précontrainte elle se déforme en respectant les conditions d'appui qui lui sont imposées et qui ne conduisent pas à des déformations nulles sur ces mêmes appuis, pour la même structure rendue isostatique (en supprimant les appuis intermédiaires).

Il en résulte des réactions d'appui, dues à la seule précontrainte, appelées *réactions hyperstatiques de précontrainte*, notées $\mathcal{R}$. Ces réactions d'appui créent à leur tour des moments d'allure linéaire entre appuis appelés *moments hyperstatiques de précontrainte* et notés $\mathcal{M}$.

Illustrons cet exposé par l'exemple suivant :

soit une poutre isostatique d'une travée de portée L et une poutre à deux travées $l = \frac{L}{2}$ (fig. 13-1),

soumise à une précontrainte P supposée constante tout le long de la travée et non centrée (tracé quelconque, mais supposé le même pour les deux poutres).

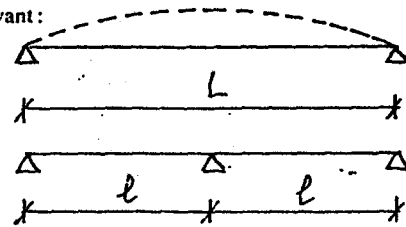


Fig. 13-1. Poutre à une travée et à 2 travées

Pour la *première poutre*, l'action de cette précontrainte va entraîner une déformée transversale de la poutre (en pointillé sur la figure) due à l'action radiale $p(x) = \frac{P}{r(x)}$. Cette déformation n'est pas gênée sur les appuis d'extrémité. Nous supposons que le tracé du câble est tel que la déformée à mi-portée ne soit pas nulle.

Pour la *deuxième poutre*, l'action de cette précontrainte va entraîner une déformée transversale qui serait la même que pour la première poutre s'il n'y avait un appui intermédiaire qui vient imposer une flèche nulle. Cela ne peut être réalisé qu'au prix d'une réaction $\mathcal{R}$ de l'appui sur la poutre.

La deuxième poutre n'est pas changée si l'on remplace l'appui intermédiaire par une charge concentrée $\mathcal{R}$ à l'emplacement de l'appui supprimé.

Cette charge concentrée entraîne l'existence d'un moment $\mathcal{M}(x)$ appelé *moment hyperstatique* qui vaut $\frac{\mathcal{R}l}{4}$ à mi-travée (fig. 13-2).

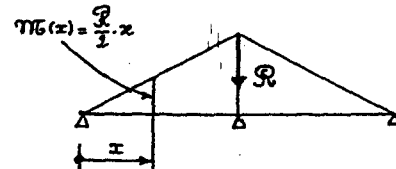


Fig. 13-2. Moment

2. MÉTHODE EXTERNE

L'action du câble de précontrainte est alors considérée comme une action extérieure agissant aux ancrages avec :

- un effet horizontal $P \cos \alpha = P$;
- un effet vertical $P \sin \alpha$ directement transmis dans l'appui et n'entraînant aucune déformation de la structure ;
- un moment $P \cos \alpha \cdot e_0 = Pe_0$;
- une charge radiale $p(x) = \frac{P(x)}{r(x)}$.

Pour un tracé de câble composé de segments de droite, la valeur de p est nulle (courbure $\frac{1}{r} = 0$).

Pour un tracé de câble parabolique*, on peut admettre en négligeant les termes du 2^e ordre que :

$$\frac{1}{r} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} = y'' ;$$

la dérivée seconde d'une parabole étant une constante, l'action radiale est donc uniformément répartie et le moment correspondant facile à calculer.

Le fait de considérer l'action de la précontrainte comme une action globale, permet d'obtenir le *moment total de précontrainte* M_1 comprenant le moment isostatique $M_0 = Pe_0$ et le moment hyperstatique :

$$M_1 = M_0 + \mathcal{M} = Pe_0 + \mathcal{M}.$$

Le moment hyperstatique de précontrainte est donc obtenu par différence :

$$\mathcal{M} = M_1 - M_0 = M_1 - Pe_0.$$

3. RÉSUMÉ

- M_0 = moment isostatique de précontrainte,
- $\mathcal{M}$ = moment hyperstatique de précontrainte,
- M_1 = moment total de précontrainte.

• Méthode directe

$M_0 = Pe_0$, puis on calcule le moment hyperstatique $\mathcal{M}$ (voir chapitre 19, § 3) : d'où :

$$M_1 = M_0 + \mathcal{M}$$

• Méthode externe

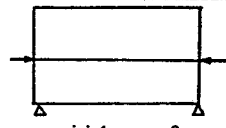
On calcule le moment total de précontrainte (voir § 4, ci-après) et le moment isostatique par $M_0 = Pe_0$, d'où le moment hyperstatique :

$$\mathcal{M} = M_1 - Pe_0.$$

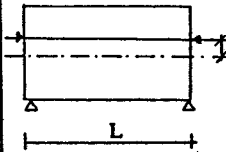
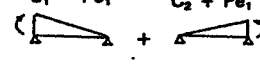
* Pour $y' \leq 1/10$, l'erreur ne dépasse pas 1,5 %.

4. EXEMPLES COMPARATIFS SIMPLES DES MÉTHODES DIRECTE ET EXTERNE

4.1. Poutre isostatique à câble filant centré au centre de gravité, de la section

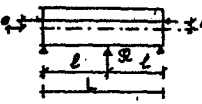
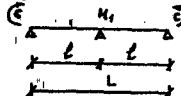
	Méthode directe	Méthode externe
 excentricité $e_0 = 0$ quelle que soit l'abscisse	$e_0 = 0$ $M_0 = Pe_0 = 0$	$\frac{1}{r} = 0$ donc $p = \frac{P}{r} = 0$ e_0 à l'appui = 0 donc pas de couple extérieur sur appui $M_1 = M_0 = 0$

4.2. Poutre isostatique à câble filant rectiligne d'excentricité constante $e_0(x) = e_1^*$

	Méthode directe	Méthode externe
	$e_0 = e_1$ $M_0 = Pe_0 = Pe_1$ Quelle que soit l'abscisse	$\frac{1}{r} = 0$ Actions extérieures : $p = \frac{P}{r} = 0$ Moment aux extrémités : $C_1 = +Pe_1$ $C_2 = +Pe_1$  d'où : $M_1 = C_1 + C_2 = Pe_1 = M_0$

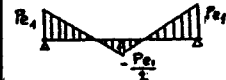
* On rappelle que l'excentricité $e_0(x)$ est comptée à partir du centre de gravité de la section, positivement vers le haut (tel que Pe_0 soit un moment positif).

4.3. Poutre de deux travées de portées $\ell = \frac{L}{2}$ avec le même câble que précédemment

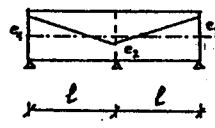
	Méthode directe	Méthode externe
 R positif vers le haut.	- Le moment isostatique est constant et égal à : $M_0 = Pe_1$ - Le moment hyperstatique est inconnu. On peut le déterminer en écrivant que la déformée sur l'appui intermédiaire est nulle sous l'action du moment isostatique et de la réaction hyperstatique R. - Flèche à mi-portée pour un moment constant M_0^* : $f_1 = -\frac{M_0 L^2}{8EI}$ - Flèche à mi-portée due à une charge concentrée $-R$ à mi-portée : $f_2 = \frac{RL^3}{48EI}$ - Flèche totale nulle : $f_1 + f_2 = 0$ donne : $R = \frac{6M_0}{L}$ $= \frac{6Pe_1}{L}$ - Moment hyperstatique à mi-portée : $M = \frac{-RL}{4}$ $= -\frac{3}{2} Pe_1$	- Courbure : $\frac{1}{r} = 0$ donc : $p = \frac{P}{r} = 0$ - Poutre à 2 travées soumise à 2 couples : $C = Pe_1$ aux deux extrémités  - Equation des 3 moments : $C\ell + 4M_1\ell + C\ell = 0$ (pas de charges réparties ou concentrées). - d'où : $4M_1\ell = -2C\ell$ et $M_1 = -\frac{C}{2} = -\frac{Pe_1}{2}$

* On pourra utiliser les tableaux des intégrales de Mohr situés en annexe B.

$f = k \cdot m \cdot \bar{M} \frac{L}{EI}$ avec $k = \frac{1}{2}$, $m = \frac{1}{4}$, $\bar{M} = 1$

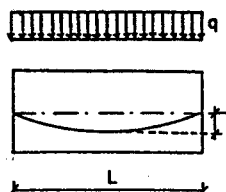
	Méthode directe	Méthode externe
 $M_1 = M_0 + M$	- Et à l'abscisse $x < \frac{L}{2}$: $M(x) = -\frac{Rx}{2}$ $= -3Pe_1 \frac{x}{L}$ - Moment total à l'abscisse x : $M_1(x) = Pe_1 - \frac{Rx}{2}$ $= Pe_1 \left(1 - \frac{3x}{L}\right)$ - Sur l'appui intermédiaire : $M_1 = -\frac{Pe_1}{2}$	Sur l'appui intermédiaire : $M = M_1 - M_0$ $= -\frac{Pe_1}{2} - Pe_2$ $= -\frac{3}{2} Pe_1$

4.4. Poutre de deux travées de portée ℓ avec câble bi-rectiligne

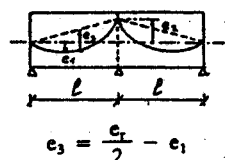
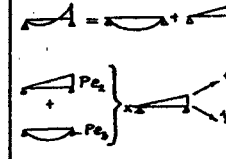
	Méthode directe	Méthode externe
	- Le calcul devient plus complexe : décomposons la courbe de moment en : - un moment constant Pe_1 - un moment triangulaire $Pe_2 - Pe_1$ - Par les intégrales de Mohr la flèche vaut : $\frac{Pe_1}{4} \times \frac{l}{4} + \frac{Pe_2 - Pe_1}{4} \times \frac{l}{4}$	- Le calcul est identique à celui du cas précédent, car vis-à-vis de l'extérieur rien de modifié à l'exception d'une composante verticale transmise directement aux trois appuis. - Moment total de précontrainte sur appui central $M_1 = -\frac{Pe_1}{2}$

	Méthode directe	Méthode externe
On appelle câble concordant le câble dont le tracé est tel que les moments hyperstatiques soient nuls en tout point.	$f_1 = \frac{-1}{2} \cdot \frac{L}{EI}$ $Pe_1 \cdot \frac{L}{4} - \frac{1}{3} \cdot \frac{L}{EI}$ $P(e_2 - e_1) \cdot \frac{L}{4}$ $f_1 = \frac{-PL^2}{12EI} \left(e_2 + \frac{e_1}{2}\right)$ $f_2 = \frac{9L^3}{48EI}$ - Flèche nulle sur appui : $f_1 + f_2 = 0$ d'où : $R = 4P \left(e_2 + \frac{e_1}{2}\right)$ - Câble concordant si : $M(x) = 0 \Leftrightarrow R = 0$ si : $e_2 = -\frac{e_1}{2}$ - Le moment hyperstatique sur appui central vaut : $M = -\frac{9L}{4}$ $= -P \left(e_2 + \frac{e_1}{2}\right)$	- Comme le moment isostatique vaut : $M_0 = Pe_2$ on en déduit : $M = M_1 - M_0$ $M = \frac{-Pe_1}{2} - Pe_2$ $M = -P \left(e_2 + \frac{e_1}{2}\right)$ - Le câble est concordant si : $M = 0$ $e_2 = -\frac{e_1}{2}$

4.5. Poutre isostatique à câble parabolique soumise à une charge uniforme q

Recherche de l'excentricité e_1 pour avoir une contrainte constante en tout point de la section médiane	Méthode directe	Méthode externe
	- Equation du câble: $e_0(x) = \frac{4e_1}{L^2} x(L-x)$ - Contrainte constante si moment global nul: $q \frac{L^2}{8} + Pe_1 = 0$ $e_1 = -\frac{qL^2}{8P}$	- Courbure de la parabole: $\frac{1}{r} = \frac{8e_1}{L^2}$ - Charge radiale uniforme: $p = \frac{P}{r} = \frac{8Pe_1}{L^2}$ - Contrainte constante si charge répartie globale nulle: $q + p = 0$ - d'où: $e_1 = -\frac{qL^2}{8P}$

4.6. Poutre à deux travées à câble parabolique. Recherche du câble concordant

	Méthode directe	Méthode externe
 $e_3 = \frac{e_1}{2} - e_2$	- Moment isostatique sur appui central: $M_0 = Pe_2$ - Moment hyperstatique par équation des 3 moments: $6Ml = 6EI(\omega_2 - \omega_1) = -12EI\omega$ - Calcul de la rotation ω par les intégrales de Mohr  $\omega =$ $\frac{1}{3} \frac{l}{EI} (e_2 - e_3)P$ - d'où $M = P(e_3 - e_2)$ $M_1 = -P\left(e_1 + \frac{e_2}{2}\right)$	- Charge radiale: $p = \frac{P}{r}$ avec: $\frac{1}{r} = \frac{8e_3}{l^2}$ d'où: $p = -\frac{8Pe_3}{l^2}$ - Poutre à deux travées égales avec charge répartie p, le moment sur appui vaut: $M_1 = -\frac{pl^2}{8}$ $M_1 = +\frac{8Pe_3}{l^2} \cdot \frac{l^2}{8} = Pe_3$ - soit: $M_1 = -P\left(e_1 - \frac{e_2}{2}\right)$ - Moment hyperstatique $M = M_1 - M_0$ $M = -P\left(e_1 - \frac{e_2}{2}\right) - Pe_2$ $M = -P\left(e_1 + \frac{e_2}{2}\right)$
Le câble est concordant si $M = 0$, donc si: $e_2 = -2e_1$		

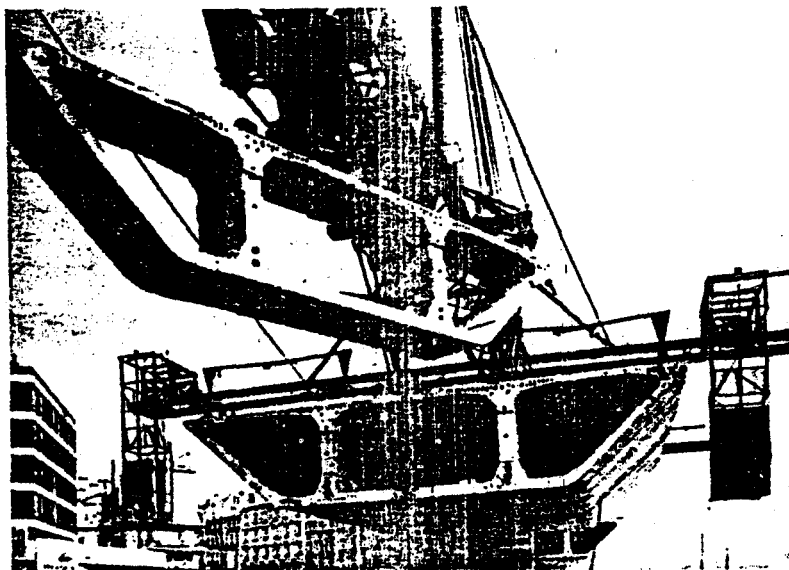
REMARQUE 1 :

La méthode de calcul externe donne dans les exemples ci-dessus moins de calculs et paraît plus élégante. Cependant pour les problèmes usuels rencontrés dans la pratique, qui s'éloignent de ces cas idéaux la méthode directe est plus commode.

La méthode externe a cependant le mérite de mieux faire comprendre l'action de la précontrainte sur un système hyperstatique.

REMARQUE 2 :

On notera le résultat paradoxal émanant de l'exemple ci-dessus où la déviation du câble vers le haut ou vers le bas n'a aucune importance pour la recherche du câble concordant, il importe seulement d'avoir $e_2 = \frac{-e_1}{2}$, quel que soit le signe de e_1 .



Viaduc de Saint-Cloud, autoroute de l'Ouest. Mise en place d'un voussoir préfabriqué (doc. Freyssinet).

14

LA FLEXION EN ÉTAT-LIMITE DE SERVICE

1. GÉNÉRALITÉS

Après avoir déterminé les sollicitations appliquées à la section fléchie, suivant les cas on est amené à faire :

— soit une détermination de la section : choix de la forme de la section (rectangulaire ou en T), détermination du coffrage (largeur, hauteur, ...), calcul de l'effort de précontrainte que l'on appelle couramment « la précontrainte », détermination de l'excentricité du câble moyen ;

— soit une vérification des contraintes du béton en compression et en traction.

Comme pour le béton armé calculé en flexion composée, on doit s'assurer que les sollicitations agissantes restent dans le domaine de sécurité.

Si l'on trace le diagramme d'interaction moment-effort, la courbe limite du domaine de sécurité a l'allure de la figure 14-1.

La section sera vérifiée si et seulement si les points représentatifs des sollicitations appliquées sont à l'intérieur de la courbe.

Pour un effort de précontrainte donné P , les moments appliqués à la section doivent être compris entre $M_{\max}$ et $M_{\min}$.

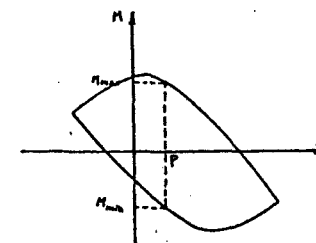


Fig. 14-1. Diagramme d'interaction moment-effort normal

Contrairement à la flexion simple en état-limite de service du béton armé où nous n'avons besoin que du moment maximum, nous devons prendre en compte les moments maximum et minimum qui pour une poutre sur deux appuis simples sans

console, correspondent aux cas souvent désignés par *en charge* pour le moment maximum et à *vide* pour le moment minimum.

Examinons sur un cas simple les étapes qui ont mené au béton précontraint tel qu'il se pratique maintenant.

Soit une poutre sur deux appuis, soumise à un moment fléchissant $M(x)$ (fig. 14-2), la section la plus sollicitée est à mi-portée pour une charge répartie uniforme.

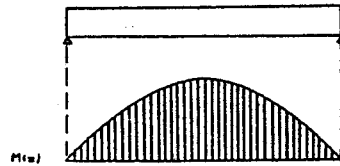


Fig. 14-2. Moment dû à une charge répartie uniforme

Si le matériau est homogène, la distribution des contraintes a l'allure de la figure 14-3 a, avec une zone comprimée et une zone tendue. Le béton étant un matériau qui résiste mal à la traction et bien à la compression, il vient à l'idée de rajouter un effort de compression qui supprimerait les tractions.

Si l'on soumet la section à un effort de compression P centré, la contrainte ajoutée est constante et vaut P/S (fig. 14-3 b). Déterminons P tel que la contrainte résultante soit toujours positive ou nulle:

$$\frac{P}{S} = \frac{Mv'}{I}$$

La contrainte maximum vaut $\frac{Mv'}{I} + \frac{P}{S} = \frac{Mh}{I}$ (fig. 14-3 c).

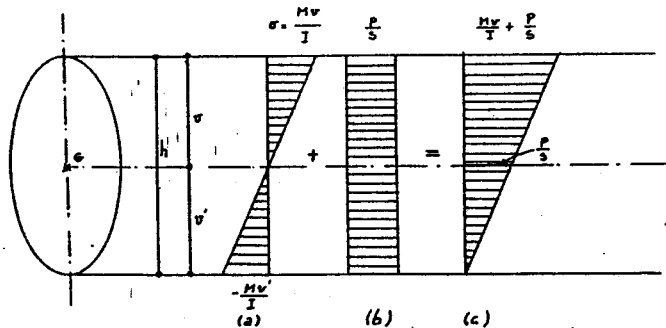


Fig. 14-3. Diagramme des contraintes avec précontrainte centrée

Il faut alors vérifier que la contrainte maximum est inférieure à la contrainte admissible du béton sur la fibre supérieure. Pour une section rectangulaire, le fait de rajouter la précontrainte P , double la contrainte maximum, ce qui peut être préjudiciable.

Si l'effort de précontrainte agissait en sens inverse du moment M , on arriverait à une solution plus économique. Ceci peut être obtenu en excentrant la précontrainte

vers le bas de la section d'une valeur e_0 (comptée positivement vers le haut). Elle induit un moment dit *moment isostatique de précontrainte* $P e_0$. Le diagramme des contraintes prend l'allure de la figure 14-4.

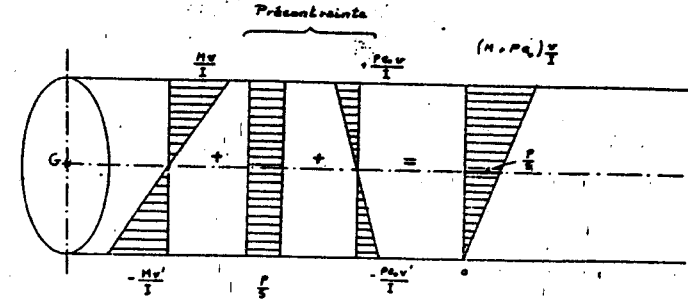


Fig. 14-4. Diagramme des contraintes avec précontrainte excentrée

On remplace $\frac{Mv'}{I} = \frac{P_1}{S}$ de la figure 14-3, par la valeur équivalente

$$\frac{Mv'}{I} = \frac{P_2}{S} - \frac{P_2 e_0 v'}{I}$$

On voit bien que la valeur P_2 est inférieure à la valeur P_1 puisque e_0 est négatif (précontrainte excentrée vers le bas).

• Exemple numérique

Soit la section rectangulaire de la figure 14-5 soumise à un moment extérieur $M = 0,80 \text{ MNm}$ engendrant des contraintes sur les fibres extrêmes de:

$$\pm \frac{0,80 \times 6}{0,5 \times 1,2^2} = \pm 6,67 \text{ MPa avec } \frac{I}{v'} = \frac{bh^2}{6}$$

Dans le cas de la précontrainte centrée, la valeur de P annulant la contrainte en fibre inférieure vaut:

$$P_1 = \frac{SMv'}{I} = \frac{0,5 \times 1,2 \times 0,8 \times 6}{0,5 \times 1,2^2} = 4 \text{ MN.}$$

Dans le deuxième cas de précontrainte excentrée, en supposant que l'on puisse excentrer au maximum de $e_0 = -0,45 \text{ m}$ la position du câble, on obtient:

$$\frac{P_2}{S} - \frac{P_2 e_0 v'}{I} = \frac{Mv'}{I}$$

$$\text{soit: } P_2 = \frac{Mv'/I}{1/S - e_0 v'/I} = \frac{Mv'}{\frac{I}{S} - e_0 v'}$$

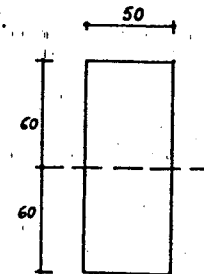


Fig. 14-5

ou en remplaçant $\frac{1}{S}$ par $\rho v v'$ (ρ désignant le rendement géométrique de la section, pour une section rectangulaire: $\rho = \frac{1}{S v v'} = \frac{1}{3}$):

$$P_2 = \frac{M}{\rho v - e_0} = \frac{0,8}{\frac{1}{3} \times 0,6 + 0,45}$$

soit: $P_2 = 1,231 \text{ MN}$.

Les diagrammes de contrainte sont représentés sur la figure 14-6 a pour le cas de précontrainte centrée et la figure 14-6 b pour la précontrainte excentrée.

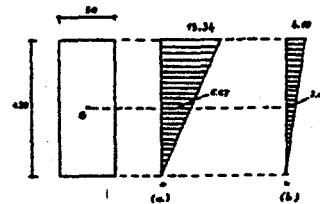


Fig. 14-6. Diagramme des contraintes avec excentricité (a) centrée, (b) excentrée

On voit que grâce à l'excentrement de la précontrainte, on a diminué l'effort de précontrainte de 4 à 1,231 MN et la contrainte maximum du béton de 13,34 à 4,10 MPa, d'où une économie substantielle d'acier et de béton.

En reprenant les notions de moment maximum et de moment minimum, nous pouvons essayer de déterminer la précontrainte minimum P et l'excentricité e_0 . Il peut alors se présenter deux cas:

— l'excentricité calculée est réalisable, c'est-à-dire que les câbles excentrés resteront à l'intérieur du béton. Nous dirons que la section est *sous-critique* (fig. 14-7 a);

— l'excentricité calculée est telle que le câble serait à l'extérieur du béton; on n'aurait pas l'enrobage suffisant pour éviter la corrosion, la section sera dite *sur-critique*. L'excentricité sera alors limitée à la valeur $-(v' - d')$ (fig. 14-7 b).

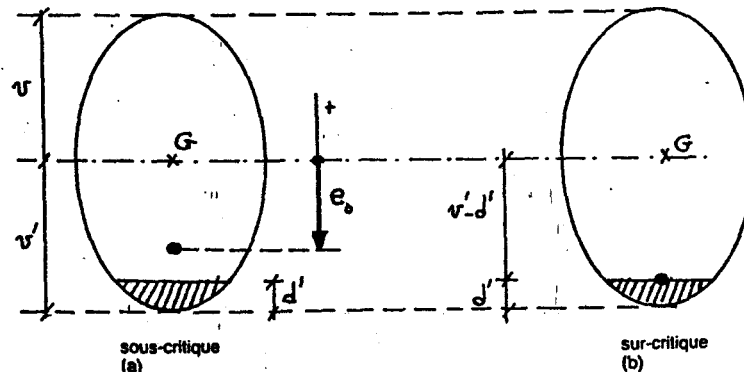


Fig. 14-7. Section (a) sous-critique, (b) sur-critique

2. CLASSES DE PRÉCONTRAINT

Pour assurer l'intégrité du béton, c'est-à-dire éviter l'ouverture de fissures qui peuvent être nuisibles aux aciers de précontrainte pour des raisons de corrosion, on a été amené pour les premières constructions en béton précontraint à interdire toute contrainte de traction de flexion dans le béton. Mieux, par l'Instruction Provisoire relative à l'emploi du béton précontraint de 1953, premier règlement français concernant ce nouveau matériau, la contrainte résiduelle devait être positive et égale à 8 % de la contrainte de compression maximale du béton.

L'Instruction Provisoire du 12 août 1965, un peu moins sévère, exigeait une contrainte minimum nulle. Cette disposition, concevable pour des ouvrages soumis à des actions agressives ou dont l'étanchéité était indispensable, ne se justifiait pas du tout pour les ouvrages abrités et même pour les ouvrages courants.

C'est ainsi que le développement de la précontrainte par fils adhérents par prétension se trouvait freiné par des dispositions réglementaires inadaptées.

Une association de concepteurs et de réalisateurs du secteur privé, appelée Association Scientifique pour la Précontrainte (ASP), élabore en 1965 des recommandations pour le calcul et l'exécution des ouvrages précontraints dites ASP 65. Ces recommandations introduisirent pour la première fois la notion de classes de précontrainte:

Classe I: béton entièrement comprimé en tout point de la section.

Classe II: béton tendu à contrainte de traction limitée, inférieure à la résistance à la traction du béton.

Classe III: la valeur de la contrainte de traction n'a pas d'importance (comme en béton armé) sous-charge de courte durée, mais ne dépasse pas la valeur de la classe II sous-charge permanentes. On pourrait appeler cette classe: béton armé précontraint.

L'Administration à son tour, introduisit la notion de classes de précontrainte (sous la dénomination de *genre* au lieu de classe) par l'Instruction Provisoire du 13 août 1973.

Comme cette Instruction Provisoire n'a pratiquement eu que très peu d'applications, nous passerons directement au BPEL qui a repris la notion de classe (et non de genre) en définissant:

— la classe I, qui est d'un recours exceptionnel pour des ouvrages tels que tirants, parois de réservoirs circulaires, pièces très sollicitées à la fatigue, pour laquelle aucune contrainte de traction n'est admise sous l'effet des combinaisons rares;

— la classe II qui est destinée plus particulièrement aux éléments exposés à une ambiance agressive (cas de certains bâtiments industriels) et à ceux qui comportent de nombreux joints. Elle se caractérise par une contrainte de traction admissible;

— la classe III intéresse essentiellement les pièces en atmosphère peu agressive tels des éléments de bâtiments courants. Sous l'action des combinaisons quasi-permanentes la contrainte de traction est limitée; dans les autres combinaisons, il n'y a pas de limites à la traction du béton (voir chapitre 9, Contraintes admissibles).

Pour la valeur de la précontrainte de calcul suivant le BPEL, on doit considérer les deux cas de précontrainte maximum P_1 et minimum P_2 telles que définies au chapitre 11.

3. LA FLEXION EN CLASSE I

Le raisonnement que nous allons mener sur une section de forme quelconque pour un moment maximum positif et pour un excentrement négatif vers le bas est transposable au cas de section sur appuis où le câble est en position haute, en retournant la section et en changeant les signes des moments.

Nous examinerons successivement :

- la vérification d'une section donnée lorsque la valeur P de la précontrainte et son excentricité e_o sont connues ;
- la détermination de la section de béton ;
- la détermination de P et e_o .

3.1. Vérification d'une section

Le calcul se fera en supposant le matériau homogène puisqu'il n'y a pas de traction.

On désigne par :

- P la valeur de la précontrainte,
- e_o son excentricité, comptée positivement vers le haut,
- v et v' la distance du centre de gravité de la section à fibre la plus comprimée et la plus tendue,
- I le moment d'inertie de la section par rapport à son centre de gravité,
- S l'aire de la section,
- $M_{\max}$ le moment maximum agissant sur la section,
- $M_{\min}$ le moment minimum.

Les contraintes se calculent par la formule classique de la résistance des matériaux :

$$\sigma = \frac{P}{S} \pm \frac{Mv}{I}$$

Nous distinguerons, pour mieux appréhender l'action de la précontrainte, la contrainte de compression moyenne due à P que nous appellerons $\sigma_g = \frac{P}{S}$ et la contrainte de flexion due à l'excentricité de cette précontrainte qui vaut :

$$\frac{Pe_o v}{I} \quad \text{ou} \quad -\frac{Pe_o v'}{I}$$

Nous représenterons l'état des contraintes en tout point de la section sous forme de diagramme de contraintes (fig. 14-8).

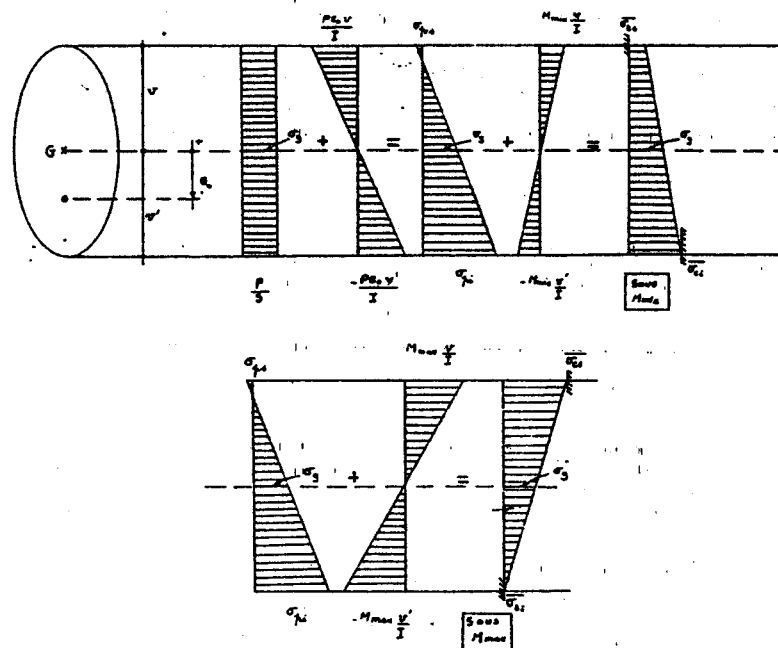


Fig. 14-8. Diagramme des contraintes sous moments maximum et minimum

La vérification des contraintes se traduit par les quatre inéquations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{P}{S} + \frac{Pe_o v}{I} + \frac{M_{\min} v}{I} &\geq \bar{\sigma}_{ts} = 0 \\ \frac{P}{S} - \frac{Pe_o v'}{I} - \frac{M_{\min} v'}{I} &\leq \bar{\sigma}_{ci} \\ \frac{P}{S} + \frac{Pe_o v}{I} + \frac{M_{\max} v}{I} &\leq \bar{\sigma}_{cs} \\ \frac{P}{S} - \frac{Pe_o v'}{I} - \frac{M_{\max} v'}{I} &\geq \bar{\sigma}_{ti} = 0 \end{aligned}$$

où $\bar{\sigma}_{cs}$ et $\bar{\sigma}_{ci}$ représentent les contraintes admissibles de compression sur la fibre supérieure et inférieure, $\bar{\sigma}_{ts}$ et $\bar{\sigma}_{ti}$ les contraintes admissibles de traction sur la fibre supérieure et inférieure (telles que définies au chapitre 9).

• *Exemple :* Soit la section rectangulaire de la figure 14-5 soumise sous combinaisons rares (voir chapitre 8) à un moment minimum $M_{\min} = 1,25$ MNm et à moment maximum $M_{\max} = 3,20$ MNm.

Le béton a une résistance à la compression f_{c28} de 30 MPa. D'après le chapitre 9, les contraintes admissibles en classe I sont :

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{cs} &= \bar{\sigma}_{ci} = 0,6 f_{c28} = 18 \text{ MPa} \\ \bar{\sigma}_{ci} &= \bar{\sigma}_{ci} = 0.\end{aligned}$$

Les valeurs de la précontrainte et de son excentricité sont données égales à : $P = 5,1 \text{ MN}$, $e_o = -0,44 \text{ m}$.

On calcule successivement :

$$S = bh = 0,6 \text{ m}^2$$

$$\frac{I}{v} = \frac{I}{v'} = \frac{bh^2}{6} = 0,12 \text{ m}^3$$

$$\sigma_s = \frac{P}{S} = \frac{5,1}{0,6} = 8,5 \text{ MPa}$$

$$\frac{Pe_o v}{I} = \frac{Pe_o v'}{I} = - \frac{5,1 \times 0,44}{0,12} = -18,7 \text{ MPa}$$

$$\frac{M_{\min} \cdot v}{I} = \frac{M_{\min} \cdot v'}{I} = \frac{1,25}{0,12} = 10,42 \text{ MPa}$$

$$\frac{M_{\max} \cdot v}{I} = \frac{M_{\min} \cdot v'}{I} = \frac{3,2}{0,12} = 26,67 \text{ MPa}$$

D'où le diagramme des contraintes suivant (fig. 14-9) :

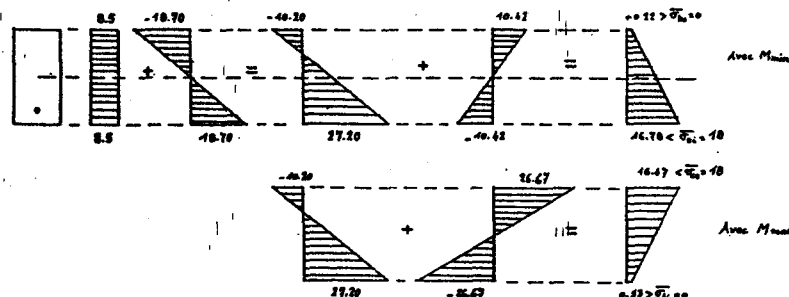


Fig. 14-9. Diagramme des contraintes sous moments maximum et minimum

Les contraintes sont inférieures aux contraintes admissibles. La section de béton, la précontrainte et son excentricité conviennent donc.

Section brute — section nette — section homogène

Dans le calcul précédent, nous avons pris en compte la section brute de béton sans tenir compte des évidements correspondant aux gaines qui, malgré le coulis d'injection, ne peuvent jouer un rôle résistant à la compression, ni de l'acier de précontrainte qui, une fois les gaines injectées, devient adhérent au reste du béton et donc participe à la résistance de la section.

Nous serons alors amenés à considérer (cf. chapitre 8, § 6. les sollicitations) :

- la section brute de béton qui est utilisée pour les calculs approchés ;
- la section nette correspond au cas de calcul des contraintes agissant avant l'injection des câbles, c'est-à-dire sous l'action des charges permanentes existant lors de l'injection des câbles. Elle se calcule en tenant compte des vides des gaines ;
- la section homogène qui correspond à la section brute de béton moins les vides des gaines, plus l'acier de précontrainte pris en compte avec un coefficient d'équivalence n . Cette section sera prise en compte pour le calcul des contraintes appliquées après l'injection des gaines.

3.2. Détermination de la précontrainte et de son excentricité

Nous supposons connue la section de béton.

3.2.1. Centre de pression

On appelle centre de pression le point de passage de la résultante de compression du béton. Cette résultante, qui équilibre les efforts extérieurs, est égale à la valeur de l'effort de précontrainte P . Ainsi pour les différents diagrammes de contraintes de la figure 14-10, nous avons une contrainte constante (a) pour un centre de pression situé au centre de gravité de la section, une contrainte nulle pour un centre de pression situé à la limite du noyau central (b).

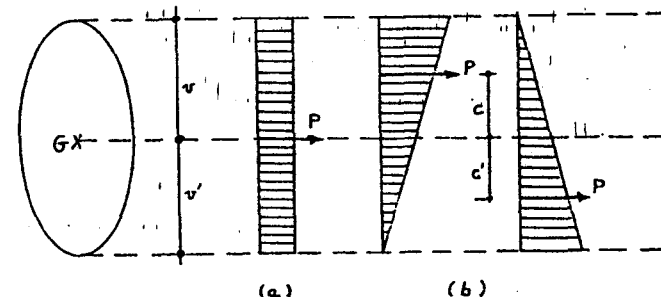


Fig. 14-10. Position du centre de pression à la limite du noyau central

Appelons c la distance (et non l'ordonnée) du centre de pression au centre de gravité pour une contrainte nulle en fibre inférieure et c' la distance du centre de pression au centre de gravité pour une contrainte nulle en fibre supérieure.

La formule classique qui permet de calculer les contraintes donne :

$$\frac{P}{S} - \frac{Pc}{I/v'} = 0$$

d'où : $c = \frac{I}{Sv'} = pv$ en posant $p = \frac{I}{Sv'}$ rendement géométrique de la section.

De même: $\frac{P}{S} - \frac{Pc'}{I/v} = 0$ d'où: $c' = pv'$

$$\begin{aligned} c &= pv \\ c' &= pv' \end{aligned}$$

3.2.2. Action d'un moment M sur la position du centre de pression (fig. 14-11)

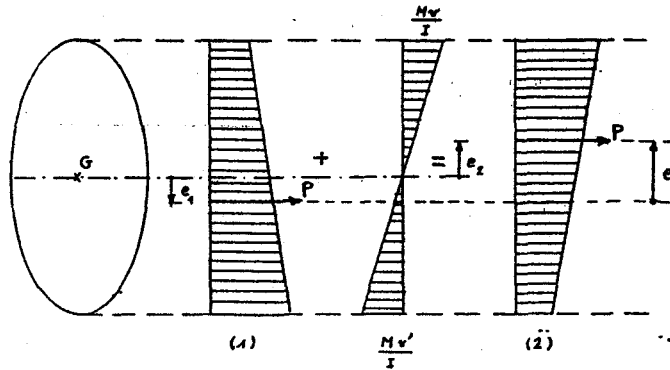


Fig. 14-11. Action d'un moment sur la position du centre de pression

Le moment résistant du béton par rapport au centre de gravité vaut Pe_1 dans le cas (1) et Pe_2 dans le cas (2). On passe du cas (1) au cas (2) par adjonction d'un moment M . La différence des moments résistants $Pe_2 - Pe_1$ est égale à ce moment extérieur M soit:

$$\Delta e = e_2 - e_1 = \frac{M}{P}$$

On retiendra que l'action d'un moment positif M relève le centre de pression de la valeur $\frac{M}{P}$.

3.2.3. Représentation graphique de l'action des moments extérieurs $M_{\max}$ et $M_{\min}$ (fig. 14-12)

Sous l'action de la seule précontrainte, le centre de pression se trouve au niveau du câble moyen (excentricité e_0 , positive vers le haut). L'application du moment minimum $M_{\min}$ va déplacer le centre de pression d'une valeur algébrique (positive vers le haut) égale à $\frac{M_{\min}}{P}$. Pour que la contrainte reste positive, on a vu que le centre de pression doit se situer au-dessus du point d'ordonnée $-c'$, ce qui se traduit par l'inégalité:

$$e_0 + \frac{M_{\min}}{P} \geq -c' \quad (14-1)$$

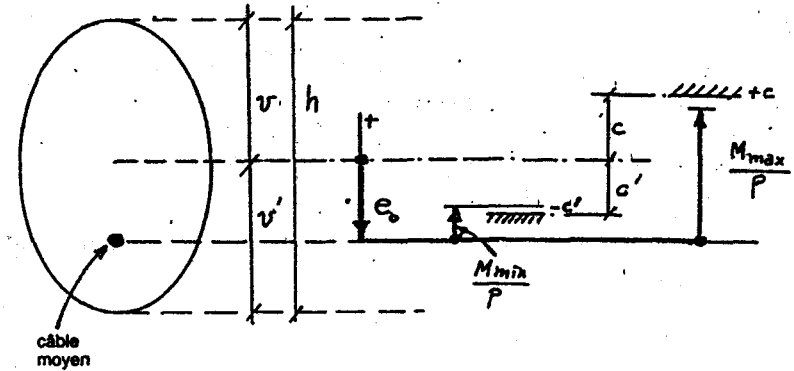


Fig. 14-12. Positions du centre de pression sous moments maximum et minimum

De même sous l'action du moment maximum $M_{\max}$, le centre de pression doit rester en dessous du point d'ordonnée $+c$ d'où l'inégalité:

$$e_0 + \frac{M_{\max}}{P} \leq c \quad (14-2)$$

3.2.4. Détermination de la précontrainte minimum (section sous-critique)

La précontrainte minimum sera obtenue lorsque les inégalités (14-1) et (14-2) deviennent des égalités, c'est-à-dire lorsque les points d'ordonnée c et $-c'$ sont atteints par le centre de pression. Des inéquations (14-1) et (14-2), on tire:

$$\frac{M_{\max}}{P} - \frac{M_{\min}}{P} \leq c + c'$$

soit: $P \geq \frac{\Delta M}{c + c'}$ avec: $\Delta M = M_{\max} - M_{\min}$

et comme on a vu que $c = pv$ et $c' = pv'$, $v + v'$ vaut h d'où la précontrainte minimum:

$$P = \frac{\Delta M}{\rho h} \quad (14-3)$$

3.2.5. Détermination de l'excentricité e_0 (sous-critique)

Des inégalité (14-1) et (14-2), on tire:

$$-c' - \frac{M_{\min}}{P} \leq e_0 \leq c - \frac{M_{\max}}{P}$$

si P est déterminé par l'équation (14-3), on a alors:

$$e_0 = -c' - \frac{M_{\min}}{P} = c - \frac{M_{\max}}{P} \quad (14-4)$$

3.2.6. Section sur-critique

Si l'excentricité ainsi calculée est telle que le câble n'a plus l'enrobage minimum, la section est dite *sur-critique*, l'excentricité vaut alors $e_o = -(v' - d')$ et la précontrainte à appliquer est plus importante que celle calculée précédemment, car l'on doit compenser le manque d'excentricité par un accroissement de la valeur de la précontrainte.

La valeur de la précontrainte sur-critique est obtenue à partir de l'inégalité (14-2) transformée en égalité :

$$e_o + \frac{M_{\max}}{P} = c$$

soit avec : $e_o = -(v' - d')$

$$P = \frac{M_{\max}}{c + v' - d'} \quad \text{ou} \quad P = \frac{M_{\max}}{\rho v + v' - d'} \quad (14-5)$$

Dans la pratique, on calcule les deux précontraintes sous-critique et sur-critique par les formules (14-3) et (14-5) et on retiendra la valeur maximum des deux valeurs calculées.

La section sera dite sur-critique si la précontrainte sur-critique est supérieure à la précontrainte sous-critique.

En examinant les formules (14-3) et (14-5), on constate que la section sera sur-critique pour de faibles valeurs de ΔM par rapport au moment maximum $M_{\max}$, c'est-à-dire pour des charges variables faibles.

En section sur-critique, le centre de pression atteint bien l'ordonnée $+c$ sous moment maximum. Donc on retiendra que sous moment minimum, la contrainte minimum admissible n'est pas atteinte en section sur-critique (fig. 14-13).

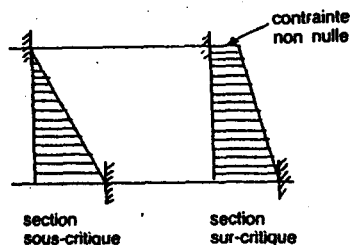


Fig. 14-13. Diagramme-type des contraintes en section sous-critique et sur-critique

3.2.7. Cas particulier de la poutre isostatique

Comme on peut dire que le moment minimum correspond aux charges permanentes seules (*à vide*) et le moment maximum au moment total (*en charge*), le fait de ne pas atteindre la contrainte minimum à vide signifie que l'on n'a pas pu

excentrer suffisamment le câble pour reprendre toutes les charges permanentes, mais une partie seulement. Nous dirons qu'en section sous-critique, le poids mort ne coûte rien, car la valeur de P est indépendante de $M_{\min}$, alors qu'en section sur-critique, une fraction du poids mort est considéré comme une surcharge, l'excentricité limite $-(v' - d')$ ne pouvant compenser qu'une partie seulement du moment minimum.

• *Exemple 1 :* Soit la section de la figure 14-5 soumise aux moments $M_{\min} = 1,2 \text{ MNm}$ et $M_{\max} = 3,2 \text{ MNm}$ avec une valeur de l'enrobage telle que $d' = 0,15 \text{ m}$.

En sous-critique, la valeur de la précontrainte est déterminée par l'équation (14-3):

$$P = \frac{\Delta M}{\rho h}$$

$$\text{avec : } \rho = \frac{I}{S v v'} = \frac{b h^3}{12} \times \frac{1}{b h} \times \left(\frac{2}{h}\right)^2 = \frac{1}{3}$$

$$\text{et } c = \rho v = \frac{h}{6} = c' = 0,2 \text{ m}$$

$$P = \frac{3,2 - 1,2}{\frac{1}{3} \times 1,2} = 5 \text{ MN}$$

$$\text{et l'excentricité } e_o = -c' - \frac{M_{\min}}{P} = -0,2 - \frac{1,2}{5} = -0,44 \text{ m}$$

$$(\text{ou } e_o = c - \frac{M_{\max}}{P} = 0,2 - \frac{3,2}{5} = -0,44 \text{ m})$$

on vérifie bien que : $|e_o| = 0,44 < v' - d' = 0,45 \text{ m}$.

Si la section avait été sur-critique, la précontrainte aurait été déterminée par l'équation (14-5):

$$P = \frac{M_{\max}}{\rho v + v' - d'} = \frac{3,2}{0,2 + 0,60 - 0,15} = 4,92 \text{ MN}$$

On constate bien que la section est sous-critique, car $P_{\text{sous}} > P_{\text{sur}}$.

• *Exemple 2 :* Soit la même section que précédemment soumise aux moments $M_{\max} = 2,4 \text{ MNm}$ et $M_{\min} = 1,9 \text{ MNm}$ avec $d' = 0,15 \text{ m}$.

$$P_{\text{sur}} = \frac{M_{\max}}{\rho v + v' - d'} = \frac{2,4}{0,65} = 3,69 \text{ MN}$$

$$P_{\text{sous}} = \frac{\Delta M}{\rho h} = \frac{0,5}{0,4} = 1,25 \text{ MN}$$

la section est bien sur-critique.

Les contraintes calculées comme indiqué plus haut sont représentées sur le diagramme de la figure 14-14.

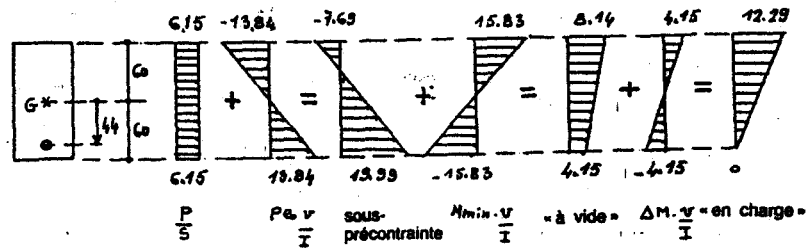


Fig. 14-14. Diagramme des contraintes

3.3. Détermination de la section de béton

Les seuls éléments connus sont les moments maximum et minimum et nous nous proposons de déterminer la section de béton minimum, la précontrainte et son excentricité.

3.3.1. Section sous-critique

Comme la section est sous-critique, on peut atteindre les contraintes limites admissibles. La section la plus économique sera effectivement celle qui fait travailler le béton au maximum de ses capacités. Du diagramme limite de la figure 14-15, on déduit que la variation de contrainte due à la variation de moment permet d'écrire :

$$\Delta \sigma_i = \bar{\sigma}_{ci} - \bar{\sigma}_{ci} = \frac{\Delta M}{I/v'}$$

$$\Delta \sigma_s = \bar{\sigma}_{cs} - \bar{\sigma}_{cs} = \frac{\Delta M}{I/v}$$

d'où :

$$\frac{I}{v} = \frac{\Delta M}{\Delta \sigma_i} \quad (14-6)$$

$$\frac{I}{v'} = \frac{\Delta M}{\Delta \sigma_s}$$

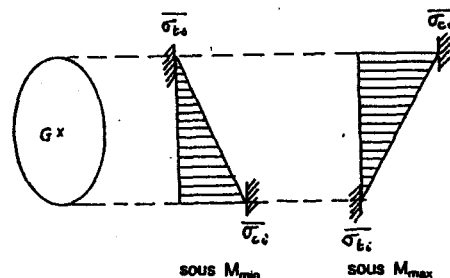


Fig. 14-15

Si les contraintes admissibles sont les mêmes sur les fibres supérieures et inférieures, la section la plus économique en sous-critique est une section symétrique.

3.3.2. Section sur-critique

Le seul paramètre de calcul est la contrainte admissible $\bar{\sigma}_{cs}$ en fibre supérieure à atteindre pour obtenir la section économique :

$$\bar{\sigma}_{cs} = \frac{P}{S} + \frac{P e_o}{I/v} + \frac{M_{max}}{I/v} \quad (14-7)$$

l'égalité : $\rho = \frac{I}{S v v'}$ donne : $\frac{1}{S} = \frac{\rho v v'}{I}$

et : $P = \frac{M_{max}}{\rho v + v' - d'} = \frac{M_{max}}{\rho v - e_o}$ donne : $M_{max} = P \rho v - P e_o$

que l'on reporte dans l'équation (14-7).

On obtient : $\bar{\sigma}_{cs} = \frac{P \rho v'}{I/v} + \frac{P e_o}{I/v} + \frac{P \rho v}{I/v} - \frac{P e_o}{I/v} = \frac{P \rho h}{I/v}$

d'où :

$$\frac{I}{v} = \frac{P \rho h}{\bar{\sigma}_{cs}} \quad (14-8)$$

Comme les contraintes limites peuvent être atteintes sur la fibre inférieure, on a de nouveau :

$$\frac{I}{v'} = \frac{\Delta M}{\Delta \sigma_i}$$

On constate que la détermination de I/v suppose la connaissance de P , ρ , h qui elle-même suppose la connaissance de la section. On ne pourra alors que procéder par approximations successives.

• **Exemple 1 :** Soit une dalle de 15 m de portée, soumise à une charge d'exploitation $q = 0,05 \text{ MN/m}^2$ (fig. 14-16).

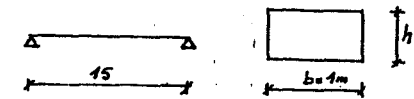


Fig. 14-16

Nous utiliserons des gâches de 71 mm de diamètre extérieur, l'enrobage minimum par rapport à l'axe vaut (cf. chapitre 20) :

$$1,5 \phi_g = 1,5 \times 7,1 = 10,65 \text{ cm} = 0,107 \text{ m.}$$

Le béton utilisé a une résistance de 30 MPa.

Supposons que la contrainte admissible en compression soit :

$$0,5 f_{c28} = 15 \text{ MPa et en traction } \bar{\sigma}_{ts} = \bar{\sigma}_{ti} = 0.$$

Si la section était sous-critique, on aurait : $\frac{I}{v} = \frac{\Delta M}{\Delta \sigma}$

$$\text{avec : } \Delta M = \frac{q \ell^2}{8} = \frac{0,05 \times 15^2}{8} = 1,406 \text{ MNm.}$$

$$\Delta \sigma = 15 \text{ MPa}$$

$$\frac{b h^2}{6} = \frac{I}{v} = 0,0938 \text{ m}^3$$

soit : $h = 0,75 \text{ m}$ avec : $b = 1 \text{ m}$ (largeur unité),

$$\text{la précontrainte vaut : } P = \frac{\Delta M}{\rho h} = \frac{1,406}{1/3 \times 0,75} = 5,624 \text{ MN}$$

l'excentricité vaut: $e_o = -c' - \frac{M_{\min}}{P}$

avec: $c' = pv' = \frac{1}{3} \times 0,375 = 0,125$ m

$M_{\min} = g \frac{\ell^2}{8}$ avec: $g = 2,5 \times 0,75 \times \frac{9,81}{1\,000} = 0,01839$ MN/m

$$M_{\min} = 0,517 \text{ MNm}$$

$$e_o = -0,125 - \frac{0,517}{5,624} = -0,217$$

or: $0,217 < \frac{0,75}{2} - 0,107 = 0,268$ m

La section est bien sous-critique.

• Exemple 2: Même exemple avec une charge d'exploitation plus faible: $q = 0,03$ MN/m².

Si la section était sous-critique, on aurait:

$$\Delta M = 0,03 \times 15^2/8 = 0,844 \text{ MNm}$$

$$\frac{I}{v} = \frac{\Delta M}{\Delta \sigma} = \frac{0,844}{15} = 0,05624 \text{ m}^3$$

soit: $h = 0,581$ m $h = 0,59$ m

$$g = 0,59 \times 2,5 \times 9,81 \times 10^{-3} = 0,01447 \text{ MN/m}^2$$

$$M_g = 0,407 \text{ MNm} = M_{\min}$$

$$\text{d'où: } P = \frac{\Delta M}{ph} = \frac{0,844}{1/3 \times 0,59} = 4,29 \text{ MN}$$

$$\text{et: } e_o = -c' - \frac{M_{\min}}{P} = -\frac{0,59}{6} - \frac{0,407}{4,29} = -0,193$$

$$v' - d' = \frac{0,59}{2} - 0,107 = 0,188 \text{ m.}$$

Le câble n'a pas l'enrobage minimum nécessaire. La section est donc sur-critique. La section de béton nécessaire et la précontrainte sont supérieures aux valeurs trouvées ci-dessus.

Partons d'une valeur *a priori* de $h = 0,65$ m

$$M_g = \frac{0,65 \times 2,5 \times 9,81}{1\,000} \times \frac{15^2}{8} = 0,448 \text{ MNm} = M_{\min}$$

$$M_{\max} = 0,448 + 0,844 = 1,292 \text{ MNm}$$

$$P = \frac{M_{\max}}{pv + v' - d'} = \frac{1,292}{\frac{1}{6} \times 0,65 + 0,325 - 0,107} = 3,96 \text{ MN}$$

$$\frac{I}{v} = \frac{Pph}{\sigma_{cs}} = \frac{3,96 \times 1/3 \times 0,65}{15} = 0,0572$$

d'où: $h = 0,586$ m.

Essayons: $h = 0,59$ m, $g = 0,01447$ MN/m²

$$M_{\min} = M_g = 0,407 \text{ MNm}$$

$$M_{\max} = 0,407 + 0,844 = 1,25 \text{ MNm}$$

$$P = \frac{1,25}{0,286} = 4,37 \text{ MN}$$

$$\frac{I}{v} = \frac{4,37 \times 0,59/3}{15} = 0,05728$$

d'où: $h = 0,586$ m, nous retiendrons $0,59$ m.

On remarquera que la relation $\frac{I}{v'} = \frac{\Delta M}{\Delta \sigma_i}$ n'est pas déterminante, car:

$$\frac{I}{v'} = \frac{\Delta M}{\Delta \sigma_i} = \frac{0,844}{15} = 0,05627 < \frac{I}{v} = 0,05728 \text{ m}^3.$$

3.3.3. Section sous-critique ou sur-critique

Pour une section rectangulaire, nous nous proposons de chercher la valeur de la charge d'exploitation q à partir de laquelle la section devient sur-critique.

Si q est faible vis-à-vis des charges permanentes g , l'excentricité sera insuffisante pour reprendre toutes les charges permanentes, la section sera donc sur-critique.

$$\text{Posons: } \delta' = \frac{d'}{h}, \quad p = \frac{1}{3}, \quad v = v' = \frac{h}{2}$$

l'égalité $P_{\text{sous}} = P_{\text{sur}}$ donne:

$$\frac{\Delta M}{ph} = \frac{M_{\max}}{pv + v' - d'}$$

$$\text{ou: } \frac{\Delta M}{M_{\max}} = \frac{q}{g + q} = \frac{ph}{pv + v' - d'} = \frac{1}{2 - 3\delta'}$$

La valeur δ' varie de 0,1 à 0,2 donc: $\frac{q}{g + q}$ varie de 0,59 à 0,71.

Si les charges variables représentent moins de 1,4 fois les charges permanentes la section sera sur-critique.

REMARQUE:

La détermination de I/v , I/v' , P et e_o par les formules ci-dessus dispensent de la vérification des contraintes. En effet, la détermination de la section par les équations (14-6) ou (14-8) nous assure du non-dépassement de la contrainte de compression admissible. La détermination de la précontrainte minimum et de son excentricité par les équations (14-3), (14-4) et (14-5) nous assurent de ne pas avoir de contraintes négatives.

3.4. Application au BPEL

La vérification des contraintes ou la détermination de la section, de la précontrainte et de son excentricité sont plus laborieuses que ci-dessus, car les calculs doivent être menés pour les deux précontraintes maximum P_1 et minimum P_2 .

3.4.1. Vérification des contraintes

Considérons deux cas, suivant la valeur de l'excentricité e_0 :

$e_0 < -\rho v'$, sous l'action de la seule précontrainte, la fibre supérieure est tendue.

$e_0 > -\rho v'$, la fibre supérieure est comprimée.

Nous représenterons en pointillé les contraintes résultantes de la précontrainte maximum P_1 pour les deux cas ci-dessus (fig. 14-17).

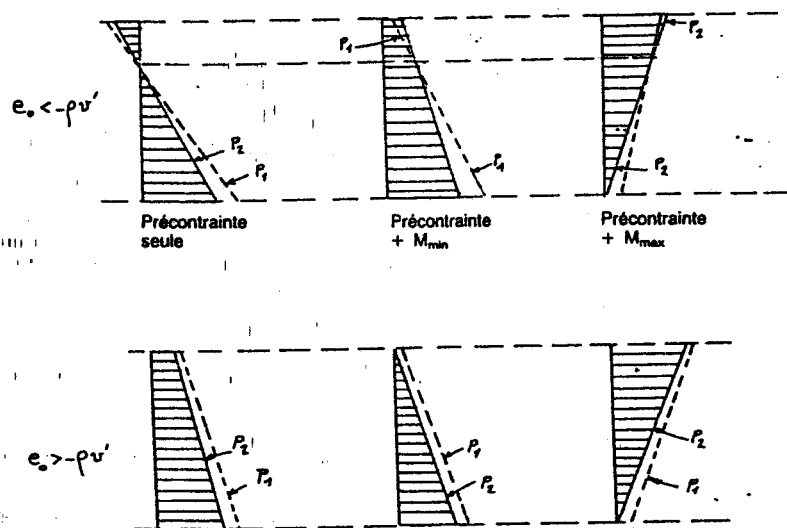


Fig. 14-17. Diagramme des contraintes sous précontrainte maximum P_1 et minimum P_2

On constate que la vérification n'est à faire que:

- sous précontrainte maximum P_1 si l'excentricité e_0 est supérieure à $-\rho v'$;
- sous précontrainte maximum P_1 pour les contraintes maximum, et minimum P_2 pour les contraintes minimum si l'excentricité est inférieure à $-\rho v'$.

* Voir chapitre 11, § 10.

3.4.2. Détermination de la précontrainte et de son excentricité

Compte tenu des deux précontraintes de calcul P_1 et P_2 , il est difficile *a priori* de connaître la plus défavorable. Une solution astucieuse consiste à modifier les contraintes admissibles et de se ramener au cas général développé ci-avant.

Les précontraintes maximum et minimum P_1 et P_2 peuvent s'exprimer en fonction de la précontrainte moyenne:

$$P = \frac{P_1 + P_2}{2}$$

et d'un facteur λ tel que:

$$P_1 = (1 + \lambda)P$$

$$P_2 = (1 - \lambda)P.$$

On pourra retenir en première approximation une valeur de: $\lambda = 0,1$ (cf. chapitre 11, § 11).

La vérification des contraintes sous moment minimum $M_{\min}$ est conforme au diagramme de la figure 14-18.

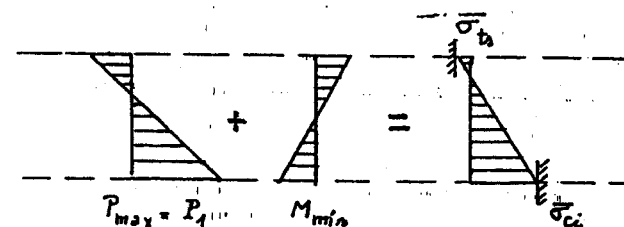


Fig. 14-18. Vérification des contraintes sous moment minimum et précontrainte maximum

Elle est également conforme au diagramme de la figure 14-19 qui se déduit du précédent par une réduction des facteurs par $(1 + \lambda)$.

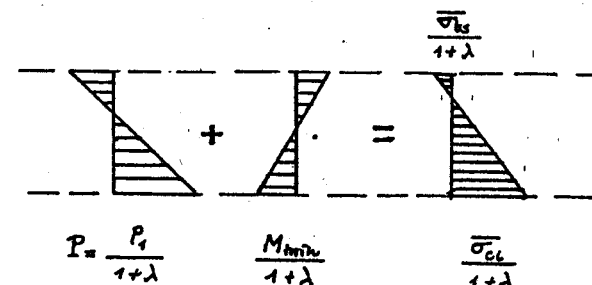


Fig. 14-19. Diagramme transformé pour la vérification des contraintes sous moment minimum

De même pour la précontrainte minimum, on obtient le diagramme de la figure 14-20.

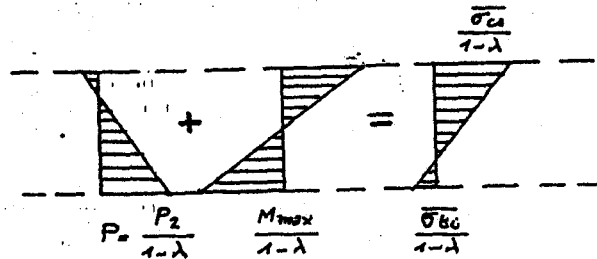


Fig. 14-20. Diagramme transformé pour la vérification des contraintes sous moment maximum

On ramène donc le calcul à une seule valeur de précontrainte inconnue, la valeur de λ prise *a priori* égale à 0,1 varie peu autour de cette valeur (0,07 à 0,14).

• **Exemple:** Déterminer la précontrainte P et l'excentricité e_o pour les valeurs suivantes:

$$M_{\max} = 2,6 \text{ MNm}$$

$$M_{\min} = 1,05 \text{ MNm}$$

$$\bar{\sigma}_{cs} = \bar{\sigma}_{ci} = 15 \text{ MPa}$$

$$\bar{\sigma}_{ts} = \bar{\sigma}_{ti} = 0 \text{ MPa (classe I)}.$$

On calcule la section avec les moments fictifs:

$$M'_{\max} = \frac{M_{\max}}{1 - \lambda} = \frac{2,6}{0,9} = 2,89 \text{ MNm}$$

$$M'_{\min} = \frac{M_{\min}}{1 + \lambda} = \frac{1,05}{1,1} = 0,95 \text{ MNm}$$

et les contraintes admissibles:

$$\bar{\sigma}_{cs} = \frac{\bar{\sigma}_{ci}}{1 - \lambda} = \frac{15}{0,9} = 16,67 \text{ MPa}$$

$$\bar{\sigma}_{ci} = \frac{\bar{\sigma}_{ci}}{1 + \lambda} = \frac{15}{1,1} = 13,64 \text{ MPa}.$$

Dans le cas d'une section rectangulaire sous-critique, on trouverait:

$$\frac{1}{v} = \frac{\Delta M'}{\Delta \bar{\sigma}_s} = \frac{2,89 - 0,95}{16,67} = 0,116 \text{ m}^3$$

$$\frac{1}{v'} = \frac{\Delta M'}{\Delta \bar{\sigma}_i} = \frac{2,89 - 0,95}{13,64} = 0,142 \text{ m}^3$$

$$\text{soit pour } b = 1 \text{ m: } h = \sqrt{6 \times 0,142} = 0,924 \text{ m}$$

$$h = 0,93 \text{ m}.$$

En supposant que les moment minimum et maximum tiennent compte de cette hauteur, on trouve pour P :

$$P = \frac{\Delta M'}{\rho h} = \frac{2,89 - 0,95}{1/3 \times 0,93} = 6,26 \text{ MN}$$

$$e_o = -c' - \frac{M'_{\min}}{P} = -\frac{0,93}{6} - \frac{0,95}{6,26} = -0,3068 \text{ m}$$

si $d' < \frac{0,93}{2} - 0,3068 = 0,158$, la section est bien sous-critique.

3.4.3. Portée critique

Le dimensionnement d'une section conduit à une charge permanente de poids propre croissant avec la portée. Donc pour une même charge d'exploitation, la part des charges permanentes sur le total des charges va en croissant et la section passera du stade sous-critique au stade sur-critique.

On pourrait donc définir une portée dite portée critique ℓ_c qui détermine la frontière entre domaines sous-critique et sur-critique.

Prenons l'exemple d'une poutre en classe I, la limite des domaines sous et sur-critique est obtenue pour $P_{\text{sous}} = P_{\text{sur}}$ soit:

$$\frac{\Delta M}{\rho h} = \frac{M_{\max}}{\rho v + v' - d'}$$

Pour une poutre sur deux appuis simples:

$$\frac{\Delta M}{M_{\max}} = \frac{q}{g + q} = \frac{\rho h}{\rho v + v' - d'}$$

avec: q = charge d'exploitation

g = charge permanente

Supposons, comme exemple, une dalle pleine de hauteur h avec un enrobage du câble moyen $d' = 0,15 h$,

$$g = \omega h \quad (\omega = \text{poids spécifique du béton})$$

$$\rho = 1/3$$

$$\rho v + v' - d' = \frac{2}{3} h - 0,15 h = 0,517 h$$

$$\text{soit: } \frac{q}{\omega h + q} = \frac{1/3 h}{0,517 h} = \frac{1}{1,55}$$

$$\text{d'où: } h = \frac{0,55 q}{\omega}$$

$$\text{or: } \Delta M = \frac{q \ell^2}{8}$$

$$\text{et: } \frac{1}{v} = \frac{b h^2}{6} = \frac{h^2}{6} = \frac{\Delta M}{\Delta \sigma}$$

$$\text{soit : } \frac{h^2}{6} = \frac{q\ell^2}{8\Delta\sigma}$$

$$\text{d'où : } \ell^2 = \frac{8\Delta\sigma}{6q} \cdot h^2 = \frac{8\Delta\sigma}{6q} \left(\frac{0,55q}{w} \right)^2$$

$$\text{d'où : } \ell_c = \frac{0,55}{w} \sqrt{\frac{8q\Delta\sigma}{6}}$$

Application : avec $\Delta\sigma = 15 \text{ MPa}$
 $w = 2,5 \times 9,81 \times 10^{-3} \text{ MN/m}^3$
 $\ell_c = 100,29 \sqrt{q} \quad q \text{ en MN/m}^2$

On peut ainsi tracer l'abaque de la figure 14-21 représentant pour des charges d'exploitation de $0,5 \text{ t/m}^2$ à 5 t/m^2 d'une poutre-dalle les deux zones sous-critique et sur-critique en fonction de la portée. On retrouve l'intérêt du béton précontraint pour les charges d'exploitation élevées, le domaine sous-critique étant plus économique que le domaine sur-critique.

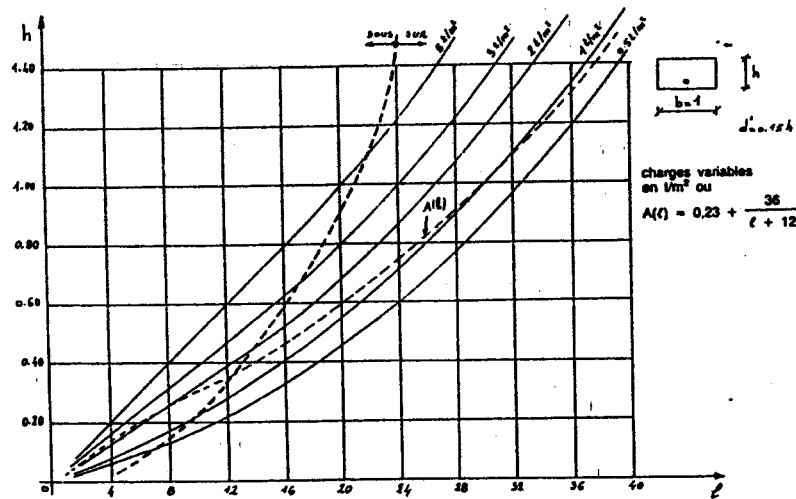


Fig. 14-21. Portée critique des dalles pleines en classe I

4. LA FLEXION EN CLASSE II

La classe II diffère de la classe I par des contraintes de traction admissible non nulles. Le calcul de la section se fait en supposant celle-ci non fissurée. Les formules que nous allons déterminer sont une extension des formules précédentes.

4.1. Vérification des sections

On procèdera de la même façon que pour la classe I. Les inéquations à vérifier sont les mêmes que celles du paragraphe 3-1 à savoir :

$$\frac{P}{S} + \frac{P_{e0}v}{I} + \frac{M_{\min}v}{I} \geq \bar{\sigma}_u$$

$$\frac{P}{S} - \frac{P_{e0}v'}{I} - \frac{M_{\min}v'}{I} \leq \bar{\sigma}_d$$

$$\frac{P}{S} + \frac{P_{e0}v}{I} + \frac{M_{\max}v}{I} \leq \bar{\sigma}_u$$

$$\frac{P}{S} - \frac{P_{e0}v'}{I} - \frac{M_{\max}v'}{I} \geq \bar{\sigma}_d$$

4.2. Détermination de P et e.

Les mêmes équations que pour la classe I peuvent s'écrire à partir de la figure 14-12 à la seule différence que les valeurs c et c' ne sont plus égales à p_v et p_v' , mais supérieures à ces valeurs puisqu'elles représentent les bornes du noyau central.

Au lieu d'essayer de déterminer les nouvelles valeurs de c et c' , il est plus aisé de partir des valeurs trouvées en classe I en ajoutant l'influence de la contrainte admissible de traction.

4.2.1. Section sous-critique

Au diagramme des contraintes obtenues en classe I, ajoutons le supplément de précontrainte apporté par les contraintes de traction admissibles $\bar{\sigma}_u$ sur la fibre inférieure et $\bar{\sigma}_d$ sur la fibre supérieure (valeurs algébriques donc négatives pour une traction).

En étudiant la contrainte sur la fibre inférieure (fig. 14-22) on obtient :

$$\Delta P_1 = \left(\bar{\sigma}_u \cdot \frac{v}{h} \right) S.$$

De même, la conséquence d'une contrainte admissible de traction égale à $\bar{\sigma}_d$ sur la fibre supérieure induit un effort de précontrainte : $\Delta P_2 = \bar{\sigma}_d \cdot \frac{v'}{h} S$

d'où l'effort de précontrainte en classe II :

$$P = P_1 + \Delta P_1 + \Delta P_2$$

$$P = \frac{\Delta M}{\rho h} + \frac{S}{h} (v\bar{\sigma}_u + v'\bar{\sigma}_d)$$

Comme les valeurs de $\bar{\sigma}_u$ et $\bar{\sigma}_d$ sont négatives, l'effort de précontrainte nécessaire est plus faible qu'en classe I.

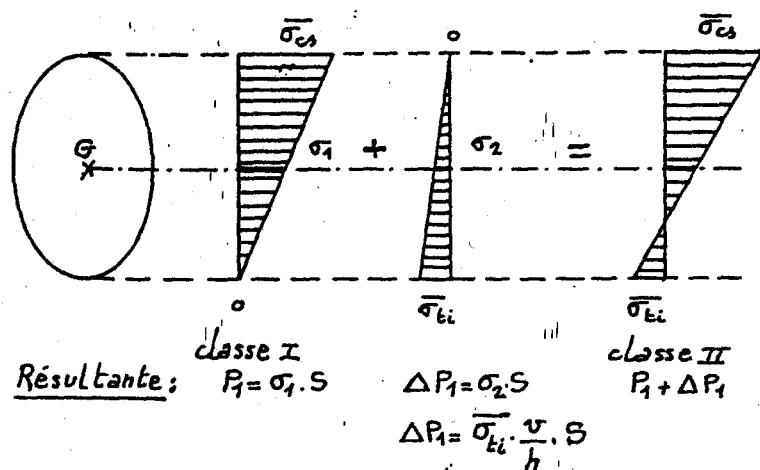


Fig. 14-22. Section sous-critique.
Comparaison des diagrammes de contrainte en classes I et II

• Détermination de l'excentricité e_o

Au diagramme des contraintes de classe I, sous moment maximum, s'ajoute un moment δM induit par la contrainte admissible $\bar{\sigma}_{ti}$ tel que (fig. 14-23):

$$\bar{\sigma}_{ti} = -\frac{\delta M}{I/v'} \text{ soit: } \delta M = -\frac{\bar{\sigma}_{ti} I}{v'}$$

Sous l'action de ce moment le centre de pression remonte (si δM est positif) de:

$$\frac{\delta M}{P} = -\frac{\bar{\sigma}_{ti} I/v'}{P} = -\frac{\bar{\sigma}_{ti}}{P} \rho S v$$

donc la valeur c vaut:

$$c = p v - \rho S v \frac{\bar{\sigma}_{ti}}{P}$$

de même pour la fibre supérieure:

$$c' = p v' - \frac{\rho S v' \bar{\sigma}_{ts}}{P}$$

d'où les valeurs de l'excentricité:

$$e_o = p v - \frac{M_{max} + p v S \bar{\sigma}_{ti}}{P}$$

$$\text{et: } e_o = -p v' - \frac{M_{min} - p v' S \bar{\sigma}_{ts}}{P}$$

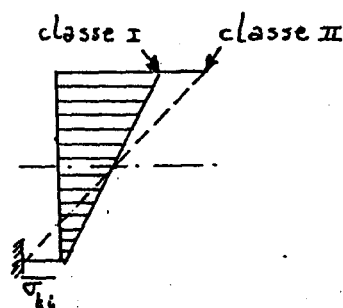


Fig. 14-23. Diagramme des contraintes en classe I et II

• Détermination de la section

En utilisant le même raisonnement que celui de la classe I la solution la plus économique de béton est obtenue lorsque les contraintes limites sont atteintes, soit:

$$\frac{I}{v} = \frac{\Delta M}{\Delta \bar{\sigma}_s}$$

$$\frac{I}{v'} = \frac{\Delta M}{\Delta \bar{\sigma}_t}$$

avec: $\Delta \bar{\sigma}_s = \bar{\sigma}_{cs} - \bar{\sigma}_{ts}$ en fibre supérieure,
 $\Delta \bar{\sigma}_t = \bar{\sigma}_{cs} - \bar{\sigma}_{ts}$ en fibre inférieure.

4.2.2. Section sur-critique

L'excentricité est alors imposée à sa valeur maximale admissible compatible avec les conditions d'enrobage:

$$e_o = -(v' - d')$$

• Détermination de la précontrainte P

Nous passons du diagramme de contraintes de classe I à celui de classe II en ajoutant un diagramme triangulaire dû à la contrainte de traction admissible $\bar{\sigma}_{ti}$ qui correspond à un moment résistant δM supplémentaire* pour la section (fig. 14-24) qui vaut:

$$\delta M = \bar{\sigma}_{ti} \cdot \frac{I}{v'} = \bar{\sigma}_{ti} \rho S v$$

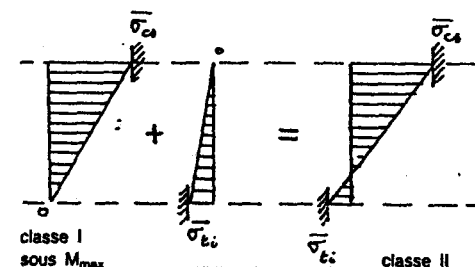


Fig. 14-24. Section sur-critique. Comparaison des diagrammes en classes I et II

De la relation (14-5) de la classe I, nous tirons:

$$M_{max} = P(p v + v' - d')$$

* Supplémentaire, car $\bar{\sigma}_{ti}$ est négatif.

le moment résistant δM s'ajoute algébriquement à $M_{\max}$ de sorte que l'équation (14-5) devient:

$$P = \frac{M_{\max} + \rho S v \bar{\sigma}_{ti}}{\rho v + v' - d'}$$

• Détermination de la section de béton

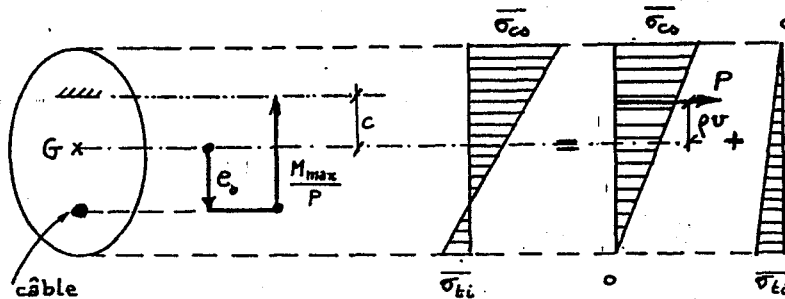


Fig. 14-25. Centre de pression et contraintes admissibles en section sur-critique

De la figure 14-25, nous tirons:

$$\delta M = \bar{\sigma}_{ti} \frac{I}{v'} \text{ et } \frac{\delta M}{P} = \frac{\bar{\sigma}_{ti} I}{P v'}$$

$$e_o + \frac{M_{\max}}{P} = c = \rho v - \frac{\bar{\sigma}_{ti}}{P} \frac{I}{v'}$$

d'autre part la contrainte en fibre supérieure vaut:

$$\bar{\sigma}_{cs} = \frac{P}{S} + \frac{M_{\max} + P e_o}{I/v}$$

Des deux dernières équations nous tirons:

$$\bar{\sigma}_{cs} = \frac{P}{S} + \frac{\rho P v - \bar{\sigma}_{ti} I/v'}{I/v} \text{ avec: } S = \frac{I}{\rho v v'}$$

$$\bar{\sigma}_{cs} = \frac{P \rho v v'}{I} + \frac{P \rho v v'}{I} - \bar{\sigma}_{ti} \frac{v}{v'}$$

$$\text{d'où: } \bar{\sigma}_{cs} + \bar{\sigma}_{ti} \frac{v}{v'} = \frac{P \rho v}{I} (v + v') = \frac{P \rho h v}{I}$$

et

$$\frac{I}{v} = \frac{P \rho h}{\bar{\sigma}_{cs} + \frac{v}{v'} \bar{\sigma}_{ti}}$$

• Exemple: Détermination de la section rectangulaire de la figure 14-26 soumise à une charge variable $q = 2 \text{ t/m}^2$ pour un béton dont les contraintes admissibles sont:

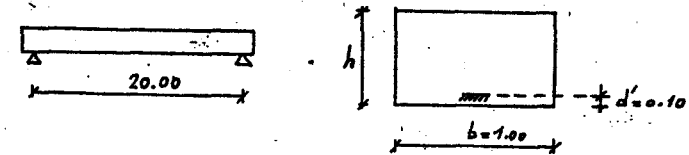


Fig. 14-26

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{cs} &= \bar{\sigma}_{ci} = 15 \text{ MPa} \\ \bar{\sigma}_{ts} &= \bar{\sigma}_{ti} = -2,4 \text{ MPa} \end{aligned}$$

Si la section était sous-critique, nous aurions:

$$\frac{I}{v} = \frac{\Delta M}{\Delta \sigma}$$

$$\text{avec: } \Delta M = \frac{q \ell^2}{8} = 2 \times 9,81 \times 10^{-3} \times \frac{20^2}{8} = 0,981 \text{ MNm}$$

$$\Delta \sigma = 15 + 2,4 = 17,4 \text{ MPa}$$

$$\text{soit: } \frac{I}{v} = \frac{h^2}{6} = \frac{0,981}{17,4} \text{ d'où: } h = 0,582 \text{ m;}$$

nous retiendrons $h = 0,60 \text{ m}$.

La charge permanente de poids propre vaut:

$$g = 2,5 \times 9,81 \times 10^{-3} \times 0,6 = 0,0147 \text{ MN/m}^2$$

$$\text{et le moment minimum: } M_{\min} = \frac{g \ell^2}{8} = 0,736 \text{ MNm}$$

$$\text{la précontrainte } P \text{ vaut: } P = \frac{\Delta M}{\rho h} = \frac{0,981 \times 3}{0,60} = 4,90 \text{ MN.}$$

Nous pouvons alors calculer l'excentricité:

$$e_o = -\rho v' - \frac{M_{\min} - \rho v' \bar{\sigma}_{ts}}{P}$$

$$\text{avec: } S = 0,6 \text{ m}^2$$

$$\rho = 1/3$$

$$P = 4,90$$

$$v' = 0,30$$

$$\text{d'où: } e_o = -\frac{3}{0,3} - \frac{0,736 + 0,30/3 \times 0,6 \times 2,4}{4,90}$$

$$e_o = -0,10 - 0,15 - 0,029 = -0,279 \text{ m.}$$

La valeur de $v' - d'$ est égale à $0,30 - 0,10 = 0,20$.

On constate que l'on ne peut pas excentrer le câble autant qu'il serait nécessaire pour reprendre tout le poids mort. La section est donc sur-critique: $e_o = -(v' - d')$.

La hauteur nécessaire sera donc supérieure à la valeur trouvée en sous-critique.

Nous procéderons par approches successives en partant d'une hauteur $h = 0,62$ m et en calculant successivement le moment minimum, le moment maximum, la précontrainte, le module d'inertie, d'où une nouvelle valeur de la hauteur.

Ainsi: $h = 0,62$

$$g = 0,62 \times 2,5 \times 9,81 \times 10^{-3} = 0,0152 \text{ MN/m}^2$$

$$M_{\min} = \frac{g\ell^2}{8} = 0,76 \text{ MNm}$$

$$M_{\max} = 0,76 + 0,981 = 1,741 \text{ MNm}$$

$$P = \frac{M_{\max} + \rho S v \sigma_{ti}}{\rho v + v' - d'}$$

$$P = \frac{1,741 - 1/3 \times 0,62 \times 0,31 \times 2,4}{1/3 \times 0,31 + 0,31 - 0,10} = 5,066 \text{ MN}$$

$$\frac{I}{v} = \frac{h^2}{6} = \frac{Pph}{\sigma_{cs} + \frac{v}{v'} \sigma_{ti}} = \frac{5,066 \times 1/3 \times 0,62}{15 - 2,4}$$

d'où: $h = 0,706$ m

Essayons: $h = 0,70$ m

$$g = 0,0172$$

$$M_{\min} = 0,858 \text{ MNm}$$

$$M_{\max} = 1,839 \text{ MNm}$$

$$P = 4,482$$

$$\frac{I}{v} = 0,0830$$

$$h = 0,706$$

$$h = 0,71$$

$$g = 0,0174$$

$$M_{\min} = 0,871$$

$$M_{\max} = 1,852$$

$$P = 4,420$$

$$\frac{I}{v} = 0,0830$$

$$h = 0,706$$

On voit que la solution converge rapidement et nous retiendrons:

$$h = 0,71 \text{ m}$$

avec: $P = 4,42 \text{ MN}$

$$e_o = -(0,71/2 - 0,1) = -0,255 \text{ m.}$$

A titre d'exemple, examinons ce qui aurait été la solution en classe I.

On aurait la hauteur utile de la section sous-critique par:

$$\frac{h^2}{6} = \frac{\Delta M}{\Delta \sigma} = \frac{0,981}{15} \text{ soit: } h = 0,626 \text{ m}$$

$$\text{d'où: } M_{\min} = \frac{g\ell^2}{8} = \frac{0,626 \times 2,5 \times 9,81}{1\,000} \times \frac{400}{8} = 0,768 \text{ MNm}$$

$$P = \frac{\Delta M}{ph} = \frac{0,981}{0,626/3} = 4,70 \text{ MN}$$

$$\begin{aligned} \text{et: } e_o &= -c' - \frac{M_{\min}}{P} = -\frac{0,626}{6} - \frac{0,768}{4,70} \\ &= -0,268 < -(v' - d') = -0,313 + 0,10 \end{aligned}$$

La section est donc sur-critique.

Partons de: $h = 0,70$ m

$$g = 0,0172 \text{ MNm}^2$$

$$M_{\min} = 0,858 \text{ MNm}$$

$$M_{\max} = 1,839 \text{ MNm}$$

$$P = \frac{M_{\max}}{\rho v + v' - d'} = \frac{1,839}{2/3 \times 0,70 - 0,1}$$

$$P = 5,02 \text{ MN}$$

$$\text{et: } \frac{I}{v} = \frac{h^2}{6} = \frac{Pph}{\sigma_{cs}} = \frac{5,02 \times 0,7/3}{15}$$

d'où: $h = 0,684$

Essayons: $h = 0,684$ m

$$M_{\min} = 0,839 \text{ MNm}$$

$$M_{\max} = 1,820 \text{ MNm}$$

$$P = 5,11 \text{ MN}$$

$$\frac{h^2}{6} = 0,0777 \quad h = 0,683 \text{ m}$$

Les résultats comparés peuvent être lus dans le tableau ci-dessous:

Sur-critique	Classe I	Classe II
h (m)	0,684	0,703
P (MN)	5,110	4,387

REMARQUES:

En section sous-critique, les sections de béton et précontrainte sont plus faibles en classe II qu'en classe I puisque les formules permettant de déterminer P et I/v comportent un terme sous-tractif du fait du signe négatif des contraintes de traction admissibles.

En section sur-critique, seule la précontrainte a un terme soustractif, ce que l'on constate dans le tableau ci-dessus. Par contre, la section de béton peut être plus importante en classe II qu'en classe I (ce qui est le cas dans l'exemple ci-dessus).

• Application au BPEL

Le raisonnement qui a été fait à ce sujet pour la classe I est valable en utilisant la transformation des moments M_{max} et M_{min} et des contraintes en moments et contraintes fictifs de calcul avec le rapport $1 + \lambda$ ou $1 - \lambda$.

• Rendement géométrique ρ

Dans les pages précédentes, il a souvent été fait appel à un paramètre

$$\rho = \frac{1}{S_{vv'}} \text{ appelé rendement géométrique.}$$

Plus ce coefficient sans dimension est élevé, plus la section est économique pour le calcul à la flexion, car elle possède une grande inertie pour une faible section.

Pour les sections rectangulaires: $\rho = \frac{bh^3/12}{bh \times h/2 \times h/2} = \frac{1}{3}$.

En première approximation, on pourra retenir les valeurs suivantes:

- section circulaire = 0,25
- section rectangulaire = 1/3
- section en T massive de 0,35 à 0,40
- section en T légère de 0,40 à 0,45
- section double T massive de 0,45 à 0,50
- section double T légère de 0,50 à 0,60
- section caisson de 0,55 à 0,65

Pour avoir plus de précisions, on pourra utiliser les formules des tableaux et des abaques suivants:

(pour les tableaux, les valeurs lues sont à multiplier par:

h pour le bras de levier, le rayon de giration, v et v'

bh pour la section S

bh^2 pour les modules d'inertie I/v et I/v'

bh^3 pour le moment d'inertie I).

Caractéristiques géométriques de sections courantes

Forme de la section	Aire: S	Centre de gravité: v	Moment d'inertie par rapport au c.d.g.: I	Rendement géométrique: ρ
	bh	$\frac{h}{2}$	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{1}{3}$
	$bh - (1 - \alpha\beta)b$	$\frac{h}{2}$	$\frac{bh^3}{12} (1 - \beta\alpha^2)$	$\frac{1 - \beta\alpha^2}{3(1 - \alpha\beta)}$
	$bh (\beta + \alpha (1 - \beta))$	$\frac{h}{2} \frac{\beta + \alpha^2 (1 - \beta)}{\beta + \alpha (1 - \beta)}$	$\frac{bh^3}{12} \frac{\beta + (1 - \beta) [\alpha^2 - \beta (1 - \alpha)^2]}{\beta + \alpha (1 - \beta)}$	$\frac{1}{S.v (h - v)}$
	$\frac{bh}{2}$	$\frac{2h}{3}$	$\frac{bh^3}{36}$	$\frac{1}{4}$
	$\frac{bh}{2} (1 + \alpha)$	$\frac{h}{3} \frac{(2 + \alpha)}{(1 + \alpha)}$	$\frac{bh^3}{36} \left(1 + \alpha + \frac{2\alpha}{1 + \alpha} \right)$	$\frac{1 + 4\alpha + \alpha^2}{4 + 10\alpha + 4\alpha^2}$
	$\pi R^2 = \frac{\pi D^2}{4}$	R	$\frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi D^4}{64}$	$\frac{1}{4}$

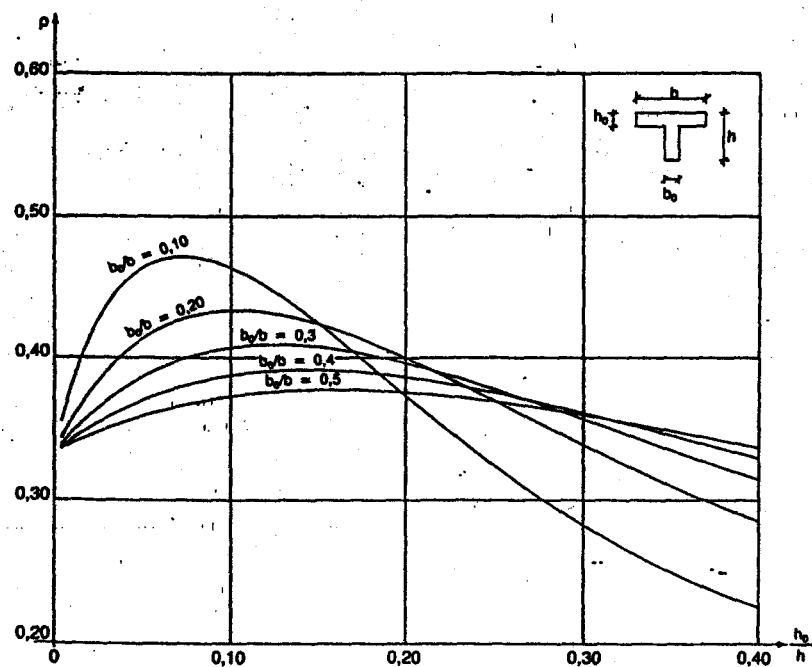


Fig. 14-27 a. Rendements des sections en T

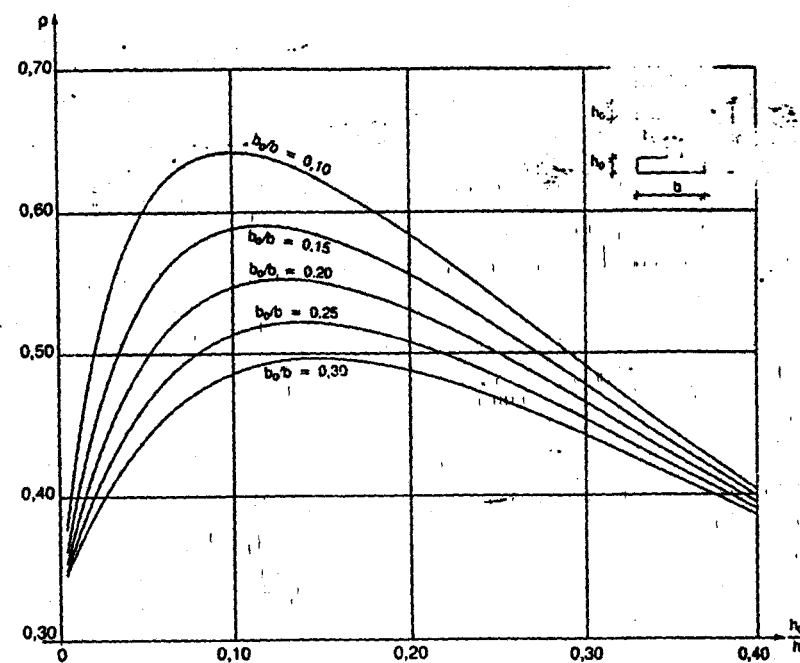


Fig. 14-27 b. Rendement des sections en double T symétrique

T	80/B=	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
HO/H=	REND=	0.48103	0.42842	0.40119	0.38464	0.37352	0.36554	0.35953	0.35485	0.35110	0.34803
0.025	V=	0.34301	0.41046	0.43951	0.45568	0.46599	0.47313	0.47837	0.48238	0.48555	0.48811
	V'=	0.45699	0.58954	0.56049	0.54437	0.53401	0.52687	0.52163	0.51742	0.51445	0.51189
	GIRA=	0.39924	0.32198	0.31437	0.30887	0.30487	0.30186	0.29952	0.29766	0.29614	0.29489
	SECT=	0.07375	0.12250	0.17125	0.22000	0.26875	0.31750	0.36625	0.41500	0.46375	0.51250
	I/V=	0.02351	0.03094	0.03851	0.04606	0.05361	0.06115	0.06869	0.07623	0.08376	0.09130
	I/V'=	0.01217	0.02124	0.03020	0.03856	0.04678	0.05491	0.06299	0.07104	0.07906	0.08706
	INER=	0.00799	0.01270	0.01692	0.02099	0.02498	0.02893	0.03286	0.03677	0.04067	0.04457
	Z=	0.74086	0.73079	0.71832	0.70680	0.69505	0.68300	0.67074	0.65819	0.64559	0.63311
HO/H=	REND=	0.50499	0.46360	0.43429	0.41363	0.39844	0.38485	0.37271	0.36203	0.35166	0.34246
0.050	V=	0.28859	0.35259	0.39313	0.42083	0.43804	0.45037	0.45964	0.46686	0.47264	0.47758
	V'=	0.73141	0.64741	0.60487	0.57917	0.56196	0.54963	0.53945	0.53061	0.52332	0.51742
	GIRA=	0.31497	0.32531	0.32217	0.31752	0.31318	0.30945	0.30629	0.30361	0.30132	0.29934
	SECT=	0.09750	0.14500	0.19250	0.24000	0.28750	0.33500	0.38250	0.43000	0.47750	0.52500
	I/V=	0.03601	0.04352	0.05057	0.05750	0.06437	0.07123	0.07807	0.08490	0.09172	0.09855
	I/V'=	0.01322	0.02370	0.03303	0.04178	0.05018	0.05837	0.06641	0.07434	0.08221	0.09002
	INER=	0.00947	0.01534	0.01998	0.02420	0.02820	0.03208	0.03588	0.03964	0.04335	0.04704
	Z=	0.72324	0.73220	0.72816	0.72133	0.71435	0.70794	0.70224	0.69723	0.69283	0.68896
HO/H=	REND=	0.49095	0.47107	0.44762	0.42824	0.41266	0.40001	0.38961	0.38092	0.37357	0.36727
0.075	V=	0.22822	0.31362	0.36206	0.39377	0.41505	0.43112	0.44346	0.45323	0.46116	0.46773
	V'=	0.77178	0.68638	0.63794	0.60673	0.58495	0.56888	0.55654	0.54677	0.53884	0.53227
	GIRA=	0.29406	0.31844	0.32154	0.31966	0.31652	0.31222	0.30795	0.30368	0.30048	0.30238
	SECT=	0.12125	0.16750	0.21375	0.26000	0.30625	0.35250	0.39875	0.44500	0.49125	0.53750
	I/V=	0.04594	0.05416	0.06104	0.06756	0.07392	0.08022	0.08646	0.09268	0.09888	0.10507
	I/V'=	0.01359	0.02475	0.03464	0.04379	0.05245	0.06079	0.06889	0.07683	0.08463	0.09233
	INER=	0.01048	0.01699	0.02210	0.02657	0.03068	0.03458	0.03834	0.04201	0.04560	0.04915
	Z=	0.70411	0.72105	0.72404	0.72170	0.71736	0.71238	0.70737	0.70256	0.69805	0.69389
HO/H=	REND=	0.46009	0.46313	0.44851	0.43298	0.41904	0.40695	0.39652	0.38750	0.37965	0.37277
0.100	V=	0.20517	0.28684	0.33723	0.37143	0.39615	0.41486	0.42952	0.44130	0.45099	0.45909
	V'=	0.79483	0.70316	0.66277	0.62857	0.60385	0.58514	0.57048	0.55870	0.54901	0.54091
	GIRA=	0.27392	0.30780	0.31661	0.31794	0.31661	0.31431	0.31171	0.30910	0.30660	0.30425
	SECT=	0.14500	0.19000	0.23500	0.28000	0.32500	0.37000	0.41500	0.46000	0.50500	0.55000
	I/V=	0.05303	0.06275	0.06986	0.07621	0.08224	0.08810	0.09388	0.09959	0.10526	0.11090
	I/V'=	0.01369	0.02524	0.03554	0.04503	0.05395	0.06247	0.07068	0.07866	0.08647	0.09412
	INER=	0.01088	0.01800	0.02356	0.02830	0.03258	0.03635	0.04032	0.04395	0.04747	0.05091
	Z=	0.68884	0.70785	0.71507	0.71639	0.71477	0.71171	0.70797	0.70399	0.69997	0.69605
HO/H=	REND=	0.42210	0.44609	0.44118	0.43074	0.41960	0.40905	0.39944	0.39078	0.38302	0.37605
0.125	V=	0.19213	0.26838	0.31860	0.35417	0.38063	0.40121	0.41757	0.43092	0.44202	0.45139
	V'=	0.80787	0.73162	0.68140	0.64583	0.61932	0.59879	0.58243	0.56908	0.55798	0.54861
	GIRA=	0.25596	0.29596	0.30948	0.31389	0.31453	0.31348	0.31168	0.30957	0.30735	0.30516
	SECT=	0.16875	0.21250	0.25625	0.30000	0.34375	0.38750	0.43125	0.47500	0.51875	0.56250
	I/V=	0.05754	0.06925	0.07703	0.08346	0.08935	0.09491	0.10033	0.10563	0.11087	0.11605
	I/V'=	0.01369	0.02544	0.03602	0.04577	0.05491	0.06360	0.07193	0.07999	0.08782	0.09548
	INER=	0.01106	0.01861	0.02454	0.02954	0.03401	0.03808	0.04189	0.04552	0.04900	0.05238
	Z=	0.66687	0.67647	0.68568	0.69170	0.69510	0.69658	0.69670	0.69586	0.69435	0.69238

HO/H=	REND=	0.150	0.175	0.200	0.225	0.250
0.150	V=	0.38248	0.42303	0.42840	0.42351	0.41578
	V'=	0.18539	0.25585	0.30473	0.34063	0.36810
	GIRA=	0.24034	0.28406	0.29527	0.29538	0.29199
	SECT=	0.19250	0.23500	0.27750	0.32000	0.36250
	I/V=	0.05998	0.07412	0.08266	0.08936	0.09524
	I/V'=	0.01365	0.02548	0.03623	0.04616	0.05548
	INER=	0.01112	0.01896	0.02539	0.03044	0.03506
	Z=	0.67025	0.68488	0.69473	0.70010	0.70241
HO/H=	REND=	0.34448	0.39895	0.41214	0.41277	0.40871
0.175	V=	0.18288	0.24769	0.29461	0.33015	0.35799
	V'=	0.81712	0.75231	0.70539	0.66985	0.64201
	GIRA=	0.22488	0.27266	0.29266	0.30213	0.30847
	SECT=	0.21625	0.25750	0.29875	0.34000	0.38125
	I/V=	0.06087	0.07728	0.08685	0.09401	0.10004
	I/V'=	0.01362	0.02545	0.03628	0.04633	0.05578
	INER=	0.01113	0.01914	0.02539	0.03104	0.03581
	Z=	0.66687	0.67647	0.68568	0.69170	0.69510
HO/H=	REND=	0.30983	0.37329	0.39385	0.39966	0.39927
0.200	V=	0.18333	0.24284	0.28750	0.32222	0.35000
	V'=	0.81647	0.75714	0.71250	0.67778	0.65000
	GIRA=	0.21538	0.26199	0.28404	0.29544	0.30139
	SECT=	0.24000	0.28000	0.32000	0.36000	0.40000
	I/V=	0.06673	0.07914	0.08980	0.09752	0.10381
	I/V'=	0.01363	0.02538	0.03623	0.04636	0.05590
	INER=	0.01113	0.01922	0.02582	0.03142	0.03633
	Z=	0.66248	0.67051	0.67806	0.68401	0.68797
HO/H=	REND=	0.27934	0.34810	0.37461	0.38507	0.38817
0.225	V=	0.18596	0.24060	0.28283	0.31645	0.34284
	V'=	0.81404	0.75940	0.71717	0.68353	0.65616
	GIRA=	0.20564	0.25219	0.27565	0.28861	0.29593
	SECT=	0.26375	0.30250	0.34125	0.38000	0.41875
	I/V=	0.05998	0.07996	0.09168	0.10002	0.10666
	I/V'=	0.01370	0.02533	0.03616	0.04630	0.05589
	INER=	0.01115	0.01924	0.02593	0.03165	0.03667
	Z=	0.64503	0.66724	0.67219	0.67745	0.68143
HO/H=	REND=	0.25318	0.32422	0.35526	0.36970	0.37601
0.250	V=	0.19022	0.24038	0.28017	0.31250	0.33929
	V'=	0.80978	0.75962	0.71983	0.68750	0.66071
	GIRA=	0.19748	0.24332	0.26787	0.28183	0.29033
	SECT=	0.28750	0.32500	0.36250	0.40000	0.43750
	I/V=	0.05894	0.08004	0.09270	0.10167	0.10869
	I/V'=	0.01385	0.02533	0.03608	0.04621	0.05501
	INER=	0.01121	0.01924	0.02597	0.03177	0.03688
	Z=	0.61975	0.64595	0.66833	0.67218	0.67580

T	BO/B=	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
HO/H=	0.275	0.23119	0.30218	0.33640	0.35411	0.36326	0.36736	0.36895	0.36854	0.36499	0.34471
V=	0.19573	0.24182	0.27919	0.31012	0.33613	0.35613	0.37381	0.38751	0.39714	0.40881	0.41811
GIRA=	0.80427	0.73518	0.72081	0.68988	0.64387	0.61659	0.59071	0.56255	0.53586	0.51119	0.47819
SECT=	0.19077	0.23538	0.26019	0.27525	0.28471	0.29071	0.29444	0.29644	0.29666	0.29782	0.29824
I/V=	0.31125	0.34750	0.39375	0.42000	0.45625	0.49250	0.52875	0.56500	0.60125	0.63750	0.67375
I/V=	0.05787	0.07962	0.09305	0.10260	0.11003	0.11616	0.12145	0.12681	0.13244	0.13845	0.14483
I/V=	0.01408	0.02339	0.03604	0.04612	0.05371	0.06486	0.07364	0.08207	0.09021	0.09807	0.10570
INER=	0.01133	0.01925	0.02598	0.03182	0.03698	0.04162	0.04584	0.04972	0.05333	0.05670	0.05970
Z=	0.59136	0.65848	0.66670	0.66857	0.67133	0.67388	0.67589	0.67730	0.67815	0.67849	0.67899
HO/H=	0.300	0.21305	0.20228	0.31848	0.33875	0.35033	0.35676	0.35997	0.36111	0.36087	0.35970
V=	0.20224	0.24459	0.27963	0.30909	0.33421	0.35388	0.37477	0.39138	0.40410	0.41923	0.43722
GIRA=	0.79774	0.75541	0.72037	0.69091	0.66579	0.64412	0.62523	0.60862	0.59390	0.58079	0.56874
SECT=	0.18560	0.22838	0.25328	0.26896	0.27920	0.28597	0.29043	0.29329	0.29500	0.29584	0.29600
I/V=	0.33500	0.37000	0.40500	0.44000	0.47500	0.51000	0.54500	0.58000	0.61500	0.65000	0.68500
I/V=	0.05694	0.07890	0.09292	0.10298	0.11079	0.11719	0.12268	0.12747	0.13181	0.13579	0.13943
I/V=	0.01443	0.02555	0.03607	0.04607	0.05561	0.06475	0.07352	0.08197	0.09013	0.09802	0.10569
INER=	0.01151	0.01930	0.02598	0.03183	0.03703	0.04171	0.04597	0.04989	0.05353	0.05693	0.06000
Z=	0.56307	0.64512	0.66456	0.66681	0.66825	0.67018	0.67198	0.67343	0.67447	0.67510	0.67510
HO/H=	0.325	0.19835	0.26463	0.30179	0.32395	0.33752	0.34582	0.35070	0.35433	0.35750	0.36026
V=	0.20954	0.24849	0.28127	0.30924	0.33339	0.35354	0.37297	0.38939	0.40405	0.41722	0.42928
GIRA=	0.79046	0.75151	0.71873	0.69076	0.66661	0.64556	0.62703	0.61061	0.59593	0.58278	0.57026
SECT=	0.18125	0.22230	0.24700	0.26306	0.27388	0.28130	0.28639	0.28983	0.29210	0.29349	0.29449
I/V=	0.35875	0.39250	0.42625	0.46000	0.49375	0.52750	0.56125	0.59500	0.62875	0.66250	0.69625
I/V=	0.05425	0.07806	0.09246	0.10294	0.11109	0.11776	0.12342	0.12836	0.13277	0.13678	0.14043
I/V=	0.01491	0.02581	0.03618	0.04608	0.05556	0.06466	0.07341	0.08186	0.09002	0.09792	0.10569
INER=	0.01179	0.01940	0.02600	0.03183	0.03704	0.04174	0.04603	0.04998	0.05365	0.05707	0.06026
Z=	0.53686	0.62827	0.65742	0.66573	0.66677	0.66772	0.66802	0.66828	0.66843	0.66853	0.66859
HO/H=	0.350	0.18668	0.24927	0.28653	0.30996	0.32511	0.33499	0.34136	0.34530	0.34794	0.34954
V=	0.21748	0.25331	0.28394	0.31042	0.33354	0.35390	0.37197	0.38811	0.40263	0.41574	0.42749
GIRA=	0.78252	0.74669	0.71606	0.68958	0.66646	0.64610	0.62803	0.61189	0.59737	0.58426	0.57196
SECT=	0.17824	0.21714	0.24136	0.25758	0.26883	0.27676	0.28339	0.28836	0.29212	0.29496	0.29696
I/V=	0.38250	0.41500	0.44750	0.48000	0.51250	0.54500	0.57750	0.61000	0.64250	0.67500	0.70750
I/V=	0.05587	0.07724	0.09182	0.10260	0.11055	0.11796	0.12381	0.12889	0.13339	0.13745	0.14100
I/V=	0.01553	0.02620	0.03641	0.04618	0.05557	0.06461	0.07333	0.08175	0.08990	0.09781	0.10549
INER=	0.01215	0.01957	0.02607	0.03185	0.03704	0.04175	0.04605	0.05002	0.05371	0.05715	0.06026
Z=	0.51383	0.60985	0.64673	0.66108	0.66587	0.66699	0.66720	0.66720	0.66720	0.66720	0.66720
HO/H=	0.375	0.17766	0.23612	0.27282	0.29697	0.31330	0.32448	0.33213	0.33728	0.34063	0.34264
V=	0.22596	0.25893	0.28750	0.31250	0.33456	0.35417	0.37171	0.38750	0.40179	0.41477	0.42649
GIRA=	0.77404	0.74107	0.71250	0.68750	0.66544	0.64583	0.62829	0.61250	0.59821	0.58523	0.57284
SECT=	0.17627	0.21285	0.23640	0.25259	0.26410	0.27243	0.27851	0.28293	0.28613	0.28840	0.29000
I/V=	0.40625	0.43750	0.46875	0.50000	0.53125	0.56250	0.59375	0.62500	0.65625	0.68750	0.71875
I/V=	0.05586	0.07655	0.09112	0.10208	0.11076	0.11788	0.12390	0.12912	0.13372	0.13772	0.14172
I/V=	0.01631	0.02675	0.03677	0.04640	0.05568	0.06464	0.07330	0.08169	0.08978	0.09764	0.10519
INER=	0.01262	0.01982	0.02630	0.03190	0.03705	0.04175	0.04606	0.05003	0.05373	0.05719	0.06026
Z=	0.47888	0.57369	0.61996	0.64363	0.65593	0.66221	0.66422	0.66442	0.66462	0.66483	0.66499
HO/H=	0.400	0.17053	0.22549	0.26070	0.28510	0.30222	0.31444	0.32217	0.32728	0.33074	0.33370
V=	0.23408	0.26522	0.29184	0.31538	0.33556	0.35257	0.36585	0.37513	0.38197	0.38749	0.39199
GIRA=	0.76512	0.73478	0.70816	0.68462	0.66364	0.64483	0.62829	0.61250	0.59821	0.58523	0.57284
SECT=	0.17527	0.20943	0.23212	0.24811	0.25974	0.26835	0.27479	0.27960	0.28319	0.28571	0.28750
I/V=	0.43000	0.46000	0.49000	0.52000	0.55000	0.58000	0.61000	0.64000	0.67000	0.70000	0.73000
I/V=	0.05624	0.07608	0.09046	0.10150	0.11032	0.11740	0.12337	0.12812	0.13283	0.13750	0.14200
I/V=	0.01727	0.02746	0.03728	0.04676	0.05591	0.06477	0.07336	0.08169	0.08978	0.09764	0.10519
INER=	0.01321	0.02018	0.02640	0.03201	0.03711	0.04177	0.04606	0.05003	0.05373	0.05719	0.06026
Z=	0.47888	0.57369	0.61996	0.64363	0.65593	0.66221	0.66422	0.66442	0.66462	0.66483	0.66499
HO/H=	0.425	0.16624	0.21602	0.25019	0.27444	0.29204	0.30500	0.31460	0.32173	0.32699	0.33080
V=	0.24418	0.27209	0.29685	0.31898	0.33887	0.35685	0.37318	0.38807	0.40171	0.41425	0.42579
GIRA=	0.75582	0.72791	0.70315	0.68102	0.66113	0.64315	0.62682	0.61193	0.59829	0.58575	0.57332
SECT=	0.17516	0.20684	0.22852	0.24417	0.25379	0.26128	0.26728	0.27241	0.27683	0.28053	0.28352
I/V=	0.05701	0.07587	0.08994	0.10092	0.10981	0.11720	0.12350	0.12868	0.13375	0.13860	0.14320
I/V=	0.01842	0.02836	0.03797	0.04727	0.05629	0.06503	0.07352	0.08178	0.08981	0.09764	0.10519
INER=	0.01392	0.02064	0.02670	0.03219	0.03721	0.04182	0.04609	0.05004	0.05375	0.05719	0.06026
Z=	0.46697	0.55770	0.60595	0.63279	0.64810	0.65688	0.66186	0.66458	0.66596	0.66654	0.66684
HO/H=	0.450	0.16329	0.20880	0.24124	0.26502	0.28280	0.29627	0.30655	0.31443	0.32046	0.32505
V=	0.25280	0.27946	0.30246	0.32231	0.34002	0.35627	0.37199	0.38741	0.40242	0.41666	0.43000
GIRA=	0.74620	0.72054	0.69729	0.67679	0.65798	0.64085	0.62519	0.61082	0.59758	0.58523	0.57332
SECT=	0.17585	0.20505	0.22561	0.24078	0.25227	0.26113	0.26802	0.27340	0.27760	0.28088	0.28352
I/V=	0.47750	0.50500	0.53250	0.56000	0.58750	0.61500	0.64250	0.67000	0.69750	0.72500	0.75250
I/V=	0.05818	0.07598	0.08961	0.10044	0.10932	0.11677	0.12314	0.12868	0.13357	0.13794	0.14200
I/V=	0.01979	0.02947	0.03886	0.04797	0.05683	0.06544	0.07382	0.08199	0.08995	0.09772	0.10519
INER=	0.01477	0.02123	0.02710	0.03246	0.03739	0.04194	0.04615	0.05008	0.05375	0.05720	0.06026
Z=	0.45849	0.54376	0.59251	0.62153	0.63926	0.65024	0.65707	0.66129	0.66305	0.66433	0.66533
HO/H=	0.475	0.16187	0.20329	0.23383	0.25688	0.27457	0.28832	0.29910	0.30758	0.31426	0.31952
V=	0.26368	0.28726	0.30861	0.32802	0.34575	0.36201	0.37697	0.39078	0.40358	0.41547	0.42649
GIRA=	0.73632	0.71274	0.69139	0.67198	0.65425	0.63799	0.62303	0.60922	0.59642	0.58453	0.57332
SECT=	0.17228	0.20401	0.22356	0.23795	0.24922	0.25805	0.26504	0.27060	0.27503	0.27856	0.28155
I/V=	0.50125	0.52750	0.55375	0.58000	0.60625	0.63250	0.65875	0.68500	0.71125	0.73750	0.76375
I/V=	0.05974	0.07643	0.08952	0.10012	0.10891	0.11635	0.12276	0.12836	0.13331	0.13774	0.14200
I/V=	0.02139	0.03080	0.03996	0.04887	0.05735	0.06602	0.07427	0.08233	0.09021	0.09790	0.10519
INER=	0.01575	0.02196	0.02763	0.03284	0.03765	0.04212	0.04628	0.05016	0.05380	0.05723	0.06026
Z=	0.45312	0.53213	0.58018	0.61045	0.62998	0.64280	0.65128	0.65691	0.66064	0.66307	0.66499
HO/H=	0.500	0.16180	0.19934	0.22788	0.25500	0.27640	0.29123	0.29932	0.30125	0.30846	0.31426
V=	0.27381	0.29545	0.31522	0.33333	0.35000	0.36538	0.37963	0.39286	0.40517	0.41667	0.42749
GIRA=	0.72619	0.70455	0.68478	0.66667	0.65000	0.63462	0.62037	0.60714	0.59483	0.58333	0.57284
SECT=	0.17936	0.20370	0.22179	0.23370	0.24464						

I	b_0/b	0.0500	0.1000	0.1500	0.2000	0.2500	0.3000	0.3500	0.4000	0.4500	0.5000
$\frac{b_0}{b} = 0.025$	REND=	0.63417	0.53497	0.46966	0.43625	0.41388	0.39785	0.38390	0.37641	0.36890	0.36274
	CIRA=	0.33817	0.32227	0.34286	0.33023	0.32167	0.31538	0.31036	0.30676	0.30318	0.30114
	SECT=	0.09979	0.14500	0.19250	0.24000	0.28500	0.33500	0.38250	0.43000	0.47750	0.52500
	I/V =	0.03062	0.03806	0.04521	0.05235	0.05949	0.06664	0.07378	0.08093	0.08807	0.09522
	INER=	0.01903	0.02360	0.02860	0.03417	0.03977	0.04532	0.05087	0.05642	0.06197	0.06752
	Z =	0.86795	0.81087	0.77647	0.75324	0.73649	0.72385	0.71397	0.70603	0.69932	0.69400
$\frac{b_0}{b} = 0.050$	REND=	0.70678	0.60333	0.53950	0.49619	0.46487	0.44117	0.42261	0.40768	0.39541	0.38515
	CIRA=	0.42035	0.38837	0.36725	0.35220	0.34091	0.33210	0.32504	0.31925	0.31441	0.31036
	SECT=	0.14500	0.19000	0.23500	0.28000	0.32500	0.37000	0.41500	0.46000	0.50500	0.55000
	I/V =	0.05124	0.05732	0.06339	0.06947	0.07554	0.08162	0.08769	0.09377	0.09984	0.10592
	INER=	0.02562	0.02866	0.03170	0.03473	0.03777	0.04081	0.04385	0.04688	0.04992	0.05296
	Z =	0.88933	0.84600	0.81402	0.78939	0.76985	0.75396	0.74080	0.72970	0.72023	0.71204
$\frac{b_0}{b} = 0.075$	REND=	0.72135	0.63445	0.57417	0.52990	0.49601	0.46923	0.44754	0.42961	0.41494	0.40170
	CIRA=	0.42466	0.39826	0.37887	0.36397	0.35214	0.34250	0.33449	0.32772	0.32192	0.31690
	SECT=	0.19250	0.23500	0.27750	0.32000	0.36250	0.40500	0.44750	0.49000	0.53250	0.57500
	I/V =	0.06943	0.07455	0.07967	0.08478	0.08990	0.09502	0.10014	0.10525	0.11037	0.11549
	INER=	0.03472	0.03727	0.03983	0.04239	0.04495	0.04751	0.05007	0.05263	0.05519	0.05774
	Z =	0.88552	0.85259	0.82582	0.80363	0.78395	0.76689	0.75221	0.74319	0.73521	0.72822
$\frac{b_0}{b} = 0.100$	REND=	0.71333	0.64190	0.58833	0.54667	0.51333	0.48606	0.46333	0.44410	0.42762	0.41333
	CIRA=	0.42333	0.40059	0.38231	0.36668	0.35284	0.34059	0.33034	0.32192	0.31496	0.30914
	SECT=	0.24000	0.28000	0.32000	0.36000	0.40000	0.44000	0.48000	0.52000	0.56000	0.60000
	I/V =	0.08560	0.08987	0.09413	0.09840	0.10267	0.10693	0.11120	0.11547	0.11973	0.12400
	INER=	0.04420	0.04493	0.04567	0.04640	0.04713	0.04786	0.04859	0.04932	0.04999	0.05066
	Z =	0.87347	0.84780	0.82573	0.80656	0.78974	0.77488	0.76164	0.74978	0.73909	0.72941
$\frac{b_0}{b} = 0.125$	REND=	0.69475	0.63622	0.58890	0.55208	0.52083	0.49452	0.47205	0.45265	0.43573	0.42083
	CIRA=	0.41676	0.39882	0.38339	0.37071	0.36084	0.35161	0.34353	0.33640	0.33003	0.32436
	SECT=	0.28750	0.32500	0.36250	0.40000	0.43750	0.47500	0.51250	0.55000	0.58750	0.62500
	I/V =	0.09987	0.10339	0.10690	0.11042	0.11393	0.11745	0.12096	0.12448	0.12799	0.13151
	INER=	0.04934	0.05169	0.05403	0.05637	0.05871	0.06105	0.06339	0.06573	0.06807	0.07041
	Z =	0.87984	0.85378	0.83136	0.81253	0.79629	0.78231	0.76964	0.75824	0.74803	0.73896

I	b_0/b	0.0500	0.1000	0.1500	0.2000	0.2500	0.3000	0.3500	0.4000	0.4500	0.5000
$\frac{b_0}{b} = 0.025$	REND=	0.67089	0.52279	0.46899	0.43698	0.41321	0.39667	0.38236	0.37444	0.36811	0.36287
	CIRA=	0.39951	0.37459	0.36180	0.35071	0.34098	0.33237	0.32500	0.31880	0.31355	0.30917
	SECT=	0.33800	0.37000	0.40200	0.43400	0.46600	0.50000	0.53400	0.56800	0.60200	0.63600
	I/V =	0.11236	0.11522	0.11807	0.12093	0.12379	0.12665	0.12951	0.13237	0.13522	0.13808
	INER=	0.05616	0.05761	0.05904	0.06047	0.06190	0.06332	0.06475	0.06618	0.06761	0.06904
	Z =	0.84085	0.82443	0.80943	0.79561	0.78287	0.77108	0.76014	0.74995	0.74045	0.73157
$\frac{b_0}{b} = 0.075$	REND=	0.64410	0.60469	0.57100	0.54187	0.51644	0.49404	0.47417	0.45641	0.44044	0.42602
	CIRA=	0.40128	0.38881	0.37782	0.36806	0.35932	0.35144	0.34430	0.33778	0.33183	0.32652
	SECT=	0.38250	0.41500	0.44750	0.48000	0.51250	0.54500	0.57750	0.61000	0.64250	0.67500
	I/V =	0.12318	0.12547	0.12776	0.13005	0.13234	0.13463	0.13692	0.13920	0.14149	0.14378
	INER=	0.06159	0.06274	0.06388	0.06502	0.06617	0.06731	0.06846	0.06960	0.07075	0.07189
	Z =	0.82312	0.80383	0.79742	0.78580	0.77490	0.76465	0.75501	0.74590	0.73730	0.72916
$\frac{b_0}{b} = 0.100$	REND=	0.61612	0.58377	0.55577	0.53026	0.50788	0.48782	0.46973	0.45333	0.43841	0.42476
	CIRA=	0.37227	0.36202	0.35262	0.34409	0.33633	0.32922	0.32268	0.31665	0.31106	0.30587
	SECT=	0.43000	0.46000	0.49000	0.52000	0.55000	0.58000	0.61000	0.64000	0.67000	0.70000
	I/V =	0.13247	0.13427	0.13607	0.13787	0.13967	0.14147	0.14327	0.14507	0.14687	0.14867
	INER=	0.06623	0.06713	0.06803	0.06893	0.06983	0.07073	0.07163	0.07253	0.07343	0.07433
	Z =	0.80527	0.79448	0.78425	0.77453	0.76530	0.75651	0.74813	0.74014	0.73250	0.72520
$\frac{b_0}{b} = 0.125$	REND=	0.58774	0.56123	0.53745	0.51601	0.49658	0.47888	0.46270	0.44795	0.43417	0.42132
	CIRA=	0.37491	0.37458	0.36656	0.35917	0.35234	0.34601	0.34011	0.33461	0.32946	0.32462
	SECT=	0.47750	0.50500	0.53250	0.56000	0.58750	0.61500	0.64250	0.67000	0.69750	0.72500
	I/V =	0.14072	0.14171	0.14310	0.14448	0.14587	0.14726	0.14864	0.15003	0.15142	0.15280
	INER=	0.07016	0.07086	0.07155	0.07224	0.07293	0.07363	0.07432	0.07501	0.07571	0.07640
	Z =	0.78765	0.77890	0.77050	0.76244	0.75470	0.74726	0.74009	0.73319	0.72654	0.72013
$\frac{b_0}{b} = 0.150$	REND=	0.55952	0.53768	0.51812	0.50000	0.48333	0.46795	0.45370	0.44048	0.42816	0.41667
	CIRA=	0.37491	0.36670	0.35990	0.35355	0.34761	0.34203	0.33679	0.33184	0.32717	0.32275
	SECT=	0.52500	0.55500	0.58500	0.61500	0.64500	0.67500	0.70500	0.73500	0.76500	0.79500
	I/V =	0.14687	0.14782	0.14896	0.15000	0.15104	0.15208	0.15312	0.15417	0.15521	0.15625
	INER=	0.07344	0.07396	0.07448	0.07500	0.07552	0.07604	0.07656	0.07708	0.07760	0.07813
	Z =	0.77045	0.76344	0.75661	0.75000	0.74359	0.73737	0.73134	0.72549	0.71981	0.71429

I		$b_0 =$	$b_1 =$	$b_2 =$	$b_3 =$	$b_4 =$	$b_5 =$	$b_6 =$	$b_7 =$	$b_8 =$	$b_9 =$	$b_{10} =$	$b_{11} =$	$b_{12} =$	$b_{13} =$	$b_{14} =$	$b_{15} =$	$b_{16} =$	$b_{17} =$	$b_{18} =$	$b_{19} =$	$b_{20} =$	$b_{21} =$	$b_{22} =$	$b_{23} =$	$b_{24} =$	$b_{25} =$	$b_{26} =$	$b_{27} =$	$b_{28} =$	$b_{29} =$	$b_{30} =$	$b_{31} =$	$b_{32} =$	$b_{33} =$	$b_{34} =$	$b_{35} =$	$b_{36} =$	$b_{37} =$	$b_{38} =$	$b_{39} =$	$b_{40} =$	$b_{41} =$	$b_{42} =$	$b_{43} =$	$b_{44} =$	$b_{45} =$	$b_{46} =$	$b_{47} =$	$b_{48} =$	$b_{49} =$	$b_{50} =$	$b_{51} =$	$b_{52} =$	$b_{53} =$	$b_{54} =$	$b_{55} =$	$b_{56} =$	$b_{57} =$	$b_{58} =$	$b_{59} =$	$b_{60} =$	$b_{61} =$	$b_{62} =$	$b_{63} =$	$b_{64} =$	$b_{65} =$	$b_{66} =$	$b_{67} =$	$b_{68} =$	$b_{69} =$	$b_{70} =$	$b_{71} =$	$b_{72} =$	$b_{73} =$	$b_{74} =$	$b_{75} =$	$b_{76} =$	$b_{77} =$	$b_{78} =$	$b_{79} =$	$b_{80} =$	$b_{81} =$	$b_{82} =$	$b_{83} =$	$b_{84} =$	$b_{85} =$	$b_{86} =$	$b_{87} =$	$b_{88} =$	$b_{89} =$	$b_{90} =$	$b_{91} =$	$b_{92} =$	$b_{93} =$	$b_{94} =$	$b_{95} =$	$b_{96} =$	$b_{97} =$	$b_{98} =$	$b_{99} =$	$b_{100} =$	$b_{101} =$	$b_{102} =$	$b_{103} =$	$b_{104} =$	$b_{105} =$	$b_{106} =$	$b_{107} =$	$b_{108} =$	$b_{109} =$	$b_{110} =$	$b_{111} =$	$b_{112} =$	$b_{113} =$	$b_{114} =$	$b_{115} =$	$b_{116} =$	$b_{117} =$	$b_{118} =$	$b_{119} =$	$b_{120} =$	$b_{121} =$	$b_{122} =$	$b_{123} =$	$b_{124} =$	$b_{125} =$	$b_{126} =$	$b_{127} =$	$b_{128} =$	$b_{129} =$	$b_{130} =$	$b_{131} =$	$b_{132} =$	$b_{133} =$	$b_{134} =$	$b_{135} =$	$b_{136} =$	$b_{137} =$	$b_{138} =$	$b_{139} =$	$b_{140} =$	$b_{141} =$	$b_{142} =$	$b_{143} =$	$b_{144} =$	$b_{145} =$	$b_{146} =$	$b_{147} =$	$b_{148} =$	$b_{149} =$	$b_{150} =$	$b_{151} =$	$b_{152} =$	$b_{153} =$	$b_{154} =$	$b_{155} =$	$b_{156} =$	$b_{157} =$	$b_{158} =$	$b_{159} =$	$b_{160} =$	$b_{161} =$	$b_{162} =$	$b_{163} =$	$b_{164} =$	$b_{165} =$	$b_{166} =$	$b_{167} =$	$b_{168} =$	$b_{169} =$	$b_{170} =$	$b_{171} =$	$b_{172} =$	$b_{173} =$	$b_{174} =$	$b_{175} =$	$b_{176} =$	$b_{177} =$	$b_{178} =$	$b_{179} =$	$b_{180} =$	$b_{181} =$	$b_{182} =$	$b_{183} =$	$b_{184} =$	$b_{185} =$	$b_{186} =$	$b_{187} =$	$b_{188} =$	$b_{189} =$	$b_{190} =$	$b_{191} =$	$b_{192} =$	$b_{193} =$	$b_{194} =$	$b_{195} =$	$b_{196} =$	$b_{197} =$	$b_{198} =$	$b_{199} =$	$b_{200} =$	$b_{201} =$	$b_{202} =$	$b_{203} =$	$b_{204} =$	$b_{205} =$	$b_{206} =$	$b_{207} =$	$b_{208} =$	$b_{209} =$	$b_{210} =$	$b_{211} =$	$b_{212} =$	$b_{213} =$	$b_{214} =$	$b_{215} =$	$b_{216} =$	$b_{217} =$	$b_{218} =$	$b_{219} =$	$b_{220} =$	$b_{221} =$	$b_{222} =$	$b_{223} =$	$b_{224} =$	$b_{225} =$	$b_{226} =$	$b_{227} =$	$b_{228} =$	$b_{229} =$	$b_{230} =$	$b_{231} =$	$b_{232} =$	$b_{233} =$	$b_{234} =$	$b_{235} =$	$b_{236} =$	$b_{237} =$	$b_{238} =$	$b_{239} =$	$b_{240} =$	$b_{241} =$	$b_{242} =$	$b_{243} =$	$b_{244} =$	$b_{245} =$	$b_{246} =$	$b_{247} =$	$b_{248} =$	$b_{249} =$	$b_{250} =$	$b_{251} =$	$b_{252} =$	$b_{253} =$	$b_{254} =$	$b_{255} =$	$b_{256} =$	$b_{257} =$	$b_{258} =$	$b_{259} =$	$b_{260} =$	$b_{261} =$	<
---	--	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	---

5. LA FLEXION EN CLASSE III

5.1. Vérification d'une section

La vérification de la section se fait en section fissurée c'est-à-dire en négligeant la résistance du béton tendu, comme en béton armé.

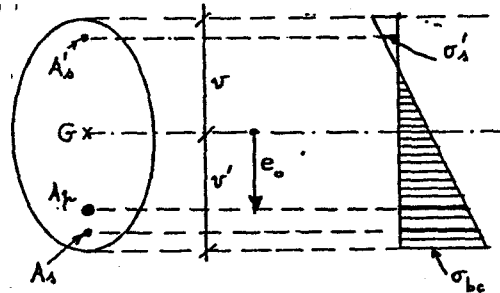
On est donc ramené à l'étude de béton armé d'une section soumise à la flexion composée à la différence que l'effort normal de compression augmente avec l'allongement.

On peut ainsi considérer l'effort de compression égal à l'effort de précontrainte augmenté de l'effort de surtension correspondant au cas où la contrainte du béton au niveau du câble est nulle. On prendra alors la surtension de l'acier correspondant à la traction du béton comme un effort résistant au même titre qu'un acier de béton armé. Comme il n'existe pas de limitation de contrainte du béton en traction pour le béton tendu fissuré, on procèdera à deux types de calcul.

5.1.1. Sous moment minimum (fig. 14-28 a)

A_p = armature de précontrainte
 A'_s = armature passive supérieure
 A_s = armature passive inférieure

Fig. 14-28 a.
Diagramme des contraintes sous charges permanentes



On négligera la résistance des armatures comprimées (qui d'après le BAEL doivent être tenues tous les 15 diamètres par des armatures transversales pour pouvoir être prises en compte en compression).

Le calcul est donc ramené à une vérification de béton armé, en flexion composée avec un moment M_{min} , une compression P' excentrée de e_o et une section d'acier tendu A_s ,

avec: $P' = P + \Delta P'$

P = effort de précontrainte

$\Delta P' = A_p \cdot \Delta \sigma_p$

$\Delta \sigma_p = n \sigma_c$

$n = E_p/E_b$

σ_c = contrainte du béton au niveau du câble sous l'action de la précontrainte et des charges permanentes existant à la mise en tension.

Pour une section rectangulaire ou en T, on pourra, par exemple utiliser les

formules de l'équation du 3^e degré: $y^3 + py + q = 0$ avec c distance du centre de pression à la fibre la plus comprimée:

$$c = v' + e_o + \frac{M_{min}}{P'}$$

$$p = \frac{-3b_1}{b_o} c^2 + 3\left(\frac{b_1}{b_o} - 1\right) (c - h_1)^2 + \frac{6nA'_s}{b_o} (h - d' - c)$$

$$q = \frac{-2b_1}{b_o} c^3 + 2\left(\frac{b_1}{b_o} - 1\right) (c - h_1)^3 - \frac{6nA'_s}{b_o} (h - d' - c)^2$$

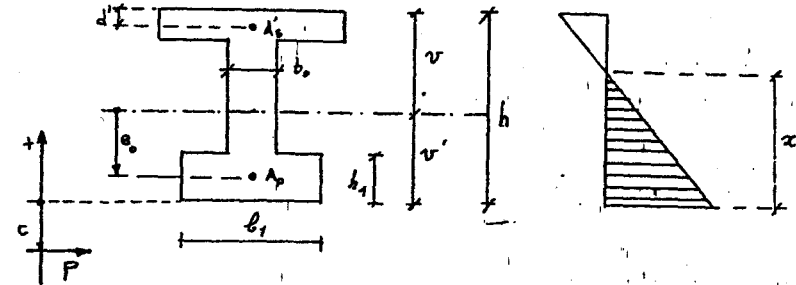


Fig. 14-28 b. Section en T sous charges permanentes en classe III

La racine y de cette équation permet de déterminer la position de la fibre neutre: $x = y + c$

d'où la contrainte de compression du béton:

$$\sigma_{bc} = \frac{xP'}{\frac{b_o x^2}{2} + \frac{b_1 - b_o}{2} h_1 (2x - h_1) - nA'_s (h - d' - x)}$$

et la contrainte de traction de l'acier supérieur:

$$\sigma'_s = n \sigma_{bc} \frac{h - d' - x}{x}$$

où n représente le coefficient d'équivalence**.

* Voir «Traité de béton armé», chapitre VIII, § 3.3.

** Avec les règles BPEL, le coefficient d'équivalence n vaut 15 pour les aciers passifs et les aciers actifs de post-tension, ces derniers n'étant comptés que pour la moitié de leur section (ce qui revient au même que de prendre $n = 7.5$ pour les aciers actifs de post-tension). On tient compte ainsi forfaitairement du fait que ces aciers ne sont pas adhérents sous l'action des charges permanentes avant injection.

5.1.2. Sous moment maximum (fig. 14-29)

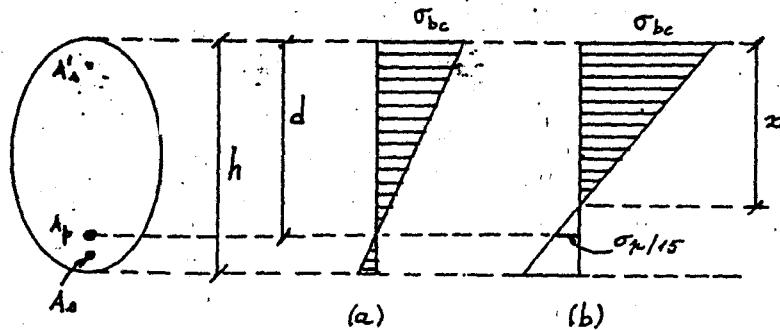


Fig. 14-29. Diagramme des contraintes en classe III

Calculons le moment résistant M_1 de la section correspondant au cas où la contrainte de flexion du béton est nulle au niveau du câble (fig. 14-29-a).

Ecrivons que la contrainte σ_c est nulle:

$$\sigma_c = \frac{P}{S} + \frac{P e_o + M_1}{I} \cdot e_o = 0$$

$$\text{d'où: } M_1 = -\frac{1}{S} \cdot \frac{P}{e_o} - P e_o = -\frac{p v v' P}{e_o} - P e_o$$

Si le moment $M_{\max}$ est inférieur à M_1 , la section est non fissurée et à calculer en classe I ou II suivant le cas.

Si le moment $M_{\max}$ est supérieur à M_1 , la section sera calculée comme en béton armé en flexion composée avec un acier passif A_s situé à la distance d de la fibre supérieure et un acier actif A_p situé à $v - e_o$ de la fibre supérieure.

Pour le cas particulier d'une section rectangulaire ou en T, on pourra utiliser les formules suivantes (fig. 14-30):

$$P' = P + \Delta P'$$

$$c = v - e_o - \frac{M_{\max}}{P'}$$

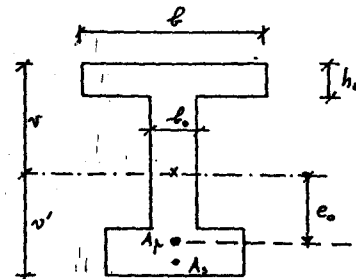


Fig. 14-30. Section en double T

$$p = \frac{-3b}{b_o} c^2 + 3 \left(\frac{b}{b_o} - 1 \right) (c - h_o)^2 + \frac{6nA_s}{b_o} (d - c) + \frac{6nA_p}{b_o} (v - e_o - c)$$

$$q = \frac{-2b}{b_o} c^3 + 2 \left(\frac{b}{b_o} - 1 \right) (c - h_o)^3 - \frac{6nA_s}{b_o} (d - c)^2 - \frac{6nA_p}{b_o} (v - e_o - c)^2$$

y est racine de l'équation du 3^e degré: $y^3 + py + q = 0$ et la position de la fibre neutre est donnée par $x = y + c$; d'où la contrainte de compression du béton:

$$\sigma_{bc} = \frac{P'x}{\frac{b_o x^2}{2} + \frac{(b - b_o)}{2} h_o (2x - h_o) - nA_s (d - x) - nA_p (v - e_o - x)}$$

la contrainte de traction de l'acier passif: $\sigma_s = n \sigma_{bc} \frac{d - x}{x}$

et la surtension de l'acier de précontrainte: $\Delta \sigma_p = n \sigma_{bc} \frac{v - e_o - x}{x}$

5.2. Détermination de la section

La détermination de la section, de la précontrainte et de l'excentricité est rendu difficile du fait du nombre élevé de paramètres. On procèdera par approches successives.

5.3. Application BPEL

On doit vérifier que les contraintes admissibles ne sont pas dépassées:

- pour le béton en compression sur les fibres extrêmes;
- pas de traction du béton en section d'enrobage sous combinaison quasi-permanente;
- pour l'acier passif;
- pour la surtension de l'acier de précontrainte (cf. chapitre 9).

5.4. Application numérique classe I-II-III

Soit la section rectangulaire de la figure 14-31, soumise à un moment maximum $M_{\max}$ de 1,9 MNm sous combinaisons rares et minimum $M_{\min} = 1,1$ MNm sous charges permanentes.

Le béton a une résistance caractéristique de compression f_{c28} de 30 MPa.

D'après le BPEL, nous en déduisons:

- résistance caractéristique à la traction $f_{t28} = 0,06 f_{c28} + 0,6$ MPa soit: $f_{t28} = 0,06 \times 30 + 0,6 = 2,4$ MPa;
- contrainte admissible en compression sur la fibre supérieure en combinaison rares ($M_{\max}$): $\sigma_{cs} = 0,6 f_{c28} = 18$ MPa;
- contrainte admissible en compression sur la fibre inférieure en combinaison permanente ($M_{\min}$): $\sigma_{ci} = 0,5 f_{c28} = 15$ MPa.

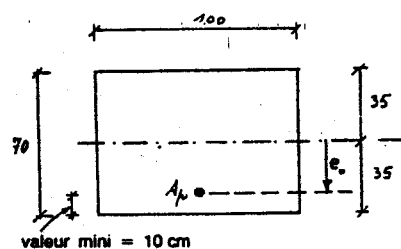


Fig. 14-31. Dalle, exemple numérique

5.4. Classe I

Les contraintes admissibles en traction $\bar{\sigma}_{ti}$ et $\bar{\sigma}_{ts}$ sont nulles.

Compte tenu des deux précontraintes maximum et minimum P_1 et P_2 à prendre en compte dans les calculs, nous ferons l'hypothèse que :

$$P_1 = (1 + \lambda)P$$

$$P_2 = (1 - \lambda)P$$

avec : $\lambda = 0,10$

$$P = \text{précontrainte moyenne} = \frac{P_1 + P_2}{2}$$

Nous pouvons ramener l'étude de la section à une seule précontrainte P en utilisant des moments et contraintes admissibles transformées (fig. 14-32) :

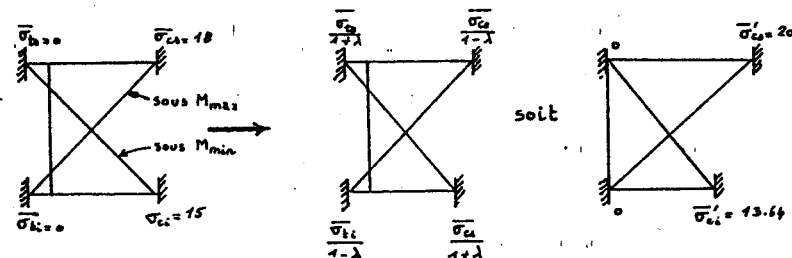


Fig. 14-32. Diagramme des contraintes admissibles réelles et transformées

$$\text{avec : } M'_{\max} = \frac{M_{\max}}{1 - \lambda} = \frac{1,9}{0,9} = 2,11 \text{ MNm}$$

$$M'_{\min} = \frac{M_{\min}}{1 + \lambda} = \frac{1,1}{1,1} = 1,0 \text{ MNm}$$

$$\text{La précontrainte sous-critique vaut : } P_{\text{sous}} = \frac{\Delta M'}{\rho h} = \frac{2,11 - 1}{0,7/3} = 4,76 \text{ MN}$$

et l'excentricité $e_o = -\rho v' - \frac{M'_{\min}}{P} = -0,35/3 - \frac{1}{4,76} = -0,327 \text{ m}$, valeur qui placerait le câble en dehors de l'enrobage minimum, avec : $d' = 0,1 \text{ m}$.

La section est donc sur-critique.

$$P_{\text{sur}} = \frac{M'_{\max}}{\rho v + v' - d'} = \frac{2,11}{0,35/3 + 0,35 - 0,1} = 5,75 \text{ MN}$$

$$e_o = -0,25 \text{ m}$$

$$\frac{1}{v} = \frac{bh^2}{6} = \frac{0,7^2}{6} = 0,0817 \geq \frac{P \rho h}{\sigma_{cs}} = \frac{5,75 \times 0,7/3}{20} = 0,0671$$

$$\frac{1}{v'} = 0,0817 \geq \frac{\Delta M'}{\Delta \sigma'_i} = \frac{1,1}{13,64} = 0,0814$$

Le diagramme des contraintes est celui de la figure 14-33 avec une précontrainte $P_1 = 1,1 \times 5,75 = 6,33 \text{ MN}$ et $P_2 = 0,9 P = 5,18 \text{ MN}$.

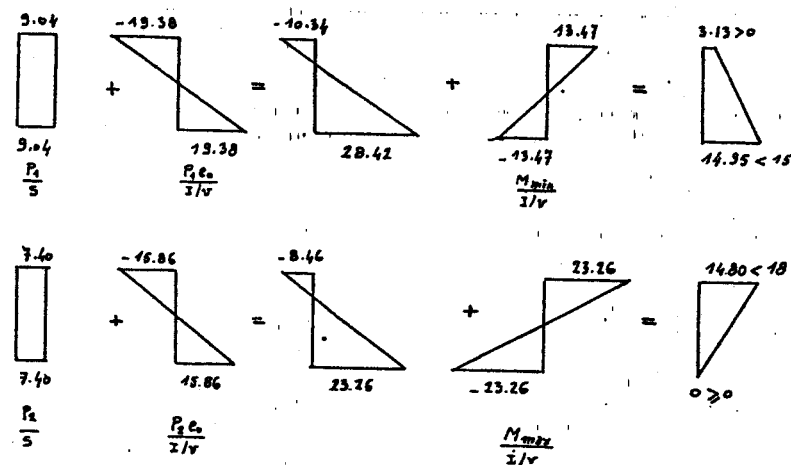


Fig. 14-33. Diagramme des contraintes en classe I

5.4.2. Classe II

Les contraintes admissibles de traction sont d'après le BPEL :

$$\bar{\sigma}_{ts} = -1,5 f_{ti} = -3,6 \text{ MPa.}$$

Comme nous sommes en section sur-critique, la fibre inférieure appartient à la section d'enrobage donc $\bar{\sigma}_{ti} = -f_{ti} = -2,4 \text{ MPa}$.

La précontrainte sous-critique vaut :

$$P_{\text{sous}} = \frac{\Delta M'}{\rho h} + \frac{S}{h} (v \bar{\sigma}'_{ti} + v' \bar{\sigma}'_{ts})$$

avec les contraintes fictives :

$$\bar{\sigma}_{ci} = \frac{\bar{\sigma}_{ci}}{1 - \lambda} = -2,67 \text{ MPa}$$

$$\text{et: } \bar{\sigma}_{cs} = \frac{\bar{\sigma}_{ci}}{1 + \lambda} = -3,27 \text{ MPa}$$

$$P = \frac{1,11}{0,7/3} + \frac{0,7}{0,7} [0,35(-2,67) + 0,35(-3,27)]$$

$$P = 4,757 - 2,079 = 2,68 \text{ MN.}$$

On voit l'influence des contraintes admissibles de traction de classe II, qui divise presque par deux la précontrainte sous-critique (2,68/4,76).

$$\text{et: } e_o = -pv' - \frac{M'_{\min} - \rho S v' \bar{\sigma}_{ci}}{P}$$

$$= -0,35/3 - \frac{1 + 0,7/3 \times 0,35 \times 3,27}{2,68} = -0,589 < -(0,35 - 0,10)$$

Le câble serait en dehors de la section de béton, la section est donc sur-critique:

$$P_{\text{sur}} = \frac{M'_{\max} + \rho S v' \bar{\sigma}_{ci}}{pv + v' - d'} = \frac{2,11 - 0,7/3 \times 0,35 \times 2,67}{0,35/3 + 0,35 - 0,10} = 5,75 - 0,59 = 5,16$$

l'économie de précontrainte réalisée par rapport à la classe I n'est que de 0,59/5,75 = 10%.

$$e_o = -0,25 \text{ m}$$

$$\text{et: } \frac{1}{v} = 0,0817 \geq \frac{Pph}{\bar{\sigma}_{ci} + \frac{v}{v'} \bar{\sigma}_{ci}} = \frac{5,16 \times 0,7/3}{20 - 2,67} = 0,0695$$

$$\frac{1}{v'} = 0,0817 \geq \frac{\Delta M'}{\Delta \bar{\sigma}_{ci}} = \frac{1,11}{13,64 + 2,67} = 0,0681.$$

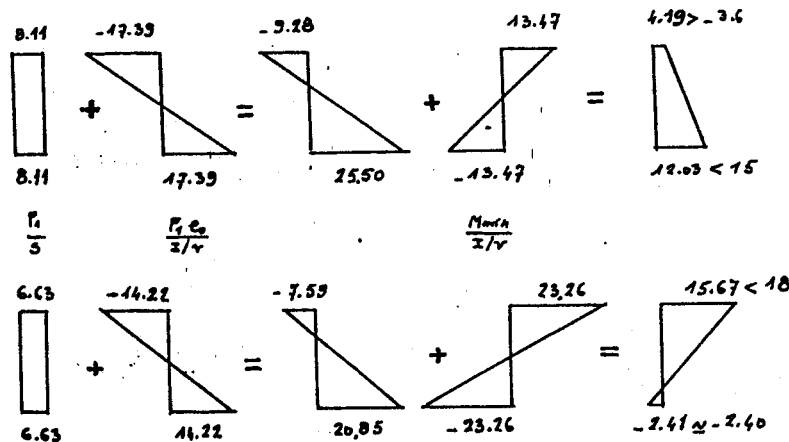


Fig. 14-34. Diagramme des contraintes en classe II

Le diagramme des contraintes est celui de la figure 14-34

avec: $P_1 = 1,1$ P = 5,68 MN et $P_2 = 0,9$ P = 4,64 MN.

On remarquera que:

1. la contrainte limite en fibre supérieure sous moment minimum n'est pas atteinte, car nous avons une section *sur-critique*;
2. la contrainte limite minimum en fibre inférieure est atteinte, car nous avons pris la valeur de la précontrainte juste nécessaire;
3. les contraintes limites supérieures ne sont pas atteintes, car la section de béton ($1/v$ et $1/v'$) est surabondante.

• Calcul des aciers passifs

Conformément au BPEL, on doit prévoir des aciers passifs de traction dans les zones tendues (voir § 9 *infra*), c'est-à-dire en partie inférieure de la section:

$$A_s = \frac{B_t}{1000} + \frac{N_{Bt}}{f_e} \cdot \frac{f_{ti}}{\sigma_{Bt}}$$

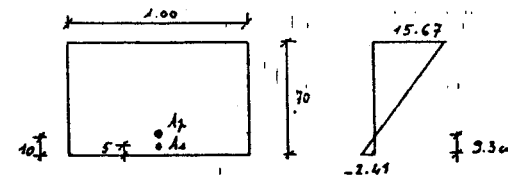


Fig. 14-35. Exemple numérique des contraintes

Le diagramme des contraintes est celui de la figure 14-35,

d'où: $B_t = 1 \times 0,093 = 0,093 \text{ m}^2$

$$\sigma_{Bt} = 2,41 \text{ MPa}$$

$$N_{Bt} = \frac{2,41}{2} \times 0,093 = 0,112 \text{ MN}$$

$$\text{d'où: } A_s = \left(\frac{0,093}{1000} + \frac{0,112}{400} \times \frac{2,40}{2,41} \right) \times 10^4 = 3,73 \text{ cm}^2,$$

soit 5 HA 10 = 3,92 cm² situés à 5 cm de la fibre inférieure.

5.4.3. CLASSE III

Prenons une précontrainte inférieure à celle de la classe II par exemple $P = 4,5$ MN obtenue avec 5 câbles de 6 T 15 ($30 \times 139 = 4170 \text{ mm}^2$) et une excentricité limite de $e_o = -0,25$ m. Calculons les contraintes du béton (fig. 14-36) sous l'action des précontraintes maximum P_1 et minimum P_2 que nous supposons égales à $P_1 = 1,1$ P = 4,95 MN et $P_2 = 0,9$ P = 4,05 MN.

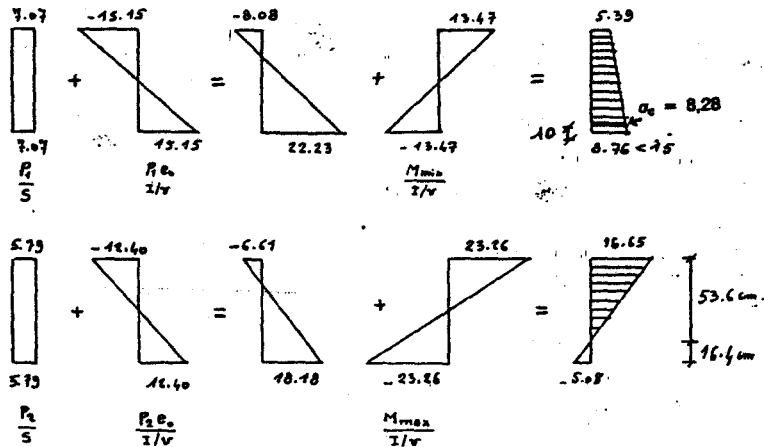


Fig. 14-36

Nous calculons ensuite les aciers passifs des zones tendues par la même formule que pour la classe II.

$$B_t = 0,164 \text{ m}^2$$

$$N_{Bt} = \frac{5,08}{2} \times 0,164 = 0,417 \text{ MN}$$

$$\text{d'où: } A_s = \frac{B_t}{1000} + \frac{N_{Bt}}{f_c} \cdot \frac{f_{li}}{\sigma_{Bt}} = \left(\frac{0,164}{1000} + \frac{0,417}{400} \times \frac{2,40}{5,08} \right) \times 10^4 = 6,57 \text{ cm}^2$$

soit: 6 HA 12 = 6,78 cm²

Avec: $\sigma_c = 8,28 \text{ MPa}$ (fig. 14-36), on a une surtension, pour amener la section à avoir une contrainte du béton nulle au niveau du câble, égale à:

$$\Delta P' = A_p \Delta \sigma_p' = A_p (n \sigma_c) = 5 \times 4170/10^6 \times 8,28 = 0,17 \text{ MN.}$$

L'effort de compression de calcul en flexion composée vaut alors:

$$P_2' = P_2 + \Delta P' = 4,05 + 0,17 = 4,22 \text{ MN.}$$

Vérification des contraintes de l'acier et du béton en section fissurée (voir § 5.1.2 *supra*):

$$c = v - e_o - \frac{M_{\max}}{P_2'} = 0,35 + 0,25 - \frac{1,9}{4,22} = 0,15 \text{ m}$$

$$p = -3c^2 + \frac{6nA_p}{b_o} (d - c) + \frac{6nA_p}{b_o} (v - e_o - c)$$

$$q = -2c^3 - \frac{6nA_p}{b_o} (d - c)^2 - \frac{6nA_p}{b_o} (v - e_o - c)^2$$

avec: $A_s = 6,78 \times 10^{-4} \text{ m}^2$

$$A_p = 4170 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

$n = 5$, charges de courte durée

$$b' = b_o = 1 \text{ m}$$

$$d = 0,65 \text{ m}$$

$$e_o = -0,25 \text{ m}$$

$$v = v' = 0,35 \text{ m}$$

$$\text{d'où: } p = -0,001035$$

$$q = -0,003254$$

la racine de $y^3 + py + q = 0$ est: $y = 0,3203 \text{ m}$ et $x = y + c = 0,4703 \text{ m}$

$$\text{d'où: } \sigma_{bc} = \frac{P_2' x}{\frac{bx^2}{2} - nA_s(d - x) - nA_p(v - e_o - x)}$$

avec: $P_2' = 4,22 \text{ MN}$

soit: $\sigma_{bc} = 18,47 > \bar{\sigma}_{cs} = 18 \text{ MPa}$ (dépassement de 2,6 %).

La surtension de l'acier de précontrainte vaut:

$$\Delta \sigma_p = n \sigma_{bc} \frac{v - e_o - x}{x} = 25,47 \text{ MPa}$$

et la tension de l'armature passive:

$$\sigma_s = n \sigma_{bc} \frac{d - x}{x} = 35,29 \text{ MPa.}$$

Nous devons vérifier que:

— la surtension de l'acier de précontrainte ne dépasse pas $0,10 f_{pt}$ (en post-tension, avec des torons T 15 en classe 1770 TBR et $f_{pt} = 1770 \text{ MPa}$) soit 177 MPa ce qui est bien le cas);

— la contrainte de l'acier passif dans la zone d'enrobage ne dépasse pas 240 MPa pour l'acier FeE40.

Tableau des résultats obtenus

	Classe I	Classe II	Classe III
Précontrainte moyenne (MN)	5,75	5,16	4,50
soit:	38 T 15 (5 282 mm ²)	34 T 15 (4 726 mm ²)	30 T 15 (4 170 mm ²)
Contrainte maximale de compression MPa:			
— fibre supérieure < 18	14,80	15,67	18,47 (1)
— fibre inférieure < 15	14,95	12,03	8,76
Aciers passifs	0	5 HA 10 393 mm ²	6 HA 12 678 mm ²

(1) Dépassement de 2,6 %.

Le calcul a été fait en classe III avec une précontrainte de 4,05 MN. Toute valeur de la précontrainte inférieure à 5,16 MN de la classe II aurait pu être prise en compte dans le calcul, la quantité d'acier passif augmente en conséquence, sous réserve que la section d'enrobage soit toujours comprimée sous l'action des combinaisons quasi-permanente, sinon nous serions en béton armé en flexion composée et non plus en béton précontraint.

La précontrainte minimum est celle qui entraîne une contrainte nulle en fibre inférieure sous $M_{\min}$ dans notre exemple :

$$\frac{P_2}{S} - \frac{P_2 e_0}{I/v} = 13,47 \text{ MPa (voir la figure 14-36)}$$

$$\text{d'où : } P_2 = 3 \text{ MN et } P = \frac{3}{0,9} = 3,33 \text{ MN.}$$

Nous pouvons en classe III prendre en compte toute valeur pour P comprise entre 5,16 et 3,33 MN.

6. LARGEUR DES TABLES DE COMPRESSION POUR LES POUTRES EN TÉ ET SECTION D'ENROBAGE

6.1. Changement de section

On admet généralement une diffusion d'un effort de compression avec une pente 1/3. Ce qui revient à dire que l'on a une bonne approximation en faisant l'hypothèse que toutes les lignes de forces (fig. 14-37) restent à l'intérieur d'un cône d'angle au sommet égal à $2 \text{ Arctg } 1/3$.

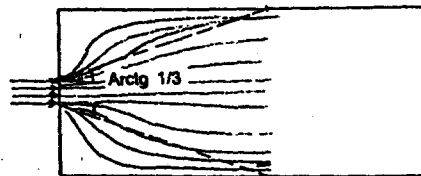


Fig. 14-37. Diffusion de la précontrainte à l'ancrage

Ainsi, lorsque les dimensions transversales d'une poutre varient avec l'abscisse mesurée le long de la poutre, on prend en compte les dimensions effectives sous réserve que les pentes des parois ne dépassent pas 1/3 (fig. 14-38).

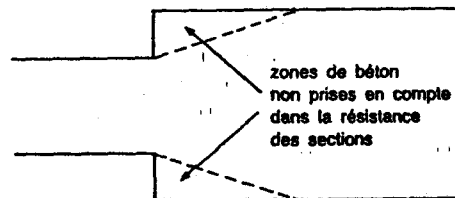


Fig. 14-38. Poutre d'épaisseur ou de hauteur variable

6.2. Largeur effective des poutres en T ou à caisson

La contrainte de compression dans la table n'est pas constante mais diminue lorsqu'on s'éloigne de l'âme (fig. 14-39).

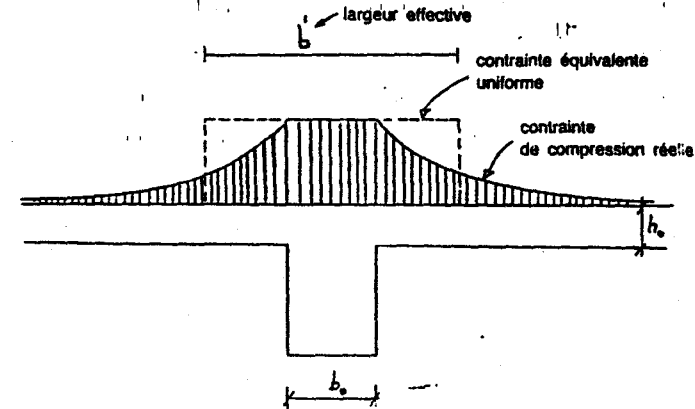


Fig. 14-39. Largeur effective d'une poutre en T

Ceci est dû au fait que les sections planes ne restent plus planes après déformation par cisaillement dans le plan de l'aile. Dans les parties de l'aile éloignées de l'âme, les contraintes normales *trainent* derrière celles des parties proches de l'âme, d'où le nom de ce phénomène : *trainage de cisaillement*.

On pourra utiliser la formule simplifiée suivante (cf. réf. Maquoi-Massonet ci-après) :

$$\frac{b'}{b} = \frac{b \text{ effective}}{b \text{ réelle}} = \frac{1}{1 + \frac{2E}{3G} \left(\frac{b}{\ell} \right)^2}$$

avec : b = largeur réelle

ℓ = portée de la poutre

E = module d'Young

G = module transversal $G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$

ν = coefficient de Poisson

On pourra, pour tenir compte de ce phénomène, prendre une largeur de table réduite b , dite largeur efficace, telle qu'indiquée dans les règles BPEL.

De plus, lorsqu'on assemble une âme préfabriquée avec une table coulée sur place, la distribution des déformations ϵ étant supposée linéaire et dans le domaine élastique, les contraintes étant proportionnelles aux modules d'Young et aux

déformations ($\sigma = E\epsilon$), on pourra, pour tenir compte de modules d'Young différents pour les deux matériaux, prendre une largeur équivalente b_e telle que (fig. 14-40):

$$b_e = b \frac{E_{bcsp}}{E_{bpr}}$$

avec: b = largeur efficace de la table

E_{bcsp} = module d'Young du béton coulé sur place

E_{bpr} = module d'Young du béton préfabriqué

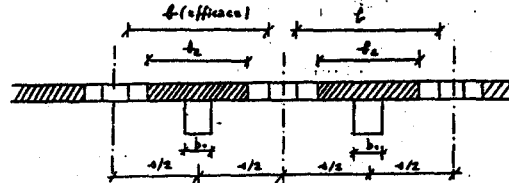


Fig. 14-40. Largeur équivalente d'une poutre en T

6.3. Largeur de table à prendre en compte dans les calculs

6.3.1. Pour la détermination des moments hyperstatiques

En dehors du fait que l'on ne doit pas attribuer la même zone de table à deux poutres différentes, on pourra prendre un débord de table constant tout le long de l'ouvrage égal au dixième de la portée moyenne des travées,

6.3.2. Pour le calcul des contraintes équilibrant l'effort normal

On prendra la plus petite des deux valeurs (fig. 14-41a).

$$b_1 < \frac{b_2}{2}$$

$$b_1 < \frac{2}{3} \times \text{distance de l'about le plus rapproché.}$$

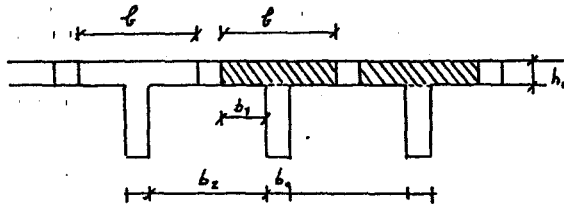


Fig. 14-41 a. Largeur de calcul d'une poutre en T

6.3.3. Pour le calcul des contraintes équilibrant les autres sollicitations (fig. 14-41b)

$$b_1 < \frac{b_2}{2}$$

$$b_1 < 1/10 \text{ de la portée de la travée.}$$

$$b_1 < \frac{2}{3} \times \text{distance à l'axe de l'appui le plus proche majorée de } 1/40 \text{ de la somme des portées qui encadrent un appui intermédiaire.}$$

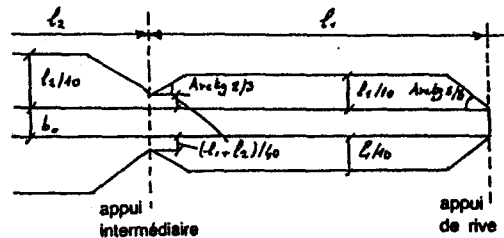


Fig. 14-41 b. Largeur de calcul d'une poutre en T

6.4. Section d'enrobage

La définition des classes de vérifications (voir chapitre 9) fait intervenir la notion de section d'enrobage. En fait c'est la zone ayant même centre de gravité que les armatures de précontraintes et garantissant à celles-ci un enrobage minimum de protection.

Nous distinguerons deux cas:

1. sections soumises à des contraintes normales d'effort normal seules: la section d'enrobage est représentée par la section totale de béton;
2. sections soumises à des contraintes normales de flexion et d'effort normal: la section d'enrobage est définie comme étant la section comprise entre deux droites parallèles à l'axe de flexion distante du centre de gravité des aciers de précontrainte de la valeur d' (fig. 14-41c);

c. étant la plus grande des valeurs suivantes:

- 3/4 de la largeur horizontale de la gaine ou du groupe de gaines le plus proche de la paroi;
- $\varnothing$: diamètre de la gaine du câble;
- d_1 : 3 cm pour les ouvrages à l'abri des intempéries, 4 cm pour les ouvrages soumis aux intempéries, 5 cm pour les ouvrages exposés à une atmosphère agressive.

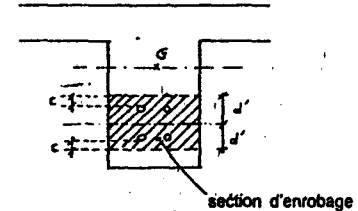


Fig. 14-41 c. Section d'enrobage

7. INFLUENCE DES MOMENTS HYPERSTATIQUES DE PRÉCONTRAINTES SUR LES FORMULES PRÉCÉDENTES

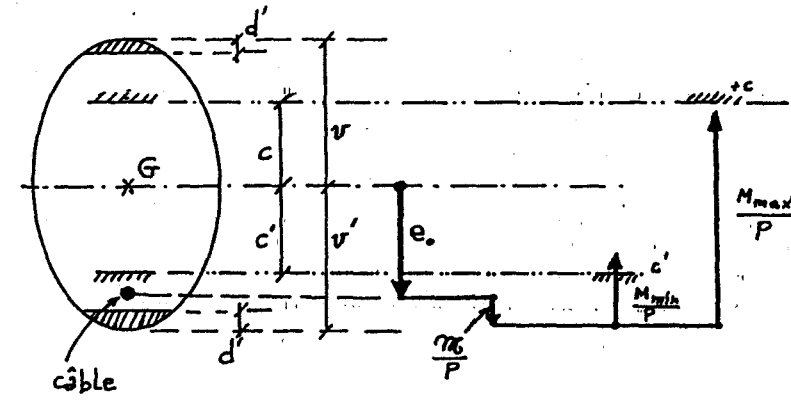


Fig. 14-42. Influence du moment hyperstatique de précontrainte sur le centre de pression

Toutes les formules et démonstrations faites dans les articles précédents sont valables à condition de remplacer le moment maximum $M_{\max}$ par $M_{\max} + M$ et $M_{\min}$ par $M_{\min} + M$.

M désignant le moment hyperstatique de précontrainte tel que calculé au chapitre 13. En particulier la figure 14-12 est modifiée en la figure 14-42.

D'où les inéquations à vérifier :

$$e_o + \frac{M}{P} + \frac{M_{\min}}{P} > -c'$$

$$e_o + \frac{M}{P} + \frac{M_{\max}}{P} < c$$

soit en classe I sous-critique par exemple : $P = \frac{\Delta M}{ph}$

$$e_o = -c' - \frac{M_{\min} + M}{P}$$

$$e_o = c - \frac{M_{\max} + M}{P}$$

et en sur-critique :

$$P = \frac{M_{\max} + M}{pv + v' - d'}$$

$$e_o = -(v' - d')$$

8. CENTRE DE PRESSION — LIGNE DE PRESSION — NOYAU DE PASSAGE — FUSEAU DE PASSAGE — LIGNE DE PRÉCONTRAINT

Dans la section on définit (fig. 14-43) :

— Le centre de pression (voir § 3.2 *supra*) qui est le point de passage de la résultante des contraintes de compression du béton.

— Le câble d'excentricité e_o .

— La ligne de précontrainte d'excentricité e_{oo} déduite du câble par déplacement du centre de pression de la valeur $\frac{M}{P}$, due au moment hyperstatique de précontrainte :

$$e_{oo} = e_o + \frac{M}{P}$$

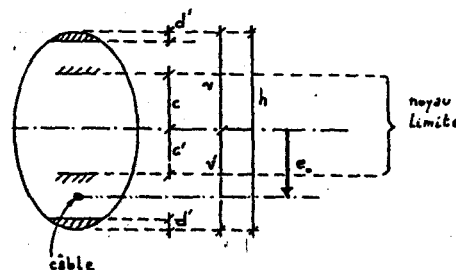


Fig. 14-43. Noyau limite

Sous l'action de la seule précontrainte isostatique le centre de pression est confondu avec le câble, sous l'action de la précontrainte isostatique et hyperstatique le centre de pression est confondu avec le point de passage de la ligne de précontrainte. Pour les ouvrages isostatiques la ligne de précontrainte est confondue avec le câble ;

— le noyau limite, zone à l'intérieur de laquelle doit se trouver le centre de pression pour que les contraintes limites minimum ne soient pas dépassées :

$$c = pv - \frac{\delta M}{P} \text{ avec } \delta M = \frac{\sigma_u}{v'} \cdot \frac{I}{v'} \quad (\text{voir § 4.2. 1. supra})$$

$$c' = pv' - \frac{\delta M'}{P} \quad \delta M' = \frac{\sigma_u}{v} \cdot \frac{I}{v}$$

soit :

$$\begin{aligned} c &= pv - \frac{\rho S v'}{P} \sigma_u \\ c' &= pv' - \frac{\rho S v}{P} \sigma_u \end{aligned}$$

• Le noyau de passage du câble pour une poutre isostatique représente la zone dans laquelle doit se trouver le câble pour que les contraintes limites minimum ne soient pas dépassées. Il est limité par les ordonnées e_1 et e_2 telles que :

— en sous-critique

$$\begin{aligned} e_1 &= c - \frac{M_{\max}}{P} \\ e_2 &= -c' - \frac{M_{\min}}{P} \end{aligned}$$

— en sur-critique

$$\begin{aligned} e_1 &= c - \frac{M_{\max}}{P} \\ e_2 &= -(v' - d') \end{aligned}$$

on doit alors vérifier :

$$e_2 \leq e_o \leq e_1 \quad \text{en isostatique.}$$

Pour une poutre hyperstatique, le noyau de passage est la zone dans laquelle doit se trouver la ligne de précontrainte. Avec les mêmes valeurs que précédemment pour e_1 et e_2 , on doit vérifier :

$$e_2 \leq e_o + \frac{M}{P} = e_{oo} \leq e_1 \quad \text{en hyperstatique.}$$

• Le fuseau de passage correspond au lieu des noyaux de passage le long de la poutre (fig. 14-44 a, b, c, d, e):

— sous-critique à précontrainte surabondante, car le fuseau de passage du câble est ouvert en toute section;

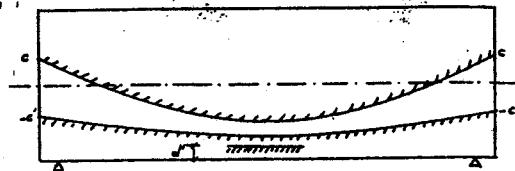


Fig. 14-44 a

— sous-critique à précontrainte insuffisante, le fuseau de passage est négatif;

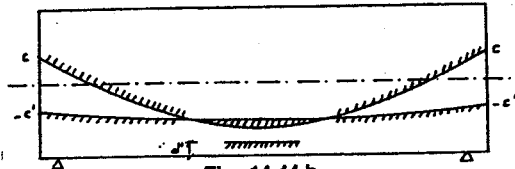


Fig. 14-44 b

— sous-critique à précontrainte minimum (c'est-à-dire juste suffisante pour avoir un fuseau fermé);

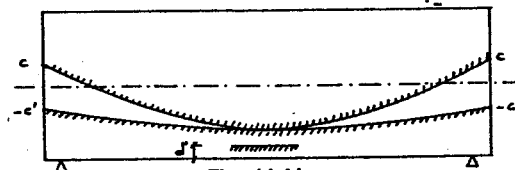


Fig. 14-44 c

— sur-critique à précontrainte légèrement surabondante (fuseau ouvert);

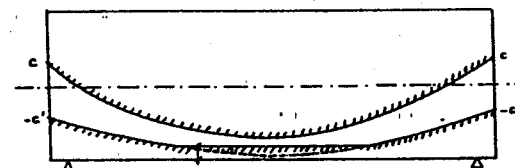


Fig. 14-44 d

— sur-critique à précontrainte minimum (juste suffisante pour réduire le noyau de passage à un point).

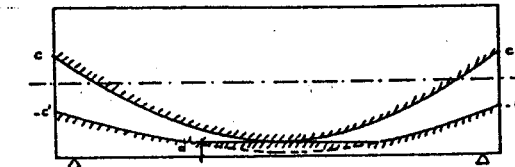


Fig. 14-44 e

On constate que lorsque les sections les plus sollicitées sont sur-critique, les autres sections sont sous-critique à fuseau de passage ouvert.

Un fuseau de passage ouvert signifie que le câble (ou la ligne de précontrainte en hyperstatique) peut se situer n'importe où à l'intérieur de ce fuseau.

9. FERRAILLAGE DE LA SECTION

9.1. Armatures passives de traction

Comme on l'a vu dans les exemples du § 5.4 ci-dessus, on doit disposer des armatures passives dans les zones tendues du béton pour limiter l'ouverture des fissures et éviter des déformations excessives.

Leur section sera prise égale à:

$$A_s = \frac{B_t}{1000} + \frac{N_{Bt}}{f_e} \cdot \frac{f_{tj}}{\sigma_{Bt}}$$

où: B_t représente la section de béton tendu

N_{Bt} la résultante de traction du béton tendu

f_e la limite élastique de l'acier passif utilisé

f_{tj} la contrainte caractéristique de traction de béton

σ_{Bt} la valeur absolue de la contrainte maximale de traction.

Le calcul des contraintes permettant de déterminer B_t et N_{Bt} est fait en section non fissurée quelle que soit la classe (c'est d'ailleurs le seul cas où en classe III, on calcule des contraintes en section non fissurée).

9.2. Armatures de peau

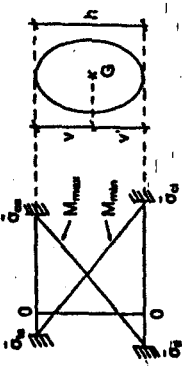
Pour toutes les pièces dont la plus grande dimension transversale excède 40 cm, on devra disposer des armatures dites de *peau*, régulièrement espacées en fonction des dimensions de la pièce.

Pour la direction parallèle à la fibre moyenne d'une poutre, on disposera de 2 à 3 cm² par mètre linéaire de parement perpendiculaire à leur direction, avec un minimum de 0,10 % de la section de l'élément.

Pour la direction parallèle à la section transversale, on disposera de 1,5 à 2 cm² d'acier par mètre linéaire perpendiculaire à leur direction.

On peut prendre en compte les armatures actives prétendues (de précontrainte par pré-tension, c'est-à-dire en général par fil adhérent) dans le calcul des aciers de peau.

Ces armatures sont essentiellement destinées à limiter les fissurations prématurées susceptibles de se produire avant mise en précontrainte sous l'action de phénomènes tels que retrait différentiel et gradients thermiques.

CLASSE I & II			SOUS-CRITIQUE	SUR-CRITIQUE L'excentricité du câble est limitée par des conditions d'enrobage minimum
PRÉCONTRAINTES P	EXCENTRICITÉ e_0			
		$P_{\text{sous}} = \frac{\Delta M}{\rho h} + \frac{S}{h} (v \bar{\sigma}_t + v' \bar{\sigma}_b)$ $e_0 = \rho v - \frac{M_{\text{max}} + \rho S v \bar{\sigma}_t}{P}$ ou $e_0 = -\rho v' - \frac{M_{\text{min}} - \rho S v' \bar{\sigma}_b}{P}$	$P_{\text{sur}} = \frac{M_{\text{max}} + \rho S v \bar{\sigma}_t}{\rho v + v' - d'}$ $e_0 = -(v' - d')$	
MODULE D'INERTIE		$\frac{I}{v} = \frac{\Delta M}{\Delta \bar{\sigma}_t}$	$\frac{I}{v} = \frac{P \rho h}{\bar{\sigma}_a + \frac{v}{v'} \bar{\sigma}_t}$	
		$\frac{I}{v'} = \frac{\Delta M}{\Delta \bar{\sigma}_t}$	$\frac{I}{v'} = \frac{\Delta M}{\Delta \bar{\sigma}_t}$	

$$p = \frac{I}{S w'} \quad \Delta M = M_{\text{max}} - M_{\text{min}}$$

15

LA FLEXION EN ÉTAT-LIMITE ULTIME

Toute section de poutre en béton précontraint doit être vérifiée en état-limite ultime (ELU).

On détermine alors les sollicitations ultimes à appliquer, qui sont obtenues à partir des sollicitations déterminées au chapitre 8 correspondant aux combinaisons fondamentales et accidentelles.

Les éléments résistants de la section sont :

— le béton, pour lequel on applique un coefficient minorateur tel que la résistance devient égale à $\frac{0,85 f_{c28}}{\gamma_b}$

où : f_{c28} représente la résistance caractéristique à 28 jours,

γ_b un coefficient égal à 1,5 pour les combinaisons fondamentales, et à 1,15 pour les combinaisons accidentelles. On retrouve ici la même valeur que pour béton armé calculé suivant le BAEL ;

— l'acier, aussi bien actif que passif :

- l'acier actif (ou acier de précontrainte) n'étant pris en compte dans le calcul de résistance qu'à sa phase de travail au-delà de la contrainte correspondant à l'effort de précontrainte ;
- l'acier passif (ou acier complémentaire éventuel non prétendu, type acier de béton armé).

La résistance de l'acier actif et de l'acier passif est minorée par un coefficient : $\gamma_s = \gamma_a = 1,15$ (1 pour les combinaisons accidentelles).

L'évolution des contraintes du béton dans une section donnée sous l'action des sollicitations successivement appliquées prend l'allure des diagrammes suivants (fig. 15-1) :

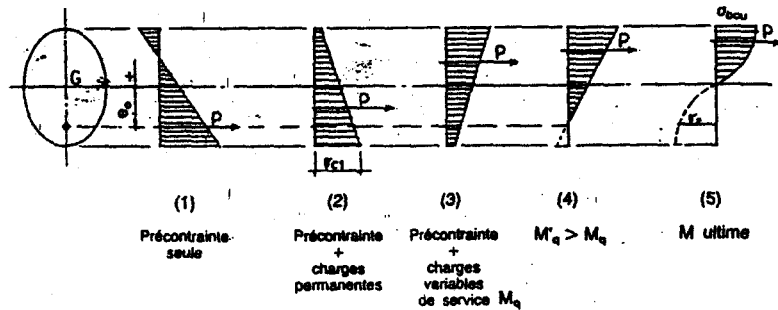


Fig. 15-1. Diagramme des contraintes

Le cas (1) représente l'état des contraintes sous l'action de la seule précontrainte. Or, on sait que, cet état n'existe pas (sauf aux points de moment nul) car la mise en précontrainte de la poutre entraîne une déformation de celle-ci (rotation $\omega = \omega_0 + \int \frac{P e_0 dx}{E_i}$ et flèche $f = f_0 + \int \omega dx$).

Si la poutre, sous l'action de la précontrainte, décolle du coffrage, les charges permanentes de poids propre entrent automatiquement en action; si, au contraire l'action de la précontrainte « appuie » sur le coffrage, la section est soumise à l'équivalent d'une charge permanente négative (solution qu'il faut rejeter pour éviter des désordres).

Sous l'action de la seule précontrainte, cas (1) de la figure 15-1, la contrainte de traction dans l'acier de précontrainte vaut $\sigma_1 = \frac{P}{S}$ et son allongement ϵ_1 sera lu sur le diagramme contrainte-déformation de l'acier. Si le point représentatif de la contrainte σ_1 est toujours situé dans la zone élastique, on aura :

$$\epsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E_p}$$

avec: E_p module d'élasticité longitudinale de l'acier de précontrainte, ou module d'Young.

Les cas (2) et (3) sont des positions intermédiaires de l'état de contrainte dans le béton qui n'entraîne pas de contrainte de traction dans le béton au droit de l'acier de précontrainte.

Le cas (4) représente le cas limite où le béton comprimé se trouve entièrement du même côté par rapport à l'acier de précontrainte. Entre les cas (2) et (4), l'acier a subi un allongement égal à celui du béton qui a été décomprimé de la contrainte σ_{c1} à la valeur 0. Le béton restant dans le domaine élastique, la proportionnalité entre contrainte et déformation permet d'écrire :

$$\epsilon_{c1} = \frac{\sigma_{c1}}{E_b}$$

E_b étant le module d'Young du béton. Comme on ne peut prévoir quel sera le type de chargement appliqué à la poutre entre les cas (2) et (4) quant à sa durée

d'application, et à sa proportion de charges permanentes et de charges variables, il est convenu réglementairement (BPEL, § 6.3.3) de prendre pour E_b la valeur :

$$E_b = \frac{E_p}{5}$$

qui correspond à une forte proportion de charges variables.

L'allongement de l'acier $\Delta \epsilon_2$ étant égal à l'allongement du béton ϵ_{c1} , l'augmentation de contrainte de l'acier correspondant vaut alors :

$$\Delta \sigma_2 = E_p \Delta \epsilon_2 = E_p \epsilon_{c1} = E_p \frac{\sigma_{c1}}{E_b} = 5 \sigma_{c1}$$

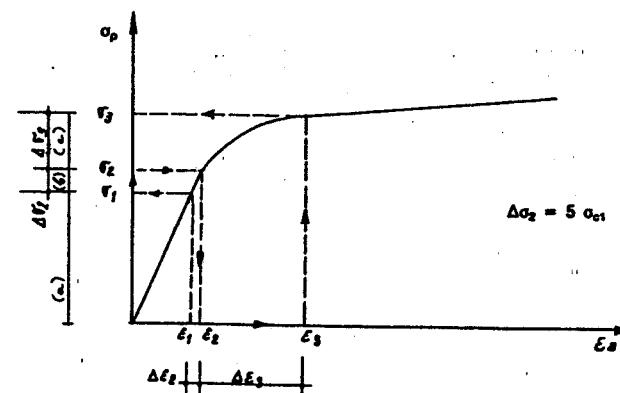
soit 5 fois la contrainte du béton au niveau du câble sous l'action de la seule précontrainte.

Si le moment extérieur continue à augmenter pour atteindre le moment ultime M_u , le béton comprimé aura un comportement appartenant au domaine plastique et non plus linéaire. Le diagramme des contraintes pourra être représenté par un diagramme parabole-rectangle, ou par un diagramme rectangulaire simplifié.

L'acier de précontrainte continuera à s'allonger entre les cas (4) et (5) comme le ferait un acier d'une section en béton armé à l'état-limite ultime. C'est pourquoi, comme en béton armé, l'allongement correspondant au passage de la phase (4) à la phase (5) ne devra pas dépasser la valeur $\Delta \epsilon_3 = 10\%$.

La résistance de l'acier devra être suffisante pour équilibrer le moment fléchissant ultime.

En résumé, on peut suivre sur la figure 15-2, l'évolution des contraintes et déformation de l'acier de précontrainte.



(a) Tension de mise en précontrainte
(b) Surtension de décompression du béton
(c) Surtension jusqu'à l'ELU en béton tendu

Fig. 15-2. Diagramme contrainte-déformation de l'acier

On a: $\sigma_1 = \frac{P}{A_p}$, d'où: ε_1

puis: $\sigma_2 = \sigma_1 + \Delta\sigma_2 = \sigma_1 + 5\sigma_{el}$, d'où: ε_2 ;

enfin par le calcul ci-après, on trouve $\Delta\varepsilon_3$, d'où: $\varepsilon_3 = \varepsilon_2 + \Delta\varepsilon_3$, puis σ_3 qui est la valeur de calcul.

• Calcul de la section à l'état-limite ultime

Comme nous l'avons vu, nous sommes ramené au calcul d'une section en béton armé soumise à la flexion composée en état-limite ultime (fig. 15-3).

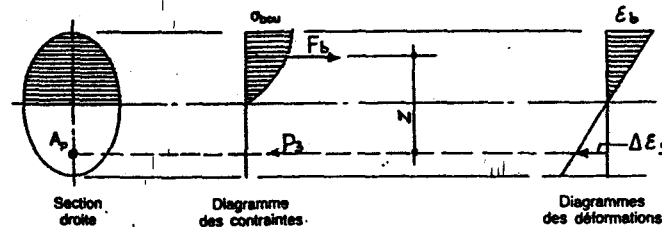


Fig. 15-3. Contraintes et déformations à l'état limite ultime

L'équilibre de la section permet d'écrire: $F_b = P_3$

avec: F_b résultante de compression du béton comprimé à $\sigma_{bcu} = \frac{0,85 f_{cu}}{\gamma_b}$

P_3 résultante de traction de l'acier = $\sigma_3 \cdot A_p$.

De même, l'équilibre des moments par rapport aux aciers tendus A_p s'écrit:

$$M_u = F_b z$$

z représentant la distance du point d'application de F_b aux aciers A_p .

• Cas de la section rectangulaire ou en T (fig. 15-4 en diagramme rectangulaire simplifié)

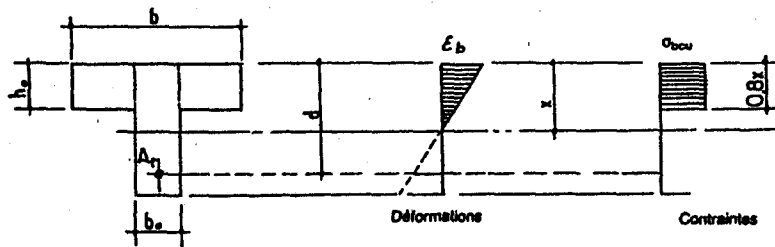


Fig. 15-4. Section T. Diagramme parabole-rectangle

L'utilisation du diagramme rectangulaire simplifié est plus aisée que celle du diagramme parabole-rectangle pour une section autre que rectangulaire.

Nous supposons que l'axe neutre est dans la nervure, sinon nous serions ramené au cas d'une section rectangulaire:

— calcul de la résultante de compression du béton situé dans la partie de la table extérieure à la nervure:

$$F_{bc} = \underbrace{(b - b_o)h_o}_{\text{(surface)}} \times \underbrace{\sigma_{bcu}}_{\text{(contrainte)}}$$

— bras de levier de cette résultante: $z_{bc} = d - \frac{h_o}{2}$

moment résistant de cette partie de béton comprimé:

$$M_{bc} = F_{bc} \times z_{bc} = (b - b_o)h_o\sigma_{bcu} \left(d - \frac{h_o}{2}\right)$$

moment à reprendre par la nervure: $M_n = M_u - M_{bc}$

On est ainsi ramené au cas d'une section rectangulaire de largeur b_o , de hauteur utile d , soumise à un moment M_n . Pour déterminer si l'axe neutre est dans la table ou dans la nervure, on calcule le moment résistant de la table complète (largeur b):

$$M_t = 0,8bh_o\sigma_{bcu} \left(d - \frac{0,8h_o}{2}\right)$$

si: $M_t < M_u$ l'axe neutre est dans la table,

$M_t > M_u$ l'axe neutre est la nervure.

Il existe un cas où l'axe neutre est dans la nervure, mais voisin de la jonction table-nervure ($x < 1,25 h_o$), pour lequel on risque de trouver pour les nervures soumises à un moment M_n , un axe neutre tel que $x < h_o$.

En fait, l'incidence est peu importante et l'on pourra traiter ce cas dans le cadre du cas général.

• Etude d'une section rectangulaire de largeur b_o , soumise à un moment M_n (fig. 15-5):

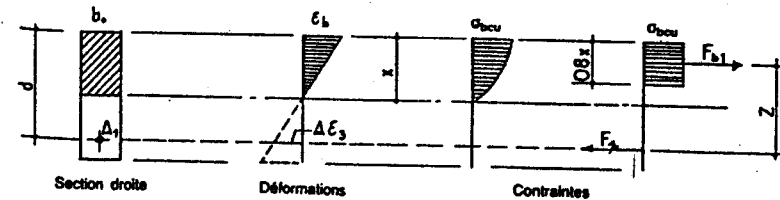


Fig. 15-5. Section rectangulaire

— la résultante de compression du béton vaut:

$$F_{b1} = \sigma_{bcu} \times 0,8b_o x$$

- le bras de levier vaut: $z = d - 0,4x$
- le moment résistant $F_{b1}z$ est égal au moment extérieur M_a :

$$M_a = F_{b1} \cdot z = \sigma_{bcu} \cdot 0,8b_o \cdot x(d - 0,4x).$$

Posons μ , moment réduit:

$$\mu = \frac{M_a}{b_o d^2 \sigma_{bcu}} \text{ et } \xi = \frac{x}{d}$$

L'équation d'équilibre des moments devient une équation du 2^e degré en ξ :

$$\mu = 0,8\xi(1 - 0,4\xi)$$

dont la racine est: $\xi = 1,25(1 - \sqrt{1 - 2\mu})$.

La connaissance de la position de la fibre neutre permet d'écrire une relation entre l'allongement de l'acier $\Delta\epsilon_3$ et le raccourcissement du béton ϵ_b :

$$\Delta\epsilon_3 = \epsilon_b \frac{1 - \xi}{\xi}$$

Deux cas peuvent se présenter suivant que le béton ou l'acier a atteint la déformation limite autorisée qui vaut:

- 3,5‰ pour le béton,
- 10‰ pour l'acier.

Supposons que le béton est sollicité avec une déformation ϵ_b de 3,5‰, on trouve alors pour l'acier un allongement:

$$\Delta\epsilon_3 = 3,5 \frac{1 - \xi}{\xi} \text{‰};$$

- si cette valeur est inférieure à 10‰, nous la retiendrons comme allongement de l'acier;
- si cette valeur est supérieure à 10‰, nous limiterons $\Delta\epsilon_3$ à 10‰.

La connaissance de $\Delta\epsilon_3$ entraîne celle de $\Delta\sigma_3$ par lecture sur le diagramme contrainte-déformation de l'acier.

L'équilibre de la section en T sera donnée pour les efforts normaux par:

$$F_b = F_{b1} + F_{te} \leq A_p \sigma_3$$

avec: $F_{b1} = 0,8\xi b_o d \sigma_{bcu}$

$$F_{te} = (b - b_o) h_o \sigma_{bcu}$$

d'où la relation sur la section d'acier minimum nécessaire:

$$A_p \geq \frac{F_{b1} + F_{te}}{\sigma_3} \quad (15-1)$$

REMARQUE:

La précontrainte de calcul prise en compte en état-limite est la précontrainte probable P_m , c'est-à-dire la moyenne des deux précontraintes caractéristiques utilisées en état-limite de service:

$$P_m = \frac{P_1 + P_2}{2}$$

• Application numérique

Soit une poutre en T définie sur la figure 15-6, soumise à un moment extérieur.

$M_g = 0,102 \text{ MNm}$, dû aux actions permanentes,

$M_q = 0,758 \text{ MNm}$, dû aux actions variables de charges d'exploitation et à une précontrainte probable $P_m = 1,66 \text{ MN}$.

En section brute, les caractéristiques géométriques sont:

$$S = 0,261 \text{ m}^2$$

$$\frac{I}{v} = \frac{I}{v'} = 0,0595 \text{ m}^3$$

$$e_o = -0,29 \text{ m}$$

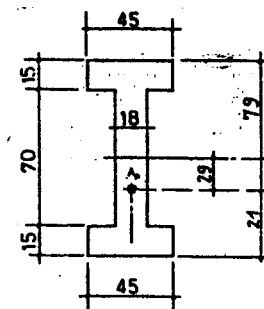


Fig. 15-6.

Les armatures actives utilisées sont des câbles constitués de torons T 15 dont la limite élastique f_{peg} vaut 1 623 MPa.

Le moment ultime de calcul vaut:

$$M_u = 1,35 M_g + 1,5 M_q = 1,275 \text{ MNm}$$

La contrainte caractéristique de rupture du béton est supposée égale à: $f_{ctk} = 35 \text{ MPa}$ et la contrainte de calcul vaut:

$$\sigma_{bcu} = \frac{0,85 \times 35}{1,5} = 19,38 \text{ MPa}.$$

• Calcul du moment résistant de la partie extérieure de table:

$$M_{te} = (b - b_o) h_o \left(d - \frac{h_o}{2} \right) \sigma_{bcu}$$

$$M_{te} = 0,27 \times 0,15 \times 0,715 \times 19,38 = 0,574 \text{ MNm}$$

• Moment à reprendre par la nervure seule:

$$M_a = M_u - M_{te} = 1,275 - 0,574 = 0,701 \text{ MNm}$$

$$\text{Posons: } \mu = \frac{M_a}{b_o d^2 \sigma_{bcu}} = \frac{0,701}{0,18 \times 0,79^2 \times 19,38} = 0,315$$

$$\text{d'où: } \xi = 1,25(1 - \sqrt{1 - 2\mu}) = 0,489 > \frac{h_o}{d} = 0,190$$

$$\text{et: } \Delta\epsilon_3 = 3,5 \frac{1 - \xi}{\xi} \text{‰} = 3,66\text{‰} < 10\text{‰}.$$

L'équation de l'acier de précontrainte constitué de torons (avec $\gamma_p = 1,15$) est la suivante:

$$\varepsilon_p = \frac{\sigma_p}{E_p} + 100 \left(\gamma_p \frac{\sigma_p}{f_{pe8}} - 0,9 \right)^3 \quad (15-2)$$

pour $\sigma_p > 0,9 f_{pe8}$.

On trouve pour une précontrainte de 1,66 MN et une section d'acier de précontrainte de deux câbles de 5 T 15:

$$A_p = 2 \times 5 \times 139 \text{ mm}^2 = 1 390 \text{ mm}^2$$

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{P_m}{A_p} = \frac{1,66}{1 390} \times 10^6 = 1 194,2 \text{ MPa} < 0,9 \frac{f_{pe8}}{\gamma_p} \\ &= 0,9 \times \frac{1 623}{1,15} = 1 270,2 \text{ MPa.} \end{aligned}$$

Le point représentatif se trouve sur la partie droite du diagramme,

$$\text{soit: } \varepsilon_1 = \frac{1 194,2}{190 000} = 6,28 \text{‰}$$

• Calcul des contraintes de compression du béton sous l'action de la précontrainte et des charges permanentes:

$$\text{avec: } \frac{I}{v} = \frac{I}{v'} = 0,0595 \text{ m}^3 \text{ (section brute)}$$

$$\begin{aligned} P &= 1,66 \text{ MN} \\ e_o &= -0,29 \text{ m} \\ S &= 0,261 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

On trouve:

- en fibre supérieure une contrainte de $-0,02 \text{ MPa}$;
- en fibre inférieure une contrainte de $12,74 \text{ MPa}$ (fig. 15-7).

d'où: $\sigma_{c1} = 10,06 \text{ MPa}$ au niveau du câble

$$\text{et: } \Delta\sigma_2 = 5\sigma_{c1} = 50,3 \text{ MPa}$$

$$\text{soit: } \sigma_2 = \sigma_1 + \Delta\sigma_2 = 1 194,2 + 50,3 = 1 244,5 < 1 270 \text{ MPa.}$$

L'allongement ε_2 de l'acier vaut donc:

$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E_p} = \frac{1 244,5}{190 000} : 6,55 \text{‰}$$

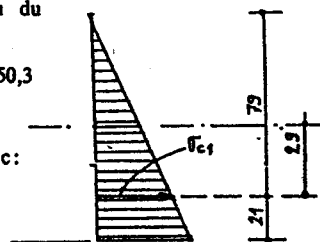


Fig. 15-7. Contrainte du béton au niveau du câble

L'allongement total de l'acier vaut:

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_2 + \Delta\varepsilon_3 = 6,55 + 3,66 = 10,21 \text{‰}$$

d'où la valeur de σ_3 par approximations successives de l'équation (15-2).

Pour cela posons:

$$u = \left[\frac{1}{100} \left(\varepsilon_3 - \frac{\sigma_3}{E_p} \right) \right]^{0,2} \text{ et: } \sigma_3 = (u + 0,9) f_{pe8} / \gamma_p$$

Partons d'une valeur *a priori* de σ_3 de 1 300 MPa:

$$\sigma_3 = 1 300 \text{ MPa} \rightarrow u = 0,1275$$

$$\rightarrow \sigma_3 = 1 450,1 \rightarrow u = 0,1209$$

$$\rightarrow \sigma_3 = 1 441,4 \rightarrow u = 0,1213$$

$$\rightarrow \sigma_3 = 1 441,3 \rightarrow u = 0,1213 \rightarrow \sigma_3 = 1 441,3 \text{ MPa}$$

la convergence est vite obtenue pour 1 441,3 MPa (fig. 15-8).

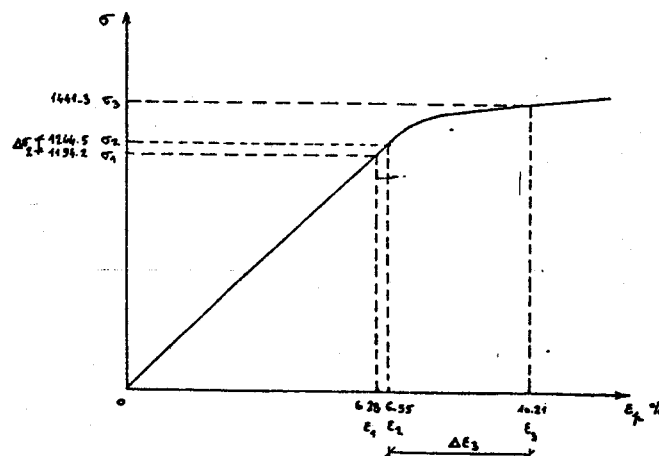


Fig. 15-8. Diagramme contrainte-déformation de l'acier de précontrainte

Les résultantes de compression du béton valent:

— pour l'âme:

$$F_{b1} = 0,8 \xi_b d_o \sigma_{bcu} = 0,8 \times 0,489 \times 0,18 \times 0,79 \times 19,83 = 1,103 \text{ MN}$$

— pour la table extérieure à l'âme:

$$F_{te} = (b - b_o) h_o \sigma_{bcu} = 0,27 \times 0,15 \times 19,83 = 0,803 \text{ MN}$$

L'équilibre exige que l'inéquation (15-1) soit vérifiée:

$$\begin{aligned} A_p &= 1 390 \text{ mm}^2 = 1,39 \times 10^{-3} \geq \frac{F_{b1} + F_{te}}{\sigma_3} \\ &= \frac{1,103 + 0,803}{1 441,3} 1,39 \times 10^{-3} > 1,32 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

L'inéquation est vérifiée.

Si cette inégalité n'est pas vérifiée, deux possibilités sont offertes :

- ajouter des aciers de précontrainte;
- utiliser des aciers passifs avec une section A_s telle que, s'ils ont le même centre de gravité que les aciers de précontrainte ils soient capables, avec un allongement $\Delta \epsilon_s$, de reprendre un effort égal à :

$$F_s = F_{b1} + F_{1c} - A_p \sigma_s$$

16

L'EFFORT TRANCHANT

1. GÉNÉRALITÉS

Nous ne traiterons dans ce chapitre que des effets de l'effort tranchant sur une poutre ayant un plan moyen vertical de symétrie et soumise à la flexion.

La partie résistante d'une poutre à l'effort tranchant est représentée par l'âme ; les membrures supérieures et inférieures du fait de leur inertie par rapport au centre de gravité de la section sont les éléments résistant à la flexion.

L'âme d'une poutre sera donc dimensionnée pour :

- résister à l'effort tranchant ;
- permettre un bétonnage correct à travers la cage d'armature et les gaines de précontrainte avec, en cas de pervibration, des espaces suffisants pour y introduire les vibreurs.

Pour le béton armé, on peut dissocier l'étude de l'effort tranchant de celle de la flexion, c'est-à-dire le cisaillement τ de la contrainte normale de la flexion σ , car le cisaillement maximum est obtenu sur l'axe neutre où la contrainte normale est nulle.

Du fait de la force de précontrainte, la contrainte au centre de gravité de la section n'est plus nulle mais vaut :

$$\sigma_s = \frac{P}{S}$$

Nous serons donc obligés d'étudier la corrélation entre σ et τ dans tout élément de béton précontraint.

Dans le cas du règlement de béton précontraint BPEL, on procédera :

- en état-limite de service à une vérification de la contrainte de cisaillement ;
- un état-limite ultime à une vérification de la section d'acier transversal qui peut être formé soit d'armatures passives, soit d'armatures actives, soit des deux, et à une vérification de la compression des bielles.

2. DÉTERMINATION DE L'EFFORT TRANCHANT

2.1. Détermination de l'effort tranchant des charges extérieures

Cette détermination sera faite à partir des équations de la résistance des matériaux, en retenant pour chaque abscisse de poutre un effort tranchant maximum $V_{\max}$ et un effort tranchant minimum $V_{\min}$.

La convention de signe sera celle de la résistance des matériaux. Pour une charge répartie uniforme dirigée vers le bas d'une travée isostatique, l'effort tranchant est positif dans la demi-travée gauche et négatif dans la demi-travée droite (fig. 16-1).

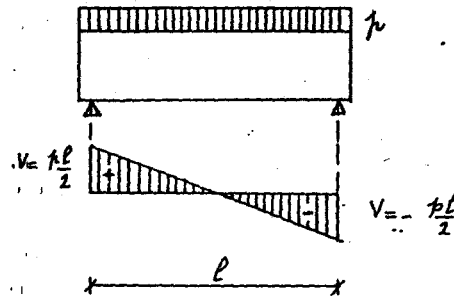


Fig. 16-1. Poutre isostatique - Effort tranchant

2.2. Effort tranchant dû à la précontrainte

• Effet isostatique

Si l'on considère l'élément de poutre de la figure 16-2 situé à gauche de la section étudiée, les actions s'exerçant sur l'élément gauche se réduisent au titre des composantes verticales de tous les efforts appliqués à :

- un effort tranchant V positif ;
- une composante verticale de la précontrainte $P \sin \alpha$ qui vient se retrancher à l'effort tranchant. Le câble incliné « relève » les charges.

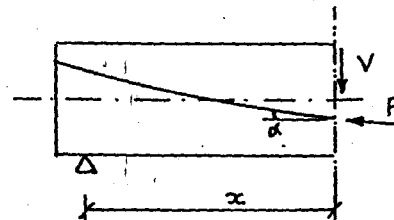


Fig. 16-2. Efforts verticaux dans une section

Si le câble était funiculaire des charges appliquées, on aurait :

$$V - P \sin \alpha = 0.$$

• Effet hyperstatique

A cette action, nous devons ajouter l'effort tranchant dû au moment hyperstatique de précontrainte, s'il existe. Il est égal à la dérivée de ce moment :

$$V = \frac{dM}{dx}$$

Nous trouverons au chapitre 19, les formules de calcul de l'effort tranchant hyperstatique.

2.3. Effort tranchant dû à la courbure de la poutre (effet RESAL)

Il arrive fréquemment que la hauteur d'une poutre soit variable avec l'abscisse, plus forte sur appui qu'en travée.

En respectant un extrados horizontal, l'intrados est donc incliné de pente : $\frac{dh}{dx}$.

Près des appuis, en cas de poutres continues, l'intrados est généralement comprimé, ce qui signifie qu'une partie de l'effort tranchant dû aux forces extérieures « part » suivant la composante verticale de cet effort de compression (fig. 16-3) qui vaut :

$$V_r = \frac{M}{z} \cdot \frac{dh}{dx},$$

il est admis (et prudent) de ne l'appliquer que sur la part de compression exercée à l'extérieur de l'âme (zone hachurée de la figure 16-4) pour les poutres caissons.

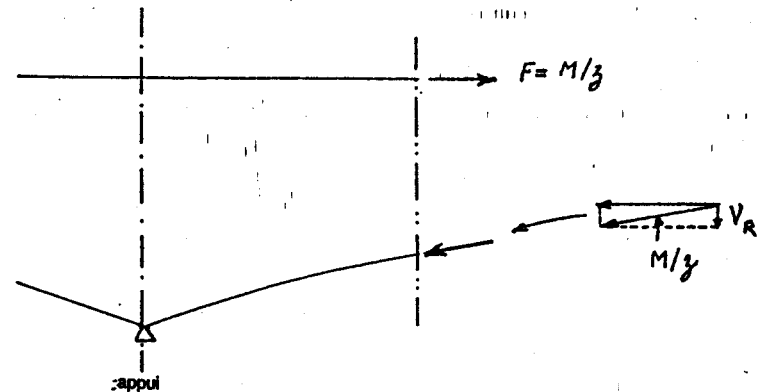


Fig. 16-3. Effet RESAL

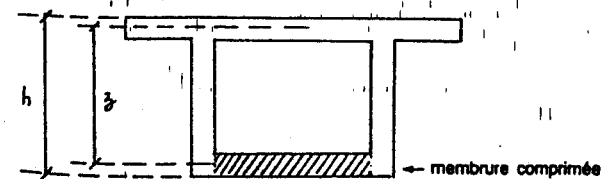


Fig. 16-4. Prise en compte de l'effet RESAL sur les poutres caissons

En résumé: l'effort tranchant réduit vaut:

$$V_r = V_{\max} - P \sin \alpha + \frac{M_1 + 1 - M_2}{\ell_i} + \frac{M_{\text{ext}}}{z} \cdot \frac{dh}{dx}$$

$\uparrow$ ou $\uparrow$
 $V_{\min}$
 extérieur précontrainte iso' précontrainte hyper Résal

α étant l'angle du câble avec l'horizontale* (fig. 15-5).

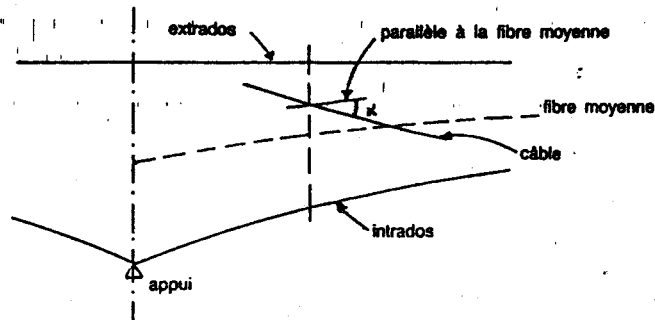


Fig. 16-5. Inclinaison du câble

REMARQUE IMPORTANTE:

On peut négliger l'effet des charges situées à une distance du nu de l'appui inférieure à $\frac{h}{2}$ et ne prendre en compte qu'une fraction égale à $\frac{2a}{3h}$ des charges situées à une distance a de l'appui inférieure à $1,5h$. Pour une charge répartie uniforme sur toute la travée, cela revient à multiplier l'effort tranchant au nu de l'appui par: $(1 - \frac{5h}{3\ell})$. On admet une transmission directe sur l'appui par une bielle inclinée.

2.4. Câbles interrompus

Il arrive pour des raisons d'économie ou de construction d'arrêter les câbles en travées. Ainsi pour un câble relevé, ancré en extrados (fig. 16-6), que l'on suppose être:

— horizontal en partie courante: zone ①;

* On prend la composante verticale de la précontrainte $P \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)$.

— parabolique pour le relevage sur une longueur λ : zone ②;
 — incliné droit pour pénétrer dans l'ancrage ③, l'effort tranchant repris par le relevage est nul en zone ①, linéaire et égal à $P \sin \alpha = P \tan \alpha_0$ en zone ② avec une valeur maximum $P \sin \alpha_0$

(où $\tan \alpha_0 = \frac{2\eta}{\lambda} \approx \sin \alpha_0$) constant en zone ③ et nul au-delà.

Pour une succession d'arrêts de câbles, on aura une série de pics et de creux (fig. 16-7).

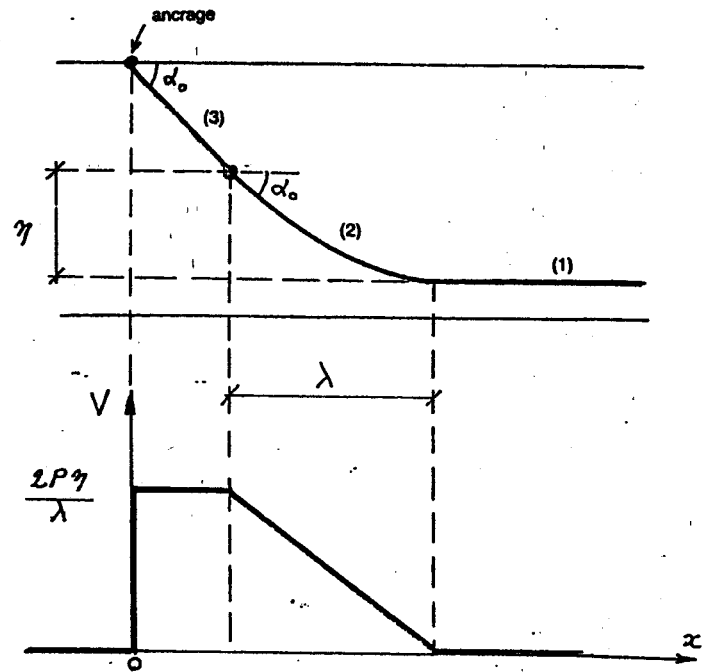


Fig. 16-6. Câble interrompu - Effort tranchant

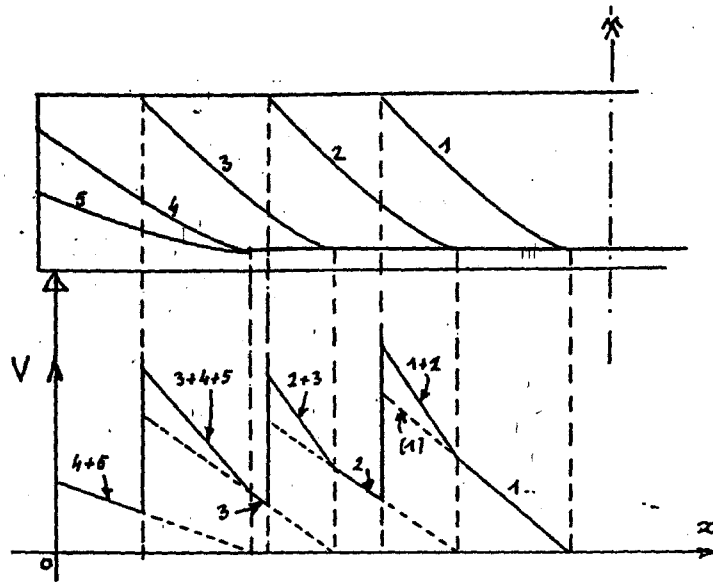


Fig. 16-7. Effort tranchant avec plusieurs câbles interrompus

3. CALCUL DU CISAILEMENT

3.1. Rappels de résistance des matériaux et de béton armé

Pour une section homogène, le cisaillement en un point de cote y est donné par la formule (fig. 16-8):

$$\tau(y) = \frac{V \cdot \mu(y)}{I \cdot b(y)} \quad (16-1)$$

où: V représente l'effort tranchant,

I le moment d'inertie total de la section par rapport à son centre de gravité G ,

$\mu(y)$ le moment statique de la partie hachurée par rapport au centre de gravité,

$b(y)$ la largeur de la section à l'ordonnée y .

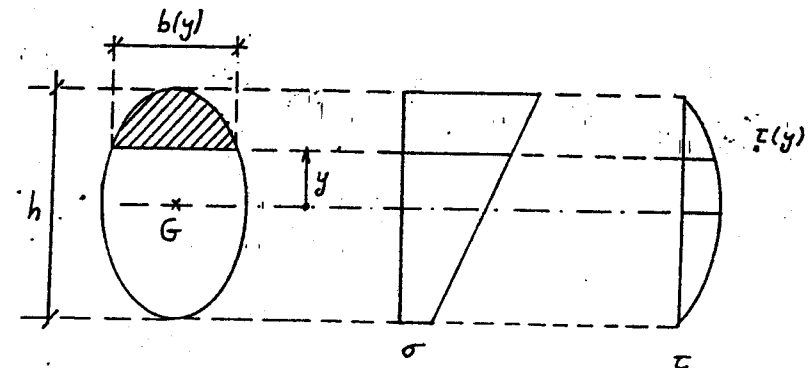


Fig. 16-8. Contraintes de compression et de cisaillement

Pour une section rectangulaire:

$$b(y) = b$$

$$\mu(y) = b \left(\frac{h}{2} - y \right) \cdot \left(\frac{h}{4} + \frac{y}{2} \right) = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

$$I = \frac{bh^3}{12}$$

soit: $\frac{6V}{bh^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$ équation d'une parabole dont le sommet (maximum de τ) est au centre de gravité: $\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{V}{bh}$.

Quelle que soit la forme de la section, le moment statique et le cisaillement sont maximum au niveau du centre de gravité (par définition de ce dernier).

En béton armé, le cisaillement à l'allure de la figure 16-9.

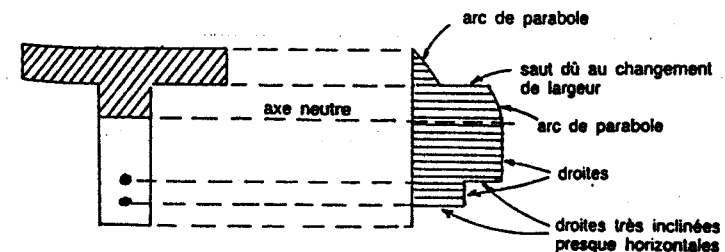


Fig. 16-9. Contrainte de cisaillement d'une poutre en T

On constate que le cisaillement est maximum et constant depuis l'axe neutre jusqu'au premier lit d'acier rencontré.

Le saut brusque à la jonction ~~de la~~ nervure n'est pas aussi franc en réalité, car la transmission des efforts de glissement ne se fait pas instantanément sur une longueur nulle mais progressivement.

3.2. Application au béton précontraint (BPEL)

Si l'on étudie le cisaillement d'une section de classe I ou II, section non fissurée, le cisaillement sera du type de la figure 16-8 en état-limite de service. Par contre en ELS, classe III, et en état-limite ultime ELU, le cisaillement sera du type de la figure 16-9.

Cependant, on ne prendra en compte que la largeur nette b_n de l'âme, c'est-à-dire déduction faite d'une partie de la gaine ou des gaines existant dans l'âme.

En effet, le cisaillement sous charge permanente (parfois le plus important) est introduit dès la mise en précontrainte donc avant injection des gaines sous l'action de la force radiale qui décolle la poutre du coffrage.

On ne peut donc prendre en compte :

- ni la section de coulis qui n'est pas encore mis en place ;
- ni la section d'acier qui n'étant pas adhérente au béton, ne participe pas en tant qu'élément interne.

Par raison de sécurité et de simplification de calcul, on ne prendra en compte que la moitié de la largeur correspondant au diamètre d'encombrement des gaines injectées pour l'ensemble des charges.

De plus, la concomitance la plus défavorable du cisaillement et de l'effort normal (σ , τ) n'ayant pas toujours lieu au centre de gravité, il est prudent pour éviter un calcul fastidieux de prendre pour b_n la largeur minimum de l'âme et de déduire le demi-diamètre d'une gaine ou de plusieurs gaines situées dans l'âme que l'on peut trouver sur une même horizontale, même si elles ne se trouvent pas au centre de gravité (fig. 16-10).

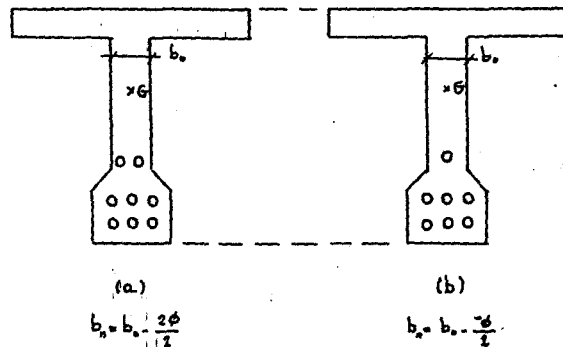


Fig. 16-10. Largeur nette

• Valeur approchée du bras de levier

Pour une section de forme quelconque, on pourra prendre pour z la valeur approchée :

$$z = \left(\frac{1 + p}{2} \right) h$$

p étant le rendement de la section.

4. THÉORIE MODERNE SUR L'EFFORT TRANCHANT

De très nombreuses études* et résultats d'essais ont dégagé des modèles de fonctionnement d'une poutre soumise à l'effort tranchant en améliorant le modèle de treillis de RITTER-MÖRSCH bien connu.

Pour bien comprendre la résistance à l'effort tranchant, il faut analyser les différents phénomènes qui rentrent en jeu.

4.1. Engrènement (Aggregate interlock)

Les fissures qui peuvent apparaître ne sont pas constituées de deux plans lisses, mais de surface non plane avec des aspérités correspondant aux grains de sable et de cailloux. Tout mouvement parallèle à la fissure est donc gêné par un blocage des granulats (fig. 16-11).

4.2. Action de goujon des aciers longitudinaux (Dowel action)

Les aciers longitudinaux ont une certaine raideur transversale sur de faibles distances correspondant à l'ouverture de la fissure. Ils participent donc à la résistance à l'effort tranchant (fig. 16-12).

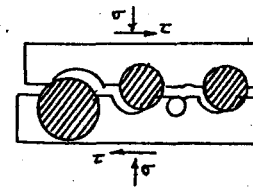


Fig. 16-11. Engrènement

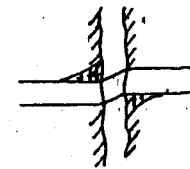


Fig. 16-12. Effet goujon

4.3. Résistance à la flexion des dents (fig. 16-13)

La partie de béton comprise entre deux fissures que nous appellerons « dent » est soumise en sa partie basse à un effort de traction différentiel longitudinal ΔF qui crée un couple de flexion dans la dent (fig. 16-14).

* Voir le bulletin d'information n° 146 du Comité Euro-International du Béton, de janvier 1982 « Shear, Torsion and Punching » — Liste de bibliographie en pages 68-69-70.

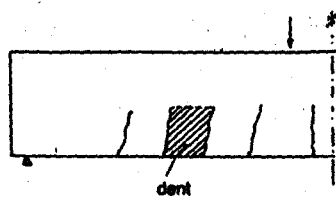


Fig. 16-13. Dent entre deux fissures

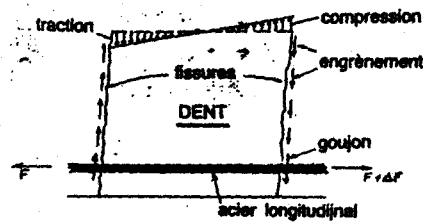


Fig. 16-14. Equilibre d'une dent

4.4. Résultats d'essais — Modèle de MALLÉE

Une poutre en béton armé ou précontraint soumise à deux charges concentrées croissantes se fissure suivant la figure 16-15.

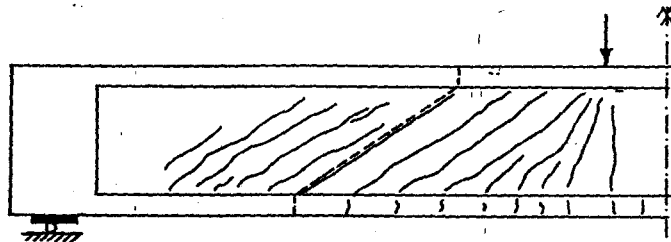


Fig. 16-15. Fissuration d'une poutre

MALLÉE propose un modèle de treillis composé de membrures comprimées de béton et de membrures tendues constituées par les aciers longitudinaux et transversaux.

Ce modèle est une adaptation de celui de RITTER-MÖRSCH aux résultats de très nombreux essais (fig. 16-16 et 16-17).

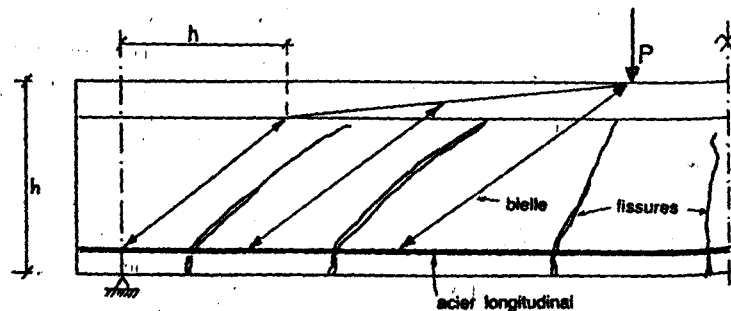


Fig. 16-16. Bielles entre fissures

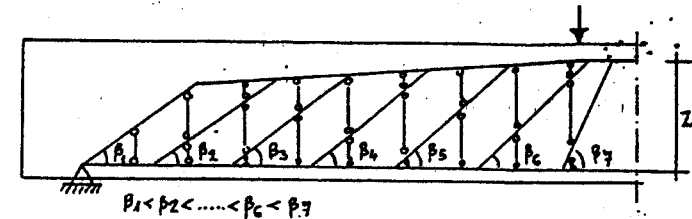


Fig. 16-17. Treillis de MALLÉE

4.5. Ensemble des actions résistantes

Les actions résistantes à l'effort tranchant sont donc (fig. 16-18):

- C_v : composante verticale de la membrure comprimée,
- V_t : composante verticale de l'effort repris par les aciers transversaux,
- E_v : composante verticale de l'action d'engrènement,
- P_v : composante verticale de la précontrainte,
- G : action de goujon des aciers passifs longitudinaux.

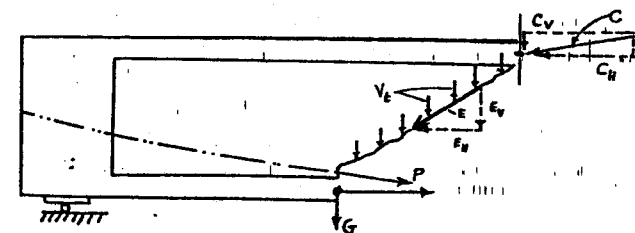


Fig. 16-18. Efforts le long d'une fissure

On constate donc que les actions:

- membrure comprimée,
- engrènement,
- goujon,

qui n'étaient pas prises en compte, pour des raisons de sécurité, le sont dorénavant dans les nouveaux règlements BAEL et BPEL par une réduction du cisaillement à prendre en compte dans le calcul des aciers transversaux.

5. RELATION ENTRE CISAILLEMENT ET CONTRAINTE NORMALE

5.1. Cercle de Mohr-Rappels

Si l'on examine l'état de contrainte dans le plan de symétrie en un point d'une poutre soumise à la flexion on a (fig. 16-19a):

— sur une facette horizontale passant par P, une contrainte normale σ_y et un cisaillement τ ;

— sur une facette verticale passant par le même point P, une contrainte normale σ_x et le même cisaillement τ changé de signe*.

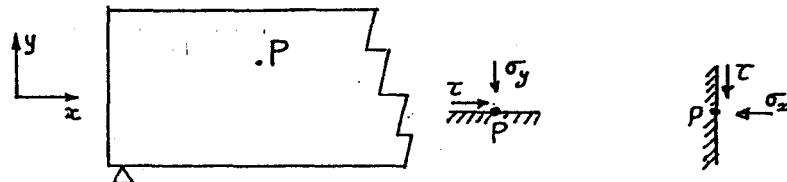


Fig. 16-19 (a). Contraintes appliquées sur une facette

On peut représenter sur un plan dit plan de Mohr les positions des points (σ, τ) représentant l'état de contrainte pour toutes les facettes pivotant autour de ce point. On obtient un cercle appelé cercle de Mohr (fig. 16-19b).

Les deux points V et H représentent l'état de contrainte sur les facettes verticale et horizontale.

Le béton étant un matériau qui résiste mal ou pas du tout** à la traction, on doit rechercher la contrainte maximum de traction et son orientation. S'il y a fissuration, ce sera perpendiculairement à cette fissure.

Le point représentatif de la facette selon la fissure sera le point T (facette perpendiculaire à la contrainte de la traction maximum).

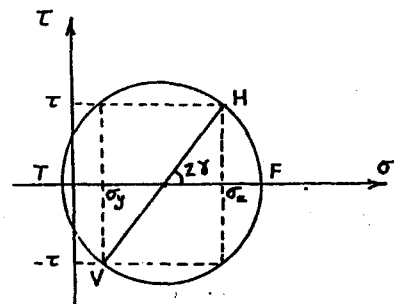


Fig. 16-19 (b). Cercle de Mohr

* Par application du théorème de CAUCHY sur l'équilibre d'un carré situé dans le plan et soumis aux contraintes normales et de cisaillement dont les résultantes doivent s'équilibrer.

** S'il a été préalablement fissuré par retrait thermique ou hydraulique par exemple.

L'angle de la fissure la plus probable avec la ligne moyenne de la poutre sera donné par (fig. 16-19b)*:

$$\operatorname{tg} 2\gamma = \frac{2\tau}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (16-2)$$

Pour le béton précontraint:

— avec précontrainte longitudinale P seule, on aura au centre de gravité:

$$\sigma_s = \frac{P}{S} = \sigma_x \quad \text{et} \quad \sigma_y = 0$$

$$\text{d'où: } \operatorname{tg} 2\gamma = \frac{2\tau}{\sigma_s} \quad (16-3)$$

— avec précontrainte longitudinale ($\sigma_x = \sigma_s$) et verticale (σ_y) c'est l'équation (16-2) qui s'applique alors. C'est le cas lorsque l'on dispose d'étriers actifs;

— avec précontrainte longitudinale P et inclinée F_t par des étriers actifs (précontraintes de pente α' on appliquera la formule (16-2) avec (fig. 16-20):

b_a = épaisseur nette de l'âme,

F_t = effort unitaire d'un câble transversal incliné de α' sur la fibre moyenne et d'espacement s' .

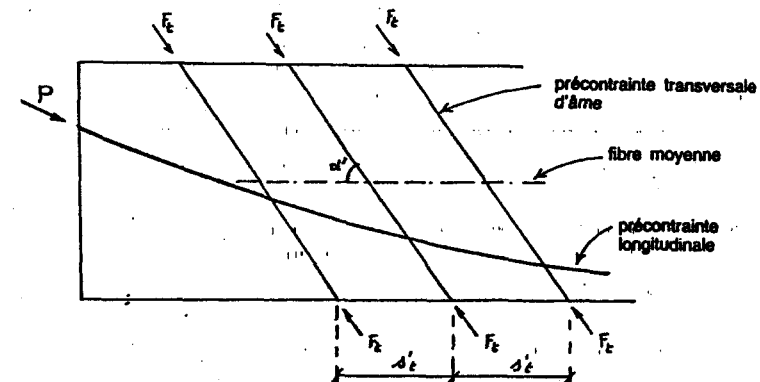


Fig. 16-20. Précontraintes longitudinale et transversale

• Avantages de la précontrainte

On constate à l'étude du cercle de Mohr que:

— l'action d'une précontrainte longitudinale $\sigma_x = \sigma_s = \frac{P}{S}$ déplace le cercle de

* C'est une propriété du cercle de Mohr, le point représentatif tourne d'un angle égal à l'opposé du double de l'angle dont tourne la facette.

Mohr existant en béton-armé (cercle de cisaillement pur centré sur l'origine) vers les σ croissants et diminue donc la contrainte de traction perpendiculaire à la fissure, donc le risque de fissuration ;

— ce déplacement du cercle de Mohr entraîne également une fissuration « couchée sur l'horizontale » ($< 45^\circ$) au lieu de la fissuration classique à 45° du béton armé, ce qui permettra de réduire les aciers d'efforts tranchant par unité de longueur ;

— la présence d'une précontrainte transversale peut entraîner une disparition de toute contrainte de traction si cela était nécessaire.

La contrainte de traction maximum vaut :

$$\sigma_t = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

et de compression :

$$\sigma_c = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

On voit que σ_t est nul pour $\tau^2 = \sigma_x \cdot \sigma_y$.

On peut donc supprimer toute contrainte de traction en appliquant une précontrainte verticale :

$$\sigma_y \geq \frac{\tau^2}{\sigma_x} \quad (16-4)$$

De toute façon, dans l'état de contrainte du point étudié, on n'a pas supprimé toute contrainte négative ou nulle. Dans le plan perpendiculaire au plan moyen, la contrainte normale est nulle et l'étude des cercles représentatifs dans le plan de Mohr montre que le cercle de Mohr du point (c'est-à-dire le cercle le plus défavorable) n'est pas le cercle (σ_t, σ_c) , mais celui qui correspond aux facettes pivotant autour de la verticale passant par G (fig. 16-21).

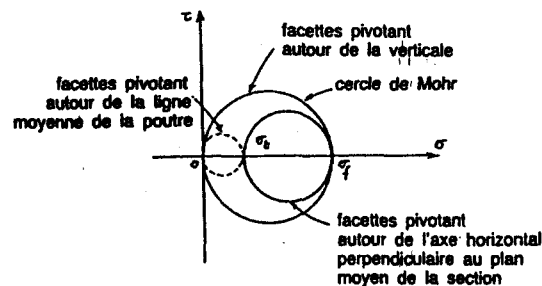


Fig. 16-21. Etat des contraintes en un point - Cercle de Mohr

5.2. Courbe intrinsèque

En représentant sur le plan de Mohr tous les cercles de Mohr pour un point d'une section, obtenus en ayant toutes les combinaisons des trois paramètres $(\sigma_x, \sigma_y, \tau)$

entraînant la rupture du béton, on obtient une famille de cercles allant de la traction simple $(\sigma_t, 0, 0)$ avec $\sigma_t < 0$, à la compression simple $(\sigma_c, 0, 0)$ avec $\sigma_c > 0$ en passant par le cisaillement simple $(0, 0, \tau)$.

L'ensemble de ces cercles détermine un espace interne dit domaine résistant, pour lequel tout système de charge $(\sigma_x, \sigma_y, \tau)$ situé à l'intérieur n'entraîne pas la rupture du béton.

La courbe limite est appelée *courbe intrinsèque* du béton (fig. 16-22).

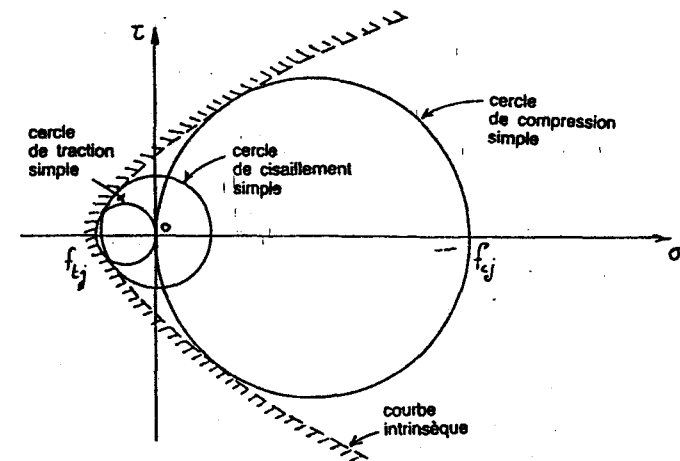


Fig. 16-22. Cercles de Mohr et courbe intrinsèque

Si l'on veut appliquer un coefficient de sécurité γ_m sur les matériaux, on déterminera une *courbe intrinsèque de sécurité* déduite de la précédente par homothétie de centre 0 et de rapport $1/\gamma_m$. Le domaine situé à l'intérieur de cette courbe est appelé *domaine intrinsèque de sécurité*.

5.3. Courbe intrinsèque de CHALOS et BETEILLE

On désigne par :

τ : le cisaillement admissible du béton correspondant à la contrainte $\sigma_x = P/S$ au centre de gravité de la section suivant la ligne moyenne de la poutre et σ_t la contrainte de compression perpendiculaire à σ_x ;

$\bar{\sigma}'$: la contrainte admissible du béton en compression simple : $\bar{\sigma}' = \frac{f_c}{\gamma_b}$

$\bar{\sigma}$: la contrainte admissible du béton en traction simple $\bar{\sigma} = \frac{f_t}{\gamma_b}$

γ_b = le coefficient de sécurité appliqué sur le béton.

La courbe intrinsèque du béton donnée par CAQUOT n'étant pas d'un usage commode*, on peut lui substituer une branche d'hyperbole. On démontre alors que le lieu des points (σ_x, τ) tels que le cercle de Mohr soit tangent à la courbe intrinsèque de sécurité, est une ellipse dite de CHALOS et BETEILLE, d'équation:

$$\tau^2 = \frac{\sigma}{\sigma_c} (\bar{\sigma} - \sigma_x - \sigma_t) (\bar{\sigma} + \sigma_x + \sigma_t) + \sigma_x \sigma_t \quad (16-5)$$

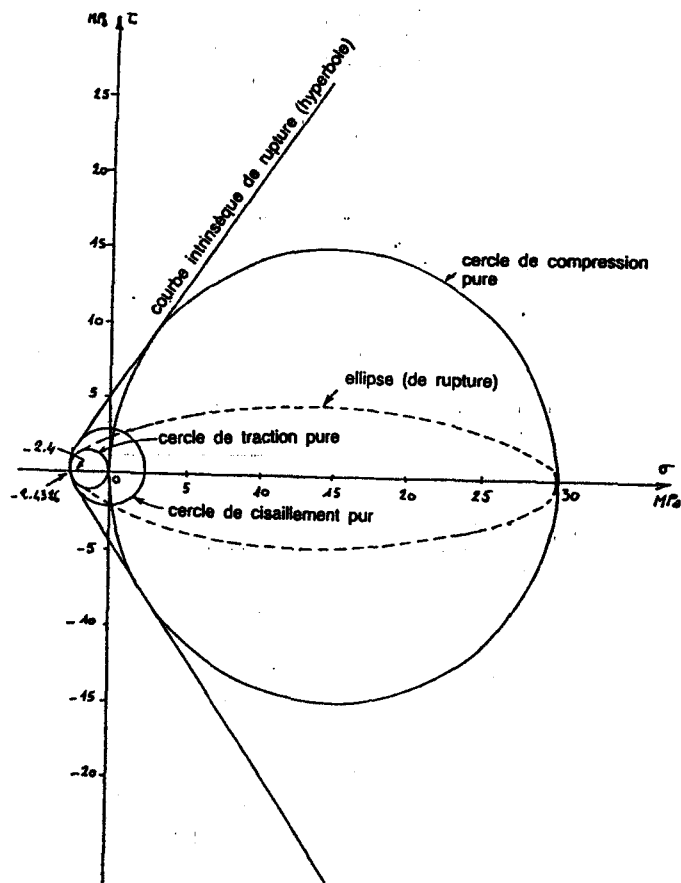


Fig. 16-23. Hyperbole et ellipse de CHALOS et BETEILLE $f_{c28} = 30 \text{ MPa}$

* Définie comme enveloppe de cercles paramétrés.

En l'absence de contrainte σ_t , l'ellipse obtenue est centrée sur l'axe des abscisses (fig. 16-23).

5.4. Cas particulier de la précontrainte verticale ou oblique

On ne traite que de l'action de câbles verticaux ou inclinés agissant indépendamment des câbles longitudinaux sans prendre en compte la composante verticale des câbles longitudinaux relevés.

• Ecartement maximum des étriers actifs

Compte tenu de la diffusion de la précontrainte que l'on peut admettre se réaliser avec une pente 2/3 à partir de l'ancrage, l'âme peut être considérée comme uniformément comprimée qu'à partir d'une distance verticale λ à partir du sommet de la poutre (fig. 16-24) que si les étriers ne sont pas plus écartés d'une distance s telle que les cônes de demi-angle au sommet $\text{Arctg}(2/3)$ se recoupent d'un étrier à l'autre. Par sécurité, il est prudent de considérer cette longueur λ comme étant relative au point le plus haut de l'âme dans son épaisseur la plus faible.

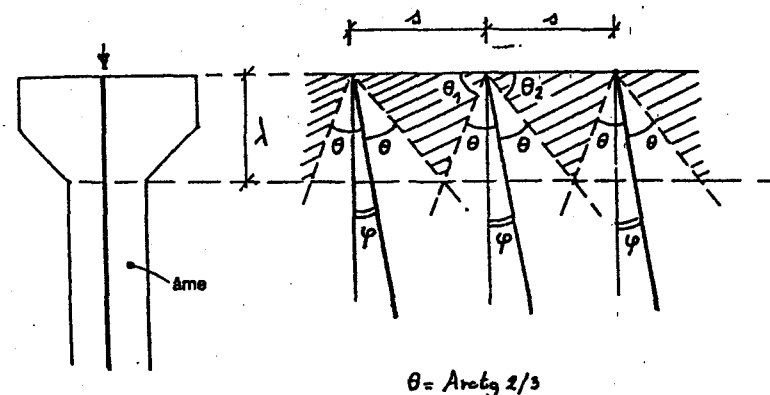


Fig. 16-24. Zones de béton hors du champ d'application de la précontrainte transversale

Pour trouver la relation entre s et λ , écrivons:

$$s = \lambda(\text{tg } \theta_1 + \text{tg } \theta_2)$$

avec: $\theta_1 = \theta + \varphi$

$\theta_2 = \theta - \varphi$

soit: $\text{tg } \theta_1 + \text{tg } \theta_2 = \text{tg } (\theta + \varphi) + \text{tg } (\theta - \varphi)$

$$\begin{aligned} &= \frac{\text{tg } \theta + \text{tg } \varphi}{1 - \text{tg } \theta \text{tg } \varphi} + \frac{\text{tg } \theta - \text{tg } \varphi}{1 + \text{tg } \theta \text{tg } \varphi} \\ &= \frac{2 \text{tg } \theta}{1 - \sin^2 \varphi (1 + \text{tg }^2 \theta)} \end{aligned}$$

avec $\tan \theta = 2/3$ on trouve :

$$\frac{s}{\lambda} = \frac{12}{9 - 13 \sin^2 \varphi}$$

Pour des étriers verticaux, l'espacement s doit être inférieur à $1,33 \lambda$, ce qui est pénalisant pour des poutres sans gousset.

Pour pouvoir prendre en compte la contrainte verticale due aux câbles relevés, on voit que la condition ci-dessus n'est pratiquement jamais satisfaite...

Le relevage des câbles ne sera utile que pour la réduction de l'effort tranchant $P \sin \alpha$.

• Avantages et inconvénients de la précontrainte transversale d'âme

Comme avantage, nous voyons la possibilité d'augmenter la contrainte admissible de cisaillement de l'âme et de réduire le risque de fissuration

Par contre, ce n'est intéressant que pour les poutres de grande hauteur, sinon le coût des ancrages est hors de proportion avec celui des fils (ou torons). On peut être amené à avoir des étriers très rapprochés. C'est une solution coûteuse.

6. DISPOSITIONS RÉGLEMENTAIRES EN ÉTAT-LIMITE DE SERVICE: ELS

6.1. Notations pour des sections perpendiculaires à l'axe de la poutre)

σ_x : contrainte normale de la section au niveau de calcul, évaluée à partir de la section nette de la poutre;

σ_t : contrainte normale transversale agissant sur la facette parallèle à la fibre moyenne de la poutre évaluée avec la largeur nette b_n (b_n = demi-diamètre des gaines);

τ : contrainte de cisaillement au niveau de calcul, évaluée à partir de l'épaisseur b_n ;

F_t : force de traction unitaire de la précontrainte transversale si elle existe — inclinée de α' sur la fibre moyenne (alors que φ dans l'article précédent représentait l'angle avec la verticale).

Pour l'évaluation de F_t , on prendra en compte, par prudence, un glissement à l'ancrage majoré de 2 mm ou de 50 %, si c'est plus défavorable dans le calcul des pertes;

s'_t : écartement des étriers actifs (F_t) parallèlement à l'axe;

σ : précontrainte normale de la section due aux seules actions extérieures et à la précontrainte longitudinale (positive pour une compression) (fig. 16-25).

L'effort tranchant

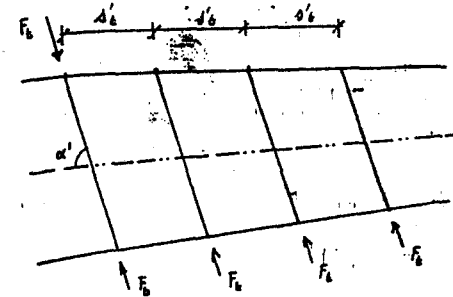
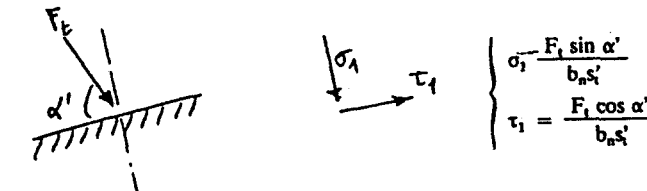


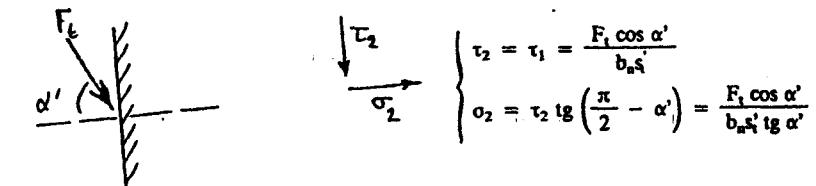
Fig. 16-25. Etriers actifs

L'équilibre des contraintes sur deux facettes perpendiculaires donne:

• Facette parallèle à l'axe



• Facette perpendiculaire à l'axe



6.2. Contraintes

Elles deviennent:

$$\sigma_x = \sigma + \frac{F_t}{b_n s'_t} \cdot \frac{\cos \alpha'}{\tan \alpha'}$$

$$\sigma_t = \frac{F_t}{b_n s'_t} \sin \alpha'$$

$$\tau = \tau_{red} - \frac{F_t}{b_n s'_t} \cos \alpha'$$

Elles sont calculées, pour les âmes d'épaisseur constante, au niveau du centre de gravité de la section nette de béton seul supposé non fissuré avec l'épaisseur nette b_n minimale de l'âme.

6.3. Contraintes admissibles

Les essais effectués sur des poutres précontraintes soumises à des efforts de cisaillement ont mis en évidence l'existence de deux modes de rupture du béton :

— la première par fissuration pour laquelle la contrainte de cisaillement admissible est donnée par :

$$\bar{\tau}_1 = \sigma_x \sigma_1 + 0,4 f_{ij} (f_{ij} + \sigma_x + \sigma_1) \quad (16-6)$$

— la deuxième par compression-cisaillement (donc en relation avec le cercle de Mohr) pour laquelle le cisaillement admissible est donné par :

$$\bar{\tau}_2 = \sigma_x \sigma_1 + 2 \frac{f_{ij}}{f_{cj}} (0,6 f_{cj} - \sigma_x - \sigma_1) (f_{ij} + \sigma_x + \sigma_1) \quad (16-7)$$

La seconde formule est rarement prépondérante et n'est utilisée que dans le cas d'éléments soumis à de fortes compressions longitudinales (si $\sigma_x + \sigma_1 > 0,4 f_{cj}$)

avec :

$$\bar{\tau} = \text{Min}(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2)$$

En cas de traction dans le béton, on appliquera la première formule avec $\sigma_x = 0$ soit : $\bar{\tau} = 0,4 f_{ij}(f_{ij} + \sigma_1)$

Pour une poutre sans étriers actifs, ces formules deviennent :

$$\bar{\tau}_1 = 0,4 f_{ij}(f_{ij} + \sigma_x) \quad (16-8)$$

$$\bar{\tau}_2 = \frac{2 f_{ij}}{f_{cj}} (0,6 f_{cj} - \sigma_x) (f_{ij} + \sigma_x) \quad (16-9)$$

Une comparaison entre les formules de Chalot et Beteille (16-5) et celle du BPEL (16-8) et (16-9), montre les aménagements apportés aux relations $(\sigma, \bar{\tau})$ par suite des résultats d'essais (fig. 16-27).

REMARQUE :

La formule (16-6) correspondant à la condition de non-rupture $\tau_1^2 \leq \sigma_x \sigma_1 + f_{ij}(f_{ij} + \sigma_x + \sigma_1)$ est équivalente à $\sigma_1 \geq -f_{ij}$ (contrainte principale ne dépassant pas la contrainte de rupture de traction du béton). En effet sur le cercle de Mohr (fig. 16-26),

on a : $\sigma_1 + \sigma_3 = \sigma_x + \sigma_1$

et : $\sigma_1 \sigma_3 = \sigma_x \sigma_1 - \tau^2$

d'où : $\tau^2 - \sigma_x \sigma_1 \leq f_{ij}(f_{ij} + \sigma_1 + \sigma_3)$

$-\sigma_1 \sigma_3 \leq f_{ij}(f_{ij} + \sigma_1 + \sigma_3)$

$f_{ij} + f_{ij}\sigma_1 + f_{ij}\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3 \geq 0$

$(f_{ij} + \sigma_3)(f_{ij} + \sigma_1) \geq 0$

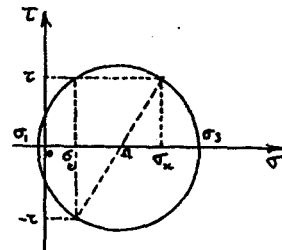


Fig. 16-26

L'effort tranchant

Le premier facteur étant toujours positif, on est ramené à vérifier : $f_{ij} + \sigma_1 \geq 0$ soit $\sigma_1 \geq -f_{ij}$.

La formule (16-7) découle de l'équation de l'ellipse de Chalot et Beteille avec l'introduction d'un coefficient 2 dû aux résultats expérimentaux.

Les coefficients de sécurité ont été appliqués avec :

— la valeur 0,6 sur la compression pour se raccorder avec le coefficient 0,6 des contraintes limites sur la fibre la plus comprimée (sous combinaisons rares ou fréquentes) ;

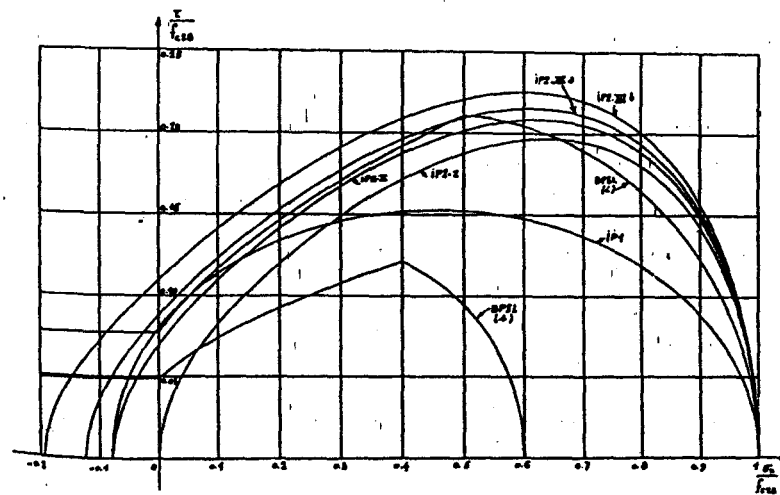
— la valeur $\sqrt{0,4} = 1/1,58$ sur le cisaillement pur, pour une contrainte $\sigma_x = 0$.

On trouvera sur la figure 16-27 les deux courbes représentatives du cisaillement limite pour un béton $f_{c28} = 30$ MPa : BPEL (i) pour le domaine d'intégrité du béton et BPEL (s) pour le domaine de sécurité.

La figure 16-28 montre l'accroissement du cisaillement limite du domaine d'intégrité en fonction de l'augmentation de la contrainte de précontrainte transversale σ_1 .

Enfin sur la figure 16-29, on remarquera que les paraboles de cisaillement τ_1, τ_2, τ_3 calculées au centre de gravité d'une section rectangulaire coupent la courbe limite du domaine de sécurité dans les parties de la section moins comprimées qu'au centre de gravité.

τ_1 correspondant au cas où les fibres extrêmes de la section rectangulaire sont comprimées à $0,5 f_{c28}$ et $0,1 f_{c28}$, τ_2 à des contraintes extrêmes $0,6 f_{c28}$ et $-f_{c28}$, τ_3 à des contraintes extrêmes $0,5 f_{c28}$ et 0. Bien que ce dépassement puisse atteindre 10 %, on convient de ne pas en tenir compte.



BPEL (i) = domaine d'intégrité du béton
BPEL (s) = domaine de sécurité du béton
 $f_{c28} = 30$ MPa

Fig. 16-27

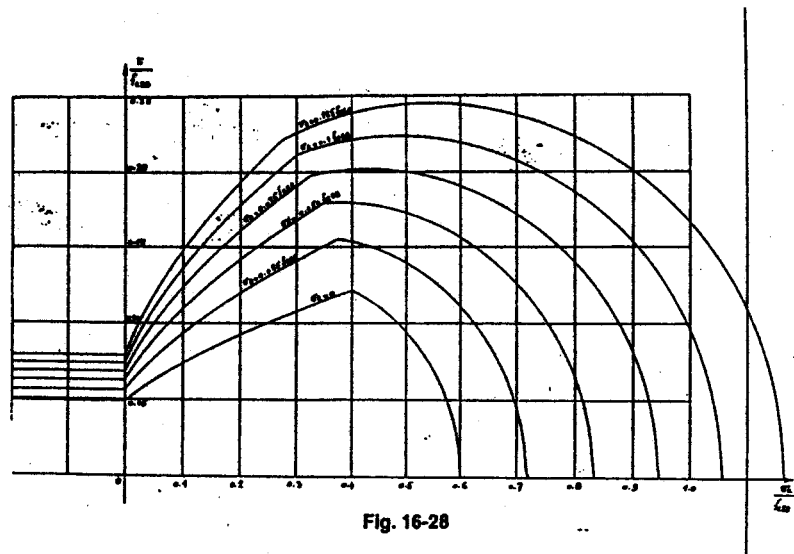


Fig. 16-28

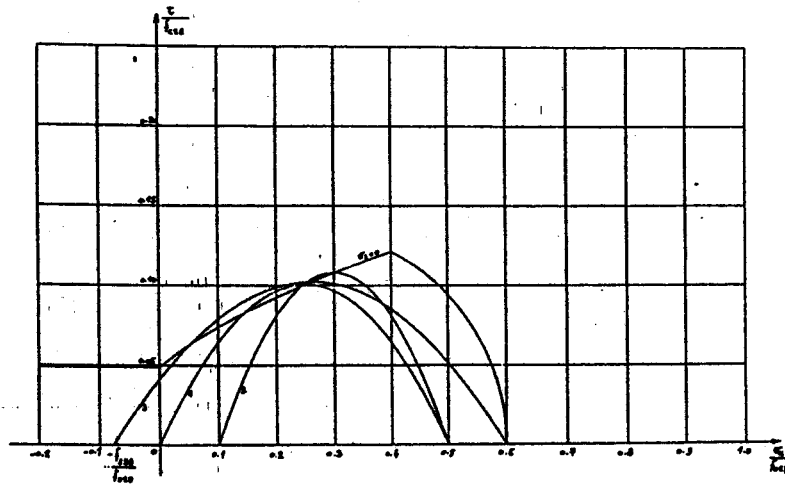


Fig. 16-29

6.4. Vérification complémentaire en classe III

On doit en classe III s'assurer de l'entraînement correct des armatures par adhérence avec le béton en vérifiant que la contrainte d'adhérence ne dépasse pas la valeur: $0,7\psi_s f_{tj}$.

7. DISPOSITIONS RÉGLEMENTAIRES EN ÉTATS-LIMITES ULTIMES

7.1. Notations

En plus des notations de l'ELS ci-dessus, nous retiendrons:

A_t = somme des aires droites des aciers d'un cours d'armatures passives transversales,

s_t = espacement de ces armatures mesuré suivant la fibre moyenne,

f_e = limite élastique des aciers passifs,

α = inclinaison de ces aciers avec la fibre moyenne de la poutre ($45^\circ < \alpha < 90^\circ$),

F_{tu} = effort résistant des aciers d'un cours d'armatures actives transversales ($= F_{prg}/\gamma_p$),

σ_u = contrainte ultime de la section droite au point calculé.

7.2. Contraintes

$$\sigma_{xu} = \sigma_u + \frac{F_t}{b_n s_t'} \cdot \frac{\cos \alpha'}{\tan \alpha'}$$

$$\sigma_{tu} = \frac{F_t}{b_n s_t'} \cdot \sin \alpha'$$

$$\tau_u = \tau_{red} \cdot u - \frac{F_t}{b_n s_t'} \cdot \cos \alpha'$$

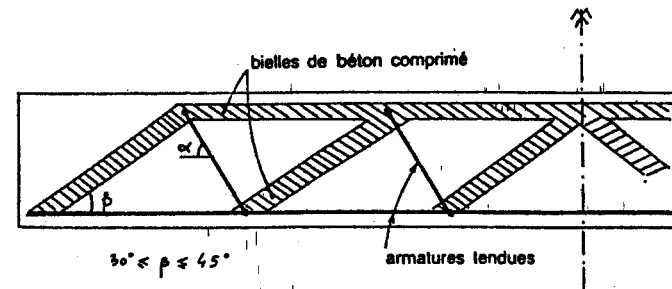


Fig. 16-30. Modèle du treillis

L'angle d'inclinaison β_u des bielles découpées par les fissures, suivant la théorie de treillis (fig. 16-30) évalué par rapport à la fibre moyenne de la poutre au niveau du centre de gravité de la section est tel que :

$$\operatorname{tg} 2\beta_u = \frac{2\tau_u}{\sigma_{xu} - \sigma_{yu}}$$

en limitant la valeur β_u à 30° ($\beta_u < 30^\circ$).

7.3. Justification des armatures transversales

Si, compte tenu de la fissuration du béton, il n'est pas tenu compte de sa résistance au cisaillement en état-limite ultime, l'effort tranchant ultime V_u (réduit) sera équilibré par les seuls aciers transversaux actifs et passifs.

- Calcul de l'effort tranchant résistant V d'un acier A_t , espacé de s , incliné de α sur la fibre moyenne (que nous supposons horizontale dans notre démonstration) et pour une inclinaison β_u avec l'horizontale des bielles comprimées.

L'effort résistant des aciers vaut (fig. 16-31) : $n \cdot A_t \cdot \sigma_s$

avec : n = nombre de cours de cadres ou étriers traversant la fissure.

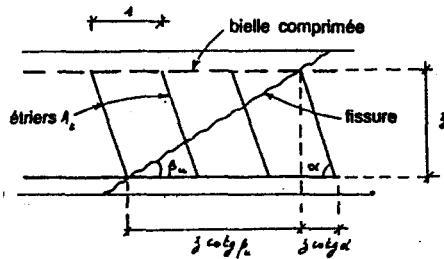


Fig. 16-31. Reprise de l'effort tranchant par les étriers

$$n = \frac{z(\cotg \beta_u + \cotg \alpha)}{s}$$

La projection de cet effort résistant sur la verticale équilibre l'effort tranchant V , soit :

$$V = n \cdot A_t \cdot \sigma_s \sin \alpha$$

$$V = \frac{A_t \cdot \sigma_s z}{s} \sin \alpha (\cotg \beta_u + \cotg \alpha)$$

$$\text{or : } (\cotg \beta_u + \cotg \alpha) \sin \alpha = \frac{\sin (\alpha + \beta_u)}{\sin \beta_u}$$

$$\text{d'où : } V = \frac{A_t}{s} z \sigma_s \frac{\sin (\alpha + \beta_u)}{\sin \beta_u}$$

L'effort tranchant

- Application aux aciers passifs avec $\alpha_s = f_t / \gamma_s$:

$$V_1 = \frac{A_t}{s_t} \cdot z \cdot \frac{f_t}{\gamma_s} \cdot \frac{\sin (\alpha + \beta_u)}{\sin \beta_u}$$

- Application aux aciers actifs d'effort résistant F_{tu} en remplaçant $A_t \cdot \sigma_s$ par F_{tu} :

$$V_2 = \frac{F_{tu}}{s_t} \cdot z \cdot \frac{\sin (\alpha' + \beta_u)}{\sin \beta_u}$$

d'où : $V_u \leq V_1 + V_2$ et en divisant par $b_n z$ (car, $\tau_u = \frac{V_u}{b_n z}$).

Il vient :

$$\tau_u \leq \bar{\tau}_u = \frac{A_t}{b_n s_t} \cdot \frac{f_t}{\gamma_s} \cdot \frac{\sin (\alpha + \beta_u)}{\sin \beta_u} + \frac{F_{tu}}{b_n s_t} \cdot \frac{\sin (\alpha' + \beta_u)}{\sin \beta_u}$$

avec : $\gamma_s = 1,15$

$$F_{tu} = \frac{F_{pre}}{\gamma_p}$$

REMARQUE 1 :

Si la section n'est pas entièrement fissurée, on pourra prendre en compte une certaine résistance au cisaillement de la membrure comprimée en déduisant forfaitairement de τ_u la valeur $f_{tj}/3$ d'où la formule du BPEL :

$$\tau_u - f_{tj}/3 \leq \frac{A_t}{b_n s_t} \cdot \frac{f_t}{\gamma_s} \cdot \frac{\sin (\alpha + \beta_u)}{\sin \beta_u} + \frac{F_{tu}}{b_n s_t} \cdot \frac{\sin (\alpha' + \beta_u)}{\sin \beta_u} \quad (16-10)$$

Dans le cas courant d'armatures passives perpendiculaires à la fibre moyenne ($\alpha = \pi/2$), on trouve :

$$\frac{A_t}{b_n s_t} \cdot \frac{f_t}{\gamma_s} \geq (\tau_u - f_{tj}/3) \operatorname{tg} \beta_u \quad (16-11)$$

REMARQUE 2 :

En cas de reprise de bétonnage, on prendra $\beta_u = 45^\circ$ dans toutes les formules précédentes et on ne retranchera pas la valeur $f_{tj}/3$ au cisaillement*.

- Pourcentage minimum d'armatures

Pour éviter une rupture fragile due à l'effort tranchant, on disposera un minimum d'armatures transversales de façon à satisfaire la condition :

$$\frac{A_t}{b_n s_t} \cdot \frac{f_t}{\gamma_s} \cdot \sin \alpha + \frac{F_{tu}}{b_n \cdot s_t} \cdot \sin \alpha' \geq 0,6 \text{ MPa} \quad (16-12)$$

* Une reprise de bétonnage comportant des indentations dont la saillie atteint au moins 5 mm, autorise la soustraction du terme $f_{tj}/3$ au cisaillement τ_u .

Pour les étriers passifs verticaux, cette formule devient :

$$\frac{A_t}{s_t} \geq \frac{0,6b_n \gamma_b}{f_c} \quad (16-13)$$

• *Ecartement maximum*

Pour les armatures actives, on vérifiera que s_t' est inférieur à 0,8 h (hauteur totale de la poutre) et pour les armatures passives :

$$s_t' \leq \text{Min} (0,8 h ; 3 b_o ; 1 \text{ m})$$

avec b_o désignant l'épaisseur brute minimum de l'âme.

Ces conditions permettent d'éviter dans tous les cas qu'une fissure ne soit pas traversée par des armatures (fig. 16-32).

7.4. Justification de la bielle de béton

La contrainte de compression de la bielle inclinée de béton ne doit pas dépasser les 2/3 de la contrainte admissible ultime du béton :

$$\frac{0,85 f_{ci}}{\gamma_b} \text{ avec : } \gamma_b = 1,5, \text{ soit : } \sigma_b \leq 0,378 f_{ci}$$

• *Calcul de la contrainte dans la bielle σ_b*

Soit F_b l'effort de compression dans la bielle pour une unité de longueur de la poutre, la contrainte σ_b vaut (fig. 16-32) :

$$\sigma_b = \frac{F_b}{b_n \cdot \sin \beta_u}$$

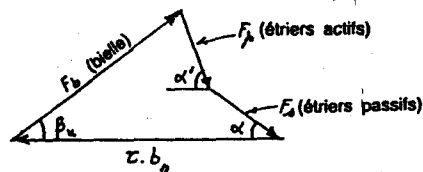


Fig. 16-32. Equilibre bielle - étriers actifs et étriers passifs

L'équilibre des efforts au nœud du treillis se traduit en projection sur l'axe vertical par :

$$F_b \sin \beta_u = F_p \sin \alpha' + F_s \sin \alpha$$

avec : F_p = effort de traction des armatures actives pour une longueur unité de poutre :

$$F_p = \frac{F_{tu}}{s_t'}$$

$$\text{de même : } F_s = A_t \cdot \frac{f_c}{\gamma_s} \cdot \frac{1}{s_t} \text{ (pour 1 mètre)}$$

$$\text{d'où : } \sigma_b b_n \sin^2 \beta_u = \frac{F_{tu}}{s_t'} \sin \alpha' + \frac{A_t}{s_t} \cdot \frac{f_c}{\gamma_s} \cdot \sin \alpha$$

$$\text{et : } \sigma_b = \frac{1}{b_n \sin^2 \beta_u} \left(\frac{F_{tu}}{s_t'} \sin \alpha' + \frac{A_t}{s_t} \cdot \frac{f_c}{\gamma_s} \cdot \sin \alpha \right) \leq \frac{0,85 f_{ci}}{1,5 \gamma_b} \quad (16-14)$$

Le BPEL donne une vérification approchée en cas d'étriers perpendiculaires à la fibre moyenne qui est :

$$\tau_u \leq \frac{f_{ci}}{6} \quad (16-15)$$

que l'on retrouve de la façon suivante : avec $\alpha = \alpha' = 90^\circ$, on trouve (formule 16-10)

$$\tau_u = \frac{\cotg \beta_u}{b_n} \left(\frac{A_t}{s_t} \cdot \frac{f_c}{\gamma_s} + \frac{F_{tu}}{s_t'} \right)$$

$$\text{or : } \sigma_b = \frac{1}{b_n \sin^2 \beta_u} \left(\frac{A_t}{s_t} \cdot \frac{f_c}{\gamma_s} + \frac{F_{tu}}{s_t'} \right) \text{ d'après (16-14)}$$

$$\text{d'où : } \sigma_b = \frac{\tau_u}{\cos \beta_u \sin \beta_u} \leq \frac{0,85 f_{ci}}{1,5 \gamma_b} \text{ ou } \tau_u < \frac{f_{ci} \sin 2\beta_u}{5,29}$$

avec la valeur minimum limitée de $\beta_u = 30^\circ$ et $\gamma_b = 1,5$, on obtient :

$$\tau_u \leq \frac{1}{5,29} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot f_{ci} = \frac{f_{ci}}{6,11}$$

REMARQUE :

Quand les efforts de cisaillement sont susceptibles de changer de sens, on adoptera des étriers perpendiculaires à la fibre moyenne.

8. APPLICATION NUMÉRIQUE AVEC ÉTRIERS PASSIFS

Soit la travée isostatique de la figure 16-33 précontrainte par un câble parabolique dont les caractéristiques sont les suivantes :

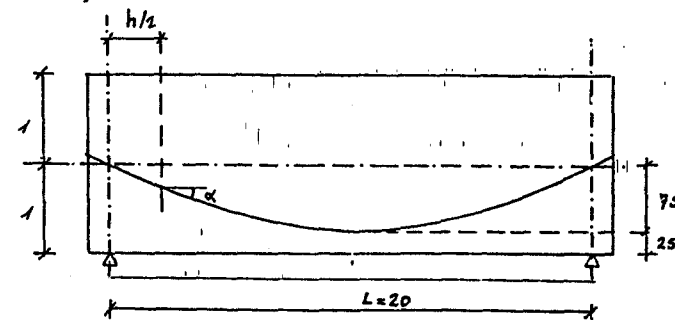


Fig. 16-33. Poutre isostatique à câble parabolique

La section est représentée sur la figure 16-34. Elle est armée transversalement par des étriers passifs verticaux.

Données: poutre isostatique

- charges permanentes $G = 51 \text{ kN/m}$
- charges d'exploitation $Q = 148 \text{ kN/m}$
- béton $f_{cj} = 30 \text{ MPa}$, $f_{tj} = 2,4 \text{ MPa}$
- précontrainte $P = 7,45 \text{ MN}$
- bras de levier $z = \frac{I}{\mu} = \frac{0,430}{0,290}$
 $= 1,484 \text{ m}$

$b_n = 0,28 \text{ m}$ (2 câbles de diamètre extérieur de gâines de 70 mm):

$$b_n = b_o - \frac{n\phi}{2} = 0,35 - \frac{2 \times 0,07}{2} = 0,28 \text{ m}.$$

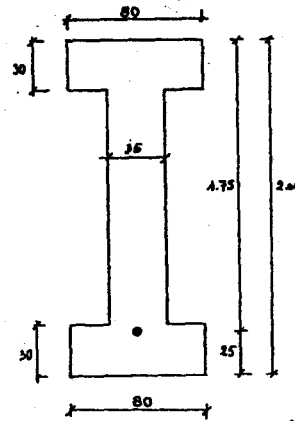


Fig. 16-34. Section double T

L'effort tranchant à une distance $\frac{h}{2}$ de l'appui vaut:

$$V_G = 51 \times \left(\frac{20}{2} - 1 \right) = 459 \text{ kN} = 0,459 \text{ MN}$$

$$V_Q = 148 \times 9 = 1\,332 = 1,332 \text{ MN}$$

L'inclinaison du câble à l'abscisse $\frac{h}{2}$ étant de $7^\circ 69'$ et $\sin \alpha = 0,1338$

• **Calcul de l'effort tranchant réduit en ELS**

$$V_{r1} = V_G + V_Q - P \sin \alpha = 0,794 \text{ MN}$$

$$V_{r2} = V_G - P \sin \alpha = -0,538 \text{ MN}$$

Le changement de signe possible de V_r justifie l'emploi d'étriers verticaux.

• **Calcul du cisaillement ELS**

$$\tau = \frac{0,794}{0,28 \times 1,484} = 1,91 \text{ MPa}.$$

La contrainte de compression au centre de gravité du béton vaut:

$$\sigma_x = \frac{P}{S} = \frac{7,45}{0,97} = 7,68 \text{ MPa}.$$

La vérification de la contrainte de cisaillement s'écrit:

$$\tau \leq \text{Min}(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2)$$

$$\text{avec: } \bar{\tau}_1 = 0,4 f_{tj} (f_{tj} + \sigma_x) = 0,4 \times 2,4 (2,4 + 7,68) = 3,11^2.$$

Comme $\sigma_x = 7,68 \text{ MPa}$ est inférieur à $0,4 f_{cj} = 12 \text{ MPa}$, on a: $\bar{\tau}_1 < \bar{\tau}_2$

d'où: $\bar{\tau} = 3,11 > \tau = 1,91 \text{ MPa}$

• **Calcul de l'effort tranchant ultime**

$$V_{ru} = 1,35 V_G + 1,5 V_Q - P \sin \alpha = 1,621 \text{ MN}$$

$$V'_{ru} = V_{r2} = -0,538 \text{ MN}$$

d'où le cisaillement ultime: $\tau_u = \frac{1,621}{0,28 \times 1,484} = 3,90 \text{ MPa}.$

L'inclinaison des bielles est telle que: $\text{tg } 2\beta_u = \frac{2\tau_u}{\sigma_{xu}}$

avec: $\sigma_{xu} = \frac{P}{S} = 7,68'$ (il n'y a pas de surtension sur appui)

$$\text{tg } 2\beta_u = \frac{2 \times 3,90}{7,68} = 1,016$$

$$\beta_u = 22^\circ,7 \text{ limité à } 30^\circ$$

$$\text{tg } \beta_u = \text{tg } 30^\circ = 0,577$$

• **Détermination des armatures verticales d'après l'équation (16-11):**

$$\frac{A_t}{b_n s_t} \cdot \frac{f_t}{\gamma_s} \geq (\tau_u - f_{tj}/3) \text{ tg } \beta_u$$

la poutre étant coulée sans reprise de bétonnage,

$$\frac{A_t}{0,28 s_t} \cdot \frac{400}{1,15} \geq (3,90 - 2,4/3) 0,577$$

$$\text{soit: } \frac{A_t}{s_t} \geq 14,41 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{m} = 14,41 \text{ cm}^2/\text{m}$$

• **Le pourcentage minimum à disposer est donné par l'équation (16-13):**

$$\frac{A_t}{s_t} \geq 0,6 \frac{b_n \gamma_s}{f_t}$$

$$\text{soit: } \left(\frac{A_t}{s_t} \right)_{\min} = \frac{0,6 \times 1,15 \times 0,28}{400} \times 10^4 = 4,83 \text{ cm}^2/\text{m}.$$

Nous retiendrons donc un cadre HA 12 avec un écartement de 0,15 m à l'appui et sur une longueur $h/2 = 1 \text{ m}$ et un espacement $\frac{2 \times 1,13}{4,83} = 0,45$ à mi-travée.

• **L'écartement maximum des cadres est de:**

Min $(0,8h; 3h_o; 1) = \text{Min } (1,6; 1,05; 1) = 1 \text{ m}$ ce qui est vérifié.

La justification de la compression de la bielle de béton s'écrit par la formule approchée:

$$\tau_u = 3,90 \leq \frac{f_{ct}}{6} = \frac{30}{6} = 5 \text{ MPa ce qui est vérifié.}$$

9. APPLICATION NUMÉRIQUE POUR ÉTRIERS ACTIFS

Soit une poutre-caisson dont les caractéristiques géométriques sont précisées sur la figure 16-35.

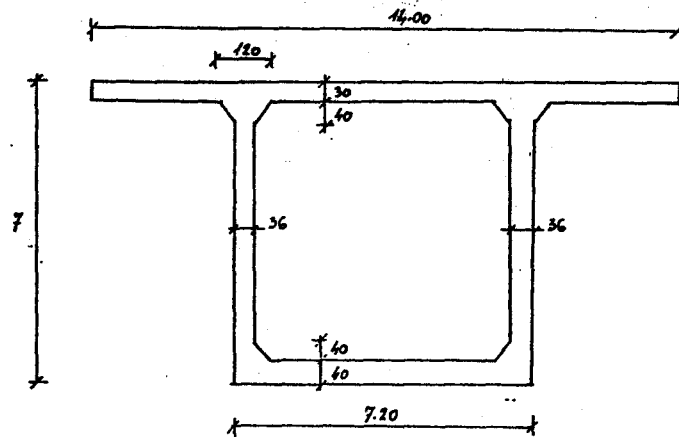


Fig. 16-35. Poutre-caisson

Les données sont les suivantes:

$$f_{ct} = 35 \text{ MPa}, f_{ct} = 2,7 \text{ MPa}$$

$$V_G = 8,88 \text{ MN}$$

$$V_Q = 2,17 \text{ MN}$$

$$P \sin \alpha = 0 \text{ (câbles de continuité horizontaux)}$$

$$z = 5,95 \text{ m}$$

$$\sigma_x = 5,92 \text{ MPa}$$

$$b_n = 2 \times 0,27 \text{ m } (\varnothing_s \text{ longitudinaux} = 90 \text{ mm})$$

Le cisaillement en état-limite de service vaut:

$$\tau = \frac{V_G + V_Q - P \sin \alpha}{b_n z} = \frac{8,88 + 2,17 - 0}{5,95 \times 0,54} = 3,44 \text{ MPa}$$

Le cisaillement admissible vaut $\bar{\tau} = \text{Min}(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2)$

$$\text{avec: } \bar{\tau}_1 = 0,4 f_{ij} (f_{ij} + \sigma_x) = 3,05^2$$

$$\bar{\tau} = \bar{\tau}_1 \quad \text{car } \sigma_x + \sigma_i = 5,92 < 0,4 f_{ij} = 14 \text{ MPa}$$

$$\bar{\tau} = 3,05 \text{ MPa} < \tau = 3,44 \text{ MPa.}$$

Le cisaillement de l'âme est inadmissible. Nous pouvons:

- soit augmenter l'épaisseur de l'âme,
- soit disposer des étriers actifs.

Si nous adoptons la deuxième solution avec des étriers verticaux nous devons introduire une précontrainte verticale σ_i telle que:

$$\bar{\tau}_1 = 3,44 \text{ MPa} \quad \text{soit d'après l'équation (16-6):}$$

$$\bar{\tau}_1^2 = \sigma_x \sigma_i + 0,4 f_{ij} (f_{ij} + \sigma_x + \sigma_i) = 3,44^2$$

$$5,92 \sigma_i + 1,08 (2,7 + 5,92 + \sigma_i) = 11,834$$

d'où:

$$\sigma_i = 0,36 \text{ MPa}$$

La deuxième inéquation du cisaillement est vérifiée car:

$$\sigma_x + \sigma_i = 5,92 + 0,36 < 0,4 f_{ij} = 14 \text{ MPa.}$$

La contrainte de 0,36 MPa est obtenue pour un effort par unité de longueur de poutre et par âme: $\frac{F_t}{s} = b_n \sigma_i = \frac{0,54}{2} \times 0,36 = 0,096 \text{ MN}$

Pour s'assurer de l'efficacité de la précontrainte verticale, sur toute la partie de l'âme de plus faible épaisseur (0,40 m) nous devons respecter un écartement s_i maximum de (cf. § 5-4 ci-dessus)

$$\frac{12\lambda}{9 - 13 \sin^2 \varphi}$$

où λ est la distance de la fibre supérieure au point où l'âme a son épaisseur minimum (au pied du gousset) (fig. 16-36).

Soit: $\lambda = 0,70 \text{ m}$

et: φ = inclinaison de l'étrier actif sur la verticale

$$\varphi = 0$$

d'où:

$$s_i \leq \frac{12 \times 0,7}{9} = 0,933 \text{ m, valeur}$$

très inférieure à $0,8h = 5,60 \text{ m}$ (distance minimum à respecter).

L'unité utilisée aura donc une puissance maximum de: $0,097 \times 0,933 = 0,09 \text{ MN}$, ce que nous pouvons obtenir avec des mono-torons T 13 de 93 mm^2 disposés dans des gaines plastiques graissées.

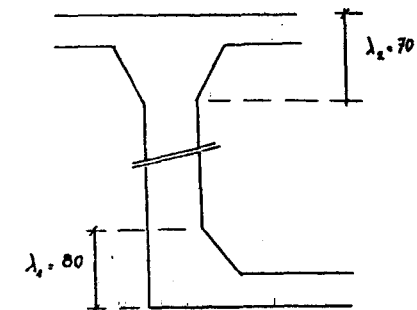


Fig. 16-36. Hauteur des goussets

9.1. Calcul de pertes sur étriers actifs

Acier TBR, $F_{peg} = 154 \text{ kN}$, $F_{prg} = 173,6 \text{ kN}$:

— force maximale sous ancrage $138,6 \text{ kN}$ ($0,90 F_{peg}$; $0,80 F_{prg}$);

— recul à l'ancrage 6 mm ;

— $\rho_{1000} = 2,5$;

— $\varphi = 0,0014$ (câble graissé).

9.1.1. Frottement

$$\sigma_{po} = \frac{138,6}{93} \times 10^3 = 1\,490 \text{ MPa}$$

$$\Delta\sigma_f = \phi \mu \sigma_{po} = 0,0014 \times 7 \times 1\,490 = 14,6 \text{ MPa}$$

$$\text{pente } p = \frac{\Delta\sigma_f}{h} = \frac{14,6}{7} = 2,086 \text{ MPa/m}$$

9.1.2. Raccourcissement élastique; tension à 15 jours

$$\Delta\sigma_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{E_p}{E_{ij}} \cdot \sigma_{bco}$$

$$\text{avec: } E_{ij} = 11\,000 \sqrt[3]{f_{cj}}$$

$$f_{cj} = 0,685 f_{c28} \log(j+1) = 0,685 \times 35 \times \log(16) = 28,9 \text{ MPa}$$

$$E_{ij} = 33\,760 \text{ MPa}$$

En tenant compte des pertes, la contrainte au niveau du câble à la mise en tension est voisine de $1,20 \sigma_i$:

$$\sigma_{bco} = 1,2 \times 0,36 = 0,43 \text{ MPa}$$

$$\Delta\sigma_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{190\,000}{33\,760} \cdot 0,43 = 1,2 \text{ MPa}$$

9.1.3. Glissement à l'ancrage

On devra prendre comme valeur de calcul le maximum de la valeur donnée par l'arrêt d'agrément majorée de 2 mm ou majorée de 50 %:

$$g = \text{Max}(1,5 \times 6; 6 + 2) = 9 \text{ mm}$$

d'où la longueur d'action du recul d'ancrage:

$$\lambda = \sqrt{\frac{g E_p}{\text{pente}}} = \sqrt{\frac{0,009 \times 190\,000}{2,09}} = 28,6 > 7 \text{ m}$$

La longueur ainsi calculée est supérieure à la longueur du câble. Par la figure 16-37, on peut déterminer l'état de contrainte après frottement et glissement à l'ancrage (auxquelles il faudra retrancher la perte de raccourcissement élastique de 1,2 MPa).

L'aire hachurée vaut:

$$2,086 \times 7^2 + 7 \times \Delta = g E_p$$

$$= 0,009 \times 190\,000 = 1\,710$$

$$\text{d'où: } \Delta = 229,7 \text{ MPa.}$$

On voit l'influence du recul à l'ancrage sur des câbles courts, la perte représente:

$$\frac{1\,490 - 1\,231,1}{1\,490} \times 100 = 17,4\%$$

de la tension à l'ancrage.

Total des pertes instantanées:

$$\Delta\sigma_i = 1\,490 - 1\,231,1 + 1,2 = 260,1 \text{ MPa.}$$

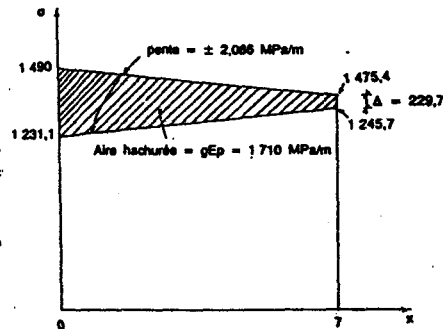


Fig. 16-37. Contrainte de l'acier de précontrainte avant et après frottement et glissement à l'ancrage

9.1.4. Retrait (Région Est de la France)

$$\Delta\sigma_r = 2,10^{-4}(1 - r(j))E_p$$

$$r(j) = r(15) = \frac{j}{j + 9 \cdot r_m} = \frac{15}{15 + 324} = 0,0044$$

avec: $b_o = 36 \text{ cm}$ (épaisseur de l'âme): $r_m = b_o = 36$ (une face exposée)
d'où: $\Delta\sigma_r = 36,3 \text{ MPa}$

9.1.5. Fluage

$$\Delta\sigma_n = K \frac{\sigma_{bco}}{E_i} \cdot E_p$$

$$E_i = 11\,000 \sqrt[3]{35} = 35\,980 \text{ MPa}$$

$$\Delta\sigma_n = 2,5 \times \frac{0,36}{35\,980} \times 190\,000 = 4,8 \text{ MPa}$$

9.1.6. Relaxation

$$\Delta\sigma_p = \frac{6}{100} \rho_{1000} \left(\frac{\sigma_{pi}}{f_{pts}} - \mu_o \right) \sigma_{pi}$$

avec: σ_{pi} = contrainte initiale = $\sigma_o - \Delta\sigma_i = 1\,490 - 260,1 = 1\,229,9 \text{ MPa}$
 $\mu_o = 0,43$ pour les aciers TBR (très basse relaxation).

$$f_{pts} = \frac{F_{pts}}{A_p} = \frac{173,6}{93} \times 10^3 = 1\,867 \text{ MPa}$$

$$\Delta\sigma_p = \frac{6}{100} \times 2,5 \left(\frac{1\,229,9}{1\,867} - 0,43 \right) 1\,229,9 = 42,1 \text{ MPa}$$

$$\text{d'où les pertes totales: } \Delta\sigma = 260,1 + 36,3 + 4,8 + \frac{5}{6} \times 42,1 = 336,3 \text{ MPa}$$

et la contrainte finale moyenne = $1\,490 - 336,3 = 1\,153,7 \text{ MPa}$

et la précontrainte minimum;

$$\sigma_{pi} = 0,98\sigma_{po} - 1,2\Delta\sigma$$

$$\sigma_{pi} = 0,98 \times 1\,490 - 1,2 \times 336,3 = 1\,056,6 \text{ MPa}$$

L'écartement des étriers actifs sera donc de:

$$s_i' = \frac{F_i}{0,09} = \frac{93 \times 10^{-6} \times 1\,056,6}{0,09} = 1,09 \text{ m} > 0,93 \text{ m}$$

Nous limiterons donc l'écartement à 0,93 m.

9.2. Vérification en état-limite ultime

L'effort tranchant réduit est égal à:

$$V_u = 1,35 V_G + 1,5 V_Q = 1,35 \times 8,88 + 1,50 \times 2,17 = 15,24 \text{ MN}$$

et le cisaillement τ_u vaut :

$$\tau_u = \frac{V_u}{b_n \cdot z} = \frac{15,24}{0,54 \times 5,95} = 4,74 \text{ MPa}$$

Les armatures doivent vérifier l'inégalité (16-10) :

$$\tau_u - f_{tj}/3 \leq \frac{A_t}{b_n s_t} \cdot \frac{f_c}{\gamma_s} \cdot \frac{\sin(\alpha + \beta_u)}{\sin \beta_u} + \frac{F_{tu}}{b_n s_t} \cdot \frac{\sin(\alpha' + \beta_u)}{\sin \beta_u}$$

Or, comme le caisson n'est pas coulé en une seule phase, on doit prendre une inclinaison des bielles β_u de 45° , les étriers actifs étant verticaux : $\alpha' = 90^\circ$; le terme $f_{tj}/3$ représentant la part d'effort tranchant repris par le béton comprimé, ne peut être pris en compte en cas de reprise de bétonnage. On peut alors déterminer les aciers passifs nécessaires :

$$\frac{A_t}{b_n s_t} \cdot \frac{f_c}{\gamma_s} \geq \tau_u - \frac{F_{tu}}{b_n s_t}$$

$$\text{avec : } F_{tu} = \frac{F_{pre}}{\gamma_p} = \frac{0,1736}{1,15} = 0,151 \text{ MN}$$

d'où pour une âme :

$$\frac{A_t}{s_t} \geq \frac{4,74 - \frac{0,151}{0,27 \times 0,93}}{400} \times 1,15 \times 0,27 \geq 32,13 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{m} = 32,13 \text{ cm}^2/\text{m};$$

$$\text{soit 1 cadre + 1 étrier HA12 avec : } s_t = \frac{4 \times 1,13}{32,13} = 0,14 \text{ m}$$

Le pourcentage minimum et l'écartement maximum sont largement vérifiés.

La contrainte de la bielle est vérifiée par la formule simplifiée (16-15) :

$$\tau_u \leq \frac{f_{ci}}{6}$$

$$4,74 < 5,83 \quad (\text{ce qui est vérifié})$$

REMARQUE :

S'il n'y avait pas de reprise de bétonnage on aurait obtenu :

$$\text{avec : } \tan 2\beta_u = \frac{2\tau_u}{\sigma_u - \sigma_t} = \frac{2 \times 4,74}{5,92 - 0,36} = 1,70$$

$$\text{d'où : } \beta_u = 29,80^\circ < 30^\circ \text{ et } \tan \beta_u = \tan 30^\circ = 0,5774.$$

L'inéquation $\tau_u - f_{tj}/3 \leq \frac{A_t}{b_n s_t} \cdot \frac{f_c}{\gamma_s} \cot \beta_u + \frac{F_{tu}}{b_n s_t} \cdot \cot \beta_u$ donne :

$$\frac{A_t}{s_t} \geq \frac{\tau_u - f_{tj}/3 - \frac{F_{tu}}{b_n s_t} \cot \beta_u}{\frac{f_c}{\gamma_s} \cot \beta_u}$$

$$\geq \frac{4,74 - 2,73 - \frac{0,151}{0,27 \times 0,93} \times 1,732}{400} \times 1,15 \times 0,27$$

$$\frac{A_t}{s_t} \geq 21,72 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{m} = 21,72 \text{ cm}^2/\text{m}$$

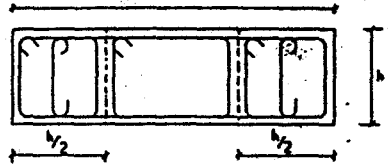
soit pour un cadre et un étrier HA12, un écartement initial égal à 0,21 m au lieu de 0,14 m (économie de 33 % sur les étriers passifs).

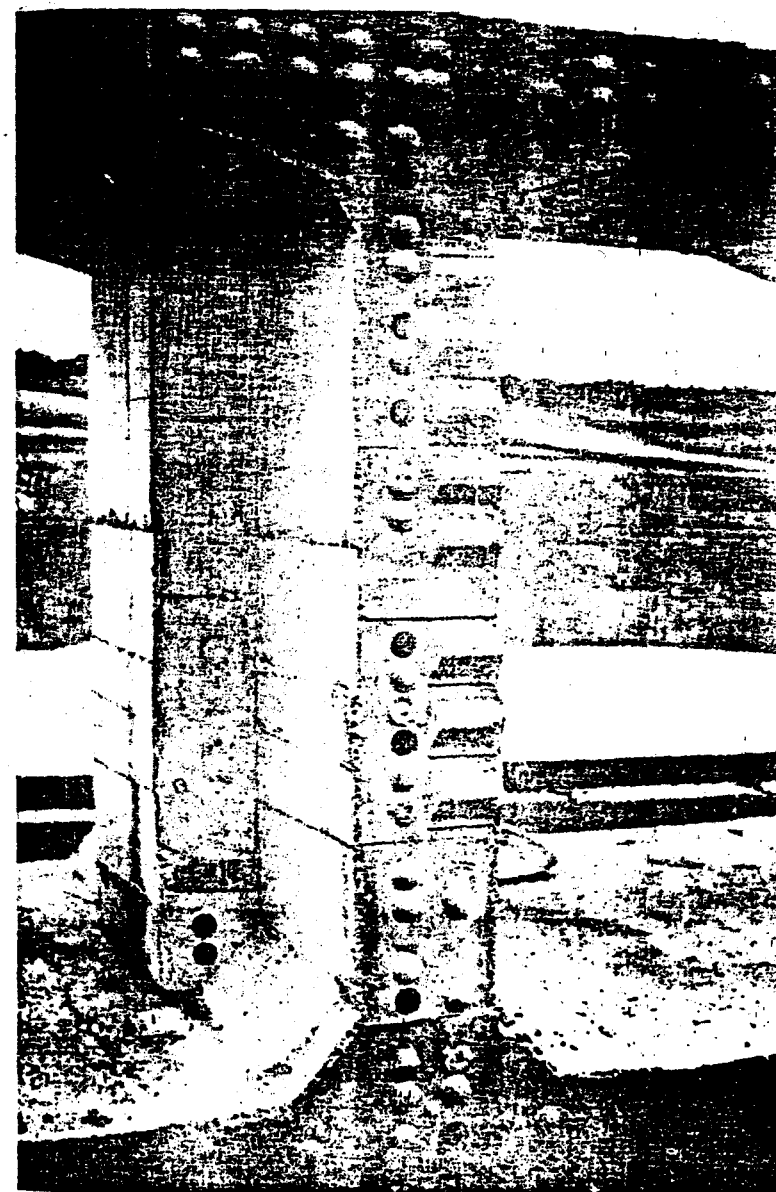
On vérifie bien que la condition de pourcentage minimum est vérifiée :

$$\frac{A_t}{s_t} \cdot \frac{f_c}{\gamma_s b_n} \sin \alpha + \frac{F_{tu}}{b_n s_t} \cdot \sin \alpha' \geq 0,6 \text{ MPa} \quad (16-12)$$

$$\text{soit : } 10^{-4} \times \frac{21,72 \times 400}{1,15 \times 0,27} + \frac{0,151}{0,27 \times 0,93} = 2,80 + 0,6 \geq 0,6$$

ce qui est bien vérifié.

EFFORT TRANCHANT-CADRES PASSIFS VERTICAUX-BPEL			
largeur $b_n = b_o - \frac{n\phi}{2}$ $\tan 2\beta_u = \frac{2\tau_u}{\sigma_x}$ $\beta_u \neq 30^\circ \text{ ou } 45^\circ$ poutre-dalle 			
$V_{red} = V$ (charges permanentes + charges variables + Résal + $P \sin \alpha$) à l'abscisse $\frac{h}{2}$ (charges réparties)			
	DALLE	POUTRE-DALLE $b \geq 3h$	POUTRE
ELS Cisaillement	$\tau = \frac{1,5 V_{red}}{b \cdot h}$	$\tau = \frac{V_{red}}{b_n \cdot z}$	$\tau = \frac{V_{red}}{b_n \cdot z}$
Cisaillement admissible	—	d° poutre	$\bar{\tau} = f_{ij} (f_{ij} + \sigma_x) \text{ Min } \left(0,4; \frac{2(0,6f_{ij} - \sigma_x)}{f_{cj}} \right)$
ELU Cisaillement	$\tau_u = \frac{1,5 V_{red,u}}{b \cdot h}$	d° poutre	$\tau_u = \frac{V_{red,u}}{b_n \cdot z}$
Cisaillement admissible	$\bar{\tau}_u = \text{Min} \left[\frac{10h}{3}; 1 \right] \times \frac{f_{cj} \sin 2\beta_u}{5,29}$	—	$\bar{\tau}_u = f_{cj}/6$ (bielle)
Acier transversal	$\frac{A_t}{s_t} = \frac{\tau_u - f_{ij/2}}{f_e} \times b_n \cdot \gamma_s \cdot \tan \beta_u$	d° poutre pour les 2 parties latérales de largeur 0,5 h	$\frac{A_t}{s_t} = \frac{\tau_u - f_{ij/2}}{f_e} \times b_n \gamma_s \tan \beta_u$
Acier minimum	$\left(\frac{A_t}{s_t} \right)_{\min} = 0$ si $\tau_u \leq 0,06 f_{cj}$ et sans reprise de coulage $\frac{A_t}{s_t} = \frac{\tau_u}{f_e} b_n \gamma_s$ avec reprise de coulage	d° poutre pour les 2 parties latérales et $\frac{A_t}{s_t} = 0,06 \times b_n \frac{\gamma_s}{f_e}$ (milieu)	$\left(\frac{A_t}{s_t} \right)_{\min} = 0,6 b_n \times \frac{\gamma_s}{f_e}$
Ecartement maximum	$\bar{s}_t = \text{Min} (3b_o; 0,8h; 1 \text{ m})$	d° dalle	d° dalle



Clés de voussiers à joints conjugués (Carrefour Pompadour, 1984)...

17

LA TORSION

1. GÉNÉRALITÉS

La torsion est un phénomène courant dans les structures de bâtiments ou d'ouvrages d'art. Elle est, la plupart du temps, négligée car difficile à appréhender, et parce que ses conséquences sont souvent sans importance.

Il convient cependant de distinguer la torsion qui assure la stabilité de l'élément étudié, par exemple une console chargée en dehors de son plan de symétrie, de celle qui peut être négligée, telle la torsion d'une poutre encastrée à ses deux extrémités soumise à un chargement apporté par une dalle encastrée sur une des faces de la poutre (fig. 17-1).

Dans ce dernier cas, le fait de négliger la résistance à la torsion de la poutre, correspondra à considérer la dalle comme simplement appuyée et non encastrée, en négligeant la raideur à la torsion de la poutre.

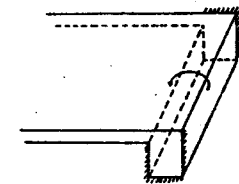


Fig. 17-1. Torsion dans une poutre de rive

En bâtiment, un cas courant de torsion est représenté par les poutres de rives de plancher, chargées d'un seul côté ou par les poutres intérieures, lorsque la résultante des charges n'est pas dans le plan de symétrie de la poutre.

Pour les ouvrages d'art, on est amené à prendre en compte la torsion pour les ponts courbes, pour les chargements des poutres situés hors du plan vertical de symétrie.

2. RAPPELS DE «RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX»

2.1. Torsion pure d'un cylindre circulaire (fig. 17-2)

Par raison de symétrie, la contrainte de cisaillement due à la torsion est perpendiculaire au rayon et proportionnelle à la distance au centre, la section circulaire ne subissant aucune distorsion :

$$\tau = kp$$

Le moment de torsion T est équilibré par la résistance de la section :

$$T = \int_0^R \int_0^{2\pi} \tau \rho \, d\rho \cdot \rho d\theta$$

$$= 2\pi \int_0^R k\rho^3 d\rho$$

$$T = \frac{2\pi k R^4}{4}, \text{ soit : } k = \frac{4T}{2\pi R^4}$$

et : $\tau_{\max} = \frac{16DT}{\pi D^4}$ avec : $D = 2R$

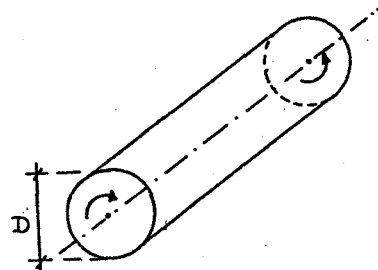


Fig. 17-2. Torsion dans une poutre cylindrique pleine ..

2.2. Torsion pure d'un cylindre circulaire creux (fig. 17-3)

Le cisaillement maximum de torsion du cylindre creux s'obtient par différence :

$$\tau = \frac{16DT}{\pi(D^4 - D'^4)}$$

avec : $D = 2R$
 $D' = 2R - 2e$

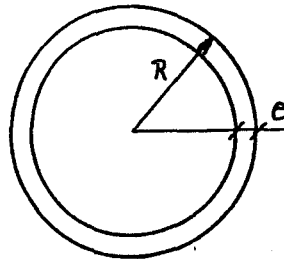


Fig. 17-3. Tube creux

Exemple : si $e = \frac{D}{6}$ on obtient pour le cylindre creux une contrainte :

$$\tau_{\text{creux}} = \frac{T16D}{\pi D^4 \left(1 - \left(\frac{4}{6}\right)^4\right)} = 1,246 \tau_{\text{plein}}$$

2.3. Analogie de la membrane

Pour une section de forme quelconque, il est quelquefois utile, pour apprécier le comportement de la section à la torsion, de faire appel à l'analogie de la membrane.

On sait que pour une bulle de savon s'appuyant sur le contour extérieur de la section (fig. 17-4) et soumise à une pression uniforme, la pente maximum de la membrane en un point représente (à une constante près) la valeur du cisaillement de torsion, et que le volume compris entre la membrane et le plan du contour représente la moitié du moment de torsion.

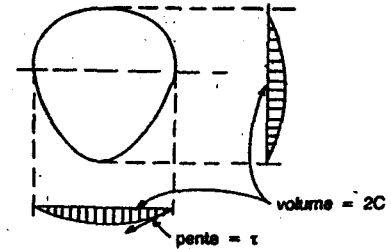


Fig. 17-4. Analogie de la membrane

Dans le cas des tubes minces, on a la différence de deux sections (fig. 17-5). Le volume balayé est donc la différence des volumes correspondant aux deux sections et le moment de torsion de la section vaut la moitié du volume hachuré.

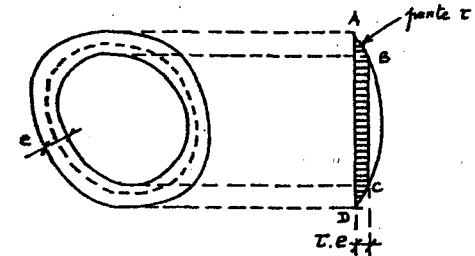


Fig. 17-5

Si le tube est mince, on peut supposer constante la pente (donc le cisaillement) entre A et B et entre C et D.

Le moment de torsion vaut donc :

$$T = 2\Omega \tau e$$

Ω représentant l'aire limitée par la ligne pointillée (fig. 17-6).

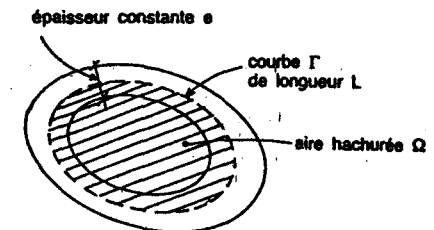


Fig. 17-6

On retrouve bien la formule des tubes minces :

$$\tau = \frac{T}{2e\Omega}$$

L'analogie de la membrane est particulièrement commode pour rechercher les points de cisaillement maximum: par exemple, sur le petit côté d'une section rectangulaire.

Les lignes de niveau de la membrane représentent les lignes de cisaillement.

La rotation de la section par unité de longueur vaut:

$$\frac{d\theta}{dx} = - \frac{T}{GK}$$

où G représente le module d'élasticité transversale:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

avec: ν : le coefficient de Poisson

E = le module d'élasticité longitudinale dit module d'Young

K = le moment d'inertie de torsion de la section (ou inertie polaire)

$$K = \frac{4\Omega^2}{\int_r \frac{ds}{e}} \text{ pour un tube mince.}$$

Si l'épaisseur du tube mince est constante, on trouve:

$$K = \frac{4\Omega^2 e}{L} \text{ avec: } L = \int_r ds$$

3. LA TORSION EN BÉTON PRÉCONTRAIT

3.1. Résultats expérimentaux

Le béton est un matériau peu résistant à la traction donc au cisaillement. Très vite il se fissure, ce qui entraîne automatiquement une diminution très importante de sa rigidité de torsion. C'est pourquoi, on aura intérêt à ne pas prendre en compte la résistance à la torsion. Si cela ne peut être possible, la rigidité à la torsion diminuant, la distribution des moments de torsion peut en être modifiée, quelquefois par un effet auto-stabilisateur comme dans le cas suivant.

Supposons qu'une poutre de rive d'un plancher soit chargée sur un seul côté par une dalle ou des poutrelles. Il se produit donc une rotation de la poutre due:

- à la charge excentrée sur la poutre si le plancher est simplement appuyé sur la poutre;
- à la rotation de flexion du plancher si ce dernier est encastré dans la poutre.

Cette rotation entraîne dans la poutre un moment de torsion. S'il y a fissuration de la poutre, la résistance à la torsion devient très faible, ainsi que le moment de torsion. La rotation de torsion, égale à la rotation de flexion du plancher, est donc limitée. On peut donc ne pas tenir compte dans ce cas, de la résistance à la torsion de la poutre.

La reprise de la torsion dans une poutre en béton précontraint peut être réalisée par des armatures de béton armé ou par des armatures de précontrainte longitudinales ou transversales.

• Résistance à la torsion d'une poutre en béton précontraint

Des expériences sur des poutres en béton armé ou précontraint montrent que:

— une fois la fissuration atteinte, la rigidité de torsion GK de la section chute de façon importante (de l'ordre de 50 à 1) (fig. 17-7);

— les résistances d'une section pleine et d'une section creuse sont pratiquement équivalentes après fissuration et seule la couche de béton extérieure résiste au moment de torsion appliqué (fig. 17-8).

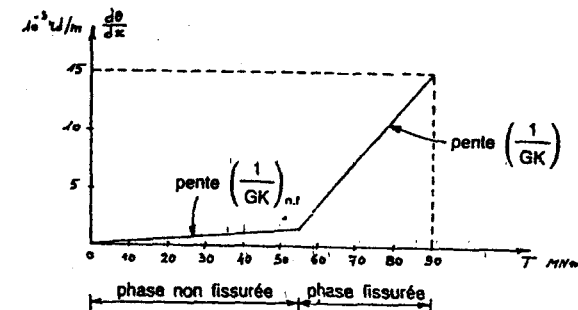


Fig. 17-7.
Rotation par
unité de longueur
due à la torsion T

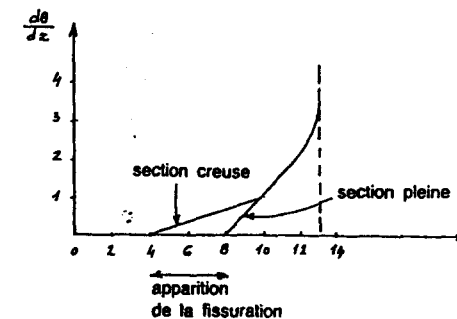


Fig. 17-8.
Rotation unitaire de torsion
pour une section
pleine et une section creuse

3.2. La réglementation: le BPEL

Le BPEL, comme le BAEL pour le béton armé, demande de considérer les sections comme des sections creuses en négligeant la partie intérieure.

De même, on négligera la résistance à la torsion lorsqu'elle n'est pas essentielle à la stabilité de l'ouvrage. Toutefois, la prise en compte de la torsion est de règle pour les ouvrages de classe I.

3.2.1. Section tubulaire efficace

On définit une section tubulaire efficace qui est la section ayant même contour extérieur que les armatures transversales de la poutre et dont l'épaisseur e est la plus petite des deux valeurs :

- l'épaisseur réelle des parois extérieures quand la section est un tube à parois minces ;
- le sixième du diamètre du plus grand cercle inscrit dans le contour extérieur de la section supposée convexe.

La ligne moyenne Γ de longueur L délimite une aire Ω .

On a alors, d'après la théorie des tubes minces rappelée ci-dessus :

$$\tau_T = \frac{T}{2e\Omega} \quad K = \frac{4e\Omega^2}{L}$$

3.2.2. Justification en état-limite de service

• Contrainte de cisaillement de calcul τ

$\tau = \tau_V + \tau_T$, somme des cisaillements dus à l'effort tranchant et au moment de torsion du même cas de charge.

• Contrainte de cisaillement admissible $\bar{\tau}$

La contrainte admissible $\bar{\tau}$ a été définie à propos de l'effort tranchant.

Dans le cas de section creuse (poutre tubulaire à parois minces), on doit donc vérifier :

$$\tau_T + \tau_V \leq \bar{\tau}$$

Dans les autres cas, la contrainte admissible est majorée de 20 % et l'on doit vérifier :

$$\tau_V \leq \bar{\tau}$$

$$\tau_T \leq \bar{\tau}$$

$$\tau_V + \tau_T \leq 1,2\bar{\tau} \text{ (pour une section pleine)}$$

La valeur de la contrainte σ_x concomitante est calculée sur la section réelle de la poutre (voir chapitre 16 « Effort tranchant »).

3.2.3. Justification en état-limite ultime

• Justification des bielles de compression

En posant : $\tau_u = \tau_{Tu} + \tau_{Vu}$, somme des cisaillements ultimes, on a une inclinaison des bielles de compression β_u telle que :

$$\operatorname{tg} 2\beta_u = \frac{2\tau_u}{\sigma_{xu} - \sigma_{yu}}$$

Comme cela a été défini dans le chapitre 16 « Effort tranchant ». On doit alors vérifier :

La torsion

$$\tau_{Vu} \leq \frac{f_{ct}}{6}$$

$$\tau_{Tu} \leq \frac{f_{ct}}{6}$$

$$\tau_u = \tau_{Vu} + \tau_{Tu} \leq \frac{f_{ct}}{3}$$

• Justification des armatures transversales

Les armatures transversales se composent :

- des armatures nécessaires à la reprise de l'effort tranchant ;
- des armatures supplémentaires disposées à l'intérieur de la section tubulaire efficace destinées à l'équilibre du moment de torsion, telles que :

$$\frac{A_T}{s_T} \cdot \frac{f_s}{\gamma_s} \cdot \sin(\alpha_T + \beta_u) + \frac{F_{Tu}}{s_T'} \sin(\alpha_T' + \beta_u) \geq \tau_{Tu} e \sin \beta_u$$

où : A_T représente la somme des aires des sections droites d'un cours d'armatures supplémentaires rencontrées dans la paroi d'épaisseur e du tube efficace, inclinées de l'angle α_T sur la fibre moyenne et espacées de s_T suivant cette fibre.

et : F_{Tu} représente l'effort résistant des aciers d'un cours d'armatures supplémentaires de précontrainte rencontrée dans la paroi d'épaisseur e du tube efficace, inclinées de l'angle α_T' sur la fibre moyenne et espacées de s_T' suivant cette fibre.

Cette formule est obtenue en écrivant l'équilibre du triangle rectangle de la figure 17-8bis. Les aciers passifs forment avec la perpendiculaire à la fissure un angle $\frac{\pi}{2} - (\alpha_T + \beta_u)$. L'effort de cisaillement dans le plan perpendiculaire à l'axe vaut : $\tau_{Tu} \cdot e \cdot \operatorname{tg} \beta_u$. La projection des deux efforts, acier passif et béton, sur la perpendiculaire à la fissure donne la formule suivante :

$$\frac{A_T}{s_T} \cdot \frac{f_s}{\gamma_s} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_T - \beta_u\right) = \tau_{Tu} \cdot e \cdot \operatorname{tg} \beta_u \cdot \cos \beta_u$$

Le même raisonnement avec les aciers actifs conduit à l'inéquation encadrée ci-dessus.

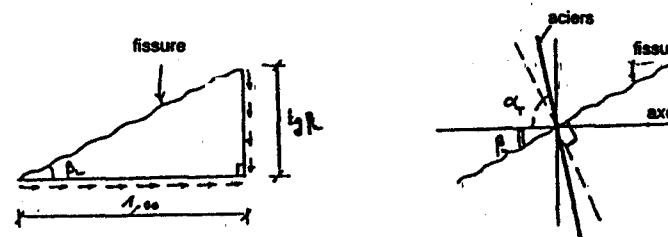


Fig. 17-8 bis

• Justification des armatures longitudinales

La sollicitation de torsion d'une poutre engendre des tractions longitudinales. La résistance à ces tractions doit être trouvée sur la périphérie de la section de la poutre, à l'intérieur de sa section tubulaire efficace.

La densité d'effort de traction longitudinale due à la torsion le long de la ligne moyenne de cette section vaut :

$$\frac{\tau_{ts} \cdot e}{\tan \beta_u} = \tau_{ts} \cdot e \cdot \cotg \beta_u = \frac{T_u}{2 \Omega} \cdot \cotg \beta_u$$

T_u représentant le couple de torsion et β_u l'inclinaison des bielles de béton comprimées sur la fibre moyenne de la poutre.

Cette traction doit être équilibrée :

— soit par la compression développée par la flexion et par la précontrainte longitudinale ;

— soit par le recours à des armatures passives ou de précontrainte, venant en sus de celles strictement nécessitées par la flexion développée par le même cas de charge et dont la contrainte est limitée à : $\frac{f_s}{\gamma_s}$ pour les armatures passives, et $\frac{f_{pr}}{\gamma_p}$ pour les armatures de précontrainte, avec : $\gamma_s = \gamma_p = 1,15$.

Dans le cas d'une section rectangulaire, les armatures longitudinales sont disposées aux quatre angles et éventuellement le long des côtés pour des sections de grande dimension. Elles doivent être disposées, le plus près possible des parois, compte tenu des règles sur l'enrobage.

• **Exemple :** Soit une poutre de section rectangulaire encastrée à la torsion à ses deux extrémités de portée $\ell = 10$ m, et soumise à une densité de moment de torsion réparti uniforme dû à un chargement excentré (fig. 17-9), avec :

$g = 50$ kN/m (charges permanentes)

$q = 35$ kN/m (charges variables)

$f_{c28} = 30$ MPa

$f_{t28} = 2,4$ MPa

$\ell = 10$ m

$e_o = 0,25$ m (excentricité de la charge)

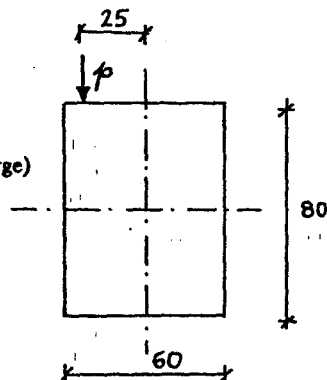


Fig. 17-9. Section rectangulaire à chargement excentré

Le moment de torsion le long de la poutre à l'allure de la figure 17-10.

$$\begin{aligned} T_{\max} &= \frac{\ell}{2} (g + q) e_o \\ &= \frac{5 \times 85 \times 0,25}{1000} = 0,106 \text{ MNm} \\ &= T_G + T_Q \end{aligned}$$

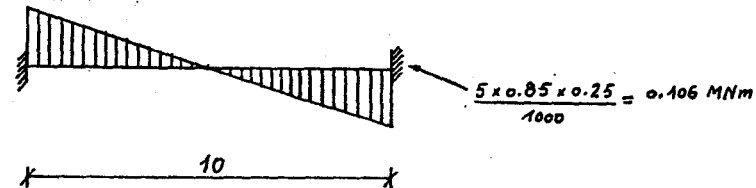


Fig. 17-10. Courbe du moment de torsion

La section tubulaire efficace a pour épaisseur $e = \frac{0,60}{6} = 0,10$ m.

Sa ligne moyenne a une longueur L égale à :

$$L = 2(0,80 - 0,10 + 0,60 - 0,10) = 2,40 \text{ m}$$

et une aire intérieure Ω égale à :

$$\Omega = (0,80 - 0,10)(0,60 - 0,10) = 0,35 \text{ m}^2$$

Le cisaillement de torsion vaut :

$$\tau_T = \frac{T}{2e\Omega} = \frac{0,106}{2 \times 0,10 \times 0,35} = 1,51 \text{ MPa}$$

Si nous supposons que le cisaillement dû à l'effort tranchant vaut :

$\tau_v = 1,08$ MPa en ELS et 1,53 en ELU, et que la précontrainte longitudinale entraîne une contrainte $\sigma_x = 6,5$ MPa, la contrainte admissible vaut :

$$\bar{\tau} = \text{Min}(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2)$$

avec : $\bar{\tau}_1 = 0,4 f_{c28} (f_{c28} + \sigma_x)$

$$\bar{\tau}_2 = \frac{2 f_{t28}}{f_{c28}} (0,6 f_{c28} - \sigma_x) (f_{c28} + \sigma_x)$$

soit : $\bar{\tau}_1 = 2,92$ MPa

$\bar{\tau}_2 = 4,05$ MPa d'où : $\bar{\tau} = 2,92$ MPa.

La section étant pleine, on doit vérifier :

$$\tau_T + \tau_v \leq 1,2 \bar{\tau} = 3,50 \text{ MPa}$$

$$1,51 < 2,92$$

$$1,51 + 1,08 < 3,5 \text{ ce qui est vérifié.}$$

A l'état-limite ultime, nous calculons :

$$T_u = 1,35 T_G + 1,50 T_Q = (1,35 \times 50 + 1,50 \times 35) \times \frac{5 \times 0,25}{1\,000}$$

$$T_u = 0,15 \text{ MNm}; \quad \tau_{Tu} = 2,14 \text{ MPa} \quad \text{et} \quad \tau_{Vu} = 1,53 \text{ MPa}$$

L'inclinaison des bielles vaut :

$$\tan 2\beta_u = \frac{2(2,14 + 1,53)}{6,5} = 1,129$$

$$\beta_u = 24,2^\circ < 30^\circ \text{ donc } \beta_u = 30^\circ, \quad \tan 30^\circ = 0,577$$

La vérification des bielles s'écrit :

$$\tau_{Vu} = 2,14 < \frac{30}{6} = 5$$

$$\tau_{Tu} = 1,53 < 5$$

$$\tau_{Tu} + \tau_{Vu} = 3,67 < \frac{30}{5} = 6$$

• Armatures transversales

Nous ne disposerons que d'armatures passives, on doit alors avoir :

$$\frac{A_T}{s_T} \cdot \frac{f_s}{\gamma_s} \geq \tau_{Tu} \tan \beta_u$$

$$\text{soit : } \frac{A_T}{s_T} \geq \frac{2,14 \times 0,10 \times 0,577 \times 1,15}{400} \times 10^4 = 3,55 \text{ cm}^2/\text{m.}$$

Soit des cadres supplémentaires par rapport aux cadres destinés à reprendre l'effort tranchant : cadres HA 8 espacés de 28 cm.

• Armatures longitudinales

La densité de traction longitudinale due à la torsion vaut :

$$\frac{T_u}{2 \Omega} \cotg \beta_u = \frac{0,15 \times 1,732}{2 \times 0,35} = 0,371 \text{ MN par mètre linéaire de cadres le long desquels sont disposés les aciers longitudinaux.}$$

La section d'acier totale nécessaire située dans les angles et au milieu des faces de la section sur un développé égal à (fig. 17-11) :

$$(0,55 + 0,75) \times 2 = 2,60 \text{ m vaut :}$$

$$\Sigma A_e \times \frac{f_s}{\gamma_s} = 0,371 \times 2,60 = 0,965 \text{ MN}$$

$$\text{d'où : } A_e = \frac{0,965 \times 1,15}{400} \times 10^4 = 27,74 \text{ cm}^2$$

soit : 6 HA 25.

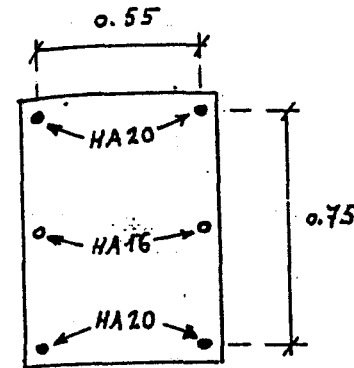


Fig. 17-11. Ferrailage longitudinal

Dans le cas où la précontrainte longitudinale existante est surabondante aux points de moment de torsion maximum, on peut utiliser l'excédent de précontrainte pour reprendre la traction due à la torsion.

Si la poutre étudiée est articulée à la flexion à ses extrémités, la précontrainte est surabondante aux appuis ($6,5 \text{ MPa} \times 0,60 \times 0,8 = 3,12 \text{ MN}$).

Nous avons besoin de $0,371 \times 2,6 = 0,965 \text{ MN}$ soit seulement 31 % de la force de précontrainte pour éviter de mettre les aciers passifs calculés ci-dessus.

Calcul de la rotation due à la torsion à mi-portée (en ELS) :

$$\frac{d\theta}{dx} = - \frac{T}{GK}$$

$$\text{avec : } G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

$$E_i = 11\,000 \sqrt[3]{f_{c28}} = 34\,180 \text{ MPa}$$

Si nous supposons que les charges variables sont de courte durée, nous calculerons la rotation due aux charges permanentes et aux charges variables :

$$G_i = \frac{34\,180}{2} \quad \text{avec } \nu = 0 \text{ (section supposée fissurée)}$$

$$= 17\,090 \text{ MPa}$$

$$K = \frac{4e \Omega^2}{L} = \frac{4 \times 0,10 \times 0,35^2}{2,4} = 0,0204 \text{ m}^4$$

$$\text{d'où : } \left(\frac{d\theta}{dx} \right)_i = - \frac{T}{GK} = - \frac{T}{349}$$

Soit pour une variation linéaire de $T_0 = 0$ à $5 \times 35 \times 0,25 = 43,8$ kNm :

$$\Delta\theta_0 = \frac{1}{2} \ell \frac{T}{GK} = \frac{1}{2} \cdot \frac{43,8}{349} \times 5 \times 10^{-3} = 0,00031^{\text{rd}}$$

pour les charges variables, et pour les charges permanentes G :

$$\Delta\theta_G = \frac{1}{2} \times \frac{5 \times 50 \times 0,25 \times 10^{-3} \times 5}{1/3 \times 349} = 0,00134^{\text{rd}}$$

soit au total : $\Delta\theta = (0,31 + 1,34)10^{-3}\text{rd} = 1,65 \cdot 10^{-3}\text{rd} = 0,09^\circ$.

18

LES EFFORTS CONCENTRÉS ANCRAGES — APPUIS

L'étude de l'application des efforts concentrés sur un élément précontraint : forces sous ancrages et réactions d'appui, ne sera traitée dans ce qui suit que dans le cas de la post-tension.

Nous examinerons successivement :

- les dispositions constructives aux abouts,
- l'action des ancrages aux abouts ou en cours de travée,
- l'équilibre de la bielle d'about,
- l'équilibre du coin inférieur,
- une application numérique.

1. DISPOSITIONS CONSTRUCTIVES

Le tracé des câbles près des appuis doit satisfaire à un certain nombre de conditions :

- l'entraxe des câbles et donc des ancrages doit respecter la distance minimum des fiches d'agrément du procédé utilisé ;
- les câbles inclinés sur appui doivent être suffisamment éloignés les uns des autres pour permettre un coffrage facile des réservations d'ancrage (fig. 18-1).

L'about de la poutre peut être surépaissi pour permettre (fig. 18-2) :

- de reprendre un cisaillement d'effort tranchant important sans pénaliser l'épaisseur de l'âme en partie courante ;
- de loger les ancrages en respectant les distances minimum entre ancrages et améliorer ainsi la répartition des efforts apportés.

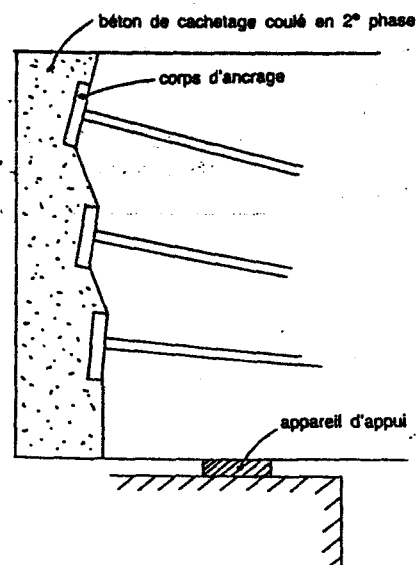


Fig. 18-1. About de poutre

La partie d'about de la poutre, destinée à supporter les ancrages peut être préfabriquée, ce qui offre l'avantage de pouvoir réutiliser le coffrage, et d'obtenir une meilleure résistance du béton (béton plus âgé que celui de la partie courante de la poutre, avec éventuellement un dosage en ciment plus élevé).

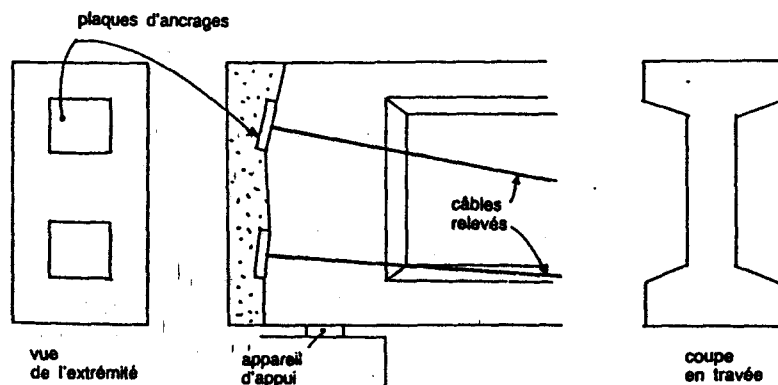


Fig. 18-2

2. TRANSMISSION ET DIFFUSION DE L'EFFORT DE PRÉCONTRAINT AUX ABOUTS

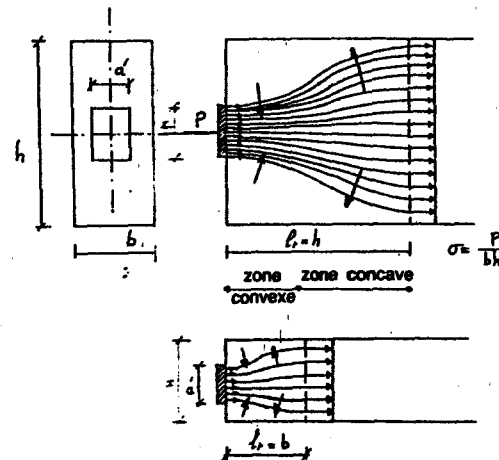
L'effort à l'ancrage introduit sur la poutre une forte contrainte de compression sur une faible surface de béton. Cet effort se diffuse ensuite sur une plus grande surface dans le corps de la poutre. Au bout d'une certaine distance l , appelée longueur de zone de régularisation, on admet que le principe de Saint-Venant s'applique et que la répartition des contraintes normales est linéaire.

2.1. Câble centré rectiligne, normal à l'about (fig. 18-3)

La diffusion des lignes de force, semblable à celle des lignes de courant en hydraulique correspondant à un élargissement brusque de la section, comprend :

- une partie convexe entraînant une compression radiale du béton ;
- puis une partie concave avec des tractions de poussée au vide.

Des essais ont montré que la longueur de la zone de régularisation des contraintes est de l'ordre de l'épaisseur de la pièce, soit h dans le plan vertical et b dans le plan horizontal (fig. 18-3).

Fig. 18-3. Diffusion de la précontrainte
Lignes de force

2.1.1. Schématisation

Pour avoir une idée de grandeur de l'effort transversal de poussée au vide, on peut schématiser les lignes de forces par deux bielles inclinées de α (fig. 18-4).

La composante centripète de l'effort dans la bielle vaut :

$$F = \frac{P}{2} \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

avec : $\operatorname{tg} \alpha = \frac{b/4 - a/4}{kh}$

$$= \frac{1}{4k} \left(1 - \frac{a}{h} \right)$$

d'où : $F = \frac{P}{8k} \left(1 - \frac{a}{h} \right)$

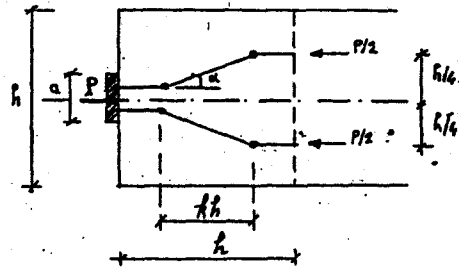


Fig. 18-4. Schéma simplifié des lignes de force

On admet en général $F = 0,25P (1 - a/h)$, ce qui correspond à une valeur $k = 0,50$.

2.1.2. Résultats expérimentaux

De nombreux essais ont montré qu'il existe deux zones de béton tendu :

- une zone de surface en forme d'onglet (fig. 18-5) où les efforts centripètes sont faibles, de l'ordre de $0,04P$;
- une zone centralisée, appelée rognon d'éclatement dont l'effort de traction est de l'ordre de celui trouvé en 2.1.1 ci-dessus.

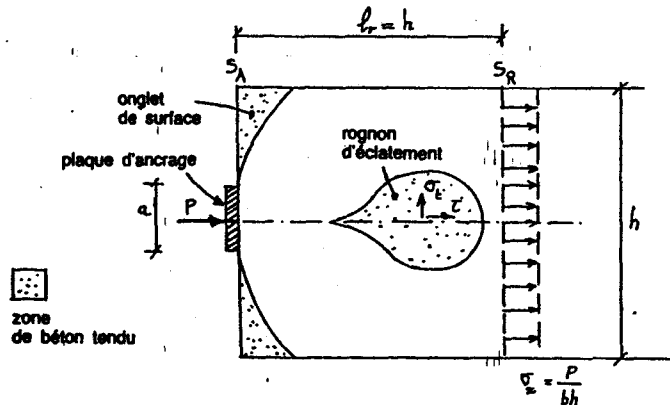


Fig. 18-5. Zones de béton tendu sous l'action d'un effort concentré centré

2.1.3. Dispositions réglementaires (BPEL)

- en surface : frettage de surface A_s tel que :

$$A_s = \frac{0,04P}{2/3f_{te}}$$

- sur une longueur ℓ_r : frettage d'éclatement A_e , σ_t = contrainte de traction du béton :

$$\sigma_t = \frac{0,5P}{bh} \left(1 - \frac{a}{h} \right) \leq 1,25 f_{t1}$$

$$A_e = \frac{0,25P (1 - a/h)}{2/3f_{te}}$$

Les calculs doivent être menés dans les deux directions perpendiculaires à la fibre moyenne avec $\ell_r = h$ et $\ell_r = b$.

2.2. Câble excentré rectiligne, normal à l'about

On définit deux zones de régularisation (fig. 18-6) :

- une zone de première régularisation dans le prisme symétrique $d \times d$ avec $d = 2c$ où c représente la distance de l'axe de l'ancrage à l'extrémité la plus proche. On admet, que dans cette zone, le comportement du béton est identique à celui d'un ancrage centré dans une pièce de hauteur (ou largeur) d et où l'on applique donc les formules précédentes ;
- une zone d'équilibre général dans le plan S_R situé à la distance $\ell_r = h$ (ou b) de l'about avec une répartition linéaire des contraintes.

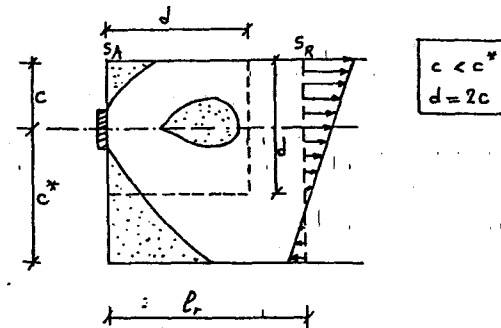


Fig. 18-6. Béton tendu sous un effort concentré excentré

2.3. Câbles multiples rectilignes, normaux à l'about

On admet encore que la longueur de régularisation ℓ_r est voisine de h (ou b).

On distingue, comme pour le câble unique, deux zones :

- une zone de première régularisation pour chaque ancrage à l'intérieur du prisme $d_i \times d_i \times b$. Les ancrages sont numérotés en partant de l'extrados ;
- une zone d'équilibre général en S_R .

Les valeurs des d_i étant définies comme étant les intervalles des ancrages (ou $\frac{1}{2}$ distances aux parois les plus proches) (fig. 18-7).

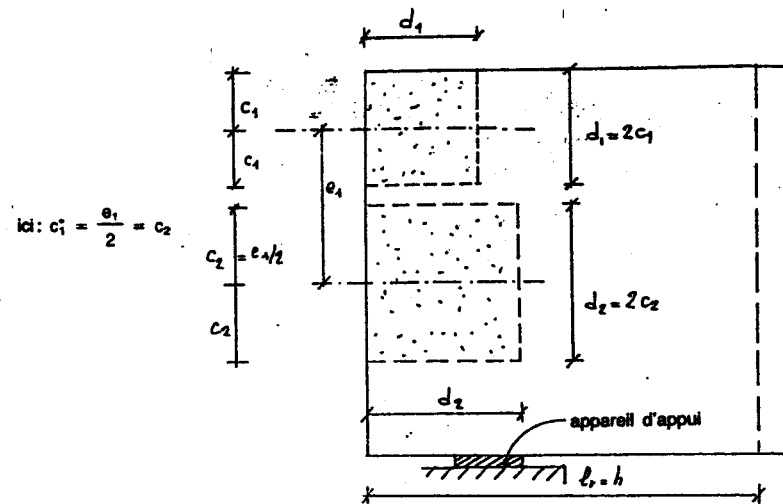


Fig. 18-7. About de poutre avec deux ancrages

2.4. Cas général: câbles multiples courbes inclinés

On suppose encore que :

- la longueur de régularisation l_r est égale à h (ou b);
- la définition des prismes n'est pas modifiée par l'inclinaison des câbles.

- **Equilibre général (fig. 18-8)**

On considère la tranche de pièce comprise entre S_A et S_R comme une poutre de répartition de hauteur h , de largeur b , en équilibre sous l'action :

- des efforts concentrés sous les ancrages F_j ($P = \Sigma F_j$);
- des forces réparties éventuelles dues à la courbure et au frottement des câbles sur le béton:

- tangentielle $\frac{dF}{ds}$ souvent négligeable,
- radiales $\frac{F}{r}$;

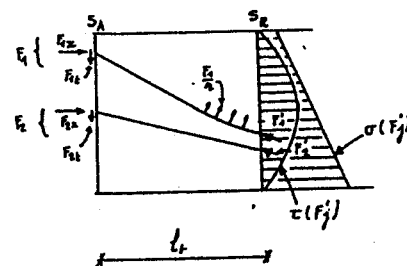


Fig. 18-8. Equilibre avec câbles inclinés multiples

— des contraintes tangentes $\tau(F)$ et normales $\sigma(F)$ supposées réparties et résultant des efforts dans les câbles au droit de la section S_R (selon le principe de Navier).

Cet équilibre général peut être considéré comme la superposition de deux états d'équilibre :

- un état d'équilibre selon la Résistance des Matériaux en remplaçant les efforts F_i en S_A par une distribution de contraintes réparties $\sigma(F_i)$ et $\tau(F_i)$ calculés selon la Résistance des Matériaux;
- un équilibre général de diffusion pure qui résulte de l'application à la poutre de répartition des forces concentrées F_i et réparties — $\sigma(F_i)$ et — $\tau(F_i)$. Cet équilibre général de diffusion pure traduit l'écart entre la Résistance des Matériaux et la distribution réelle des contraintes (fig. 18-9).

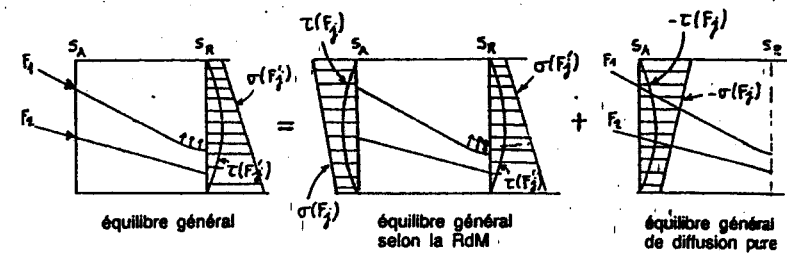


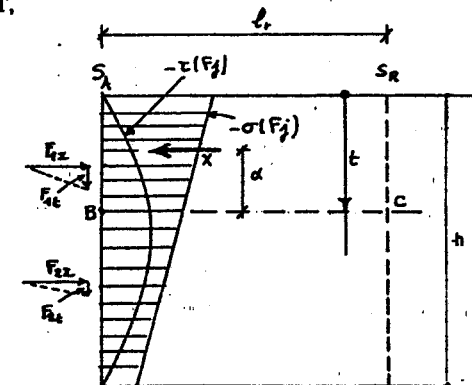
Fig. 18-9

Sur un plan de coupure quelconque BC situé entre les deux ancrages 1 et 2, d'ordonnée t par rapport à l'extrados, on obtient les sollicitations suivantes (fig. 18-10) :

- effort tranchant $V_x = F_{1x} - X$,
- moment fléchissant $M_t = F_{1x} (t - c_1) - X\alpha + \frac{h}{2}(T - F_{1t})$,
- effort normal $N_t = F_{1t} - T$,

avec: $X = \int_{AB} \sigma(F_i) b dt$

$$T = \int_{AB} \tau(F_i) b dt$$

**Fig. 18-10**

Les équations ci-dessus sont valables pour une section de poutre rectangulaire. Elles deviennent un peu plus compliquées pour une poutre en T ou double T (voir annexe 8 du BPEL).

2.5. Vérification réglementaire dans le cas général

2.5.1. Effets de surface, au voisinage immédiat de S_A : prévoir un frettage de surface :

$$A_s = 0,04 \frac{\text{Max}(F_{jo})}{\sigma_s}$$

où F_{jo} représente la force à l'origine de l'ancrage de niveau j , $\text{Max}(F_{jo})$ le maximum de toutes ces forces, $\sigma_s = 2/3 f_{t_e}$.

2.5.2. Effets d'éclatement

• Contrainte de traction du béton

$$\sigma_{tj} = 0,5 \left(1 - \frac{a_j}{d_j} \right) \frac{F_{jo}}{bd_j} \leq 1,25 f_{tj}$$

• Contrainte de compression du béton

$$\sigma_{cj} = \frac{F_{jo}}{bd_j} \leq 2/3 f_{cj}$$

avec : d_j = hauteur du prisme symétrique de niveau j

a_j = dimension de la plaque d'ancrage de niveau j

f_{cj} = contrainte caractéristique de compression

f_{tj} = contrainte caractéristique de traction du béton à j jour

• Frettage d'éclatement

On calcule pour chaque ancrage, de niveau j , l'acier nécessaire :

$$A_{ej} = \frac{0,25 \left(1 - \frac{a_j}{d_j} \right) F_{jo}}{k_j 2/3 f_{t_e}}$$

où k_j vaut 1 pour un ancrage d'extrémité et 1,5 pour un ancrage intermédiaire (on tient ainsi compte de l'interaction des prismes).

La section définitive d'acier transversal vaut :

$$A_s = \text{Max} \left(A_{ej\text{max}} ; 0,15 \frac{F_{jo\text{max}}}{2/3 f_{t_e}} \right)$$

où : $A_{ej\text{max}}$ représente la plus grande valeur des A_{ej} ,
 $F_{jo\text{max}}$ la plus grande valeur des F_{jo} .

Ces aciers sont à répartir sur une longueur d_j à l'aval de S_A en s'assurant que chaque prisme j a au moins la section d'acier A_{ej} sur la longueur d_j .

2.5.3. Equilibre général de diffusion pure

On remplace les efforts concentrés aux ancrages par une charge répartie uniforme sur la hauteur a_j de l'ancrage, ce qui permet d'écarter l'effort tranchant V_x et le cisaillement τ_d .

• Cisaillement

A chaque niveau d'ordonnée t (positive en descendant vers l'appui), on calcule le cisaillement :

$$\tau_s = \tau_d + \tau$$

où τ_d représente un cisaillement conventionnel dans le plan de coupure BC (fig. 18-10) égal à :

$$\tau_d = \frac{2V_x}{b\ell_r}$$

avec V_x = effort tranchant dans le plan horizontal $\bar{BC}$

b = largeur de la poutre

ℓ_r = longueur de régularisation

τ représente le cisaillement le plus défavorable dû à l'ensemble des sollicitations y compris celles des câbles ancrés à l'about S_A .

On détermine le cisaillement maximum $\tau_{s\text{max}}$ de tous les τ_s en fonction de l'ordonnée t du plan BC et on vérifie que :

$$\tau_{s\text{max}} \leq 1,5 f_{tj}$$

En cas de précontrainte transversale, on peut déduire de $\tau_{s\text{max}}$ la valeur de la contrainte de compression transversale.

• Armatures transversales

Elles sont calculées par :

$$A_c = \frac{(V_{xe})_{\text{max}} - N_{te}}{2/3 f_{t_e}}$$

et distribuées sur une longueur $2/3 \ell_r$ à partir de S_A , où N_{te} est l'effort normal N_t vu en 2-4 ci-dessus, compté positivement pour une compression et concomitant à l'effort tranchant $(V_{xe})_{\text{max}}$ qui est le maximum de tous V_{xe} calculés par :

$$V_{xe} = V_x \left[1 - \left(\frac{f_{tl}}{3\tau_d} \right)^2 \right]$$

Ces armatures ne se cumulent pas avec les précédentes A_s et A_c :

— si $A_s + A_c \geq A_c$, aucune armature supplémentaire n'est nécessaire,

— si $A_s + A_c < A_c$, on ajoutera aux armatures A_s et A_c , la différence $A_c - A_s - A_c$.

3. TRANSMISSION ET DIFFUSION DE L'EFFORT DE PRÉCONTRAINT EN PARTIE COURANTE

Il arrive que pour des raisons diverses (économie de précontrainte, mode de construction, forme de l'ouvrage), on soit obligé d'arrêter des câbles en dehors des zones d'about. Ces zones doivent être étudiées avec soin aussi bien dans le sens transversal (éclatement) que dans le sens longitudinal (arrachement).

On disposera donc des armatures transversales qui ont un rôle comparable à celui des aciers A_s , A_e et A_c vus précédemment, et des aciers longitudinaux A_r qui maintiennent les parties aval et amont qui ont tendance à se séparer sous l'action de l'effort de précontrainte qui ne s'applique que sur l'une d'elles.

3.1. Ancrages situés dans l'épaisseur de la pièce

La vérification des contraintes est identique au cas des ancrages en about.

3.1.1. Armatures transversales (fig. 18-11)

Les armatures A_s , A_e et A_c calculées précédemment sont réduites dans un rapport λ qui dépend du type d'ancrage conformément au tableau suivant. On disposera ainsi de :

$$\lambda_s A_s, \lambda_e A_e \text{ et } \lambda_c A_c$$

CAS	Entre S_A et S_R en aval, sur une longueur ℓ_r			Entre S_A et S'_R en amont, sur une longueur ℓ_r		
	λ_s	λ_e	λ_c	λ_s	λ_e	λ_c
a. S_A n'est jamais une section d'about.....	1	1	0,6	0,6	0,6	0,6
b. S_A est une section d'about au moment de la mise en tension.....	1	1	1	0,3	0,3	0,3
c. S_A est une section de couplage.....	1	1	1	0,6	0,6	0,6

Ces armatures suivent la même règle de non-cumul vue précédemment en 2.5.3.

3.1.2. Armatures longitudinales

On disposera des armatures longitudinales passives A_r sur une longueur $\ell_r + \frac{\ell_r}{2}$

à répartir de chaque côté des ancrages (ou des coupleurs), avec :

ℓ_s = longueur de scellement droit des armatures passives utilisées et ℓ_r = longueur de régularisation,

A_r est donné dans le tableau ci-dessous :

CAS (voir ci-dessus)	A_r (avec $\bar{\sigma}_s = 2/3 f_{ct}$)
a	$\frac{1}{\sigma_s} \left(\frac{F}{2} - \Omega \sigma_0 \right)$
b	$\frac{1}{\sigma_s} \left(\frac{F}{4} - \Omega \sigma_0 \right)$
c	Section calculée en classe III avec un effort de précontrainte couplée égale à $2/3 F$

Avec σ_0 = contrainte minimale dans le béton, compatible avec l'effort F considéré au niveau de l'ancrage, due à toutes les sollicitations autres que la sollicitation isostatique, développée par les câbles arrêtés dans la section S_A , Ω étant l'aire intersection des deux rectangles :

- de côté $2a \times 2a'$ (4 fois l'aire de l'ancrage)
- de côté $d \times d'$ (prisme de première régularisation)

(Ω est en pointillé sur la figure 18-11).

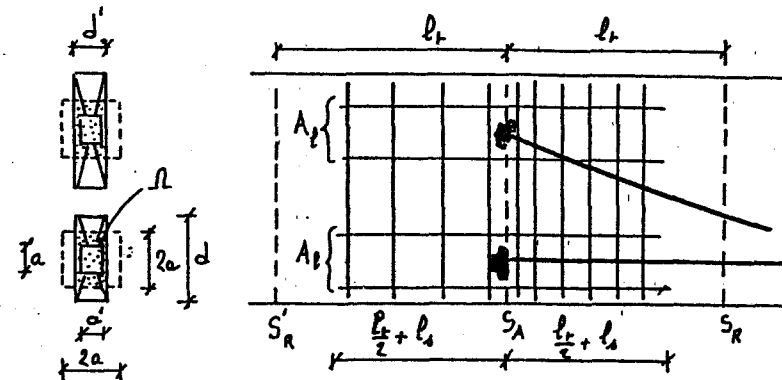


Fig. 18-11. Arrêt d'ancrages en cours de travée à l'intérieur du béton

3.2. Ancrages situés à l'extérieur de la pièce (bossages)

Les formules précédentes du cas (a) (cf. tableau) restent valables à condition de remplacer la valeur $2a$ par $a + 2f$ (fig. 18-12).

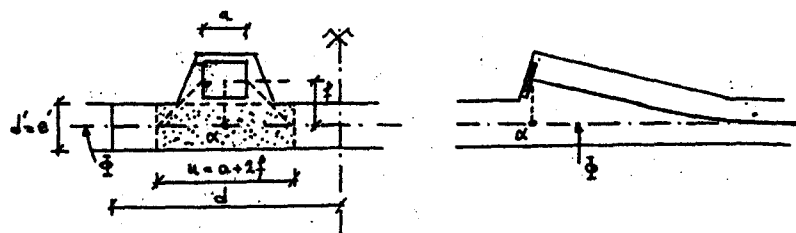


Fig. 18-12. Arrêt d'ancrage en cours de travée à l'extérieur

4. JUSTIFICATION DE LA BIELLE D'ABOUT

Par souci de simplification et à défaut de méthode de calcul plus précis, on admet que la transmission des charges appliquées à la poutre se fait sur l'appui par l'intermédiaire d'une bielle unique MN (fig. 18-13), inclinée d'un angle β_u sur l'axe longitudinal, calculé au centre de gravité de la section. L'angle β_u n'est pas pris égal à moins de 30° .

$$\operatorname{tg} 2\beta_u = \frac{2\tau_u}{\sigma_{xu} - \sigma_{tu}} \leq 30^\circ$$

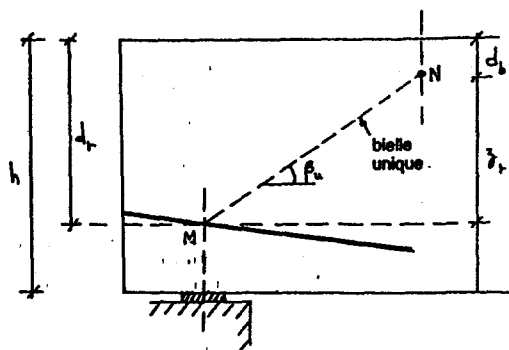


Fig. 18-13. Equilibre de la bielle d'appui avec un câble

Dans le cas où l'on dispose de plusieurs câbles qui sont susceptibles d'équilibrer la bielle unique, on recherche quel est le niveau r du câble qui donne une résultante de la réaction d'appui et des efforts des câbles F_i inclinés de moins de β_u sur l'horizontale (fig. 18-14). Les câbles situés en dessous de ce rang suffisent donc à équilibrer la bielle unique.

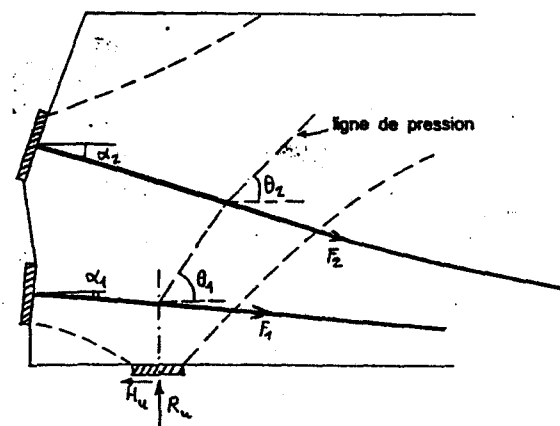


Fig. 18-14. Equilibre de la bielle d'appui avec deux câbles

En numérotant les ancrages à partir de l'appui, on définit les angles d'inclinaisons θ_k de la ligne de pression par :

$$\operatorname{tg} \theta_k = \frac{R_u - \sum_{i=1}^k F_i \sin \alpha_i}{\sum_{i=1}^k F_i \cos \alpha_i - H_u}$$

avec : α_i = inclinaison sur l'horizontale du câble de rang i

F_i = effort de traction dans le câble

R_u = composante verticale de la réaction d'appui

H_u = composante horizontale éventuelle de la réaction d'appui.

La ligne de pression est inclinée à moins de β_u pour le rang r de câbles si l'on a :

$$\operatorname{tg} \theta_r \leq \operatorname{tg} \beta_u$$

$$\operatorname{tg} \theta_{r-1} > \operatorname{tg} \beta_u$$

Pour que ce niveau existe, il faut naturellement que :

$$\sum F_i \cos \alpha_i - H_u \geq (R_u - \sum F_i \sin \alpha_i) \cotg \beta_u$$

La valeur de z_r (fig. 18-13) vaut alors $d_r - d_b$ où d_r représente la distance à l'extrados du câble de rang r au droit de l'axe de l'appui et d_b la distance à l'extrados de la résultante de compression du béton, que l'on peut prendre égal à $h/10$.

L'équilibre du bloc d'about s'écrit, en composante verticale :

$$W = R_u - \sum F_i \sin \alpha_i - \frac{z_r}{s_1} A_s \sigma_{su} \frac{\sin(\alpha + \beta_u)}{\sin \beta_u} - \frac{z_r}{s_2} F_{tu} \frac{\sin(\alpha' + \beta_u)}{\sin \beta_u}$$

avec les notations des aciers transversaux passifs A_s et actifs F_{tu} du chapitre 16 (effort tranchant), où W représente l'effort vertical repris par le béton au droit du point N. Or l'effort tranchant réduit vaut :

$$V_{red,u} = R_u - \Sigma F_i \sin \alpha_i$$

donc:

$$\frac{W}{b_u z} = \tau_{red,u} - \frac{z_r}{z} \left[\frac{A_t}{b_u s_t} \sigma_{st} \frac{\sin(\alpha + \beta_u)}{\sin \beta_u} + \frac{F_{tu}}{b_u s_t'} \frac{\sin(\alpha' + \beta_u)}{\sin \beta_u} \right]$$

avec: $\sigma_{st} = f_s / \gamma_s$.

On évitera de confondre les angles:

α pour l'inclinaison des étriers passifs sur l'horizontale

α' pour l'inclinaison des étriers actifs sur l'horizontale

α_i pour l'inclinaison des câbles longitudinaux de précontrainte.

• Dispositions réglementaires

On a vu à propos de l'effort tranchant, que le béton comprimé pouvait reprendre forfaitairement un effort égal à: $b_u z f_{ct} / 3$. La section des étriers actifs et passifs est donc vérifiée sur appui si: $W \leq b_u z f_{ct} / 3$, soit:

$$\tau_{red,u} - \frac{z_r}{z} \left[\frac{A_t}{b_u s_t} \cdot \frac{f_s}{\gamma_s} \cdot \frac{\sin(\alpha + \beta_u)}{\sin \beta_u} + \frac{F_{tu}}{b_u s_t'} \frac{\sin(\alpha' + \beta_u)}{\sin \beta_u} \right] \leq \frac{f_{ct}}{3}$$

formule qui correspond à la vérification d'effort tranchant au facteur z_r/z près.

En conclusion:

— si $z_r \geq z$, la section d'acier déterminée dans le cadre de la vérification de l'effort tranchant (cf. chapitre 16) est suffisante;

— si $z_r < z$, la section calculée au chapitre 16 est à majorer par le coefficient z/z_r , et à répartir sur la longueur $z_r \cotg \beta_u$ au lieu de $z \cotg \beta_u$ à partir de l'axe de l'appui.

5. ÉQUILIBRE DU COIN INFÉRIEUR

Si la réaction d'appui est appliquée près d'une arête de la poutre, on doit s'assurer qu'il n'y a pas de risque de fendage d'un coin de béton entraînant l'arête (fig. 18-15).

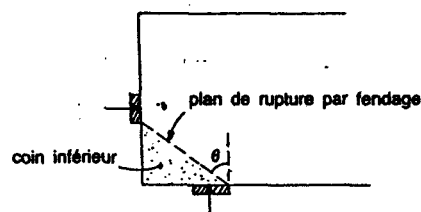


Fig. 18-15. Rupture du coin inférieur

Pour éviter toute rupture par fendage, on doit vérifier que les armatures traversant le plan de rupture sont suffisantes et ceci quelle que soit l'orientation θ du plan.

On considère que la sécurité est assurée, si la résultante des efforts appliqués au droit de l'axe de l'appui dans le plan de rupture, se trouve à l'intérieur d'un cône d'angle de frottement φ du béton (fig. 18-16).

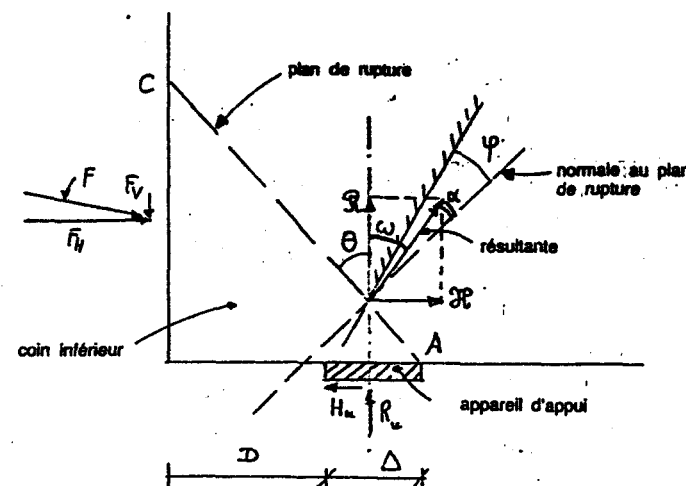


Fig. 18-16. Équilibre du coin inférieur

D'après la figure 18-16, on a:

$$R = R_u + F_v$$

$$X = -H_u + F_h + A_s \alpha_s$$

L'équilibre est assuré si: $\alpha \leq \varphi$ ou $\frac{\pi}{2} - \theta - \omega \leq \varphi$

soit: $\frac{\pi}{2} - \theta - \varphi \leq \omega$,

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \theta - \varphi \right) \leq \operatorname{tg} \omega$$

$$\frac{\cotg \varphi - \operatorname{tg} \theta}{1 + \cotg \varphi \operatorname{tg} \theta} \leq \operatorname{tg} \omega = \frac{X}{R}$$

• Dispositions réglementaires (BPEL)

On admet de prendre pour φ la valeur $\operatorname{Arctg}(2/3)$ et en posant:

$$\lambda = \frac{\cotg \varphi - \operatorname{tg} \theta}{1 + \cotg \varphi \operatorname{tg} \theta} = \frac{1,5 - \operatorname{tg} \theta}{1 + 1,5 \operatorname{tg} \theta}$$

on doit alors vérifier que la section d'acier passif A_s traversant le plan de rupture satisfait l'inégalité suivante:

$$\frac{A_s f_s}{\gamma_s} \geq \lambda (R_u - F_v) + H_u - F_h$$

avec: $F_{lim} = \text{Min} \left(1,2\sigma_{p2}; \frac{f_{exk}}{\gamma_p} \right) A_p$

$\gamma_p = 1,15$

f_{exk} = contrainte de rupture garantie des aciers de précontrainte de section A_p , d'inclinaison α

σ_{p2} = contrainte caractéristique minimum de la précontrainte

$F_H = F_{lim} \cos \alpha$

$F_V = F_{lim} \sin \alpha$

f_e = limite élastique des aciers passifs disposés horizontalement à travers le plan de rupture.

De plus, on prévoira une section minimum d'armatures pour reprendre les efforts locaux de l'appareil d'appui. On peut considérer une transmission directe de l'effort d'ancrage vers l'appui dans le cadre d'un cône d'angle φ (fig. 18-17) à partir de la plaque d'ancrage. L'effort à reprendre par des aciers longitudinaux est égal à:

$$A_{lim} = \frac{0,04 R_a}{f_e/\gamma_s} (5 - 4k)$$

avec k déterminé comme indiqué sur la figure, compris entre 0 et 1.

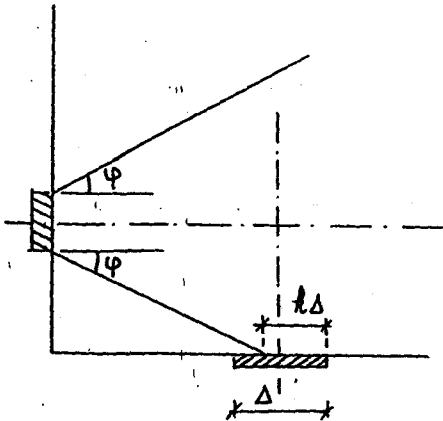


Fig. 18-17. Interaction ancrage et appui

6. APPLICATION NUMÉRIQUE

On se propose d'étudier l'about d'une poutre rectangulaire avec deux câbles 7 T 15 définis sur la figure 18-18.

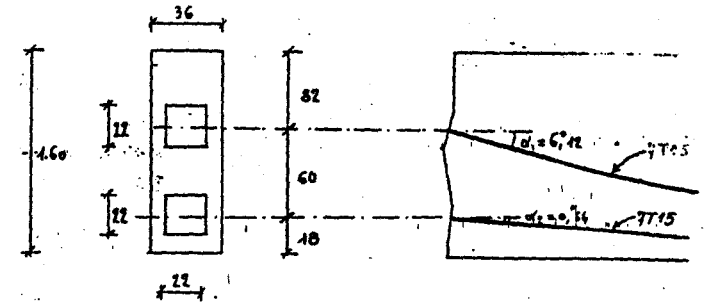


Fig. 18-18. Exemple numérique.

béton: $\sigma_{cj} = 25 \text{ MPa}$ $f_{tj} = 2,1 \text{ MPa}$

précontrainte: $F_{po} = 1,5 \text{ MN}$ pour un câble

aciers passifs: $f_e = 400 \text{ MPa}$

gaine: diamètre = 71 mm

6.1. Zone de régularisation

6.1.1. Fretage de surface

$$A_s = 0,04 \frac{F}{\sigma_s} = 0,04 \times \frac{1,5 \times 10^4}{2/3 \times 400} = 2,25 \text{ cm}^2$$

soit 4 HA 10

6.1.2. Effet d'éclatement

On détermine les zones de première régularisation (fig. 18-19).

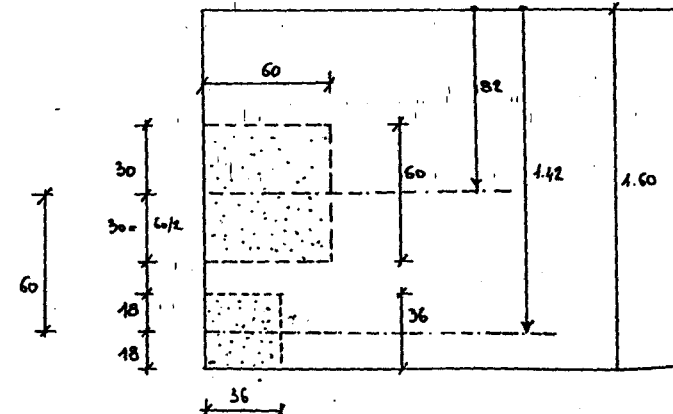


Fig. 18-19. Zones de régularisation des deux ancrages

• Contrainte de traction du béton

$$\sigma_t = 0,5(1 - a_f/d_j) \frac{F_{jo}}{bd_j}$$

avec: $b = 0,36$ m

$d_j = 0,36$ ou $0,60$ m

$F_{jo} = 1,5$ MN

$a_f = 0,22$ m

on trouve: $\sigma_t = 2,25$ MPa pour $d_j = 0,36$ m

$\sigma_t = 2,20$ MPa pour $d_j = 0,60$ m.

Ces deux contraintes sont inférieures à $1,25 f_{tj} = 2,62$ MPa.

• Contrainte de compression du béton

$$\begin{aligned} \sigma_{cj} &= \frac{F_{jo}}{bd_j} = \frac{1,5}{0,36 \times 0,36} = 11,57 \text{ MPa} < 2/3 f_{cj} = 16,67 \text{ MPa} \\ &= \frac{1,5}{0,36 \times 0,60} = 6,94 < 16,67 \text{ MPa.} \end{aligned}$$

• Ferrailage d'éclatement

$$A_{ej} = \frac{0,25(1 - a_f/d_j)F_{jo}}{k_j \times 2/3 f_{cj}}$$

$k_j = 1$ pour les deux câbles (car situés en niveau extrême), soit:

$A_{e1} = 8,91 \text{ cm}^2$; $A_{e2} = 5,47 \text{ cm}^2$

$$A_e = \text{Max} \left[\text{Max} (A_{e1}; A_{e2}); \frac{0,15 F_{jo \max}}{2/3 f_{cj}} \right]$$

$$= \text{Max} [8,91; 8,44] = 8,91 \text{ cm}^2$$

à répartir sur une longueur de 0,60 m à partir de l'about.

6.1.3. Vérification de l'équilibre général de diffusion pure

On calcule les contraintes qui existeraient à l'about si les principes de « Résistance des matériaux » s'appliquaient:

$$\sigma = \frac{\sum F_i}{S} \pm \frac{\sum F_i e_{oi}}{I/v}$$

$$\sigma = \frac{2 \times 1,5}{0,36 \times 1,6} \pm \frac{1,5(0,02 + 0,62) \times 6}{0,36 \times 1,6^2} = 5,21 \pm 6,25$$

$$\sigma = -1,04 \text{ et } 11,46 \text{ MPa}$$

$$\tau_{\max} = \frac{\sum F_i \sin \alpha_i}{zb_0} = \frac{1,5(\sin 0^\circ 64 + \sin 6^\circ 12)}{2/3 \times 1,6(0,36 - 0,071/2)} = 0,51 \text{ MPa}$$

d'où le schéma des contraintes $\sigma(F_i)$, $\tau(F_i)$ (fig. 18-20).

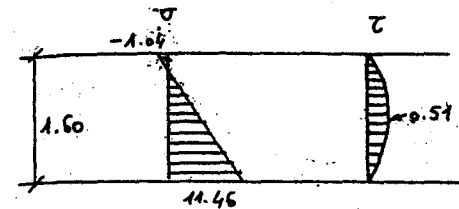


Fig. 18-20. Contraintes de compression et de cisaillement

• Calcul des sollicitations

$$X = \int \sigma(F_i) b dt \quad \text{avec: } b = 0,36 \text{ m}$$

$$\sigma(F_i) = -1,04 + 7,8125t$$

$$\text{et: } \tau(F_i) = 0,7968t(1,6 - t)$$

$$\text{d'où: } X = 1,4062t^2 - 0,3744t$$

$$\text{et: } T = \int \tau(F_i) b dt = 0,2295t^2 - 0,0956t^3$$

On peut alors, calculer l'effort tranchant:

$$V_x(t = 0,82) = -X(0,82) = -0,6385 \text{ MN}$$

$$V_x(t = 1,42) = 1,491 - X(1,42) = 0,8128 \text{ MN}$$

car $1,491 = 1,5 \cos 6^\circ 12$.

On peut ainsi dresser le graphique de la fonction $V_x(t)$ sur la figure 18-21.

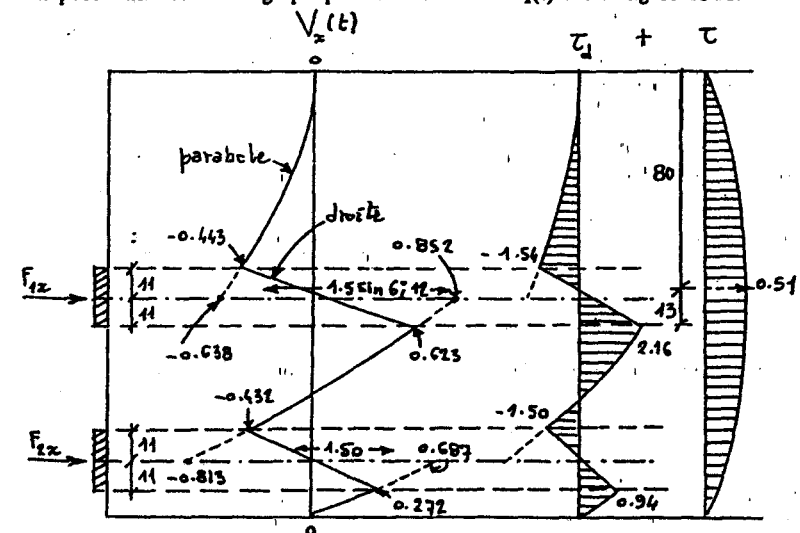


Fig. 18-21. Effort tranchant horizontal et cisaillement

En tenant compte de la charge répartie de l'effort à l'ancrage sur une hauteur $\pm 0,11$ m, on obtient un effort tranchant écrété dont le maximum en valeur absolue vaut : 0,623 MN (fig. 18-21). De même, le calcul du cisaillement donne :

$$\tau_d = \frac{2V_x}{b\ell_r} = \frac{2V_x}{0,36 \times 1,6} = 3,472 V_x^* \text{ courbe déduite de la précédente par une affinité de rapport } 3,472 \text{ (fig. 18-21).}$$

On trouve :

$$(\tau_d + \tau)_{\max} = 2,16 + \left[1 - \left(\frac{0,13}{0,8}\right)^2\right] \times 0,51 = 2,66 \text{ MPa} < 1,5 f_{ti} = 3,15 \text{ MPa}$$

$$V_{\text{remax}} = V_{\text{amax}} \left[1 - \left(\frac{f_{ti}}{3\tau_d}\right)^2\right] = 0,623 \left[1 - \left(\frac{2,1}{3 \times 2,16}\right)^2\right] = 0,558 \text{ MN}$$

effort normal concomitant (pour $t = 0,93$ m) : $T(0,93) = 0,122$ MN

$$N_{te} = F_{it} - T(0,93) = 0,160 - 0,122 = 0,038 \text{ MN}$$

$$\text{et l'acier : } A_e = \frac{V_{\text{remax}} - N_x}{2/3 f_{td}} = 19,50 \text{ cm}^2$$

• Résumé des résultats

Nature	Section minimale (cm ²)	Répartition
A_s	2,25	près de la surface d'about
A_{se}	8,91	sur 0,60 m à partir de l'about dont 5,47 cm ² sur 0,36 m à partir de l'about
A_e	19,50 - 2,25 - 8,91 = 8,34	sur $2/3 \times 1,60$ m = 1,07 m à partir de l'about

6.2. Justification de la bielle d'about

6.2.1. Données supplémentaires

- réactions d'appui : $V_u = R_u = 1,494$ MN verticalement ; $H_u = 0$ horizontalement
- largeur nette : $b_n = b_o - \varnothing/2 = 0,324$ m
- bras de levier : $z = 2/3h = 1,067$ m
- effort tranchant réduit : $V_e - \Sigma F_i \sin \alpha_i = 1,362$ MN avec : $F_i = 1,120$ MN minimum après pertes
- cisaillement réduit : $\tau_{\text{red},u} = \frac{1,362}{0,324 \times 1,067} = 3,94$ MPa

• angle de la bielle unique : $\text{tg } \beta_u = \frac{2 \times 3,94}{3,39} = 2,025$

avec : $\sigma_{p2} = 1151$ MPa, d'où : $\beta_u = 31^\circ 86'$

• aciers transversaux d'effort tranchant :

$$\begin{aligned} \frac{A_t}{s_t} &= (\tau_{\text{red},u} - f_{ti}/3) \frac{y_t}{f_{td}} \text{tg } \beta_u \cdot b_n \\ &= (3,94 - 2,1/3) \times \frac{1,15 \times 10^4}{400} \text{tg } (31^\circ 86') \times 0,324 \\ &= 18,76 \text{ cm}^2/\text{m} \end{aligned}$$

6.2.2. Recherche du rang r des câbles nécessaires pour reprendre l'effort de la bielle avec un angle inférieur à β_u . Ce rang r existe si :

$$\Sigma F_i \cos \alpha_i - H_u \geq (R_u - \Sigma F_i \sin \alpha_i) \cotg \beta_u$$

$$\begin{aligned} \text{avec : } F_i &= A_{pi} \text{ Min } (1,2\sigma_{p2}; f_{pr}/\gamma_p) = F_{i,\text{lim}} \\ &= 7 \times 139 \times 10^{-6} \text{ Min } (1,2 \times 1151; 1814/1,15) \\ &= 1,344 \text{ MN} \end{aligned}$$

soit :

$$1,344 (\cos 6^\circ 12' + \cos 0^\circ 64') - 0 \geq [1,494 - 1,344 (\sin 6^\circ 12' + \sin 0^\circ 64')] \cotg 31^\circ 86'$$

$$2,68 \geq 2,149 \text{ vérifié donc } r \text{ existe.}$$

$$\text{tg } \theta_k = \frac{R_u - \sum_{i=1}^k F_i \sin \alpha_i}{\sum_{i=1}^k F_i \cos \alpha_i - H_u}$$

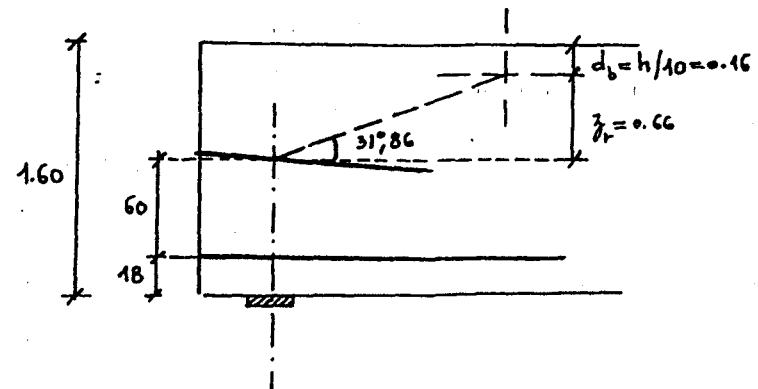


Fig. 18-22. Equilibre de la bielle d'about

en commençant par le bas :

$$\operatorname{tg} \theta_1 = 1,100 \quad \theta_1 = 47^\circ 74' > \beta_u = 31^\circ 86'$$

$$\operatorname{tg} \theta_2 = 0,498 \quad \theta_2 = 26^\circ 47' < \beta_u$$

d'où : $r = 2$

$$z_r = 1,60 - 0,18 - 0,16 - 0,60 = 0,66 \text{ m (fig. 18-22).}$$

Comme l'on a : $z_r = 0,66 < z = 1,067 \text{ m}$; la section d'acier transversal déterminée lors de l'étude de l'effort tranchant est à modifier dans le rapport z/z_r , soit $1,067/0,66 \times 18,76 = 30,33 \text{ cm}^2/\text{m}$. Cette section sera appliquée sur une longueur $z_r \cotg \beta_u = 0,66 \cotg 31^\circ 86' = 1,062 \text{ m}$, d'où le schéma de ferrailage de la figure 18-23.

Abscisse de à	0	0,36	0,45	0,60	1,07	1,51	> 1,51
Longueur	0,36	0,09	0,15	0,47	0,44	—	—
Acier d'éclatement A_e en cm^2/m	5,47 15,20	3,44 14,33	—	—	—	—	—
Acier de diffusion A_e en cm^2/m	—	19,50 18,22	—	—	—	—	—
Acier de bielle A_t en cm^2/m	—	—	30,33	—	—	—	—
Total cm^2/m	18,22	18,22	48,55	48,55	30,33	18,76	—
Acier retenu	15 fois (1 cadHA14 + 1 étrHA14) $s = 0,10 \text{ m}$						

6.3. Equilibre du coin inférieur

Nous considérons les inclinaisons les plus probables de fendage du coin inférieur à la base inférieure de chacun des ancrages (fig. 18-24).

Les données sont les suivantes :

$$H_u = 0$$

$$R_u = 1,494 \text{ MN}$$

$$F_{lim} = 1,344 \text{ MN}$$

• On rappelle que $F_{lim} = A_p \operatorname{Min} (1,2 \sigma_{p2}, f_{prg}/\gamma_p)$

$$f_c = 400 \text{ MPa}$$

$$\gamma_s = 1,15$$

$$\lambda_i = \frac{1,5 - \operatorname{tg} \theta_i}{1 + 2,5 \operatorname{tg} \theta_i}$$

$$A_e f_c / \gamma_s \geq \lambda (R_u + F_v) - H_u - F_H \quad (7)$$

$$F_v = F_{lim} \sin \alpha$$

$$F_H = F_{lim} \cos \alpha$$

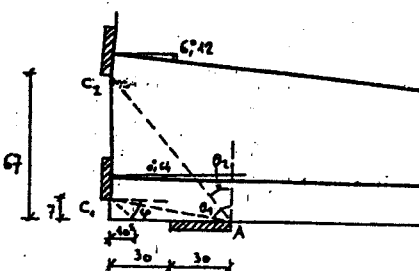


Fig. 18-24. Equilibre du coin inférieur

Plan de rupture	$\operatorname{tg} \theta$	λ	F_v	F_H	$\left(\frac{A_e f_c}{\gamma_s}\right)_{\text{rec.}}$	A_e
AC ₁	8,571	- 0,510	0	0	- 0,762	0
AC ₂	0,895	0,258	0,015	1,344	- 0,955	0

• Couture minimum (effet de surface de l'appui)

On trouve : $k = 1$, car $10,5 < 30$ (fig. 18-24)

$$\text{d'où : } A_{lim} = \frac{0,04 R_u}{f_c / \gamma_s} (5 - 4k) = \frac{0,04 \times 1,494}{400/1,15} \times 10^4 = 1,72 \text{ cm}^2$$

soit : 2HA12 (fig. 18-23).

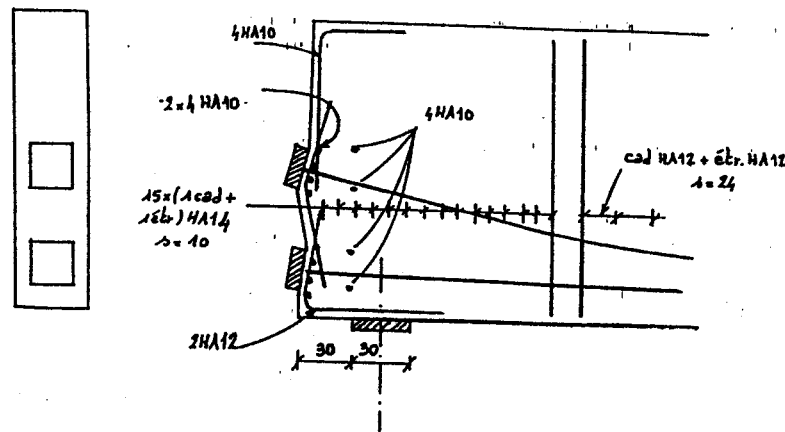
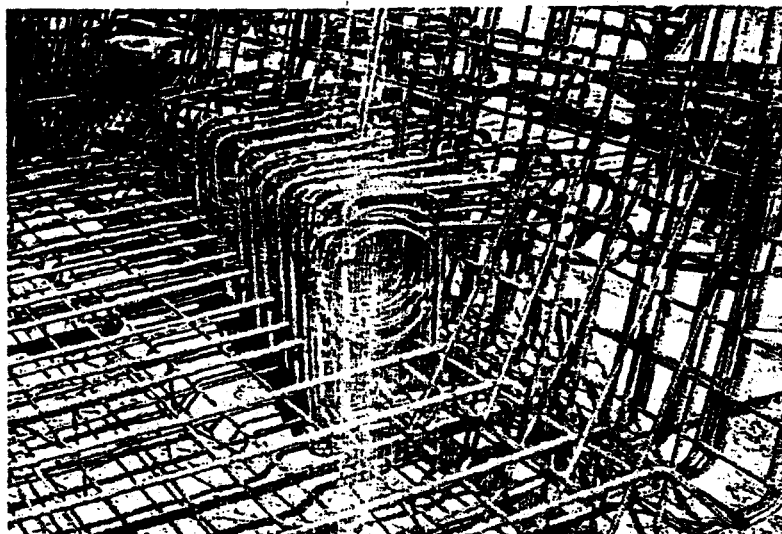


Fig. 18-23. Ferrailage d'about



Ferrailage au droit d'un ancrage situé dans un bossage.



Précontrainte extérieure au béton mis à l'intérieur d'un caisson de pont construit par encorbellement (précontrainte de continuité). Vue des bossages d'ancrage, des déviateurs et des conduits (Carrefour Pompadour, 1984).

19

LES SYSTÈMES HYPERSTATIQUES

Si l'on considère l'action de la seule précontrainte sur une structure isostatique, la déformation entraînée par la mise en précontrainte n'a aucune influence sur les appuis. Elle est considérée comme une action interne, et les seuls efforts extérieurs appliqués à la structure sont les réactions d'appuis qui sont nulles.

Par contre, pour les structures hyperstatiques, la mise en précontrainte provoque une déformation de la structure qui n'est pas (sauf cas exceptionnel) compatible avec les conditions d'appuis.

C'est ce que nous avons vu au chapitre 13 au sujet de l'étude d'une poutre continue à deux travées, où la seule précontrainte entraînait des réactions hyperstatiques.

Un autre cas de système hyperstatique, par exemple celui de la figure 19-1, entraînera des réactions hyperstatiques aux deux appuis inférieurs (et donc un moment hyperstatique dans toute la structure), dues non seulement à la cambrure de la traverse supérieure sous l'action de la mise en précontrainte, mais aussi au raccourcissement élastique de la traverse sous l'action de l'effort normal P .

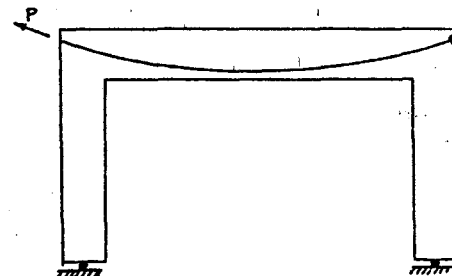


Fig. 19-1. Portique simple, traverse précontrainte

1. ÉTUDE DE LA SECTION (phase élastique)

Comme nous l'avons vu au chapitre 14, les différentes positions du centre de pression dans la section sont représentées sur la figure 19-2, où M représente le moment hyperstatique.

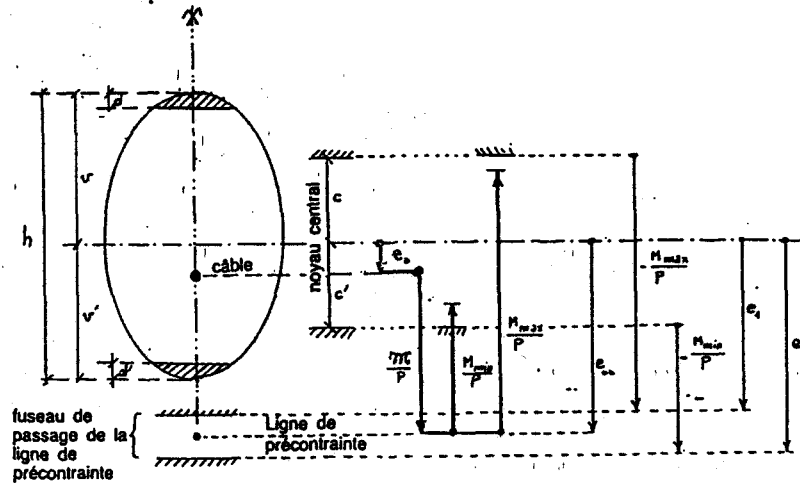


Fig. 19-2. Différentes positions du centre de pression

Nous en déduisons les équations fondamentales:

$$e_{oo} = e_o + \frac{M}{P}$$

$$e_o + \frac{M}{P} + \frac{M_{min}}{P} > -c'$$

$$e_o + \frac{M}{P} + \frac{M_{max}}{P} < c$$

$$-(v' - d') < e_o < v - d$$

$$e_1 = c - \frac{M_{max}}{P} \quad (19-1)$$

$$e_2 = -c' - \frac{M_{min}}{P} \quad (19-2)$$

d'où:

$$e_1 < e_{oo} < e_2$$

La connaissance des moments extérieurs permet de déterminer le fuseau de passage (e_1, e_2) de la ligne de précontrainte.

Le calcul des moments hyperstatiques ne peut être fait qu'en connaissant le tracé du câble.

Le tracé du câble se déduit de la ligne de précontrainte par:

$$e_o = e_{oo} - \frac{M}{P} \quad (19-3)$$

$$\left. \begin{array}{l} e_o(x) \xrightarrow{M(x)} \\ M_{max}(x) \xrightarrow{(19-1)} \\ M_{min}(x) \xrightarrow{(19-2)} \end{array} \right\} e_{oo}(x) \xrightarrow{(19-3)} e_o(x)$$

On voit donc la difficulté de déterminer le tracé d'un câble.

Le problème consiste d'abord à calculer le moment hyperstatique de précontrainte.

2. APPROCHE DU CALCUL DES MOMENTS HYPERSTATIQUES

Nous avons vu, par quelques exemples simples au chapitre 13, que l'on pouvait utiliser soit la méthode externe, soit la méthode directe.

2.1.1. La méthode externe

On considère le câble comme une action extérieure agissant sur le béton par une action radiale et des efforts concentrés aux appuis d'extrémités (fig. 19-3):

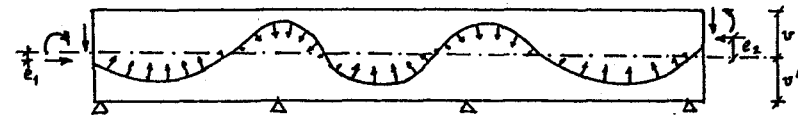


Fig. 19-3. Actions extérieures du câble sur le béton

- une force radiale $p = \frac{P}{r} + \frac{P}{r'}$

avec: P = précontrainte variable avec l'abscisse (frottement, arrêt de câbles),

r = rayon de courbure du câble compté positivement pour une concavité tournée vers le bas,

r' = rayon de courbure de la ligne moyenne de la poutre (positif pour une concavité tournée vers le haut),

p = charge radiale exercée par le câble compté positivement vers le bas;

- un effort concentré horizontal centré: $P(x=0) \cdot \cos \alpha_1$ à l'une des extrémités, et $P(x=\Sigma \ell) \cdot \cos \alpha_2$ à l'autre extrémité de la structure;

- un effort concentré vertical: $P(x=0) \cdot \sin \alpha_1$ à la première extrémité et $P(x=\Sigma \ell) \cdot \sin \alpha_2$ à l'autre extrémité;

- un moment $P(x=0) \cdot e_1 \cdot \cos \alpha_1$ à la première extrémité et $P(x=\Sigma \ell) \cdot e_2 \cdot \cos \alpha_2$ à l'autre.

REMARQUE 1 :

L'action de l'effort normal centré $P \cdot \cos \alpha$ n'a aucune influence sur les appuis si ceux-ci autorisent un glissement de la structure, sinon on devra en tenir compte, aussi bien à la mise en précontrainte par raccourcissement élastique que dans les mois ou années qui suivent par suite du fluage.

REMARQUE 2 :

L'action de la composante verticale n'a pas d'effet sur les réactions des appuis intermédiaires, mais vient équilibrer avec les autres réactions d'appuis intermédiaires et des appuis d'extrémité, la résultante des forces radiales :

$$\int_0^L p \cdot \cos \alpha \cdot ds + P_1 \cdot \sin \alpha_1 + P_2 \cdot \sin \alpha_2 = 0$$

$$\text{et } \sum_{i=1}^n R_i = 0$$

Exemple: soit la poutre à deux travées de la figure 19-4 précontrainte par un câble parabolique.

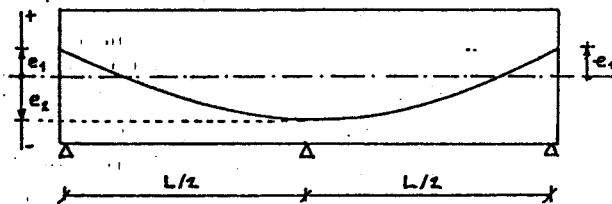


Fig. 19-4. Poutre à deux travées

Calculons le moment par la méthode externe par exemple. La charge radiale due à un câble parabolique est constante (au 2^e ordre près) et vaut :

$$p = \frac{-8P(e_1 - e_2)}{L^2}$$

Cette charge uniforme appliquée à une poutre continue de deux travées égales de portée $L/2$ crée un moment sur appui :

$$M = \frac{-p(L/2)^2}{8} = + \frac{P}{4} (e_1 - e_2).$$

Le moment total de précontrainte est dû :

— à la charge radiale p ,

— aux moments d'extrémités $P \cos \alpha_1 \cdot e_1 = P e_1$

$$\text{d'où : } M_1 = \frac{P}{4} (e_1 - e_2) + P e_1$$

$$M_1 = \frac{P}{4} (5e_1 - e_2)$$

et le moment isostatique valant : $M_0 = P e_2$, on en déduit le moment hyperstatique M :

$$M = M_1 - M_0 = \frac{5P}{4} (e_1 - e_2).$$

On calcule alors la réaction hyperstatique R_2 sur l'appui intermédiaire (fig. 18-5)

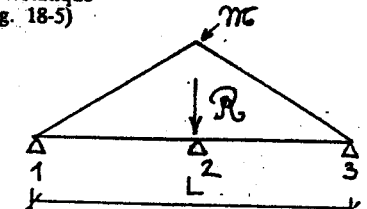


Fig. 18-5. Courbe du moment hyperstatique de précontrainte.

$$R_2 = \frac{4M}{L} = \frac{5P}{L} (e_1 - e_2).$$

$$\text{Puis } \int_0^L p \cdot ds \cdot \cos \alpha = - \frac{8P(e_1 - e_2)}{L} \quad \text{avec } \cos \alpha \approx 1$$

$$P_1 \sin \alpha_1 + P_2 \sin \alpha_2 = 2P \operatorname{tg} \alpha_1 = 2P \frac{(e_1 - e_2) 2}{L/2}$$

(propriété de la tangente à la parabole)

$$\text{d'où : } P_1 \sin \alpha_1 + P_2 \sin \alpha_2 = \frac{8P(e_1 - e_2)}{L}$$

$$\text{On constate bien que : } \int_0^L p \cos \alpha \cdot ds + P_1 \sin \alpha_1 + P_2 \sin \alpha_2 = 0$$

et l'équilibre des réactions d'appui donne :

$$R_1 = R_3 = - \frac{R_2}{2} = - \frac{5}{2} \frac{P}{L} (e_1 - e_2).$$

REMARQUE :

On notera que l'on peut obtenir un câble concordant avec $e_1 = e_2$ qui entraîne une réaction et un moment hyperstatique nuls. Ce qui signifie que la poutre isostatique de portée L a une flèche nulle à mi-portée sous l'action de la seule précontrainte.

2.2. La méthode directe

Elle est la plus fréquemment utilisée.

Sous l'action de la seule précontrainte, la poutre isostatique de portée $L = \sum \ell$ se déforme (fig. 19-6) par application des moments isostatiques : $M_0(x) = P(x) \cdot e_0(x)$.

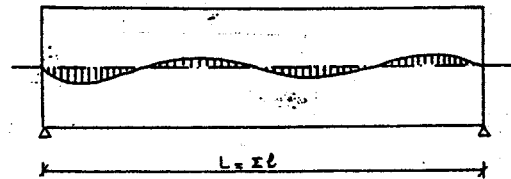


Fig. 19-6. Déformée de la poutre sous l'action de la seule précontrainte

Si cette poutre a des appuis intermédiaires, il y aura des réactions de la part de ces appuis sur la poutre pour l'amener à avoir une flèche nulle sur chaque appui. Ces réactions d'appui $\mathcal{R}_i$, agissent sur la poutre de portée L comme des charges concentrées $\mathcal{R}_i$, développant un moment linéaire $\mathcal{M}(x)$ et des moments au droit des appuis $\mathcal{M}_i$ (fig. 19-7).

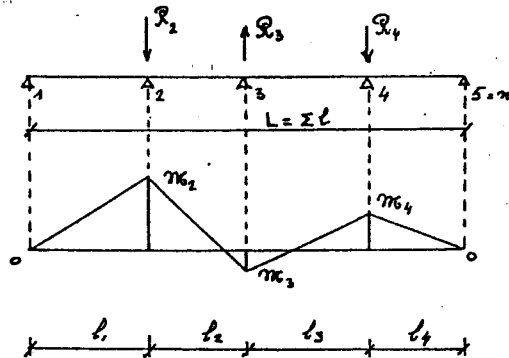


Fig. 19-7. Courbe des moments hyperstatiques de précontrainte

Les réactions d'appui de rive sont telles que :

$$\mathcal{R}_n = \frac{\sum_{i=1}^n \mathcal{R}_i \times \left(\sum_{j=1}^i l_j \right)}{\sum_{i=1}^n l_i = L} \quad \text{et} \quad \mathcal{R}_1 = \sum_{i=1}^n \mathcal{R}_i - \mathcal{R}_n$$

Entre deux appuis successifs i et $i + 1$, le moment $\mathcal{M}(x)$ vaut :

$$\mathcal{M}(x) = \mathcal{M}_i + \frac{x}{l_i} (\mathcal{M}_{i+1} - \mathcal{M}_i)$$

3. CALCUL DES MOMENTS HYPERSTATIQUES

3.1. Généralités

La résistance des matériaux nous a donné les outils nécessaires pour calculer les moments aux nœuds d'une structure soumise à un système de charge, tels que :

- méthode de Cross, méthode des rotations, programme de calcul sur ordinateur (Stress, Straddle...) pour les calculs de portiques ;
- méthode des trois moments ou programme sur ordinateur pour les poutres continues.

On utilisera donc ces méthodes avec, comme système de charge, un moment résultant isostatique : $\mathcal{M}_o(x) = P(x) \cdot e_o(x)$.

3.2. Cas particulier de la poutre continue

La méthode de calcul est celle de l'équation des trois moments qui pour une poutre continue de n travées permet d'écrire un système de $(n - 2)$ équations à $(n - 2)$ inconnues, qui sont les moments sur appuis intermédiaires.

La calcul des poutres de plus de trois travées nécessite l'emploi d'un programme sur ordinateur de résolution de systèmes d'équations linéaires.

La formulation générale de l'équation des trois moments est la suivante pour l'appui $n^\circ i$ (fig. 19-8) :

$$b_{i-1} \mathcal{M}_{i-1} + (a_i + c_{i-1}) \mathcal{M}_i + b_i \mathcal{M}_{i+1} = \omega_{di} - \omega_{gi} \quad (19-4)$$

où a , b , c sont les coefficients de souplesse des travées, ω_{di} et ω_{gi} les rotations dues au même chargement appliqué sur les travées adjacentes de l'appui $n^\circ i$ supposées isostatiques.

$$\begin{aligned} \text{avec : } a_i &= \int_0^{l_i} \left(1 - \frac{x}{l_i}\right)^2 \cdot \frac{dx}{EI_i} \\ b_i &= \int_0^{l_i} \left(1 - \frac{x}{l_i}\right) \cdot \frac{x}{l_i} \cdot \frac{dx}{EI_i} \\ c_i &= \int_0^{l_i} \left(\frac{x}{l_i}\right)^2 \cdot \frac{dx}{EI_i} \end{aligned}$$

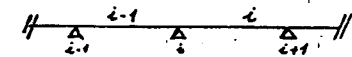


Fig. 19-8. Numérotations des appuis et travées

qui représentent la rotation de l'appui gauche due à un moment unité sur l'appui gauche pour a_i , rotation de l'appui droit due à un moment unité sur l'appui droit pour c_i et une rotation sur un des appuis due à un moment unité sur l'autre appui pour b_i .

ω_{di} est la rotation de la travée droite au droit de l'appui i ,

ω_{gi} est la rotation de la travée gauche au droit de l'appui i .

$$\omega_{di} = - \int_0^{l_i} \mu_i(x) \left(1 - \frac{x}{l_i}\right) \frac{dx}{EI_i} \quad (19-5)$$

$$\omega_{gi} = \int_0^{l_{i-1}} \mu_{i-1}(x) \frac{x}{l_{i-1}} \frac{dx}{EI_{i-1}} \quad (19-6)$$

Les valeurs de $\mu(x)$ représentent les moments isostatiques dus au chargement appliqué aux travées.

Or, sous l'action de la précontrainte, ces moments isostatiques ne sont autres que les moments isostatiques de précontrainte: $M_0(x) = P(x) \cdot e_0(x)$.

Le moment en un point quelconque d'abscisse x dans la travée i s'obtient par (fig. 19-9):

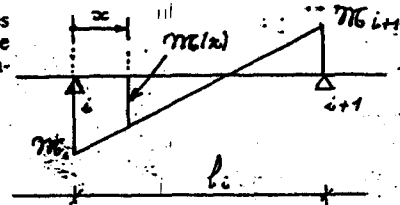


Fig. 19-9. Courbe des moments

$$M(x) = M_{i+1} \frac{x}{l_i} + M_i \left(1 - \frac{x}{l_i}\right) \quad (19-7)$$

L'effort tranchant hyperstatique est constant tout le long de la travée i (dérivée d'un moment linéaire):

$$V_i = \frac{M_{i+1} - M_i}{l_i} \quad (19-8)$$

et la réaction d'appui hyperstatique vaut:

$$R_i = V_i - V_{i-1} = \frac{M_{i+1} - M_i}{l_i} - \frac{M_i - M_{i-1}}{l_{i-1}} \quad (19-9)$$

• Cas particulier de la poutre à inertie constante

L'équation des trois moments devient avec une inertie constante (fig. 19-10):

$$l_i M_{i-1} + 2(l_i + l_{i+1})M_i + l_{i+1}M_{i+1} = -6EI(\omega_g - \omega_d) \quad (19-10)$$

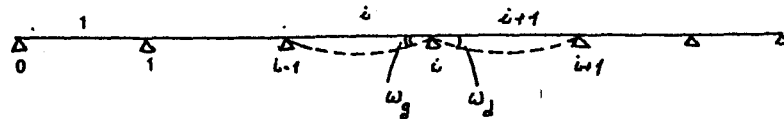


Fig. 19-10. Rotations isostatiques

4. CÂBLE CONCORDANT

4.1. Généralités

On cherche quelquefois à annuler les moments hyperstatiques de précontrainte pour supprimer leurs effets jugés nuisibles.

En fait dans une travée, du fait du caractère linéaire du moment hyperstatique, on ne peut diminuer le moment global en valeur absolue à la fois en travée et sur appuis. Il existe donc des sections où le moment hyperstatique augmente le moment global en travée et diminue celui d'un des appuis (fig. 19-11a) ou des deux appuis (fig. 19-11b) ou bien diminue le moment en travée en augmentant celui d'un des appuis (fig. 19-12a) ou des deux appuis (fig. 19-12b).

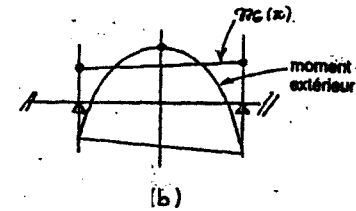
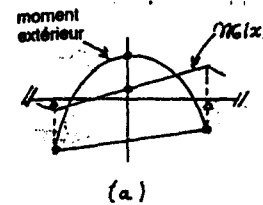


Fig. 19-11

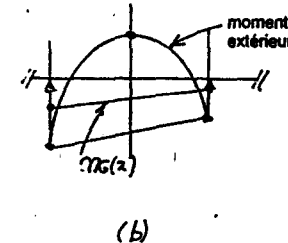
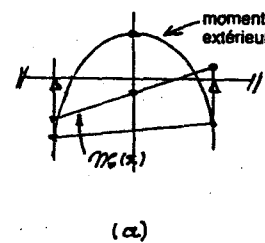


Fig. 19-12. Différentes configurations des moments hyperstatiques de précontrainte

Cependant, il ne faut pas considérer les moments hyperstatiques comme néfastes, il faut savoir dominer leurs valeurs (par petits déplacements du câble) pour leur faire jouer un rôle favorable dans les sections les plus sollicitées, ce qui peut conduire à une économie sur le béton et/ou sur la précontrainte à mettre en œuvre.

4.2. Recherche d'un câble concordant

Un câble concordant est celui dont le tracé n'entraîne pas de réactions hyperstatiques de précontrainte. On a donc la succession des égalités suivantes:

$$R_i = 0 \Leftrightarrow V_i = 0 \Leftrightarrow \frac{M(x)}{V_x} = 0 \Leftrightarrow e_0(x) = e_{00}(x)$$

$$\Leftrightarrow \omega_{di} - \omega_{gi} = 0 \text{ (deuxième terme de l'équation des 3 moments)}$$

On constate donc que:

- le câble concordant est confondu avec sa ligne de précontrainte;
- la détermination du câble concordant se fera en écrivant que son tracé annule tous les seconds membres de l'équation des trois moments.

Appelons $J_i(e_0)$ le deuxième membre de l'équation des trois moments appliquée à l'appui i .

Comme $e_0 = e_{00}$, quel que soit x , on a $J_i(e_{00}) = 0$.

Or, la ligne de précontrainte est telle que: $e_1 < e_{\infty} < e_2$ (cf. § 1 ci-dessus) e_1 et e_2 étant des variables ne dépendant que de la section de béton (c, c'), de la valeur de la précontrainte P , des moments extérieurs et donc indépendantes du tracé du câble e_0 .

Si l'intersection des deux fuseaux (c'est-à-dire la partie commune) de passage (e_1, e_2), d'enrobage ($v - d, -v' + d'$) n'est pas un ensemble vide, on peut essayer de trouver un tracé de câble à l'intérieur de cette intersection qui soit concordant (fig. 19-13):

- si e_1 est négatif: $e'_1 = \text{Min}(v - d; e_1)$
- si e_1 est positif: $e'_1 = e_1$
- si e_2 est négatif: $e'_2 = \text{Max}(e_2; -v' + d')$
- si e_2 est positif: $e'_2 = e_2$

On doit vérifier: $e'_2 < e_0 < e'_1$

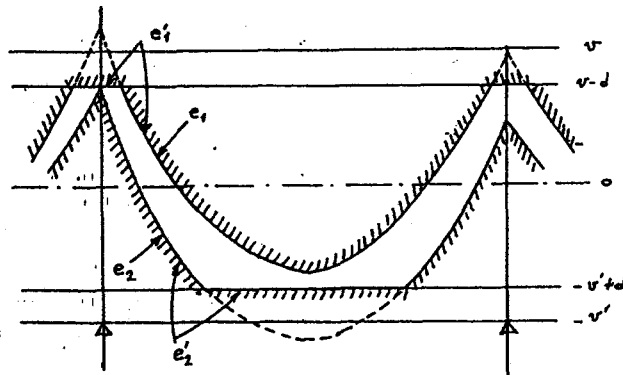


Fig. 19-13. Fuseaux de passage et d'enrobage

4.3. Méthode pratique de calcul

Recherchons un tracé de câble qui partage dans chaque travée le fuseau de passage dans un rapport linéaire fonction de l'abscisse et dans un rapport β_i sur chaque appui (fig. 19-14).

$$e_0(x) = e'_i(x) + k_i(x) \cdot [e'_i(x) - e'_i(x)]$$

$$\text{avec: } k_i(x) = \beta_i + (\beta_{i+1} - \beta_i) \frac{x}{\ell_i}$$

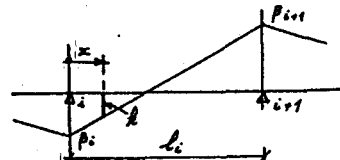


Fig. 19-14. Coefficients β

On est donc ramené à $(n - 2)$ inconnues β_i , racines de $(n - 2)$ équations linéaires: $J_i[e_0(x)] = 0$

La méthode est parfaitement adaptée aux calculs sur ordinateur pour les cas de poutre de plus de trois travées.

Il suffit de vérifier ensuite que tous les coefficients β_i sont compris entre 0 et 1 pour avoir un câble concordant possible.

Les coefficients β_1 et β_n des deux appuis extrêmes sont choisis librement.

4.4. Cas particulier: poutre à deux travées égales

On est ramené à une équation à une inconnue: $J(e_0) = 0$.

En intégrant linéairement: $e_0 = e_{\infty} = e_1 + \beta(e_2 - e_1)$, on obtient:

$$J(e_1) + \beta [J(e_2) - J(e_1)] = 0$$

$$\text{d'où l'inconnue } \beta = - \frac{J(e_1)}{J(e_2) - J(e_1)}$$

$J(e_2)$ et $J(e_1)$ étant les intégrales des fonctions:

$$e_1 = c - \frac{M_{\max}(x)}{P}$$

$$e_2 = -c' - \frac{M_{\min}(x)}{P}$$

$$J(e_k) = - \int_0^{\ell_i} \frac{x}{\ell_i} \frac{Pe_k(x)}{EI_1} dx - \int_0^{\ell_i} \left(1 - \frac{x}{\ell_i}\right) \frac{Pe_k(x)}{EI_2} dx \quad (19-11)$$

avec: $k = 1$ ou 2

Si les deux travées sont symétriques on obtient:

$$J(e_k) = - \frac{2P}{\ell EI} \int_0^{\ell} x e_k(x) dx$$

REMARQUE:

$J(e_1)$ et $J(e_2)$ sont de signes contraires (poutres à deux travées symétriques).

Supposons que la ligne de précontrainte soit confondue avec e_1 , cela signifie que la fibre inférieure est soumise à une contrainte nulle, donc puisque la fibre moyenne (centre de gravité de la section) a une contrainte constante égale à P/S , la fibre supérieure est elle-même soumise à une contrainte constante $\frac{P}{S} \cdot \frac{b}{v}$. En conséquence, la fibre inférieure ne s'allonge, ni ne se raccourcit, la fibre supérieure se raccourcit entraînant une réaction d'appui dirigée vers le haut et un moment hyperstatique négatif.

De même pour une ligne de précontrainte $e_{\infty} = e_2$, la réaction d'appui hyperstatique est dirigée vers le bas en entraînant un moment hyperstatique positif.

Puisque le premier membre de l'équation des trois moments change de signe pour e_1 et e_2 , le deuxième membre également, et on a bien $J(e_1) \times J(e_2) < 0$.

4.5. Transformation linéaire d'un câble

Supposons deux câbles déduits l'un de l'autre par transformation linéaire :

$e_{p1} = e_{p2} + ax + b$, et ayant mêmes extrémités sur appuis de rive.

x représente l'abscisse du point étudié, a et b deux constantes.

Si l'on considère l'action externe de ces deux câbles sur le béton :

— par les extrémités, ils entraînent les mêmes efforts avec la même excentricité et le même effort ;

— par la charge radiale ; la courbure des deux câbles est identique, car les dérivées secondes ($\frac{1}{r} = y''$) de e_{p1} et e_{p2} sont égales, la force radiales des deux câbles est donc la même ;

— les réactions hyperstatiques diffèrent, car ayant les mêmes actions extérieures, les deux câbles ont même moment total de précontrainte et un moment isostatique différent.

La comparaison des deux équations suivantes :

$$M_1 = M_0 + M$$

$$e_{\infty} = e_0 + \frac{M}{P}$$

montrent bien que même moment total de précontrainte M_1 signifie même ligne de précontrainte, les deux câbles ont même ligne de précontrainte.

On en déduit que le câble et sa ligne de précontrainte se déduisent l'un de l'autre par transformation linéaire : ils ont même dérivée seconde, même courbure, même action externe. Ainsi un tracé de câble e_0 pourra être celui de sa ligne de précontrainte e_{∞} . Si ce tracé ne respecte pas l'enrobage, on le déplacera par transformation linéaire jusqu'au respect de ces conditions. En tout point, le moment hyperstatique sera égal à $P(e_0 - e_{\infty})$.

5. CALCUL PRATIQUE DES ROTATIONS AUX EXTRÉMITÉS

Le calcul des rotations aux extrémités dues à la précontrainte isostatique permet de déterminer le deuxième membre $J(e_0)$ de l'équation des trois moments hyperstatiques.

5.1. Cas général : méthode numérique

A défaut de se trouver dans un cas d'intégration simple, on utilisera la méthode d'intégration parabolique, dite méthode de SIMPSON.

Une intégration linéaire $A = \int_a^b y \cdot dx$ peut s'écrire (fig. 19-15) :

$$A = \frac{y_0 + 2y_1 + y_2}{2} \cdot \Delta x = \frac{b-a}{4} (y_0 + 2y_1 + y_2)$$

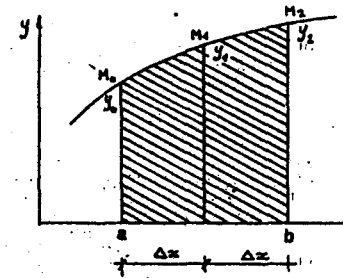


Fig. 19-15. Intégration parabolique

Pour une *intégration parabolique*, on assimile la courbe à une fraction de parabole passant par les points M_0, M_1, M_2 . L'erreur ainsi commise est bien moindre que de considérer deux segments de droites $M_0 M_1$ et $M_1 M_2$.

Pour un arc de parabole, on a :

$$A = \frac{b-a}{6} (y_0 + 4y_1 + y_2)$$

En généralisant, on trouve :

$$A = \frac{b-a}{3n} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \dots + 4y_{n-1} + y_n)$$

avec n pair.

On peut remplacer $\frac{b-a}{3n}$ par $\frac{\Delta x}{3}$

• *Exemple* : Soit un quart de cercle de rayon 1 et de surface $\pi/4 = 0,78539$ avec $n = 6$ (fig. 19-16).

On calcule : $y = \sqrt{1-x^2}$

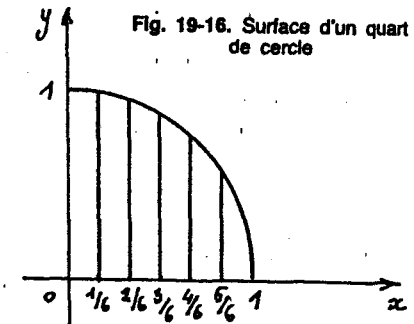


Fig. 19-16. Surface d'un quart de cercle

n	x	y	k	k.y
0	0	1	1	1
1	1/6	0,98601	4	3,9441
2	2/6	0,94281	2	1,8857
3	3/6	0,86603	4	3,4641
4	4/6	0,74536	2	1,4907
5	5/6	0,55277	4	2,2111
6	6/6	0	1	0
TOTAL				13,9957

$$A = \frac{\Delta x}{3} \Sigma ky = \frac{1}{18} \times 13,9957 = 0,77754$$

l'erreur commise ainsi est de: $\frac{0,78539 - 0,77754}{0,78539} \times 100 = 1\%$.

5.2. Travée à inertie constante: câble parabolique (fig. 19-17)

La précontrainte est supposée constante tout le long de la poutre.

Posons:

$$e_4 = e_2 - \frac{e_1 + e_3}{2}$$

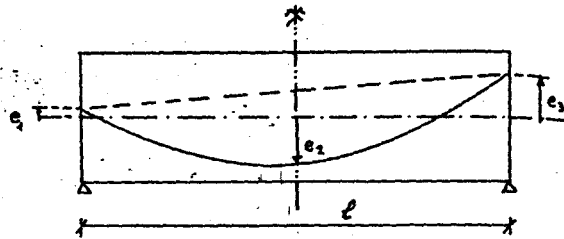


Fig. 19-17. Câble parabolique

Le moment dû à l'excentricité du câble peut se décomposer en trois parties (fig. 19-18).

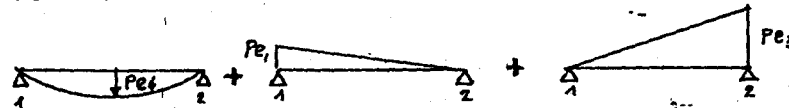


Fig. 19-18. Courbe des moments

Le premier diagramme par la méthode externe correspond à une charge uniforme:

$$p = \frac{P}{l} \text{ avec: } \frac{1}{r} = \frac{8e_4}{l^2}$$

La rotation sur appui due à une charge répartie vaut: $\pm \frac{pl^3}{24EI}$

Pour le moment aux extrémités, on a:

$$\omega = \pm \frac{Cl}{3EI} \text{ pour la rotation de l'appui où s'applique le moment } C$$

$$\text{et } \omega = \pm \frac{Cl}{6EI} \text{ pour la rotation à l'appui opposé;}$$

d'où à l'appui gauche:

$$\omega_{d1} = -\frac{pl^3}{24EI} - \frac{C_1 l}{3EI} - \frac{C_2 l}{6EI} \text{ avec: } C_1 = Pe_1 \text{ et: } C_2 = Pe_3$$

$$\omega_{d1} = -\frac{8e_4 l^3 P}{24EI} - \frac{Pe_1 l}{3EI} - \frac{Pe_3 l}{6EI}$$

$$= -\frac{Pl}{6EI} [2e_4 + 2e_1 + e_3]$$

$$\omega_{d1} = -\frac{Pl}{6EI} (2e_2 + e_1) \quad (19-12)$$

$$\text{et } \omega_{d2} = \frac{Pl^3}{24EI} + \frac{C_1 l}{6EI} + \frac{C_2 l}{3EI}$$

$$\omega_{d2} = \frac{Pl}{6EI} (2e_2 + e_3) \quad (19-13)$$

• Si la poutre est encastree aux deux extrémités, les moments hyperstatiques sont donnés par l'équation des trois moments (fig. 19-19):

$$2\ell M_1 + \ell M_2 = -6EI\omega_{d1}$$

$$\ell M_1 + 2\ell M_2 = -6EI\omega_{d2}$$

(d'après (19-10))

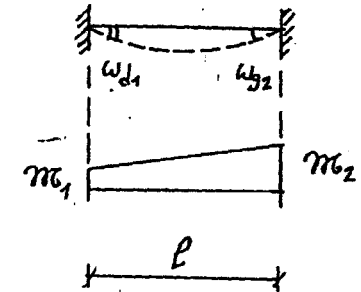


Fig. 19-19. Poutre encastree aux deux extrémités

$$\text{d'où } M_2 = -\frac{2EI}{\ell} (2\omega_{d2} - \omega_{d1}) = -\frac{P}{3} (6e_2 + 2e_3 + e_1)$$

$$M_1 = -\frac{2EI}{\ell} (2\omega_{d1} - \omega_{d2}) = -\frac{P}{3} (6e_2 + 2e_1 + e_3)$$

Le câble est concordant si: $e_1 = e_3 = -2e_2$

• Si la poutre est encastree à une extrémité (fig. 19-20)

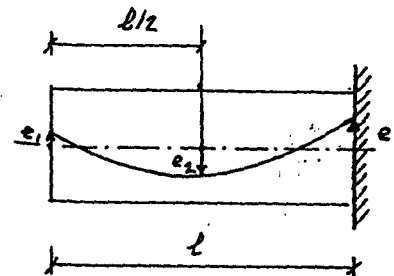


Fig. 19-20. Poutre encastree à une extrémité

l'équation des trois moments s'écrit :

$$2M\ell = -6EI\omega_2$$

soit : $M = -3 \cdot \frac{EI}{\ell} \cdot \omega_2 = -\frac{P}{2} (2e_2 + e_3)$

concordant si : $e_3 = -2e_2$ quel que soit e_1 .

5.3. Travée symétrique à inertie constante à câble constitué de trois arcs de parabole (fig. 19-21)

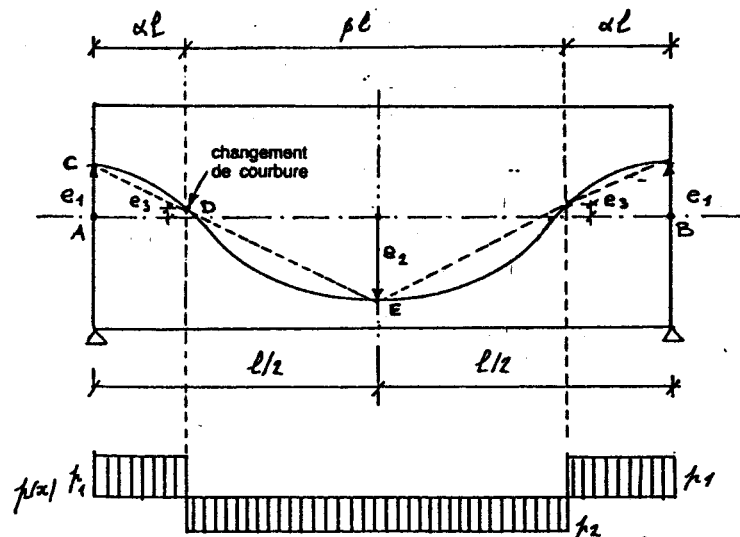


Fig. 19-21. Câble composé de trois arcs de parabole

• Propriétés de la parabole

Aire et centre de gravité de la partie hachurée (fig. 19-22).

$$\text{Aire } S = \int_0^1 (1 - x^2) dx = \frac{2}{3}$$

Moment statique μ_x par rapport à l'axe oy :

$$\mu_x = \int_0^1 (1 - x^2) x dx$$

$$= \int_0^1 (1 - x^2) x dx = \frac{1}{4}$$

d'où : $x_G = \frac{\mu_x}{S} = \frac{3}{8}$

et par rapport à l'axe ox :

$$\mu_y = \int_0^1 (1 - y) \left(\frac{1 + y}{2} \right) dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2} (1 - x^4) dx = \frac{2}{5}$$

d'où : $y_G = \frac{3}{5}$

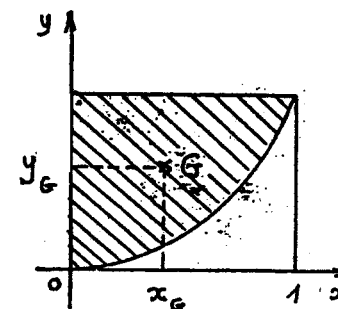


Fig. 19-22. Centre de gravité d'une demi-parabole

• Expression de la rotation

$\omega_2 = \int_0^1 P e_o(x) \cdot \frac{x}{\ell} \cdot \frac{dx}{EI}$ représente le moment statique μ_A de l'aire hachurée par rapport au point A (fig. 19-23) à une constante près : $\frac{P}{\ell EI}$.

$$\mu_A = \int_0^1 e_o(x) x dx,$$

de même :

$$\mu_B = \int_0^1 e_o(x) (\ell - x) dx$$

d'où : $\omega_2 = \frac{P}{\ell EI} \mu_A$

$$\omega_{d1} = -\frac{P}{\ell EI} \mu_B.$$

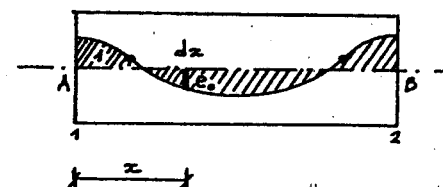


Fig. 19-23. Excentricité e_o

Or, le moment statique d'une surface par rapport à une droite est égal au produit de l'aire par la distance de son centre de gravité à cette droite :

$$\omega_2 = \frac{P}{\ell EI} \times [e_3 \ell^2 / 2 + 2(e_1 - e_3) 2/3 \alpha \ell^2 / 2 + (e_2 - e_3) 2/3 \beta \ell \cdot \ell / 2]$$

$$\omega_2 = \frac{P \ell}{EI} \left[\frac{2}{3} \alpha e_1 + (1 - 2\alpha) \frac{e_2}{3} + \frac{e_3}{6} \right]$$

et : $\omega_{d1} = -\omega_2$ par symétrie.

REMARQUE :

On doit vérifier que les deux paraboles ont même tangente au point d'inflexion :

$$\text{tg } \theta = \frac{2(e_3 - e_1)}{\alpha \ell} = \frac{2(e_2 - e_3)}{\left(\frac{1}{2} - \alpha \right) \ell}$$

d'où : $e_3 = 2(e_2 - e_1) \alpha + e_1$. Cette relation exprime que les trois points C, D, E sont alignés.

• *Moment hyperstatique en cas d'encastrement parfait*

L'équation des trois moments donne :

$$2M\ell + M\ell = -6EI\omega_{d1}$$

d'où : $M = -2EI\omega_{d1}/\ell$

$$\text{soit : } M = 2P \left[\frac{2}{3} \alpha e_1 + (1 - 2\alpha) \frac{e_2}{3} + \frac{e_3}{6} \right]$$

5.4. Travée articulée sur un appui et parfaitement encastree sur l'autre (inertie constante) (fig. 19-24)

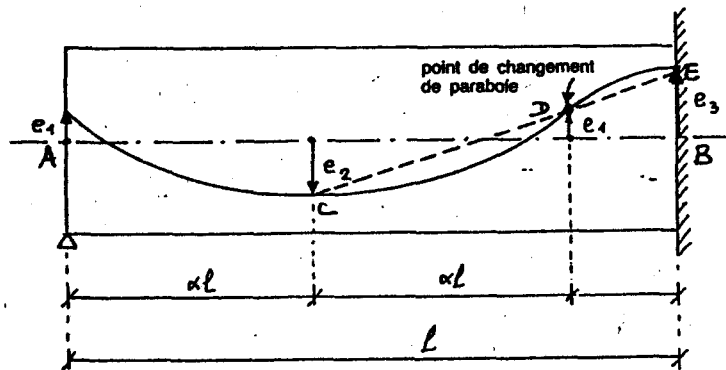


Fig. 19-24. Travée encastree appuyée

L'alignement des points C, D, E est la conséquence d'une tangente commune aux deux paraboles au point D, d'où la relation :

$$e_3 = (e_1 - e_2) \frac{1 - \alpha}{\alpha} + e_2$$

Le même raisonnement que précédemment permet de trouver :

$$\omega_{d2} = \frac{P\ell}{EI} \left[\frac{e_1}{12} (11 - 4\alpha - 12\alpha^2) + \frac{4}{3} \alpha^2 e_2 - \frac{e_3}{12} (5 - 4\alpha + 4\alpha^2) \right]$$

et le moment hyperstatique par l'équation des trois moments :

$$2M\ell = -6EI\omega_{d2}$$

$$\text{d'où : } M = -3 \frac{EI}{\ell} \omega_{d2}$$

$$M = -3P \left[\frac{e_1}{12} (1 - 4\alpha - 12\alpha^2) + \frac{4}{3} \alpha^2 e_2 - \frac{e_3}{12} (5 - 4\alpha + 4\alpha^2) \right]$$

5.5. Câble parabolique partiel (fig. 19-25)

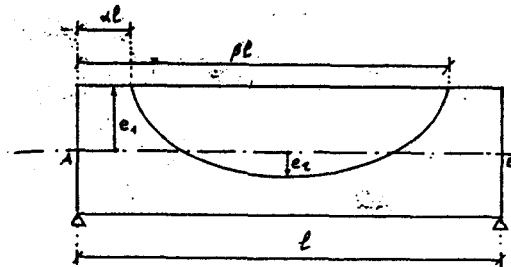


Fig. 19-25. Poutre sur appuis simples, câble parabolique partiel

Par le moment statique par rapport au point A, on obtient la rotation de l'appui droit B :

$$\omega_{d2} = \frac{P}{\ell EI} \left[\overbrace{(e_2 - e_1) (\beta - \alpha) \ell \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{\alpha + \beta}{2} \ell}^{\text{aire}} \cdot \frac{1}{2} \right] \quad (\text{parabole})$$

$$+ e_1 \cdot (\beta - \alpha) \ell \cdot \frac{\alpha + \beta}{2} \ell \quad (\text{rectangle})$$

$$\omega_{d2} = \frac{P\ell}{6EI} (2e_2 + e_1) (\beta^2 - \alpha^2)$$

La rotation à gauche s'obtient en changeant α en $(1 - \alpha)$ et β en $(1 - \beta)$,

$$\text{soit : } \omega_{d1} = \frac{-P\ell}{6EI} (2e_2 + e_1) (\beta^2 - \alpha^2 - 2\beta + 2\alpha)$$

• *Cas d'encastrement des deux côtés (fig. 19-26)*

L'équation des trois moments s'écrit :

$$3M\ell = -6EI\omega_{d2}$$

$$\text{d'où : } M = -\frac{2EI\omega_{d2}}{\ell}$$

$$M = -\frac{P}{3} (2e_2 + e_1) (\beta^2 - \alpha^2)$$

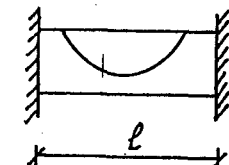


Fig. 19-26. Poutre encastree, câble parabolique partiel

• *Cas d'encastrement du côté droit (fig. 19-27)*

$$2M\ell = -6EI\omega_{d2}$$

$$\text{d'où : } M = \frac{P}{2} (2e_2 + e_1) (\beta^2 - \alpha^2)$$

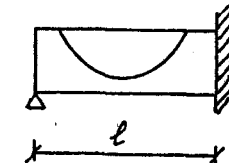


Fig. 19-27. Poutre encastree-appuyée, câble parabolique partiel

5.6. Câble semi-parabolique partiel (fig. 19-28)

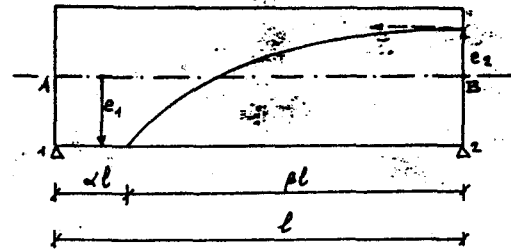


Fig. 19-28. Poutre sur appuis simples, câble semi-parabolique partiel

Le moment statique par rapport à A permet de calculer la rotation à droite :

$$\omega_{d2} = \frac{P}{\ell EI} \left[(e_2 - e_1) \beta \ell \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(\ell - \frac{3}{8} \beta \ell \right) + e_1 \cdot \beta \ell \cdot \left(\ell - \frac{\beta \ell}{2} \right) \right]$$

$$= \frac{P \ell \beta}{EI} \left[e_1 \left(\frac{1}{3} - \frac{\beta}{4} \right) + e_2 \left(\frac{2}{3} - \frac{\beta}{4} \right) \right]$$

et la rotation à gauche :

$$\omega_{d1} = \frac{-P}{\ell EI} \left[(e_2 - e_1) \beta \ell \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{8} \beta \ell + e_1 \beta \ell \cdot \frac{\beta \cdot \ell}{2} \right]$$

$$\text{soit : } \omega_{d1} = - \frac{P \ell}{EI} \cdot \frac{\beta^2}{4} (e_1 + e_2)$$

• Moment hyperstatique de l'appui droit pour travées encastrées des deux côtés (fig. 19-29)

$$M_2 = - \frac{2EI}{\ell} \omega_{d2} = - \frac{P \beta}{6} \left[e_1 (4 - 3\beta) + e_2 (8 - 3\beta) \right]$$

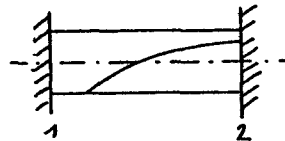


Fig. 19-29. Poutre encastrée, câble semi-parabolique partiel

• Moment hyperstatique de l'appui gauche pour travée encastrée des deux côtés

$$M_1 = + \frac{2EI}{\ell} \omega_{d1} = - P \frac{\beta^2}{2} (e_1 + e_2)$$

• Moment hyperstatique de l'appui droit pour travée encastrée d'un seul côté (fig. 19-30)

$$2M_2 \ell = - 6EI \omega_{d2}$$

$$\text{d'où : } M_2 = - \frac{3EI}{\ell} \omega_{d2} = - \frac{P \beta}{4} \left[e_1 (4 - 3\beta) + e_2 (8 - 3\beta) \right]$$

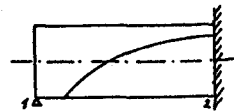


Fig. 19-30. Poutre encastrée-appuyée, câble semi-parabolique partiel

5.7. Câble rectiligne partiel (fig. 19-31)

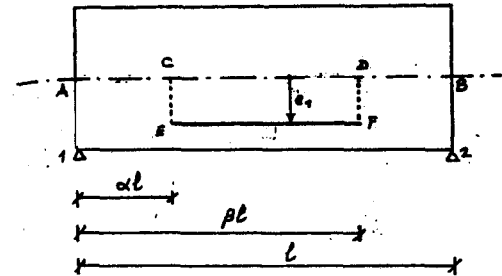


Fig. 19-31. Poutre sur appuis simples, câble rectiligne partiel

Par le moment statique de l'aire CDEF par rapport au point A, on a :

$$\omega_{d2} = \frac{P}{\ell EI} \left[(\beta - \alpha) e_1 \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \ell \right]$$

$$\omega_{d2} = \frac{P \ell}{2EI} (\beta^2 - \alpha^2) e_1$$

$$\text{et : } \omega_{d1} = - \frac{P \ell}{2EI} e_1 (\beta^2 - \alpha^2 - 2\beta + 2\alpha)$$

• Poutre encastrée des deux côtés

$$M_1 = \frac{2EI}{\ell} \omega_{d1} = - P e_1 (\beta^2 - \alpha^2 - 2\beta + 2\alpha)$$

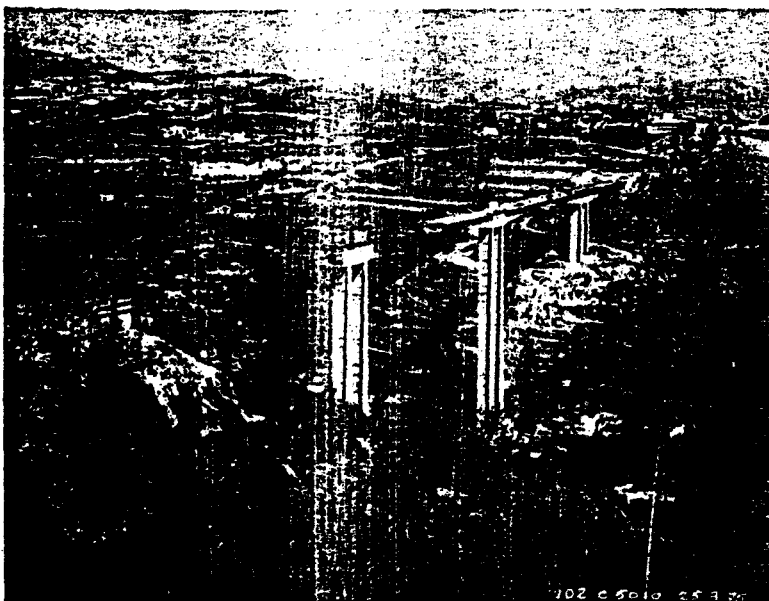
$$M_2 = - \frac{2EI}{\ell} \omega_{d2} = - P e_1 (\beta^2 - \alpha^2)$$

• Poutre encastrée du côté droit

$$M_2 = - \frac{3EI}{\ell} \omega_{d2} = - \frac{3}{2} P e_1 (\beta^2 - \alpha^2)$$

• Poutre encastrée du côté gauche

$$M_1 = - \frac{3}{2} P e_1 (\beta^2 - \alpha^2 - 2\beta + 2\alpha)$$



Viaduc de Magnan, autoroute A 8. Nice (Alpes-Maritimes) (doc. Freyssinet).

20

DISPOSITIONS CONSTRUCTIVES

Les dispositions constructives regroupent un certain nombre de conditions réglementaires ou d'usage courant pour que l'ouvrage réponde aux exigences qu'on attend de lui, non seulement sur le plan de la résistance mécanique, mais aussi pour la bonne tenue dans le temps et pour faciliter les conditions de mise en œuvre.

1. ARMATURES PASSIVES

En ce qui concerne les armatures de béton armé, on se reportera aux spécifications des règles BAE^{*}.

2. DIMENSIONNEMENT DE DÉTAIL DES PIÈCES**

En dehors du dimensionnement des pièces conformément aux exigences des chapitres précédents (flexion, effort tranchant, torsion...), on devra justifier que les efforts de traction sont repris par des armatures passives vérifiées en état-limite de service sous combinaisons rares, avec un taux de travail ne dépassant pas les deux tiers de la limite élastique ni 150η (voir chapitre 14, « Flexion en ELS »).

On regardera avec une attention particulière :

- les zones qui peuvent être soumises à des tractions en phase de construction ou en phase définitive ;
- les zones entourant les ancrages, soumises à des contraintes élevées ;
- les poussées au vide éventuelles ;
- les voisinages de trous ou d'ouvertures ;
- le risque de flambement des ailes de la membrure comprimée.

^{*} Voir chapitre 18, « Dispositions constructives » du Traité de Béton Armé de R. LACROIX, A. FUENTES, H. THONIER, Eyrolles, 1980.

^{**} On reprend ici le plan du chapitre 10 du BPEL.

3. TRACÉ, POSITION ET ENROBAGE DES ARMATURES POST-TENDUES

3.1. Tracé

Le tracé des armatures doit satisfaire aux conditions suivantes :

- être clairement indiqué sur les plans avec une précision suffisante ;
- les conduits (gaines ou tubes) doivent subir le moins de déviations possibles, et dans un seul plan à la fois (éviter les courbes gauches), les pertes par frottement seront ainsi limitées à leur minimum ;
- les rayons de courbure seront limités aux valeurs minimales définies par l'arrêté d'agrément ;
- les conduits, au voisinage des ancrages, devront posséder une longueur rectiligne d'au moins 0,50 m ;
- les dispositifs d'ancrages devront satisfaire aux arrêtés d'agrément (distance minimum entre deux ancrages ou avec la paroi la plus proche, frettage sous ancrage...) ;
- les ancrages devront être cachetés avec soin, avec utilisation de mortier à base de résine pour ceux qui peuvent être soumis à des infiltrations d'eau. On évitera de réaliser des ancrages dont le cachetage est difficile, en intrados de poutre par exemple ;
- des événements d'injection devront figurer sur les plans.

3.2. Disposition et enrobage des armatures de précontrainte

Le nombre de conduits de diamètre $\varnothing$ dans un même paquet doit satisfaire aux conditions de la figure 20-1.

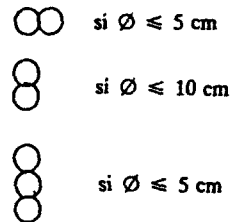


Fig. 20-1

Ces conditions sont nécessaires pour s'assurer d'un bétonnage satisfaisant et d'une adhérence gaine-béton suffisante.

Les conduits doivent être suffisamment bien arrimés pour ne pas subir de dégâts ni de changement de position lors du bétonnage ou de l'injection.

3.3. Espacement des armatures de précontrainte

Pour permettre une mise en place correcte du béton (cheminées de bétonnage) et éviter une interaction d'un paquet de gaines sur un autre paquet lors de la mise en

tension, on devra respecter une distance minimum entre conduits comme indiqué sur la figure 20-2, $\varnothing$ désignant le diamètre d'encombrement maximum de la gaine.

q = nombre de conduits accolés horizontalement : $q = 1$ ou 2

p = nombre de conduits accolés verticalement : $p = 1, 2$ ou 3

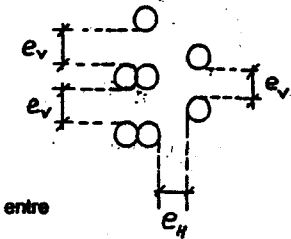


Fig. 20-2. Espacements entre câbles

Avec $e_H \leq 5 \text{ cm}$ et $e_V \leq 4 \text{ cm}$			
$p \backslash q =$	1	2	3
1	 $e_H \geq \varnothing$ $e_V \geq \varnothing$	 $\varnothing \leq 10 \text{ cm}$ $e_H \geq \varnothing$ $e_V \geq \varnothing$	 $\varnothing \leq 5 \text{ cm}$ $e_H \geq 1,5 \varnothing$ $e_V \geq \varnothing$
2	 $\varnothing \leq 5 \text{ cm}$ $e_H \geq 1,5 \varnothing$ $e_V \geq \varnothing$	 $\varnothing \leq 5 \text{ cm}$ $e_H \geq 1,5 \varnothing$ $e_V \geq 1,2 \varnothing$	 $\varnothing \leq 5 \text{ cm}$ $e_H \geq 1,5 \varnothing$ $e_V \geq 1,2 \varnothing$

Pour les pièces minces, dalles, voiles, âmes, l'entr'axe d des armatures doit satisfaire à la condition suivante (fig. 20-3) :

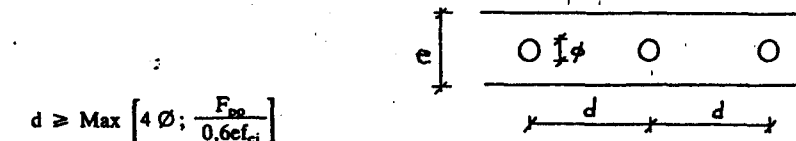


Fig. 20-3. Dalle. Distance entre câbles

$$d \geq \text{Max} \left[4 \varnothing ; \frac{F_{po}}{0,6 e f_{cj}} \right]$$

où : e est l'épaisseur de la pièce,

F_{po} la force de précontrainte à l'origine des armatures,

f_{cj} la résistance caractéristique à la compression du béton à j jours.

Ceci afin d'éviter un splitage de la pièce suivant son plan moyen.

3.4. Distance des armatures de précontrainte aux parements

Pour des raisons de protection des armatures contre la corrosion, l'enrobage minimal des aciers doit satisfaire aux conditions suivantes (fig. 20-4) :

$$c = \text{Max} \left(\frac{3}{4} a; \phi; d \right)$$

avec :

$d = 3 \text{ cm}$ pour les ouvrages à l'abri des intempéries,

$= 4 \text{ cm}$ pour les ouvrages courants,

$= 5 \text{ cm}$ pour les ouvrages soumis à une atmosphère agressive (prévoir également un dosage élevé en ciment),

$a =$ dimension horizontale du rectangle circonscrit au conduit ou au paquet de conduits,

$\phi =$ diamètre maximum d'une gaine du paquet.

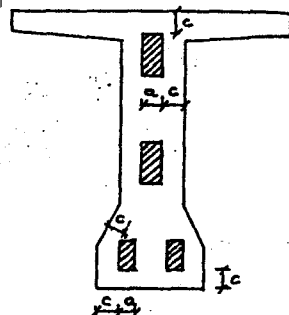


Fig. 20-4. Distances des armatures au parement

3.5. Coupleur

Pour des raisons de longueur de câble insuffisante ou plus généralement au droit des reprises de bétonnage, on dispose des coupleurs, dispositifs destinés à associer deux câbles mis en tension en même temps ou à des moments différents. On doit les disposer dans des zones où la section brute de béton est surabondante pour tenir compte de l'évidement dû au coupleur et des actions parasites engendrées par sa présence.

4. POSITION ET ENROBAGE DES ARMATURES PRÉ-TENDUES

4.1. Le groupement des armatures en paquets est interdit pour ne pas amoindrir les qualités d'adhérence.

4.2. Espacement des armatures de précontrainte

Les armatures de précontrainte par pré-tension ne doivent pas être espacées de moins de trois diamètres entr'axes (fig. 20-5). De plus, leur distance aux armatures passives doit satisfaire les conditions du béton armé (BAEL, chapitre A7).

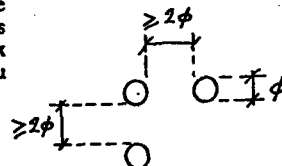


Fig. 20-5. Pré-tension.
Distance entre armatures

4.3. Distance minimum des armatures aux parements

L'enrobage minimum (distance entre le nu de l'armature et le parement) doit être au minimum de 2,5 fois son diamètre. Il doit d'autre part être supérieur à :

— 1 cm pour les parements coffrés situés dans des locaux couverts et clos et non exposés aux condensations ou à des actions agressives;

— 3 cm pour les parements coffrés exposés aux intempéries, aux condensations, au contact d'un liquide;

— 3 et 4 cm pour les parements non coffrés correspondant respectivement aux deux cas précédents;

— 5 cm pour les ouvrages soumis à des atmosphères agressives.



Nettoyage des gaines (eau et air comprimé) (doc. S.F.P.)

21

EXEMPLES DE POUTRE ISOSTATIQUE

Les poutres isostatiques, sur deux appuis simples, sont très courantes du fait de leur simplicité de calcul et de mise en œuvre. Par rapport à une poutre continue, elles ont l'inconvénient d'avoir une déformée plus importante à inertie égale.

Les sections des poutres les plus courantes vont de la section rectangulaire pour les dalles pleines ou les ponts-dalles aux poutres en T ou double T, quelquefois aux poutres-caissons ou dalles alvéolées (fig. 21-1).

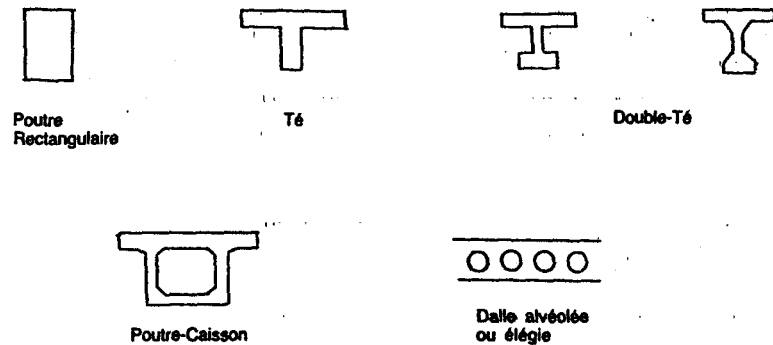


Fig. 21-1. Différents types de section de poutre

Le choix de telle ou telle section est fonction de l'utilisation de la poutre, de son coût et de la portée. Ainsi pour des ponts de petite portée, on pourra utiliser la dalle-pleine ou alvéolée, pour des portées plus grandes, des poutres en T ou double-T.

Pour les grandes portées, on utilisera des poutres double-Té ou des poutres caissons.

Une poutre fabriquée en grand nombre d'exemplaires pourra avoir une forme plus complexe qu'une poutre unique.

Nous traiterons ci-après deux exemples :

- un pont-dalle pleine de 24 m de portée ;
- un pont à poutres sous chaussées indépendantes.

1. PONT-DALLE

1.1. Données du problème

On se propose de dimensionner la section du béton et la précontrainte d'un pont-dalle de 24 m de portée en classe II de précontrainte pour une charge $A(\ell) = 12 \text{ kN/m}^2$ et des superstructures représentant la chaussée, les trottoirs, les garde-corps et divers de 3 kN/m^2 .

Nous prendrons un béton de contrainte caractéristique $f_{c28} = 30 \text{ MPa}$ et des aciers en torons T 15 de limite élastique $f_{pe1} = 1623 \text{ MPa}$, et de limite de rupture $f_{pr1} = 1814 \text{ MPa}$. Nous supposons que la contrainte des aciers après pertes est de 1210 MPa .

Pour simplifier les calculs nous supposons que les calculs seront exécutés avec la précontrainte probable en ELU et en ELS.

1.2. Calcul des sollicitations (pour une largeur de 1 m)

1.2.1. En ELS

• Moment dû :

— aux charges permanentes g :

$$M_g = \frac{g l^2}{8} = g \times \frac{24^2}{8} = 72 g$$

— aux charges de superstructures :

$$M_s = 3 \times \frac{24^2}{8} = 216 \text{ kNm/m} = 0,216 \text{ MNm/m}$$

— aux charges d'exploitation :

$$M_q = 12 \times \frac{24^2}{8} = 864 \text{ kNm} = 0,864 \text{ MNm/m}$$

• Effort tranchant dû :

— à g : $V_g = 12 g$

— à s : $V_s = 0,036 \text{ MN}$

— à q : $V_q = 0,144 \text{ MN}$

1.2.2. En ELU

• Moment dû :

— à g : $M_{gu} = 1,35 \times 72 g = 97,2 g$

— à s : $M_{su} = 1,35 \times 0,216 = 0,292 \text{ MNm}$

— à q : $M_{qu} = 1,50 \times 0,864 = 1,296 \text{ MNm}$

• Effort tranchant dû :

— à g : $V_{gu} = 16,2 g$

— à s : $V_{su} = 0,0486 \text{ MN}$

— à q : $V_{qu} = 0,216 \text{ MN}$

1.3. Epaisseur de la dalle et câblage

Supposons la section sous-critique.

Le module d'inertie d'une section sous-critique est donné par $I/v = \frac{\Delta M}{\Delta \sigma}$, avec : ΔM = variation maximum de moment après mise en tension.

Nous effectuons les calculs en phase de service, les superstructures étant déjà posées et comptées pour leur valeur. Nous vérifierons ensuite que les valeurs trouvées pour la hauteur de la section conviennent en phase de construction.

1.3.1. Contraintes admissibles (fig. 21-2)

$\bar{\sigma}_{cs} = 0,6 f_{c28} = 18 \text{ MPa}$ en combinaisons rares.

$\bar{\sigma}_{ci} = 0,5 f_{c28} = 15 \text{ MPa}$ en combinaisons quasi-permanentes.

$\bar{\sigma}_{ti} = -f_{ct28} = -(0,06 f_{c28} + 0,6)$
 $= -2,4 \text{ MPa}$ en zone d'enrobage.

$\bar{\sigma}_{ts} = -1,5 f_{ct28} = -3,6 \text{ MPa}$

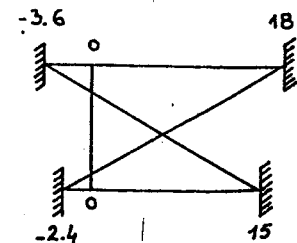


Fig. 21-2. Contraintes admissibles

1.3.2. Calcul de l'épaisseur h de la dalle

$$\Delta M = M_q = 0,864 \text{ MNm}$$

$$\Delta \bar{\sigma}_s = \bar{\sigma}_{cs} - \bar{\sigma}_{ts} = 21,6 \text{ MPa}$$

$$\Delta \bar{\sigma}_i = \bar{\sigma}_{ci} - \bar{\sigma}_{ti} = 17,4 \text{ MPa}$$

d'où par symétrie :

$$\frac{I}{v} = \frac{I}{v'} \geq \frac{\Delta M}{\Delta \bar{\sigma}_i} = \frac{0,864}{17,4} = 0,05 \text{ m}^3$$

et comme pour une dalle de largeur $b = 1$ m, $l/v = \frac{h^2}{6}$, on a : $\frac{h^2}{6} = 0,05$
d'où : $h = 0,546$ m.

Nous retiendrons : $h = 0,55$ m

1.3.3. Détermination de P et e_o

Nous supposons la section sous-critique ; on a alors :

$$P_{\text{sous}} = \frac{\Delta M}{\rho h} + \frac{S}{h} (v \cdot \bar{\sigma}_{ti} + v' \cdot \bar{\sigma}_{tr})$$

Avec ρ rendement qui vaut 1/3 pour une section rectangulaire et $h = 0,55$ m, on trouve :

$$P_{\text{sous}} = \frac{0,864 \times 3}{0,55} - \frac{0,55}{0,55} \cdot \left(\frac{0,55}{2} \right) (3,6 + 2,4) = 3,063 \text{ MN}$$

Le poids mort de la dalle vaut : $g = 25 \times 0,55 = 13,75 \text{ kN/m}^2$
d'où le moment : $M_g = 72 \times 13,75 \times 10^{-3} = 0,99 \text{ MNm}$
et le moment maximum : $M_{\text{max}} = 0,99 + 0,216 + 0,864 = 2,07 \text{ MNm}$.

L'excentricité est donnée par $e_o = \rho v - \frac{M_{\text{max}} + \rho S v \bar{\sigma}_{ti}}{P}$

$$e_o = \frac{0,55}{6} - \frac{2,07 - 0,55/3 \times 0,55/2 \times 2,4}{3,063} = -0,545 < - (v' - d')$$

Cette valeur donne une position du câble à l'extérieur de la section. Celle-ci est donc surcritique. Pour un enrobage entre axe de gaine et nu du béton de $1,5 \phi_s$, on a pour des câbles 12 T 15, de diamètre de gaine de 80 mm :

$$d' = 1,5 \times 8 = 12 \text{ cm d'où : } e_o = - \left(\frac{0,55}{2} - 0,12 \right) = -0,155 \text{ m}$$

d'où :

$$P_{\text{sur}} = \frac{M_{\text{max}} + \rho S v \bar{\sigma}_{ti}}{\rho v + v' - d'} = \frac{2,07 - 0,55/3 \times 0,55/2 \times 2,4}{0,55/6 + 0,155}$$

$P_{\text{sur}} = 7,901 \text{ MN}$, la section est très nettement surcritique : ($P_{\text{sur}} \gg P_{\text{sous}}$).

Il nous faut vérifier que la section de béton est suffisante par :

$$\frac{I}{v} \geq \frac{P \rho h}{\bar{\sigma}_{ca} + \frac{v}{v'} \cdot \bar{\sigma}_{ti}} = \frac{7,9 \times 0,55/3}{18 - 2,4} = 0,093 \text{ m}^3$$

$$\text{d'où : } h = \sqrt{6 \times 0,093} = 0,75 \text{ m.}$$

Puis on détermine :

$$g = 0,01875 \text{ MN/m}$$

$$M_g = 1,35 \text{ MN/m}$$

$$M_{\text{max}} = 2,43 \text{ MNm}$$

$$P_{\text{sur}} = \frac{2,43 - \frac{0,75^2}{6} \times 2,4}{0,75/6 + 0,75/2 - 0,12} = 5,8 \text{ MN}$$

$$\frac{I}{v} = \frac{5,80 \times 0,75/3}{15,6} = 0,093 = \frac{0,75^2}{6}$$

La section $h = 0,75$ m convient donc.

$$h = 0,75 \text{ m}$$

$$P = 5,80 \text{ MN}$$

$$P_{\text{sous}} = \frac{\Delta M}{\rho h} + \frac{S}{h} (v \cdot \bar{\sigma}_{ti} + v' \cdot \bar{\sigma}_{tr})$$

$$= \frac{0,864}{0,75/3} - \frac{0,75}{2} (2,4 + 3,6) = 1,206 \text{ MN} < P_{\text{sur}}$$

La section est bien surcritique et $e_o = - \left(\frac{0,75}{2} - 0,12 \right) = -0,255 \text{ m}$.

Cette solution est-elle la plus économique ?

Pour cela essayons pour différentes valeurs de h de calculer la précontrainte P et le coût béton + aciers avec un rapport du prix du m^3 de béton au kg d'acier égal à k . Pour une contrainte finale des aciers de l'ordre de 1210 MPa, le coût de la précontrainte est donné par :

$$\frac{P}{1210} \times 7850 = 6,49 P \text{ (P en MN)}$$

et du béton par : kh (h en m), d'où le coût global (tableau 21-1).

$$c = 6,49 P + kh.$$

On constate que le coût minimum est obtenu pour h compris entre 0,90 m et 1,00 m. Cependant le coût global devrait tenir compte du supplément de poids sur les fondations. Dans notre exemple la différence de prix entre les hauteurs 1,00 et 0,75 m n'est que de 3,7%.

Nous retiendrons :

$$h = 0,75 \text{ m}$$

$$P = 5,80 \text{ MN}$$

$$e_o = -0,255 \text{ m}$$

1.3.4. Vérification en ELU de la section médiane

— moment avec : $g = 0,75 \times 25 \times 10^{-3} = 0,01875 \text{ MN/m}$

$$\text{et : } M_u = 97,2 g + 0,292 + 1,296 = 3,41 \text{ MNm}$$

$$\text{— moment réduit : } \mu = \frac{M_u}{b d^2 \sigma_{bc}}$$

Tableau 21.1

h (en m)	P _{per}	P _{perm}	coût k = 30	coût k = 25
0,75	5,802	1,206	60,15	56,40
0,80	5,477	0,840	59,55	55,55
0,85	5,196	0,499	59,22	54,97
0,90	4,950	0,180	59,13	54,63
0,95	4,732	—	59,21	54,46
1,00	4,537	—	59,45	54,45
1,10	4,200	—	60,25	54,76
1,20	3,917	—	61,42	55,42
1,30	3,675	—	62,85	56,35
1,40	3,462	—	64,47	57,47

avec: $d = 0,75 - 0,12 = 0,63$ m
 $b = 1,0$ m

$$\bar{\sigma}_{bc} = \frac{0,85 f_{c28}}{\gamma_b} = \frac{0,85 \times 30}{1,5} = 17 \text{ MPa}$$

d'où:

$$\mu = 0,505 > 0,5, \text{ pas de racine à l'équation } \xi = \frac{x}{d} = 1,25 (1 - \sqrt{1 - 2\mu}).$$

La section de béton, ou sa résistance, est insuffisante. Choisissons d'augmenter l'épaisseur de la dalle à 0,80 m et la résistance du béton à $f_{c28} = 35$ MPa.

On trouve alors:

$$M_u = 3,532 \text{ NMm}$$

$$\mu = 0,3851$$

$$\xi = 0,6509$$

$$\Delta \epsilon_3 = 3,5 \frac{1 - \xi}{\xi} = 1,878 \text{‰}$$

Pour $h = 0,80$ m, nous avons trouvé $P = 5,477$ MN (voir tableau 21-1)

$$\text{soit: } A_p = \frac{5,477}{1,210} \times 10^6 = 4,526 \text{ mm}^2$$

$$\text{espacement: } s = \frac{12 \times 139}{4,526} = 0,3685 \rightarrow s = 0,36 \text{ m (12 T 15)}$$

$$\text{d'où: } A_p = \frac{12 \times 139}{0,36} = 4,633 \text{ mm}^2$$

$$\sigma_1 = \frac{P_1}{A_p} = 1,182,1 \text{ MPa} < 0,9 \frac{f_{c28}}{\gamma_p} = \frac{0,9 \times 1,623}{1,15} = 1,270,2 \text{ MPa}$$

$$\text{donc: } \epsilon_1 = \sigma_1 / E_p = 6,222 \text{‰ (zone élastique).}$$

D'autre part, il nous faut calculer la contrainte du béton au niveau du câble (fig. 21-3).

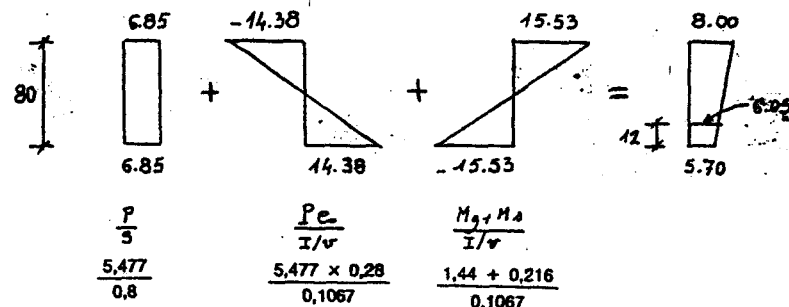


Fig. 21-3. Diagramme des contraintes

$$\text{d'où: } \sigma_b = 6,05 \text{ MPa}$$

$$\Delta \sigma_2 = 5\sigma_b = 30,2 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \sigma_1 + \Delta \sigma_2 = 1,182,1 + 30,2 = 1,212,3 < 1,270,2 \text{ MPa}$$

$$\text{donc: } \epsilon_2 = \frac{1,212,3}{190,000} = 6,381 \text{‰}$$

$$\text{soit: } \epsilon_3 = \epsilon_2 + \Delta \epsilon_3 = 6,381 + 1,878 = 8,259 \text{‰}$$

qui donne une contrainte calculée à partir de l'équation de l'acier:

$$0,008259 = \epsilon_3 = \frac{\sigma_3}{E_p} + 100 \left(\frac{\sigma_3 \times 1,15}{1,623} - 0,9 \right)^2$$

$$\text{d'où: } \sigma_3 = 1,406,9 \text{ MPa}$$

$$P_3 = A_p \sigma_3 = 6,52 \text{ MN}$$

$$F_b = 0,8 \xi b d \cdot \bar{\sigma}_{bc} = 0,8 \times 0,6509 \times 1 \times 0,68 \times 19,833 = 7,023 > P_3$$

La section d'acier est insuffisante, nous pouvons donc ajouter des aciers de précontrainte tels que l'égalité $F_b = P_3$ soit vérifiée*.

Essayons un entr'axe de câble de 0,33 m, on a alors:

$$A_p = \frac{12 \times 139}{0,33} = 5,054 \text{ mm}^2,$$

$$P_{\text{max possible}} = 5,054 \times 1,210 \times 10^{-6} = 6,116 \text{ MN.}$$

Essayons, pour limiter les déformées dues au fluage de prendre une contrainte constante sous l'action des charges permanentes et de la précontrainte ce qui conduit à:

$$M_2 + M_1 = -Pe_0$$

$$\text{d'où: } P = - \frac{M_2 + M_1}{e_0} = \frac{1,44 + 0,216}{0,28} = 5,914 \text{ MN} < 6,116.$$

* ou des aciers passifs de même centre de gravité: $A_s \geq \frac{F_b - P_3}{f_y/\gamma_s}$

Donc $P = 5,914$ MN donne: $\sigma_1 = \frac{P}{A_p} = \frac{5,914 \times 10^6}{5\,054} = 1\,170,2$ MPa.

Comme: $\sigma_1 < 1\,270,2$ MPa, on a $\epsilon_1 + \frac{\sigma_1}{E_p} = \frac{1\,170,2}{190\,000} = 6,159\%$.

D'autre part la contrainte du béton au niveau du câble vaut:

$\sigma_b = \frac{P}{S} = \frac{5,914}{0,8} = 7,39$ MPa, car la contrainte est constante dans toute la section.

$\Delta\sigma_2 = 5\sigma_b = 37$ MPa,

$\sigma_2 = \sigma_1 + \Delta\sigma_2 = 1\,170,2 + 37 = 1\,207,2 < 1\,270,2$.

d'où: $\epsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E_p} = 6,353\%$

et $\epsilon_3 = \epsilon_2 + \Delta\epsilon_3 = 6,353 + 1,878 = 8,231\%$

qui d'après l'équation de l'acier donne:

$\sigma_3 = 1\,406,2$ MPa

$P_3 = A_p \cdot \sigma_3 = 7,107$ MN $> F_b = 7,023$, ce qui est vérifié,

donc:

$P = 5,914$ MN	$e_o = -0,28$ m	$f_{c28} = 35$ MPa	$h = 0,80$ m
----------------	-----------------	--------------------	--------------

1.3.5. Câblage

Le tracé du câble devra s'inscrire dans le fuseau de passage qui a l'allure de la figure 21-4 avec:

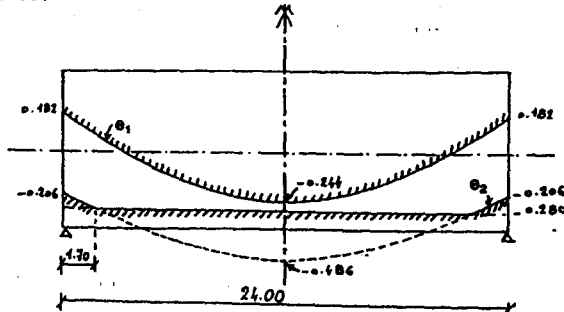


Fig. 21-4. Fuseau de passage du câble.

$$e_1 = \rho v - \frac{M_{\max} + \rho S v \bar{\sigma}_{u1}}{P}$$

$$e_2 = -\rho v' - \frac{M_{\min} - \rho S v' \bar{\sigma}_{u2}}{P}$$

avec: $\bar{\sigma}_{u1} = -f_{c28} = -(0,06 \times 35 + 0,6) = -2,70$ MPa

$\bar{\sigma}_{u2} = -1,5 f_{c28} = -4,05$ MPa

$g = 25 \times 0,80 \times 10^{-3} = 0,020$ MN/m

$$M_1(x) = \frac{g(L-x)x}{2} = 0,01x(24-x)$$

$$M_2(x) = \frac{0,003x}{2}(L-x)$$

$$M_3(x) = \frac{0,012x}{2}(L-x)$$

$$M_1 + M_2 = M_{\min}(x) = 0,0115x(L-x) \text{ (maximum} = 1,656 \text{ MNm)}$$

$$M_1 + M_2 + M_3 = M_{\max}(x) = 0,0175x(L-x) \text{ (maximum} = 2,52 \text{ MNm)}$$

$$e_1(x) = 0,8/6 - \frac{0,0175x(L-x) - 0,80^2/6 \times 2,7}{5,914}$$

$$e_1(x) = 0,1820 - \frac{x(24-x)}{337,9}$$

$$e_2(x) = -0,8/6 - \frac{0,0115x(24-x) + 0,8^2/6 \times 4,05}{5,914}$$

$$e_2(x) = -0,2064 - \frac{x(24-x)}{514,3}$$

Ce sont les équations de deux paraboles, auxquelles on doit ajouter la droite $e'_2 = -0,28$ m.

x	e_1	e_2
0	0,182	-0,206
3	-0,004	-0,280
6	-0,138	-0,280
9	-0,218	-0,280
12	-0,244	-0,28 (-0,486)

On remarque que le fuseau de passage est ouvert, ce qui confirme que l'on a plus de précontrainte que strictement nécessaire.

Si l'on veut annuler complètement toute flèche due aux charges permanentes et à la précontrainte, nous devons avoir un tracé de câble parabolique funiculaire des charges permanentes $M_2 + M_3$, passant à mi-travée par le point $e_o = -0,28$ m et sur appui à mi-hauteur de la poutre (fig. 21-5).

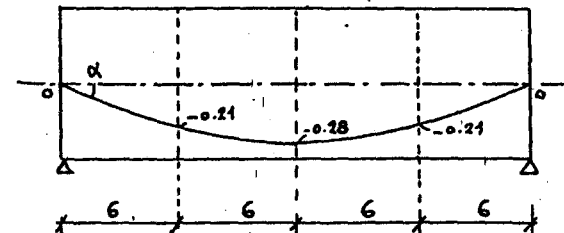


Fig. 21-5. Câble funiculaire des charges permanentes

1.4. Effort tranchant

L'effort tranchant ultime vaut pour les charges permanentes :

$$V_{gs} = 16,2 \text{ g} = 16,2 \times 0,8 \times 25 \times 10^{-3} = 0,324 \text{ MN}$$

L'angle α à l'appui est tel que :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \times 0,280}{12} = 0,0467$$

d'où : $\sin \alpha = 0,0466$

$$P \sin \alpha = 0,0466 \times 5,914 = 0,276 \text{ MN}$$

$$\text{d'où : } V_{\text{red},u} = V_{gs} + V_{su} + V_{gs} - P \sin \alpha = 0,324 + 0,0486 + 0,216 - 0,276 = 0,313 \text{ MN}$$

soit un cisaillement ultime :

$$\tau_u = \frac{1,5V}{h} \text{ réd. } u = \frac{1,5 \times 0,313}{0,80} = 0,587 \text{ MPa.}$$

Cette contrainte doit être inférieure à $0,06 f_{c28}$ pour éviter de mettre des armatures d'effort tranchant, compte tenu du fait que la dalle est coulée sans reprise de bétonnage : $\tau_u = 0,587 < 0,06 \times 35 = 2,1 \text{ MPa}$, ce qui est vérifié.

Pas d'armature d'effort tranchant.

1.5. Vérification des contraintes

A mi-travée, avec $S = 0,80 \text{ m}^2$ et $\frac{1}{v} = \frac{1}{v'} = \frac{0,8^2}{6} = 0,1067 \text{ m}^3$

$$M_d + M_s = 1,656 \text{ MNm} \quad M_g = 0,864 \text{ MNm}$$

on a le diagramme des contraintes (fig. 21-6).

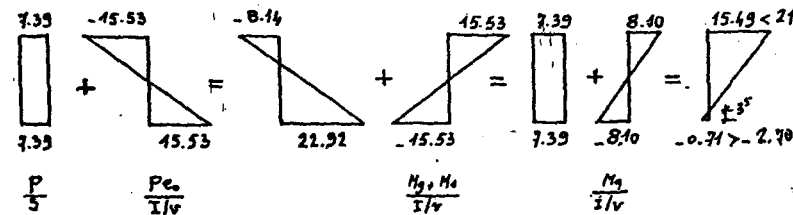


Fig. 21-6. Diagramme des contraintes

1.6. Aciers passifs

Dans les zones tendues, en partie inférieure à mi-travée, on disposera d'un pourcentage minimum d'acier passif :

$$A_s = \frac{B_t}{1000} + \frac{N_{Bt}}{f_e} \times \frac{f_{tj}}{\sigma_{Bt}}, \text{ avec } B_t = 0,035 \text{ m}^2, N_{Bt} = 1/2 B_t \sigma_{Bt}$$

$$N_{Bt} = 1/2 \times 0,035 \times 0,71 = 0,0125 \text{ MN}, \sigma_{Bt} = 0,71 \text{ MPa}, f_{tj} = 2,7 \text{ MPa}$$

$$\text{d'où : } A_s = \frac{0,035}{1000} + \frac{0,0125}{400} \times \frac{2,7}{0,71} = 1,54 \times 10^{-4} \text{ m}^2 = 1,54 \text{ cm}^2.$$

Il est prudent pour :

- limiter les fissurations dues au retrait,
- maintenir les câbles et chaises des câbles,

de disposer des armatures de peau égales à $3 \text{ cm}^2/\text{m}$ de parement dans le sens longitudinal et $2 \text{ cm}^2/\text{m}$ dans le sens transversal, soit : 3 HA 12 par mètre et 3 HA 10 par mètre respectivement,

Ces armatures sont suffisantes pour reprendre les tractions du béton en zone centrale.

1.7. Vérifications des contraintes en phase de construction

En supposant que la valeur de la précontrainte à mi-travée à l'instant initial vaut :

$$P_1 = 6,80 \text{ MN},$$

la mise en précontrainte ayant lieu à j jours, la résistance caractéristique vaut :

$$f_{cj} = 0,685 f_{c28} \log(j + 1).$$

Les contraintes admissibles en phase de construction sont :

$$\bar{\sigma}_{cs} = \bar{\sigma}_{ci} = 0,6 f_{cj}$$

$$\bar{\sigma}_u = f_{tj} = -(0,06 \times f_{cj} + 0,6)$$

$$\bar{\sigma}_{us} = -1,5 f_{tj} \text{ (fig. 21-7)}$$

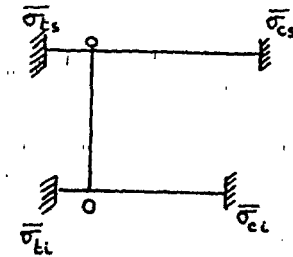


Fig. 21-7. Contraintes admissibles

Si les superstructures sont posées peu de temps après la mise en précontrainte et si les charges d'exploitation le sont après mise en place des superstructures, on aura les diagrammes des contraintes de la figure 21.8. On comptera les surcharges de chantier pour 5 kN/m^2 (M_s).

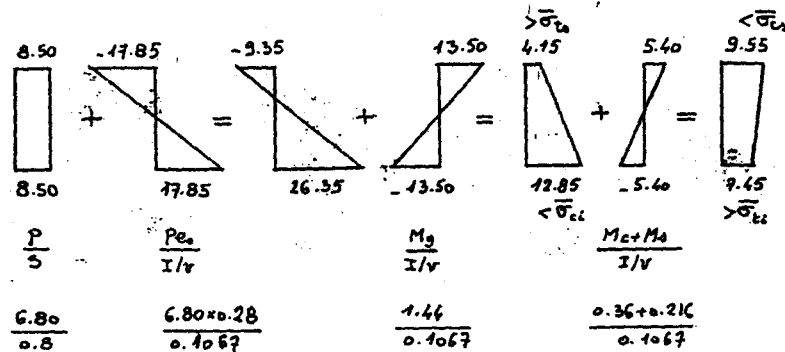


Fig. 21-8. Diagramme des contraintes

La mise en tension pourrait se réaliser lorsque :

$$\bar{\sigma}_{ci} = 12,85 \text{ MPa}$$

d'où $j = 7$ jours

$$f_{ct} = 21,65 \text{ MPa}$$

$$\bar{\sigma}_{ci} = 0,6 \times 21,65 = 12,99 > 12,85 \text{ MPa.}$$

Il conviendra de s'assurer que le béton sous l'ancrage a une résistance suffisante pour résister aux contraintes élevées apportées par la plaque d'ancrage sinon, cette dernière condition dictera la date de mise en tension, à moins de disposer de plaques d'about de béton préfabriquées pour répartir la pression aux ancrages.

REMARQUES:

- La détermination des aciers de précontrainte est quelquefois conditionnée par l'ELS, quelquefois par l'ELU;
- Le rapport des charges variables sur le poids mort est de $12/23 = 0,52$, ce qui est faible. La solution dalle pleine coûte cher pour des travées de l'ordre de 20 à 25 m.
- L'inertie de la dalle pleine étant faible, on aura des flèches importantes sous surcharges; dans notre cas, nous avons une flèche nulle sous charges permanentes $g + s$.

$$f_q = \frac{M_q \ell^2}{9,6 EI}, \text{ avec: } E = 11\,000 \sqrt[3]{35} \text{ en charges de courte durée:}$$

$$E = 35\,980 \text{ MPa; } I = \frac{bh^3}{12} = 0,04267 \text{ m}^4; M_q = 0,864 \text{ MNm, d'où:}$$

$$f_q = \frac{0,864 \times 24^2}{9,6 \times 35\,980 \times 0,04267} = 0,0338 \text{ m, soit } \frac{1}{710^\circ}$$

et $\frac{1}{237^\circ}$ sous charges de longue durée.

2. PONT A POUTRE SOUS CHAUSSEES

Nous nous proposons de dimensionner les poutres d'un pont de 41,5 m de portée à poutres sous chaussée et dont le profil en travers est indiqué sur la figure 21-9.

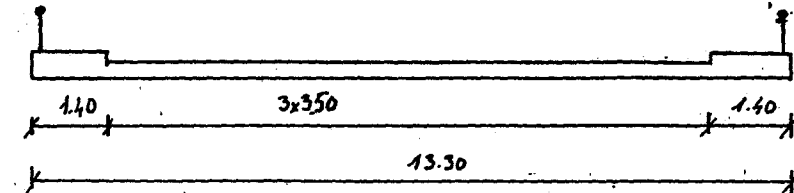


Fig. 21-9. Section transversale du tablier

2.1. Données

2.1.1. Béton

$$f_{ct} = 30 \text{ MPa}$$

$$f_{ct} = 2,4 \text{ MPa.}$$

2.1.2. Acier de précontrainte

Câbles à base de torons T 15:

$$\text{— limite élastique} = f_{pe} = 1\,623 \text{ MPa}$$

$$\text{— limite de rupture} = f_{pr} = 1\,814 \text{ MPa}$$

$$\text{— relaxation} = \rho_{1\,000} = 2,5,$$

$$\text{— section pour 1 T 15} = 139 \text{ mm}^2,$$

$$\text{— diamètre gaine de 9 à 12 T 15: } \varnothing_g = 79 \text{ mm,}$$

$$\text{5 à 7 T 15: } \varnothing_g = 71 \text{ mm}$$

$$\text{8 T 15: } \varnothing_g = 76 \text{ mm.}$$

2.1.3. Charges

En dehors du poids mort des poutres et du hourdis on prendra en compte:

$$\text{— les superstructures du tablier: } 31 \text{ kN/m pour l'ensemble;}$$

$$\text{— les charges routières d'exploitation: } 8,85 \text{ kN/m}^2;$$

$$\text{soit: } 1,2 \times 8,85 = 10,62 \text{ kN/m}^2 \text{ en ELS}$$

$$1,6 \times 8,85 = 14,16 \text{ kN/m}^2 \text{ en ELU}$$

2.2. Contraintes admissibles du béton

2.2.1. En service (fig. 21-10)

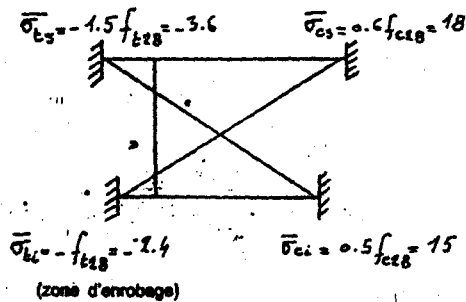


Fig. 21-10. Contraintes admissibles en service

2.2.2. En construction

En supposant que la mise en tension aura lieu à une date de j jours, les résistances à j jours peuvent être calculées par les relations:

$$f_{cj} = f_{ct8} \times 0,685 \log(j + 1), \text{ avec: } j \leq 28$$

$$\text{et } f_{tj} = 0,06 f_{cj} + 0,6 \text{ MPa}$$

et les contraintes admissibles sont lues sur la figure 21-11.

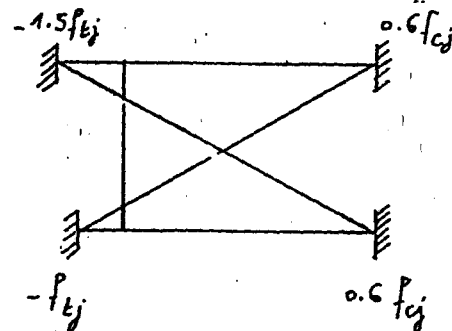


Fig. 21-11. Contraintes admissibles en construction

Cette date de j jours peut être réduite si l'on étuve les poutres.

2.3. Mode de construction

On coule sur une aire de préfabrication des parties réduites en largeur comprenant le talon définitif, une partie de la table supérieure et de l'entretoise. Après durcissement (à 16 jours) on met en tension une première famille de câbles dont les ancrages sont situés dans les abouts verticaux (fig. 21-12).

Les poutres sont mises en place par levage et/ou ripage. Puis le complément de

hourdis et d'entretoise est coulé pour assurer une continuité transversale à l'ensemble et augmenter son inertie.

On met alors, après durcissement de ce béton de deuxième phase, une deuxième famille de câbles, ancrés à l'extrados du tablier par suite du manque de place en extrémité des poutres (les poutres constituent un viaduc de 7 travées isostatiques).

On pourra pour rigidifier l'ensemble transversalement mettre en œuvre une précontrainte transversale dans les entretoises.

On procède ensuite à la réalisation des superstructures trottoirs, chaussées, garde corps...

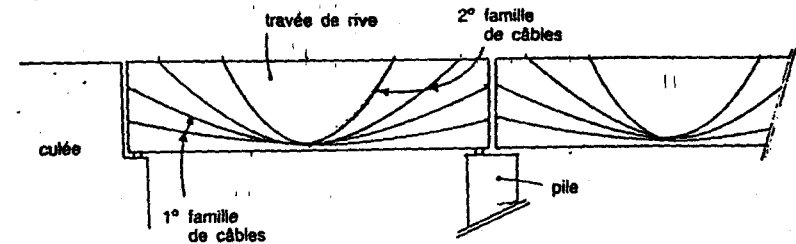


Fig. 21-12. Câblage

2.4. Nombre de poutres

Pour ce type d'ouvrage, la hauteur de la poutre est de l'ordre de 1/15 à 1/18 de la portée — nous prendrons $h = 2,50$ m soit 1/16,6.

L'espacement entr'axe des poutres est de l'ordre de 2,5 m à 3,5 m en fonction de l'épaisseur du hourdis, nous prendrons 3,0 m.

La largeur de la table supérieure de la poutre préfabriquée est de l'ordre de 0,5 à 0,7 h. Nous retiendrons 1,30 m.

Cette largeur intervient:

- dans le poids de l'élément préfabriqué avec les problèmes de manutention que cela pose;
- dans la résistance à la mise en tension des câbles de la première famille;
- dans la résistance au déversement de la poutre préfabriquée, spécialement lors de sa manutention. Les amorces d'entretoises jouent un rôle de raidisseurs;
- dans la possibilité d'éviter d'avoir à couler un complément de hourdis à l'extérieur des poutres de rive, dans des conditions difficiles de porte-à-faux.

Avec un nombre de poutres de 4, on aura un débord de rive de 2,15 m, supérieur à la moitié de l'entraxe.

Avec 5 poutres (fig. 21-13), le débord de rive est de $(13,30 - 4 \times 3) / 2 = 0,65$ m, ce qui correspond à une largeur de poutre préfabriquée de 1,30 m, valeur déjà

choisie par ailleurs — on évitera ainsi un bétonnage extérieur en porte-à-faux (fig. 21-14).

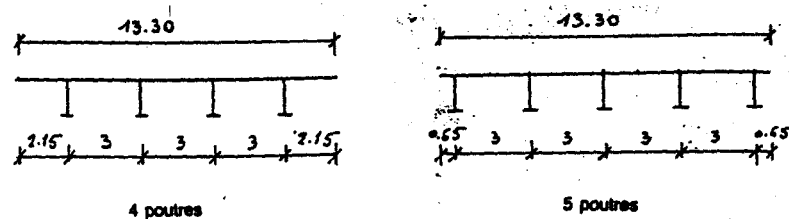


Fig. 21-13. Choix du nombre de poutres

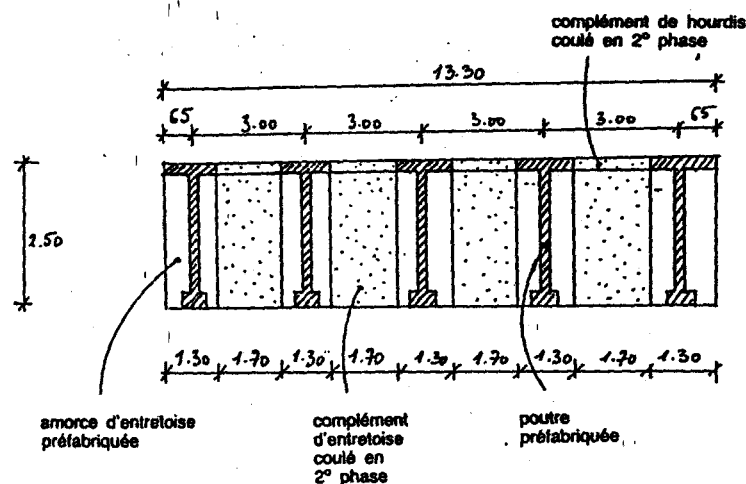


Fig. 21-14. Coupe transversale du tablier

2.5. Géométrie des poutres préfabriquées

2.5.1. Epaisseur de l'âme

L'épaisseur de l'âme dépend en général :

- de la résistance à l'effort tranchant ;
- des conditions d'enrobage des câbles.

En béton précontraint, c'est souvent cette deuxième condition qui prévaut.

Si l'on suppose que l'on utilisera des câbles 8 T 15 ou moins de diamètre maximum

76 mm. La dimension maximum des granulats c_g étant de 25 mm, on réservera $1,5 c_g = 25 \times 1,5 = 38$ mm minimum entre les aciers pour permettre un bétonnage correct. Le diamètre des aciers longitudinaux de peau et transversaux est supposé égal à 10 mm (fig. 21-15).

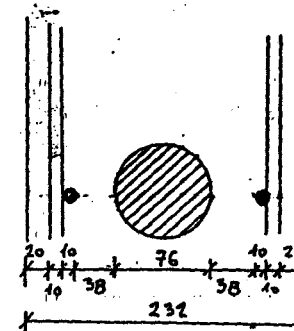


Fig. 21-15. Disposition du câble et des aciers dans l'âme

On retiendra $b_0 = 0,24$ m en section médiane.

On remarquera que n'ayant pas prévu de cheminée de vibration, la vibration devra être extérieure (coffrages vibrants ou masses excentrées).

2.5.2. Epaisseur du hourdis coulé en place en deuxième phase

Les valeurs courantes de l'épaisseur du hourdis en fonction de la distance ℓ_1 entr'axe des poutres sont données dans le tableau suivant :

ℓ_1 cm	2,50	3,00	3,50	3,75	4,00
h_0 cm	17	18	20	21	22

Nous retiendrons pour $\ell_1 = 3$ m, une épaisseur $h_0 = 0,18$ m.

2.5.3. Goussets supérieurs

Leur objet est de faciliter la mise en place du béton et de réduire la portée effective du hourdis. On leur donne une pente de 45 à 60° sur l'horizontale et une largeur de 0,10 m à 0,15 m.

Nous donnerons aussi une légère dépouille au hourdis pour augmenter le moment d'encastrement en continuité transversale et sa résistance à l'effort tranchant (fig. 21-16).

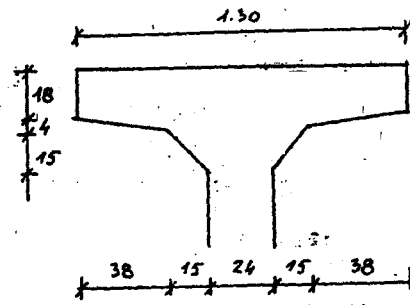


Fig. 21-16. Dimensions de la table

2.5.4. Talon de la poutre

Le rôle du talon de la poutre est :

- de contenir les câbles en partie inférieure de la poutre en respectant les conditions d'enrobage ;
- de résister à la compression due au moment minimum.

Cette dernière condition s'écrit en section sous-critique ou sur-critique :

$$\frac{1}{v'} \geq \frac{\Delta M}{\Delta \sigma_1}$$

Les charges routières d'exploitation valent :

$$q = 8,85 \times 3 = 26,55 \text{ kN/m}$$

$$\text{avec : } \Delta M = \frac{qL^2}{8} = \frac{26,55 \times 41,5^2}{8} \times 10^{-3} = 5,716 \text{ MNm.}$$

Or, les charges routières doivent être majorées de 20 % et nous devons appliquer un coefficient majorateur pour tenir compte de la répartition transversale des charges que nous prendrons égale à 1,05 *a priori*,

$$\text{d'où : } \Delta M = 5,716 \times 1,2 \times 1,05 = 7,202 \text{ MNm}$$

$$\text{et : } \Delta \sigma_1 = 15 + 2,4 = 17,4 \text{ MPa,}$$

$$\text{d'où : } \frac{1}{v'} \geq \frac{7,202}{17,4} = 0,414 \text{ m}^3.$$

La poutre définitive est schématisée sur la figure 21-17 en se fixant une hauteur de talon de 0,3 m, soit environ, 4 $\varnothing_s = 30,4$ cm pour loger deux câbles superposés.

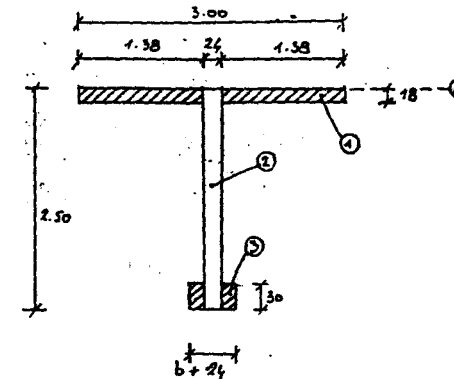


Fig. 21-17. Décomposition de la section en rectangles

Les caractéristiques géométriques de la section sont calculées dans le tableau 21.2.

Tableau 21.2

Section N°	b x h	Aire m²	Distance de G à l'axe Δ	Moment statique /Δ	2/3 h ou d	Inertie/Δ	Inertie propre
1	2,76 x 0,18	0,4968	x 0,09	= 0,04471	x 2/3 x 0,18	= 0,005365	—
2	0,24 x 2,5	0,6000	1,25	0,750	2/3 x 2,50	1,250	—
3	b x 0,30	0,3 b	2,35	0,705 b	2,35	1,65675 b	0,00225 b
Total	S =	1,0968 + 0,3 b	μ =	0,79471 + 0,705 b		1,255365 + 1,659 b	

$$\text{d'où : } v = \frac{\mu}{S} = \frac{0,79471 + 0,705 b}{1,0968 + 0,3 b}$$

$$v' = h - v = \frac{1,94729 + 0,0450 b}{1,0968 + 0,3 b}$$

$$I = I_{\Delta} - Sv^2 = \frac{SI_{\Delta} - \mu^2}{S} = \frac{0,74532 + 1,07566 b}{1,0968 + 0,3 b}$$

$$\frac{1}{v'} = \frac{0,74532 + 1,07566 b}{1,9473 + 0,045 b} = 0,414 \text{ m}^3$$

$$\text{d'où l'inconnue : } b = \frac{0,060858}{1,05703} = 0,058 \text{ m.}$$

Or, nous devons loger les câbles à l'intérieur du talon dans la partie médiane de la poutre (mi-portée).

Avec quatre câbles par lit, nous aurons besoin d'une largeur totale de :

$$9 \varnothing_s = 9 \times 7,6 = 68,4 \text{ cm.}$$

Nous prendrons donc $b = 0,70 \text{ m}$ en aménageant des goussets pour permettre aux câbles situés dans le talon à mi-travée de remonter dans l'âme vers l'appui (fig. 21-18).

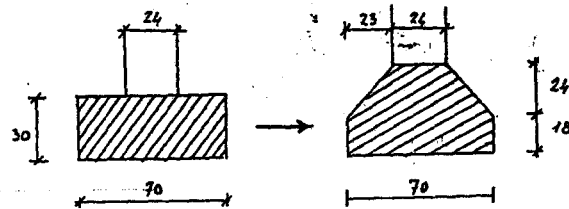


Fig. 21-18. Géométrie du talon

Les caractéristiques définitives de la section sont celles de la figure 21-19 et les caractéristiques géométriques calculées dans les tableaux 21.3 et 21.4.

Tableau 21.3

Section N°	b x h	Section m²	Distance de G à Δ = d	Moment statique μ	$Sd^2 = I_{\Delta 1}$	Inertie propre I_0	$I_{\Delta} = I_{\Delta 1} + I_0$
1	1,06 x 0,18	0,1908	0,09	0,017172	0,001545	0,000515	0,0020600
2	$\frac{0,76}{2} \times 0,04$	0,0152	0,19333	0,002939	0,000568	0,0000014	0,0005694
3	$\frac{0,30}{2} \times 0,15$	0,0225	0,270	0,006075	0,0016403	0,0000281	0,0016684
4	0,30 x 0,04	0,0120	0,200	0,00240	0,000480	0,0000016	0,0004816
5	0,24 x 2,50	0,6000	1,250	0,7500	0,937500	0,3125000	1,250000
6	$\frac{0,46}{2} \times 0,24$	0,0552	2,240	0,123648	0,2769715	0,0001766	0,2771481
7	0,46 x 0,18	0,0828	2,410	0,199548	0,4809107	0,0002236	0,4811343
Poutre préfabriquée		0,9785	—	1,101782	—	—	2,013062
8	1,70 x 0,18	0,306	0,09	0,02754	0,0024786	0,0008262	0,0033048
Section complète		1,2845	—	1,129322	—	—	2,016367

Tableau 21.4

	Unités	Poutre préfabriquée	Section complète
Section S.....	m²	0,9785	1,2845
cdg = μ/S = v.....	m	1,1260	0,8792
y' = h - v.....	m	1,3740	1,6208
$\bar{I} = I_{\Delta} - Sv^2$	m⁴	0,77245	1,02346
I/v.....	m³	0,6860	1,1641
I/v'.....	m³	0,5622	0,6315
ρ.....	—	0,5103	0,5591

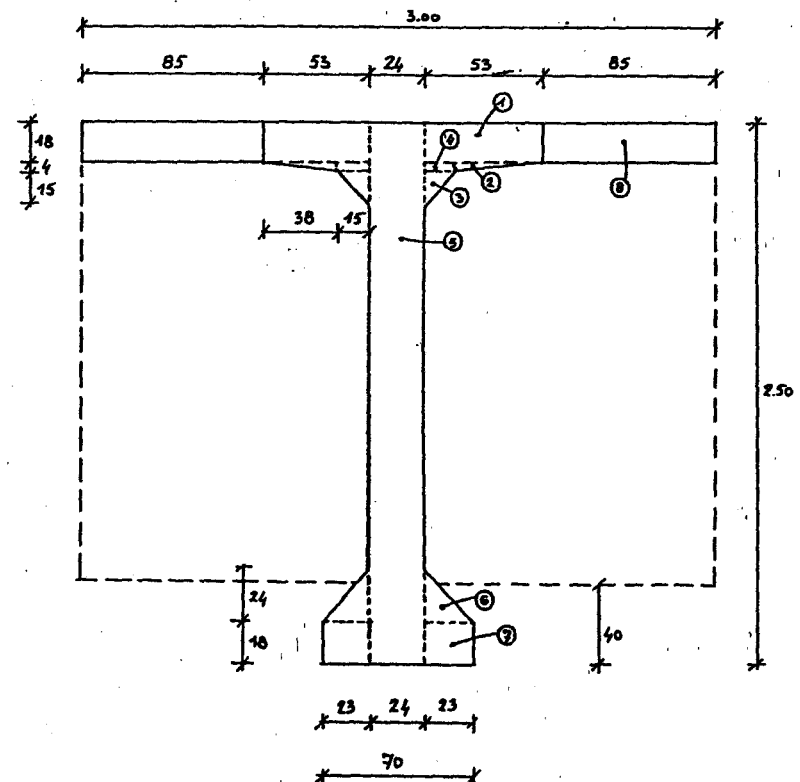


Fig. 21-19. Section transversale d'une poutre

2.5.5. Entretoises

Les entretoises sont destinées à empêcher le déversement du talon de la poutre lorsqu'il est comprimé et de répartir les charges concentrées subies par une poutre sur les autres poutres.

Nous disposerons les entretoises à mi-travée, sur appuis et au 1/4 de travée.

Leur épaisseur sera déterminée principalement par des considérations de bétonnage avec une cheminée pour le pervibrateur de 7 cm. Si elles sont précontraintes avec des câbles dont le diamètre de la gaine est de 53 mm, l'épaisseur est déterminée sur la figure 21-20;

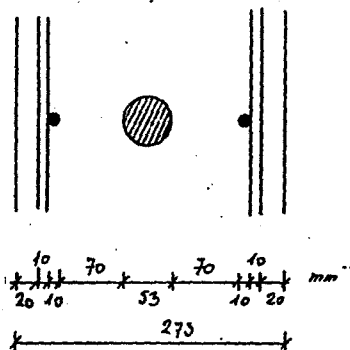


Fig. 21-20. Disposition des armatures dans l'entretoise

soit 28 cm

2.6. Détermination de la précontrainte

2.6.1. Actions

Poids propre:

- poutre seule: $0,9785 \times 25 \times 10^{-3} = 0,02446 \text{ MN/m}$;
- hourdis deuxième phase: $0,306 \times 25 \times 10^{-3} = 0,00765 \text{ MN/m}$;
- amorce entretoise (préfabriquée) = $(2,10 \times 0,53 \times 2 - 0,1908 - 0,0152 - 0,0225 - 0,012) \times 25 \times 10^{-3} \times 0,28$
= $0,013897 \text{ MN}$;
- complément entretoise (CSP)* = $(2,1 - 0,18) \times 0,85 \times 0,28 \times 25 \times 10^{-3} \times 2$
= $0,02283 \text{ MN}$.

Superstructures: 31 kN/m pour cinq poutres soit: 6,2 kN/m par poutre.

Charges d'exploitation: $8,85 \text{ kN/m}^2 \times 3 \text{ m}$, soit 26,55 kN/m par poutre.

* Coulé sur place.

2.6.2. Moments de calcul en ELS

• Poutre préfabriquée sans entretoise:

$$M_{B_1} = g_1 \frac{L^2}{8} = 0,02446 \times \frac{41,5^2}{8} = 5,266 \text{ MNm}$$

• Amorces des entretoises (fig. 21-21)

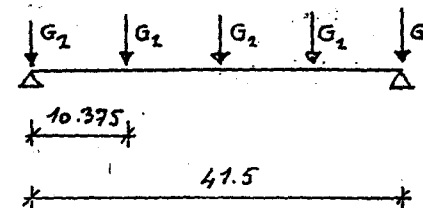


Fig. 21-21. Position des entretoises

$$M_{B_2} = 10,375 G_2 + \frac{41,5}{4} G_2 = 20,75 \times 0,0139$$

$$= 0,288 \text{ MNm}$$

• Complément du hourdis:

$$M_{B_3} = 0,00765 \times \frac{41,5^2}{8} = 1,647 \text{ MNm}$$

• Complément des entretoises:

$$M_{B_4} = 20,75 \times 0,02283 = 0,474 \text{ MNm}$$

• Superstructures:

$$M_1 = s \frac{L^2}{8} = 6,2 \times \frac{41,5^2}{8} \times 10^{-3} = 1,335 \text{ MNm}$$

• Charges d'exploitation avec $1,2 \times 26,55 \text{ MN/m} = 31,86$:

$$M_q = q \frac{L^2}{8} = 31,86 \times \frac{41,5^2}{8} \times 10^{-3} = 6,859 \text{ MNm}$$

2.6.3. Contrainte initiale des câbles

Les pertes instantanées lors de la mise en tension sont de l'ordre de 10 %.

$$\text{Avec: } \sigma_0 = \text{Min} [0,80 f_{ps}; 0,90 f_{ps}]$$

$$= \text{Min} [0,8 \times 1\,814; 0,9 \times 1\,623] = 1\,451 \text{ MPa}$$

d'où: $\sigma_i = 0,9 \times 1\,451 = 1\,306 \text{ MPa}$.

2.6.4. Excentricité

Nous supposons, compte tenu de la portée et du rapport (charges permanentes/charges variables) élevé, que la section est sur-critique.

L'excentricité vaudra donc :

- Première famille de câbles (fig. 21-22)

$$e_o = - (1,3748 - 0,114)$$

$$e_o = - 1,260 \text{ m}$$

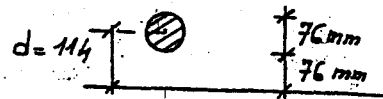


Fig. 21-22. Position d'un câble

- Deuxième famille de câbles (fig. 21-23)

$$e_o = - (1,6208 - 0,152)$$

$$e_o = - 1,469 \text{ m}$$

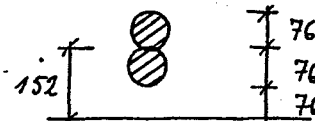


Fig. 21-23. Position de deux câbles

2.6.5. Nombre de câbles de la première famille

Pour la première famille, les deux phases les plus défavorables sont :

- leur mise en tension ;
- juste avant la mise en tension de la deuxième famille et après bétonnage du hourdis et des entretoises complémentaires.

Nous supposons que le calendrier des opérations est le suivant :

Tableau 21.5

Phase	a	b	c	d	e
Date	t_a	t_b	t_c	t_d	$t_e = \infty$
Poutre préfabriquée	Coulage du béton de 1 ^{re} phase	Mise en tension des câbles de la 1 ^{re} famille			
	Précontrainte = Résistance =	$P_o = 1,1 P_i$ (1) $P_i = 1,2 P_A$ $f_{cjb} = 20 \text{ MPa}$	— —	$1,1 P_A$ $f_{cj} = 25 \text{ MPa}$	P_A $f_{c2b} = 30 \text{ MPa}$
Béton coulé en place	—	—	Coulage du béton de deuxième phase	Mise en tension des câbles de la 2 ^e famille	
	Précontrainte = Résistance =	— —	— —	$P_o = 1,1 P_i$ $P_i = 1,15 P_B$ $f_{cj} = 20 \text{ MPa}$	P_B $f_{c2b} = 30 \text{ MPa}$

(1) P_o = précontrainte à l'ancrage avant pertes = $A_p \sigma_{po}$
avec $\sigma_{po} = \text{Min} [0,80 f_{pj}; 0,9 f_{py}] = \text{Min} [0,8 \times 1814; 0,9 \times 1623] = 1451 \text{ MP}$
 P_i = précontrainte initiale après pertes instantanées et avant pertes différées
 P_A ou P_B = précontrainte finale des 1^{re} et 2^e familles de câbles.
Les pertes instantanées et différées ont été estimées en fraction de P_A, P_B .

- A la mise en tension de la première famille (phase b)

Les contraintes devront satisfaire les conditions de contraintes admissibles (fig. 21-24)*.

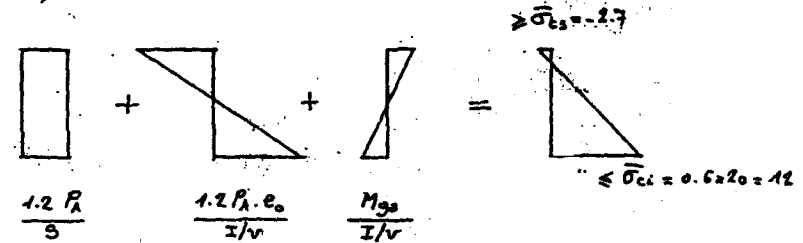


Fig. 21-24. Contraintes admissibles

avec M_{g0} correspondant au poids propre de la poutre seule et des amorces des entretoises :

$$M_{g0} = M_{g1} + M_{g2} = 5,266 + 0,288 = 5,554 \text{ MNm}$$

$$\text{d'où : } \frac{1,2 P_A}{0,9785} - \frac{1,2 P_A \times 1,260}{0,6860} + \frac{5,554}{0,6860} \geq - 2,70 \rightarrow P_A \leq 11,03 \text{ MN}$$

$$\text{et : } \frac{1,2 P_A}{0,9785} + \frac{1,2 P_A \times 1,260}{0,5622} - \frac{5,554}{0,5622} \leq 12 \rightarrow P_A \leq 5,58 \text{ MN}$$

$$\text{d'où : } P_A \leq 5,58 \text{ MN.}$$

- Avant la mise en tension de la deuxième famille et après bétonnage de deuxième phase (phase d)

Les caractéristiques mécaniques sont les mêmes que précédemment et le moment vaut :

$$M_{gd} = M_{g0} + 1,647 + 0,474 = 7,675 \text{ MNm}$$

Le diagramme des contraintes à vérifier est celui de la figure 21-25 ($\sigma_{ca} = 0,6 \times 25 = 15 \text{ MPa}$).

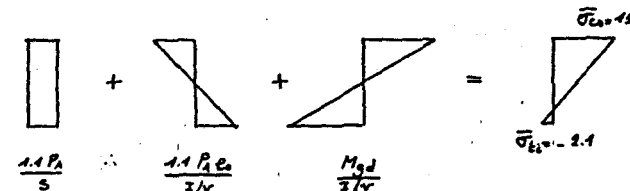


Fig. 21-25. Contraintes admissibles

* Nous ne pouvons utiliser les formules de dimensionnement du chapitre 14, car la section de béton n'est pas la même en construction et en phase définitive.

$$\text{d'où: } \frac{1,1 P_A}{0,9785} - \frac{1,1 P_A \times 1,260}{0,6860} + \frac{7,675}{0,6860} \leq 15 \rightarrow P_A \geq -4,26 \text{ MN}$$

$$\frac{1,1 P_A}{0,9785} + \frac{1,1 P_A \times 1,260}{0,5622} - \frac{7,675}{0,5622} \geq -2,1 \rightarrow P_A \geq 3,21 \text{ MN}$$

soit: $P_A \geq 3,21 \text{ MN}$

On devra alors avoir:

$$3,21 \leq P_A \leq 5,58 \text{ MN}$$

La précontrainte à l'ancrage vaut: $P_o = 1,1 \times 1,2 P_A$

donc: $4,24 \leq P_o = A_{p1} \sigma_{po} \leq 7,36 \text{ MN}$

or comme: $\sigma_{po} = 1451 \text{ MPa}$, on trouve: $2922 \text{ mm}^2 \leq A_{p1} \leq 5072 \text{ mm}^2$
ou n_1 torons T 15 de 139 mm^2 : $21 \leq n_1 \leq 36$.

Nous prendrons quatre câbles 7 T 15 pour la 1^{re}-famille,

d'où: $P_A = 4 \times 7 \times 139 \times 10^{-6} \times 1451 / (1,10 \times 1,2) = 4,28 \text{ MN}$.

2.6.6. Contrainte dans le béton en phase d'

Après coulage du béton de 2^e phase et avant mise en tension des câbles de la 2^e famille, les contraintes sont alors données dans le diagramme de la figure 21-26, avec: $P = 1,1 P_A = 4,71 \text{ MN}$.

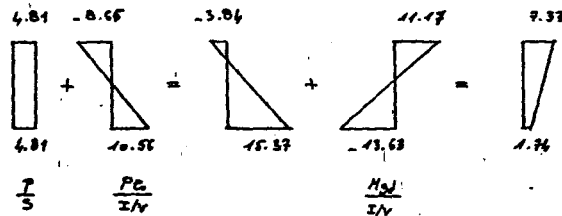


Fig. 21-26. Diagramme des contraintes

2.6.7. Précontrainte de la deuxième famille de câble

En phase finale on devra satisfaire les conditions de contraintes admissibles de la figure 21-27 (phase e) en combinaisons rares, on ajoutera au diagramme phase d' précédent, les contraintes dues aux pertes $0,1 P_A$ entre phase d et e de la première famille de câbles:

Exemples de poutre isostatique

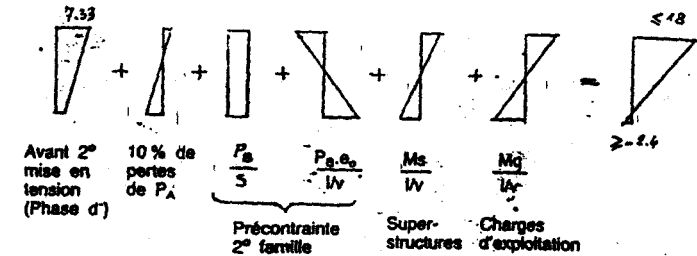


Fig. 21-27. Diagramme des contraintes

$0,1 P_A \left(\frac{1}{S} \pm \frac{e_o v}{I} \right)$ sur la section $(S, I/v, I/v')$ totale,
soit avec 10 % de $P_A = 0,428 \text{ MN}$, en section complète de béton:

$$7,33 + (-0,428 + P_B) \left(\frac{1}{S} \mp \frac{e_o}{I/v} \right) + \frac{M_s}{I/v} + \frac{M_g}{I/v} \leq 18$$

$$7,33 + (-0,428 + P_B) \left(\frac{1}{1,2845} - \frac{1,469}{1,1641} \right) + \frac{1,335}{1,1641} + \frac{6,859}{1,1641} \leq 18$$

$$\rightarrow P_B \geq -7,125 \text{ MN}$$

et:

$$1,74 + (-0,428 + P_B) \left(\frac{1}{1,2845} + \frac{1,469}{0,6315} \right) - \frac{1,335}{0,6315} - \frac{6,859}{0,6315} \geq -2,4$$

$$\rightarrow P_B \geq 3,26 \text{ MN}$$

soit: $P_B \geq 3,26 \text{ MN}$

d'où: P_o à l'ancrage avant pertes

$$P_o = 1,15 \times 1,1 \times P_B \geq 4,124 \text{ MN}$$

$$A_{p2} = \frac{P_o}{\sigma_{po}} \geq \frac{4,124 \times 10^6}{1451} = 2842 \text{ mm}^2$$

$$n_2 \geq \frac{2842}{139} = 20,5 \text{ torons.}$$

Nous retiendrons 2 câbles de 5 T 15 + 2 câbles 6 T 15*

d'où: $A_{p2} = 22 \times 139 = 3058 \text{ mm}^2$

$$P_o = 1451 \times 3058 \times 10^{-6} = 4,437 \text{ MN}$$

$$P_B = \frac{P_o}{1,1 \times 1,15} = 3,51 \text{ MN}$$

* Le même nombre que la première famille pour les grouper par paquets de deux câbles verticalement.

et le diagramme des contraintes finales (fig. 21-28).

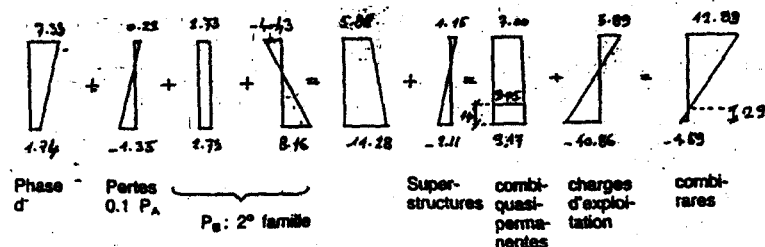


Fig. 21-28. Diagramme des contraintes

On constate :

- une contrainte presque constante sur la section sous charges quasi-permanentes (à vide), nous serons ainsi assurés d'avoir très peu de déformations à vide ;
- une contrainte en fibre supérieure de 12,89 MPa inférieure à la contrainte admissible de 18 MPa ;
- une faible traction sous combinaisons rares en fibre inférieure dans la zone d'enrobage :

$$-1,69 < -2,4 \text{ MPa} = \bar{\sigma}_{bi}$$

qui nécessite des armatures de traction A_s telles que :

$$A_s \geq \frac{B_t}{1000} + \frac{N_{Bt}}{f_{ct}} \cdot \frac{f_{tj}}{\sigma_{bt}}$$

avec : $B_t = 0,197 \text{ m}^2$ (fig. 21-28 et 21-29)

$$N_{Bt} = 0,178 \text{ MN}$$

$$f_{tj} = 2,4 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{bt} = 1,69 \text{ MPa}$$

$$\text{d'où : } A_s = \left(\frac{0,197}{1000} + \frac{0,178}{400} \times \frac{2,4}{1,69} \right) \times 10^4$$

$$A_s = 8,29 \text{ cm}^2 \text{ soit } 5 \text{ HA } 16.$$

2.6.8. Dispositions des câbles dans le talon à mi-portée (fig. 21-29)

Pour pouvoir loger la deuxième famille de câbles avec un enrobage suffisant en partie supérieure du talon, nous devons modifier légèrement les dimensions du talon, ce qui ne change pratiquement rien aux résultats précédents.

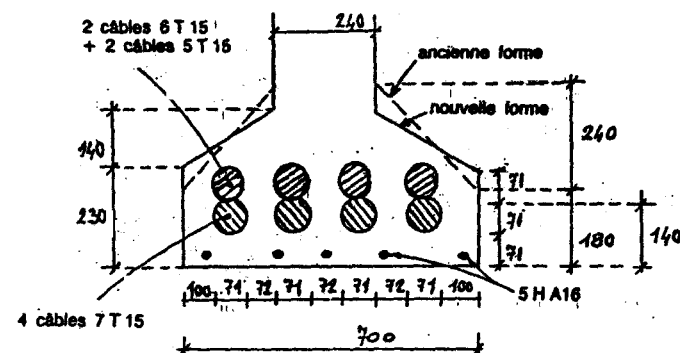


Fig. 21-29. Ferrailage du talon à mi-travée (cotes en mm)

2.7. Vérification à la flexion en ELU

2.7.1. Moment ultime

$$M_u = 1,35 (M_{g1} + M_{g2} + M_{g3} + M_{g4} + M_{g5}) + 1,6 M_{q1} \\ 1,35 (5,266 + 0,268 + 1,647 + 0,474 + 1,335) + 1,6 \times 5,716 = \\ M_u = 21,30 \text{ NMm}$$

2.7.2. Moment résistant de la table

$$\bar{\sigma}_{bcu} = 0,85 \frac{f_{ct28}}{\gamma_b} = \frac{0,85 \times 30}{1,5} = 17 \text{ MPa}$$

$$F_{te} = (b - b_o) h_o \bar{\sigma}_{bcu} = 2,76 \times 0,18 \times 17 = 8,45 \text{ MN.}$$

$$\text{Bras de levier} = h - d' - \frac{h_o}{2} = 2,5 - 0,14 - 0,09 = 2,27 \text{ m}$$

$$\text{Moment résistant } M_{te} = F_{te} \cdot z = 8,45 \times 2,27 = 19,18 \text{ MNm.}$$

Comme $M_{te} < M_u$, la fibre neutre est dans la nervure.

La nervure reprend un moment $M_n = M_u - M_{te} = 2,12 \text{ MNm}$

$$\text{d'où : } \mu = \frac{M_n}{b_o d^2 \bar{\sigma}_{bcu}} = \frac{2,12}{0,24 \times 2,36^2 \times 17} = 0,0933$$

$$\xi = \frac{x}{d} = 1,25 (1 - \sqrt{1 - 2\mu}) = 0,1226 > \frac{h_o}{d} = 0,0763$$

$$\Delta \epsilon_3 = 3,5 \frac{1 - \xi}{\xi} = 25\% > 10\% \text{ donc : } \Delta \epsilon_3 = 10\%$$

* Les charges d'exploitation routières ont été multipliées par 1,2 en ELS, elles doivent être multipliées par 1,6 en ELU (1,07 × 1,5).

• Allongement ε_1

$$\sigma_1 = \frac{P_A + P_B}{A_{p1} + A_{p2}} = \frac{4,28 + 3,51}{50 \times 139} \times 10^6 = 1\,120,9 \text{ MPa}$$

$$\sigma_1 < \frac{0,9 f_{max}}{\gamma_p} = \frac{0,9 \times 1\,623}{1,15} = 1\,270 \text{ MPa}$$

$$\text{donc: } \varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E_p} = \frac{1\,120,9}{190\,000} = 5,90\%$$

• Allongement $\Delta\varepsilon_2$

Contrainte du béton au niveau du câble sous précontrainte plus charges permanentes (fig. 21-28):

$$\sigma_b = 9,05 \text{ MPa}$$

$$\Delta\sigma_2 = 5\sigma_b = 45,2 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \sigma_1 + \Delta\sigma_2 = 45,2 + 1\,120,9 = 1\,166,1 < 1\,270$$

$$\text{donc: } \varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E_p} = \frac{1\,166,1}{190\,000} = 6,14\%$$

• Contrainte σ_3 pour $\varepsilon_3 = \varepsilon_2 + \Delta\varepsilon_3 = 16,14\%$

$$\text{par: } \varepsilon_3 = \frac{\sigma_3}{E_p} + 100 \left(\frac{\gamma_p \sigma_3}{f_{ps}} - 0,9 \right)^5$$

$$0,01614 = \frac{\sigma_3}{190\,000} + 100 \left(\frac{1,15\sigma_3}{1\,623} - 0,9 \right)^5$$

$$\text{d'où: } \sigma_3 = 1\,485,8 \text{ MPa}$$

$$P_3 = 1\,485,8 \times 50 \times 139 \times 10^{-6} = 10,33 \text{ MN}$$

• Résultante de compression du béton

$$F_a = 0,8 \xi_b d \bar{\sigma}_{bcu} = 0,8 \times 0,1226 \times 0,24 \times 2,36 \times 17 = 0,944 \text{ MN}$$

$$F_b = 8,45 + 0,944 = 9,394 \text{ MN};$$

on a bien $P_3 > F_b$ donc la section d'acier de précontrainte est suffisante sans que l'on prenne en compte les aciers passifs.

2.8. Effort tranchant

Pour une poutre, l'effort tranchant vaut:

$$V_{s1} = 0,02446 \times 41,5/2 = 0,508 \text{ MN}$$

$$V_{s2} = 1,5 G_2 = 1,5 \times 0,0139 = 0,021 \text{ MN}$$

$$V_{s3} = 0,00765 \times 41,5/2 = 0,159 \text{ MN}$$

$$V_{s4} = 1,5 \times 0,02283 = 0,034 \text{ MN}$$

$$V_s = \frac{6,2}{1\,000} \times 41,5/2 = 0,129 \text{ MN}$$

$$V_q = \frac{8,85}{1\,000} \times 3 \times \frac{41,5}{2} = 0,551 \text{ MN}$$

2.8.1. Relevage des câbles

Le relevage des câbles de la première famille de câbles sert à diminuer l'effort tranchant, mais on peut aussi moduler l'excentricité sur appui du câble moyen:

- pour augmenter ou diminuer la déformée de la poutre à mi-travée;
- pour satisfaire aux conditions d'appui concernant l'équilibre de la bielle d'about et du coin inférieur (cf. chapitre 18).

Disposition des ancrages en about (famille de câbles).

Ancrages T 15 (fig. 21-30):

- distance entre axe minimum: 36 cm,
- distance minimum de l'axe à la paroi béton: 21 cm.

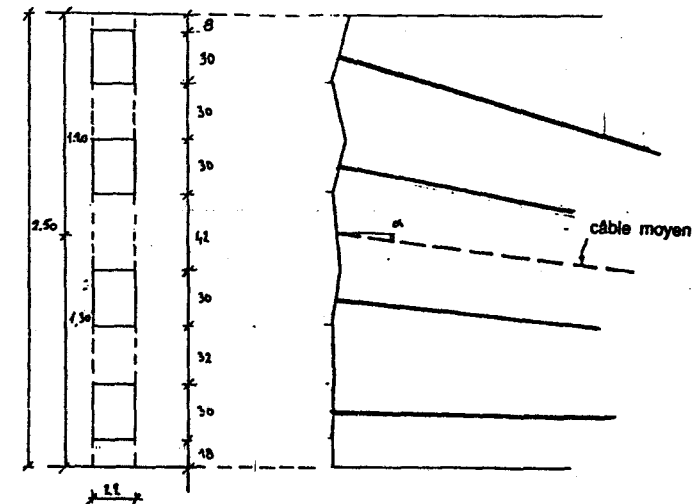


Fig. 21-30 a. Disposition des ancrages en about

Non majoré.

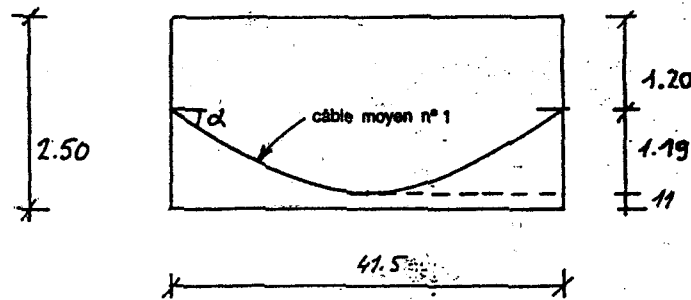


Fig. 21-30 b. Tracé du câble

Fig. 21.30-b. Tracé du câble

d_i	$\operatorname{tg} \alpha_i = \frac{4d_i}{L}$	$\sin \alpha_i$	Nombre de torons
$0,18 + 0,15 - 0,11 = 0,22$	0,0212	0,0212	16
$+ 0,62 = 0,84$	0,0810	0,0807	16
$+ 0,72 = 1,56$	0,1504	0,1487	10
$+ 0,60 = 2,16$	0,2082	0,2038	8
			total = 50

(nombre de torons) $\times$ ($\sin \alpha_i$) / (nombre total):
 = 0,051 pour les 2 câbles de la première famille.
 = 0,1732 pour ceux de la deuxième famille.
 = 0,095 pour l'ensemble des 8 câbles.

2.8.2. En section de béton réduite (Phase b et d⁻)

- Phase b: $V_{\text{red}} = V_{g1} + V_{g2} - (P_A \times 1,2) \sin \alpha$
 $= 0,508 + 0,020 - 4,28 \times 1,2 \times 0,051$
 $= 0,266 \text{ MN}$
- Phase d⁻: $V_{\text{red}} = V_{g1} + V_{g2} + V_{g3} + V_{g4} - (P_A \times 1,1) \sin \alpha$
 $= 0,508 + 0,020 + 0,159 + 0,034 - 1,1 \times 4,28 \times 0,051$
 $= 0,481 \text{ MN}$

- Bras de levier z de la section préfabriquée:

moment statique par rapport au centre de gravité:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 0,1908 \times (1,1260 - 0,09) \\ &+ 0,0152 \times (1,1260 - 0,18 - 0,04/3) \\ &+ 0,0225 \times (1,1260 - 0,18 - 0,04 - 0,15/3) \\ &+ 0,0120 \times (1,1260 - 0,18 - 0,02) \\ &+ 0,24 \times 1,1260 \times 1,1260/2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 0,3944 \text{ m}^3 \\ z &= \frac{I}{\mu_1} = \frac{0,77245}{0,3944} = 1,959 \text{ m} \end{aligned}$$

• Largeur nette: $b_n = b_o - \frac{1}{2} \phi_s = 0,24 - 0,071/2 = 0,204 \text{ m}$

• Cisaillement: $\tau_1 = \frac{-0,481}{0,204 \times 1,959} = -1,20 \text{ MPa}$; $|\tau_1| < \bar{\tau}$
 (ou 0,66 avec $V_{\text{red}} = 0,266 \text{ MN}$).

2.8.3. En section complète (Phase d⁺ et e)

- Phase e

$$\begin{aligned} P_B \sin \alpha &= 3,51 \times 0,1732 = 0,608 \text{ MN} \\ V_{\text{min}} &= V_s - P_B \sin \alpha = 0,129 - 0,608 = -0,479 \text{ MN} \\ V_{\text{max}} &= V_s + 1,2 V_q - P_B \sin \alpha \\ &= 0,129 + 1,2 \times 0,551 - 0,608 = 0,182 \text{ MN} \end{aligned}$$

- Bras de levier: il ne devrait pas être très différent du précédent:

$$\begin{aligned} \mu_2 &= 0,1908 \times (0,8792 - 0,09) \\ &+ 0,0152 \times (0,8792 - 0,18 - 0,04/3) \\ &+ 0,0225 \times (0,8792 - 0,18 - 0,04 - 0,15/3) \\ &+ 0,0120 \times (0,8792 - 0,18 - 0,02) \\ &+ 0,24 \times (0,8792 \times 0,8792/2) \\ &+ 0,306 \times (0,8792 - 0,09) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_2 &= 0,5171 \text{ m}^3 \\ z &= \frac{I}{\mu_2} = \frac{1,02346}{0,5171} = 1,98 \text{ m} \end{aligned}$$

- Cisaillement dû aux superstructures et charges d'exploitation

$$\tau_2 = \frac{-0,479}{1,98 \times 0,204} = -1,19 \text{ MPa ou } 0,182/b_n z = 0,45 \text{ MPa}$$

- Cisaillement total $\tau = \tau_1 + \tau_2 = 0,66 - 1,19 = -0,53 \text{ MPa}$
 ou $= 1,20 + 0,45 = 1,65 \text{ MPa}$

- Cisaillement admissible: $\bar{\tau}$

La contrainte au centre de gravité vaut environ 7,5 MPa (voir fig. 21-28, sous combinaisons quasi-permanentes).

Or: $7,5 \text{ MPa} < 0,4 f_{c28} = 12 \text{ MPa}$

$$\begin{aligned} \text{donc: } \tau^2 &= 0,4 f_{c28} (f_{c28} + \sigma_c) \\ &= 0,4 \times 2,4 (2,4 + 7,5) = 3,08^2 \end{aligned}$$

donc: $|\tau| < \bar{\tau}$

2.8.4. En ELU

$V_{red,u} = 1,35 (V_{g1} + V_{g2} + V_{g3} + V_{g4} + V_s) + 1,6 V_q - P_u \sin \alpha$
 avec $P_u = P$, car il n'y a pas de surtension à l'appui (moment nul) = 4,28 + 3,51
 = 7,79 MN

$V_{red,u} = V_{g1} + V_{g2} + V_{g3} + V_{g4} + V_s - P_u \sin \alpha = 0,849 - 7,79 \times 0,095 = 0,109$ MN
 ou $V_{red,u} = 1,35 \times 0,849 + 1,6 \times 0,551 - 7,79 \times 0,095 = 1,288$ MN

$$\tau_u = \frac{1,288}{0,204 \times 1,98} = 3,19 \text{ MPa} < \frac{f_{ctd}}{6} = 5 \text{ MPa}$$

• *Armatures transversales*: comme il y a reprise de bétonnage, nous prendrons $\beta_u = 45^\circ$.

La section d'acier nécessaire avec les cadres verticaux est donnée par:

$$\frac{A_t}{s_t} = \frac{\tau_u \gamma_s b_n}{f_s} \tan \beta_u = \frac{3,19 \times 1,15 \times 0,204}{400} \times 10^4 = 18,71 \text{ cm}^2/\text{m}$$

La section minimale d'acier vaut:

$$\left(\frac{A_t}{s_t} \right)_{\min} = \frac{0,6 \gamma_s b_n}{f_s} = \frac{0,6 \times 1,15 \times 0,204}{400} \times 10^4 = 3,52 \text{ cm}^2/\text{m}$$

En prenant un cadre HA 12, l'écartement devient:

$$\frac{2 \times 1,13}{18,71} = 0,121 \text{ soit } 0,12 \text{ m sur appui}$$

$$\text{et } \frac{2 \times 1,13}{3,52} = 0,65 \text{ m en travée.}$$

On vérifie bien que l'écartement ne dépasse pas $3b_o = 0,72$ m; 1 m et $0,8 h = 2$ m (fig. 21-31).

REMARQUE:

Si les contraintes de cisaillement avaient été supérieures aux contraintes admissibles, nous aurions eu la ressource de multiplier l'effort tranchant par

$$\left(1 - \frac{5h}{3\ell} \right) \text{ (cf. chapitre 16 § 2.3).}$$

Le cisaillement obtenu aurait eu une valeur diminuée d'environ:

$$\frac{5 \times 2,5}{3 \times 41,5} = 0,10 = 10 \%$$

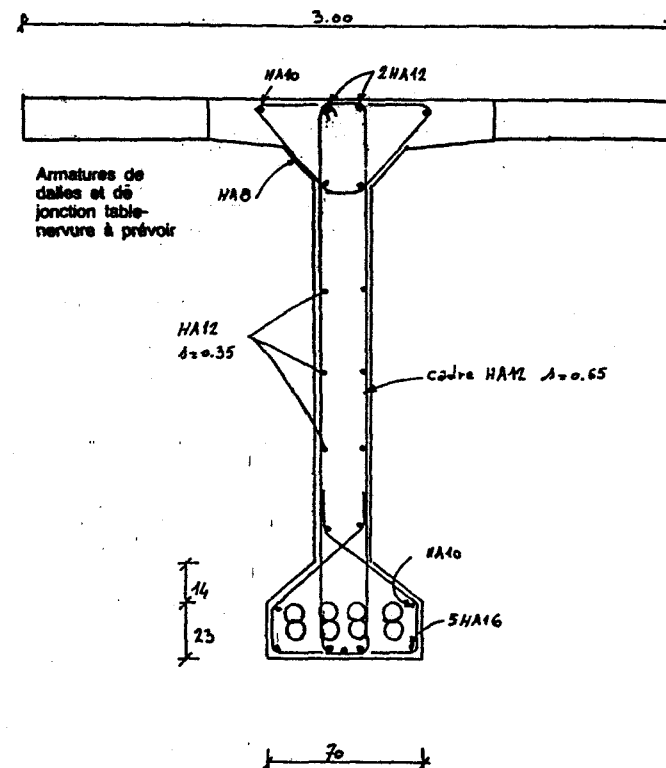


Fig. 21-31. Coupe à mi-travée

22

PONT-DALLE CONTINU A DEUX TRAVÉES ÉGALES

Données :

Pont-dalle de deux travées de 20 m de portée (portée calculée entr'axe des appuis néoprène).

Ces calculs seront effectués sous la seule charge d'exploitation $A(\ell)$. Il conviendra de vérifier également les charges des camions-types. Charge d'exploitation = charge $A(\ell)$ + surcharge de chaussée due à des modifications d'épaisseur de chaussée ($100 \text{ kg/m}^2 = 1 \text{ kN/m}^2 = 0,001 \text{ MN/m}^2$ soit 4 cm de surépaisseur).

La charge $A(\ell)$, tous coefficients calculés, vaut ici :

$A(20) = 0,019 \text{ MN/m}^2$ pour une longueur chargée de 20 m,

$A(40) = 0,0126 \text{ MN/m}^2$ pour une longueur chargée de 40 m,

soit la valeur de calcul pour un élément de dalle de 1 m de largeur :

$q(20) = 0,019 + 0,001 = 0,02 \text{ MN/m}$,

$q(40) = 0,0126 + 0,001 = 0,0136 \text{ MN/m}$.

La contrainte admissible du béton est supposée égale à ; $\bar{\sigma}_c = 12,6 \text{ MPa}$ en compression et $\bar{\sigma}_t = 0$ en traction.

Pour simplifier le problème, nous supposons dans cet exercice que les charges permanentes correspondent au seul poids propre de la dalle.

1. CALCUL DES MOMENTS DUS A LA CHARGE D'EXPLOITATION Q

La théorie des lignes d'influence permet de déterminer les travées ou fractions de travées à charger pour obtenir les moments maximum et minimum en un point de la poutre.

1.1. Ainsi pour obtenir les moments maximum et minimum sur appuis, on effectue un chargement par travée entière comme indiqué sur la figure 22-1.



Fig. 22-1. Ligne d'influence du moment sur appui

On obtient ainsi le moment minimum sur le troisième appui, en chargeant les travées adjacentes à l'appui, puis les travées alternées de part et d'autre.

1.2. Pour les moments maximum des points situés entre les foyers, on opère un chargement par travées entières des travées alternées comme indiqué sur la figure 22-2.

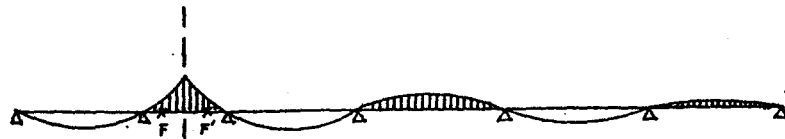


Fig. 22-2. Ligne d'influence du moment en travée entre foyers

1.3. Les moments maximum pour des points situés entre les appuis et les foyers sont obtenus par des chargements partiels de la travée étudiée, et par chargement des travées alternées suivant la figure 22-3.

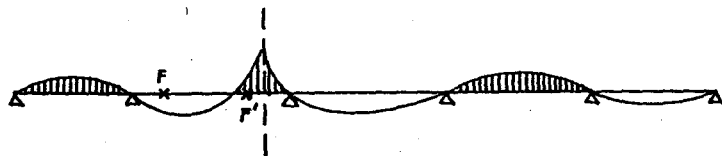


Fig. 22-3. Ligne d'influence du moment en travée entre foyer et appui

Ce type de chargement n'étant pas facile à déterminer (longueur chargée de la travée étudiée), on préfère généralement dans ce cas interpolier les valeurs trouvées sur appui et entre foyers, et correspondant donc à un chargement par travées entières.

1.4. La recherche des foyers pourra s'effectuer par application de l'équation des trois moments (cas général).

Ainsi pour déterminer la position de F' de la travée n° 2 de la figure 22-4, on applique un moment unité à l'appui 2 en ne considérant que ce qui se trouve à droite de l'appui 2 (fig. 22-5).

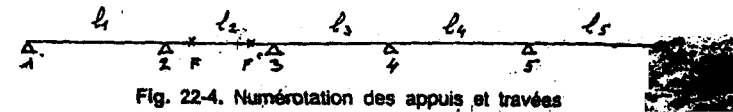


Fig. 22-4. Numérotation des appuis et travées

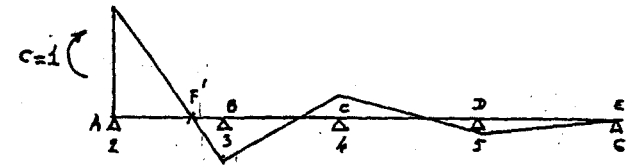


Fig. 22-5. Détermination du foyer droit

Le point de moment nul est en F' . Les équations des trois moments s'écrivent :

$$M_2 l_2 + 2(l_2 + l_3) M_3 + M_4 l_3 = 0$$

$$M_3 l_3 + 2(l_3 + l_4) M_4 + M_5 l_4 = 0$$

$$M_4 l_4 + 2(l_4 + l_5) M_5 + 0 = 0$$

$$\text{avec: } M_2 = 1 \\ M_6 = 0$$

soit trois équations à trois inconnues: M_3 , M_4 et M_5 , on a alors: $\frac{F'A}{F'B} = \frac{-1}{M_3}$, d'où la position de F' .

On procède de la même façon pour les autres foyers, en retournant la structure.

1.5. Application au cas de la poutre à deux travées

1.5.1. Moment maximum sur appui

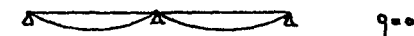


Fig. 22-6. Ligne d'influence du moment sur appui

1.5.2. Moment minimum sur appui



Fig. 22-7. Ligne d'influence du moment sur appui

Pour un chargement des deux travées, l'équation des trois moments s'écrit :

$$0 + 4lM_2 + 0 = 6Ei (\omega_d - \omega_b) = - \frac{q\ell^3}{24} \times 6 \times 2$$

$$\text{d'où: } M_2 = - q\ell^2/8$$

1.5.3. Recherche des foyers (1^{re} travée, inertie constante, travées égales)

• *foyer droit*:

l'équation des trois moments s'écrit:

$$M_A \ell + 4\ell M_B + M_C \ell = 0$$

avec: $M_A = 1$
 $M_C = 0$

d'où: $M_B = -\frac{1}{4}$ et $\frac{F'A}{F'B} = 4$ ou $\frac{BF'}{\ell} = \frac{1}{5}$

le foyer est au cinquième de la travée à partir de l'appui central.

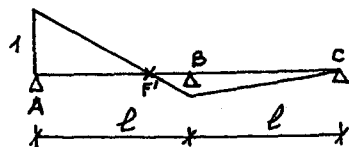


Fig. 22-8. Détermination du foyer droit

• *foyer gauche*: le point de moment nul est sur l'appui gauche.

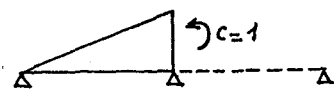


Fig. 22-9. Détermination du foyer gauche

Nous obtenons donc le schéma de position des foyers suivant:

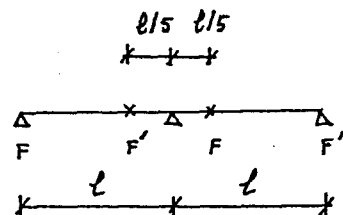


Fig. 22-10. Position des foyers

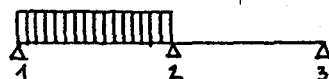
1.5.4. Moment maximum pour un point d'abscisse comprise entre 0 et $0,8 \ell$ dans la 1^{re} travée

Fig. 22-11. Chargement donnant le moment maximum en travée

L'équation des trois moments s'écrit pour le moment sur appui M_2 :

$$0 + 4\ell M_2 + 0 = -\frac{q\ell^3}{24} \times 6$$

$$\text{d'où: } M_2 = -\frac{q\ell^2}{16}$$

et à l'abscisse x , le moment vaut dans la 1^{re} travée:

$$M_a(x) = -\frac{qx(\ell - x)}{2} - \frac{x}{\ell} \cdot \frac{q\ell^2}{16} \quad (\text{moment maximum})$$

et dans la 2^e travée:

$$M_b(x) = -\left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \frac{q\ell^2}{16} \quad (\text{moment minimum})$$

d'où la courbe des moments (fig. 22-12):

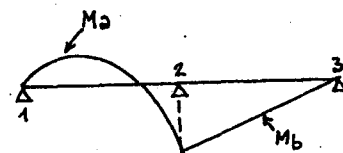


Fig. 22-12. Moment dû au chargement de la travée gauche

1.6. Application numérique

1.6.1. Moment sur appui

• Charges permanentes $M_2 = -\frac{g\ell^2}{8} = -50 \text{ g}$ avec $\ell = 20 \text{ m}$

• Charges variables $M_2 \text{ mini} = -\frac{q\ell^2}{8}$ avec $q = q(40)$

$$M_2 \text{ mini} = -0,68 \text{ MNm.}$$

La variation de moment sur appui vaut au maximum:

$$\Delta M = 0,68 \text{ MNm}$$

1.6.2. Moment en travée (1^{re} travée)

• Charges permanentes: $M(x) = \frac{gx(\ell - x)}{2} - \frac{x}{\ell} \left(\frac{g\ell^2}{8}\right) = \frac{gx}{2} (15 - x)$

• Charges variables:

$$\text{moment maximum } M_{\max}(x) = \frac{qx(\ell - x)}{2} - \frac{x}{\ell} \cdot \frac{q\ell^2}{16}$$

avec $q = q(20) = 0,02 \text{ MNm}$
 $\ell = 20$

$$M_{\max}(x) = 0,175x - 0,01x^2$$

$$\text{moment minimum } M_{\min}(x) = -\frac{x}{\ell} \cdot \frac{q\ell^2}{16}$$

avec $q = q(20) = 0,02 \text{ MNm}$
 $\ell = 20$
 $M_{\min}(x) = -0,025x \text{ MNm}$

1.6.3. Variation de moment

— Due aux charges permanentes: $\Delta M = 0$,
 — due aux charges variables: $\Delta M = M_{\max}(x) - M_{\min}(x)$

$$\Delta M = 0,175x - 0,01x^2 + 0,025x = 0,20x - 0,01x^2$$

dont le maximum est obtenu pour: $0,20 - 0,02x = 0$, soit à l'abscisse $x = 10 \text{ m}$ et $\Delta M_{\max} = 2 - 1 = 1 \text{ MNm}$.

Cette valeur est supérieure à celle que nous avons trouvée sur appui $\Delta M = 0,68 \text{ MNm}^*$.

2. DIMENSIONS ET PRÉCONTRAINT

La détermination de l'épaisseur h de la dalle sera obtenue par la vérification des contraintes.

Supposons *a priori* que la section est sous-critique, c'est-à-dire que le câble peut être excentré suffisamment sans atteindre la limite d'enrobage.

En section sous-critique, la vérification des contraintes s'écrit entre les deux cas de moment maximum et de moment minimum:

$$\frac{I}{v} = \frac{\Delta M}{\Delta \sigma}$$

La solution la plus économique est obtenue en faisant travailler le béton au maximum admissible: $\bar{\sigma}_c$ et $\bar{\sigma}_t$

avec: $\bar{\sigma}_c = 12,6 \text{ MPa}$, $\bar{\sigma}_t = 0$ en classe I, ainsi $\bar{\Delta \sigma}$ vaut $12,6 \text{ MPa}$

et $\frac{I}{v} \text{ minimum} = \frac{1}{12,6} = 0,0794 \text{ m}^3$.

La section étant rectangulaire, le module d'inertie $\frac{I}{v}$ vaut:

$$\frac{bh^3}{6} \text{ soit avec } b = 1 \text{ m, } \frac{h^3}{6} = 0,0794 \text{ ou } h = 0,69 \text{ m.}$$

Nous retiendrons une épaisseur de dalle de $0,70 \text{ m}$:

$b = 1 \text{ m}$	$h = 0,70 \text{ m}$
-------------------	----------------------

La précontrainte sous-critique en classe I est donnée par:

$$P = \frac{\Delta M}{\rho h}$$

* Si les charges $q(20)$ et $q(40)$ avaient été égales, nous aurions obtenu le même $\Delta M_{\max}$ sur appui et à mi-travée.

avec: $\rho = \frac{I}{S_{vv'}} = \frac{1}{3}$ en section rectangulaire

$$\text{soit: } P = \frac{1}{\frac{1}{3} \times 0,07} = 4,29 \text{ MN.}$$

Il nous faut maintenant vérifier que l'hypothèse faite sur la nature de la section (sous-critique) est fondée.

Calculons le moment maximum en valeur absolue.

$M_{\max}$ en valeur algébrique est donnée par:

$$M_{\max} = \frac{gx}{2} (15 - x) + 0,175x - 0,01x^2$$

avec une charge permanente: $g = \bar{\omega}bh$

pour une masse spécifique: $\bar{\omega} = 2500 \text{ kg/m}^3 = 24,53 \text{ kN/m}^3 = 0,02453 \text{ MN/m}^3$

soit: $g = 0,01717 \text{ MN/m}$.

$$M_{\max} = \frac{0,01717}{2} x(15 - x) + 0,175x - 0,01x^2$$

dont le maximum est obtenu pour $x = 8,173 \text{ m}$ (par annulation de la dérivée de $M_{\max}$) et $M_{\max}$ vaut alors $1,241 \text{ MNm}$, sur appui:

$$M_{\min} = - (g + q) \frac{\ell^2}{8} = - \frac{0,01717 + 0,0136}{8} \times 20^2 = -1,5385 \text{ MNm}$$

Le moment maximum en valeur absolue vaut $1,5385 \text{ MNm}$ et l'excentricité maximum se calcule par:

$$e_o = c - \frac{|M_{\max}|}{P}$$

avec: $c = \rho v = 0,7/3$

$$|M_{\max}| = 1,5385 \text{ MNm}$$

$$P = 4,19 \text{ MN}$$

on obtient: $e_o = \frac{0,7}{3} - \frac{1,5385}{4,29} = -0,1253 \text{ m}$, ce qui laisse une distance

$d' = \frac{h}{2} + e_o = 0,224 \text{ m}$ très suffisante pour l'enrobage des câbles qui doit être au minimum de 1,5 fois le diamètre de la gaine, diamètre qui ne devrait pas dans notre cas dépasser 80 mm .

3. CAS DE CHARGE ÉTUDIÉS — FUSEAU DE PASSAGE

Compte tenu de l'étude précédente sur les chargements des travées en fonction des lignes d'influence, nous retiendrons donc les quatre cas suivants de chargement (fig. 22-13).

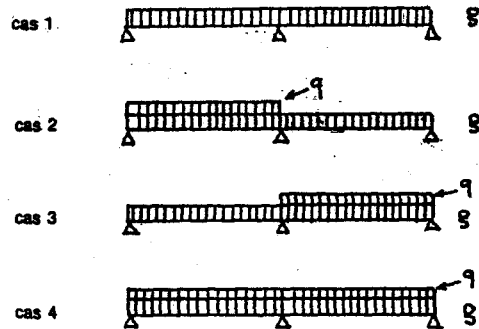


Fig. 22-13. Cas de chargement

Nous calculerons pour chaque 1/10 de travée :

$$\bullet M_{\max}(x) = \frac{q}{2} x(15 - x) + 0,175x - 0,01x^2$$

correspondant au cas de charge n° 2 pour la 1^{re} travée,

$$\bullet M_{\min}(x) = \frac{qx}{2} (15 - x) - 0,025x$$

correspondant au cas de charge n° 3 pour la 1^{re} travée,

$$\bullet M_{\max} \text{ sur appui} = -50 \text{ g} = -0,8585 \text{ MNm}$$

$$\bullet M_{\min} \text{ sur appui} = -50 \text{ g} - 0,68 = -1,5385 \text{ MNm}.$$

Les formules ci-dessus sont valables pour les points situés entre foyers, donc compris entre 0 et 0,8 ℓ . La valeur des moments à l'abscisse 0,9 ℓ sera interpolée paraboliquement par :

$$M(0,9) = M(0,8) + \frac{M(1) - M(0,7)}{3}.$$

Le fuseau de passage est le lieu de toutes les positions permises de la ligne de précontrainte.

On rappelle que la ligne de précontrainte est déterminée comme étant le point de passage de la résultante due à la précontrainte seule, isostatique et hyperstatique.

Son ordonnée e_{∞} est donc déduite de celle du câble e_0 par un déplacement vertical M/P vers le haut si M est positif. La valeur du moment hyperstatique étant à déterminer en fonction du tracé du câble :

$$e_{\infty} = e_0 + \frac{M}{P}$$

Les relations d'équilibre limite correspondant aux cas où la contrainte minimum est égale à la contrainte admissible minimum se déduisent de la figure 22-14.

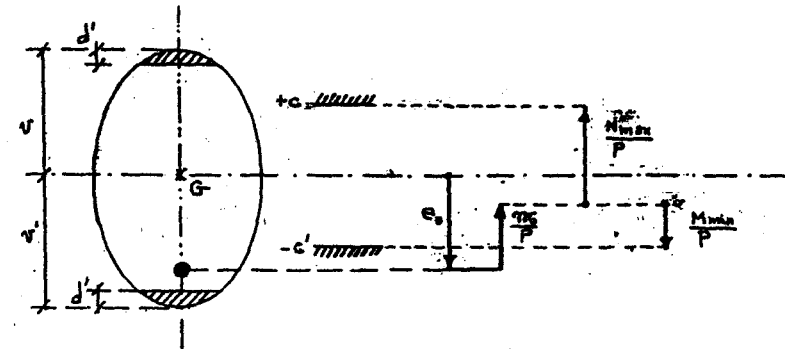


Fig. 22-14. Positions du centre de pression

$$\begin{cases} e_0 + \frac{M}{P} + \frac{M_{\max}}{P} = c \\ e_0 + \frac{M}{P} + \frac{M_{\min}}{P} = -c' \end{cases}$$

avec : $e_0 + \frac{M}{P} = e_{\infty}$, il vient :

$$\begin{cases} e_{\infty} = c - \frac{M_{\max}}{P} \\ e_{\infty} = -c' - \frac{M_{\min}}{P} \end{cases}$$

$$\text{Posons : } e_1 = c - \frac{M_{\max}}{P}$$

$$e_2 = -c' - \frac{M_{\min}}{P}$$

avec ici $c = c' = h/6 = 0,1167 \text{ m}$.

Le cas où $e_1 = e_2$ ne se produit, en section sous-critique, qu'au point où ΔM est maximum. Partout ailleurs, on a : $e_1 > e_2$.

Les courbes e_1 et e_2 sont de même nature que les courbes de moment à une transformation linéaire près.

Si les courbes de moment sont des paraboles, les courbes représentatives de e_1 et e_2 sont également des paraboles.

Nous pouvons alors dresser le tableau donnant les valeurs de $M_{\max}(x)$, $M_{\min}(x)$, $e_1(x)$, $e_2(x)$ (tableau 22.1).

Tableau 22.1

Abscisse $\frac{x}{\ell}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
Cas de charge	—	—	—	—	—	Cas de charge n° 2	—	—	—	Interpolation	n° 1
M_{maximum}	0	0,5332	0,9177	1,1536	1,2408	1,1793	0,9691	0,6102	0,1026	- 0,3870	- 0,8585
Cas de charge	—	—	—	—	—	Cas de charge n° 3	—	—	—	Interpolation	n° 4
M_{minimum}	0	0,1732	0,2777	0,3136	0,2808	0,1793	- 0,0091	- 0,2298	- 0,5374	- 0,9736	- 1,5385
e_1	0,1167	- 0,0076	- 0,0972	- 0,1522	- 0,1726	- 0,1582	- 0,1092	- 0,0256	0,0928	0,2069	0,3168
e_2	- 0,1167	- 0,1570	- 0,1814	- 0,1898	- 0,1821	- 0,1585	- 0,1188	- 0,0631	0,0086	0,1103	0,2420

$$M_{\text{max}}(0,9) = 0,1026 + \frac{-0,8585 - 0,6102}{3} = -0,3870 \text{ MNm}$$

$$M_{\text{min}}(0,9) = -0,5374 + \frac{-1,5385 + 0,2298}{3} = -0,9736 \text{ MNm}$$

4. RECHERCHE D'UN CÂBLE CONCORDANT (poutre à deux travées identiques)

Le tracé du câble va engendrer, sous l'action des efforts radiaux exercés sur le béton, une déformation de la poutre sous la seule précontrainte, qui entraîne l'apparition de réaction hyperstatique sur l'appui intermédiaire et du moment hyperstatique $M(x)$.

Or, au stade actuel de l'étude, le tracé du câble est inconnu; seul le fuseau de passage de la ligne de précontrainte $e_{oo}(x)$ est connu et l'on a la relation:

$$e_{oo}(x) = e_o(x) + \frac{M(x)}{P}$$

où figure toujours l'inconnue $M(x)$.

Un moyen de résoudre facilement ce problème consiste à chercher un tracé de câble qui entraîne un moment hyperstatique nul quel que soit x . Dans ce cas, l'équation ci-dessus indique que le câble est confondu avec la ligne de précontrainte. On a donc trouvé un fuseau pour le câble. Si à l'intérieur de ce fuseau (e_1, e_2), on peut tracer un câble qui reste à l'intérieur de la section, on a résolu le problème.

Or, l'équation des trois moments qui permet de calculer les moments hyperstatiques sur appui M en fonction de l'action du câble sur la poutre (action extérieure $P \cdot e_o(x)$) devient pour deux travées égales à inertie constante:

$$-\omega_b + \omega_d = \frac{4 \ell M}{6 EI} = - \int_0^{\ell} \frac{x}{\ell} P e_o(x) \frac{dx}{EI} - \int_0^{\ell} \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) P e_o(x) \frac{dx}{EI} \quad (22-1)$$

$$\text{En posant: } J(e_o) = \int_0^{\ell} \frac{x}{\ell} P e_o(x) dx \quad (22-2)$$

par symétrie, on a: $4 \ell M = -12 J(e_o)$

d'où le moment hyperstatique sur l'appui intermédiaire:

$$M = - \frac{3 J(e_o)}{\ell}$$

Or, si M est nul, on a vu que: $e_{oo}(x) = e_o(x)$, donc l'équation (22-1) est vérifiée si:

$$J(e_o) = J(e_{oo}) = 0 \quad (22-3)$$

Comme la ligne de précontrainte $e_{oo}(x)$ doit être intérieure au fuseau de passage [$e_1(x); e_2(x)$], on peut toujours définir une ligne de précontrainte et donc un câble (car $e_{oo}(x) = e_o(x)$) qui partage le fuseau dans un rapport constant λ tel que:

$$e_o(x) = e_1(x) + \lambda[e_2(x) - e_1(x)]$$

Or, l'égalité ci-dessus peut être intégrée suivant l'équation (22-2) en:

$$J(e_o) = J(e_1) + \lambda[J(e_2) - J(e_1)]$$

qui devient: $\lambda = \frac{-J(e_1)}{J(e_2) - J(e_1)}$ (d'après 22-3)

Si λ est compris entre 0 et 1, on a trouvé un tracé de câble possible. Il faut vérifier qu'il reste à l'intérieur du béton.

On peut démontrer que l'on a toujours une solution pour λ compris entre 0 et 1 (voir chapitre 19, § 4.4).

Ainsi avec $J(e_1) < 0 < J(e_2)$, il existe une valeur $e_{00}(x)$ partageant le segment $[e_2(x) - e_1(x)]$ telle que : $J(e_{00}) = 0$.

On appelle *câble concordant* un câble dont le tracé est tel qu'il n'engendre pas de moment hyperstatique.

5. APPLICATION A LA POUTRE ÉTUDIÉE

Le problème consiste alors à calculer les intégrales (22-2) $J(e_1)$ et $J(e_2)$ pour la 1^{re} travée.

On utilisera la méthode d'intégration parabolique (dite méthode de Simpson) qui s'écrit :

$$\int_a^b y dx = \frac{b-a}{3n} [y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \dots + 4y_{n-1} + y_n]$$

pour une intégration sur n tronçons.

Ainsi, avec $n = 10$ et $b - a = \ell = 20\text{m}$: $y = \frac{x}{\ell} \cdot P \cdot e_k(x)$

$$\begin{aligned} J(e_1) = \frac{20}{30} [& 0,1167 \times 0 + 4(0,1) (-0,0076) + 2(0,2) (-0,0972) + 4(0,3) \\ & (-0,1522) + 2(0,4) (-0,1726) + 4(0,5) (-0,1582) + 2(0,6) \\ & (-0,1092) + 4(0,7) (-0,0256) + 2(0,8) (0,0928) \\ & + 4(0,9) (0,2069) + 1 \times 0,3168] P \end{aligned}$$

$$J(e_1) = 0,2190 P$$

$$\begin{aligned} J(e_2) = \frac{20}{30} [& -0,1167 \times 0 + 4(0,1) (-0,1570) + 2(0,2) (-0,1814) + \\ & 4(0,3) (-0,1898) + 2(0,4) (-0,1821) + 4(0,5) (-0,1585) + \\ & 2(0,6) (-0,1188) + 4(0,7) (-0,0631) + 2(0,8) (0,0086) \\ & + 4(0,9) (0,1103) + 1(0,242)] P \end{aligned}$$

$$J(e_2) = -0,3281 P$$

$$\text{d'où : } \lambda = \frac{-0,2190}{0,2190 + 0,3281} = 0,400$$

On vérifie bien que λ est compris entre 0 et 1.

On peut donc établir les coordonnées théoriques d'un câble concordant :

$$e_{00}(x) = e_1 + 0,4(e_2 - e_1) = 0,6 e_1 + 0,4 e_2$$

Cependant ce câble doit satisfaire aux conditions suivantes :

- être à l'intérieur du béton avec un enrobage suffisant,
- avoir un tracé constructible, c'est-à-dire sans point anguleux et avec un rayon de courbure minimum (4 m dans notre cas).

La plus grande excentricité du câble en travée est obtenue à l'abscisse $0,4 \ell$ avec $e_0 = 0,6(-0,1726) + 0,4(-0,1821) = -0,1763 \text{ m}$.

$|e_0|$ est-il inférieur $v' - d' ? 0,1763 < 0,35 - 0,10 = 0,25$: ce qui est vérifié.

Sur appui, on a : $e_0 = 0,6 \times 0,3168 + 0,4 \times 0,242 = 0,287$

or, $0,287 > 0,25$, ce qui n'est pas vérifié.

Cependant, nous devons supprimer le tracé anguleux du câble obtenu ci-dessus, nous pouvons en profiter pour l'abaisser à l'ordonnée $0,25 \text{ m}^*$ sur appui et compenser ce manque d'excentricité en le rapprochant de l'extérieur près de l'appui comme indiqué sur la figure 22-15.

De telle sorte que :

$$\int_{x_1}^{\ell} [e'_0(x) - e_0(x)] \frac{x}{\ell} \frac{P dx}{EI} = 0 \text{ d'après l'équation (22.2).}$$

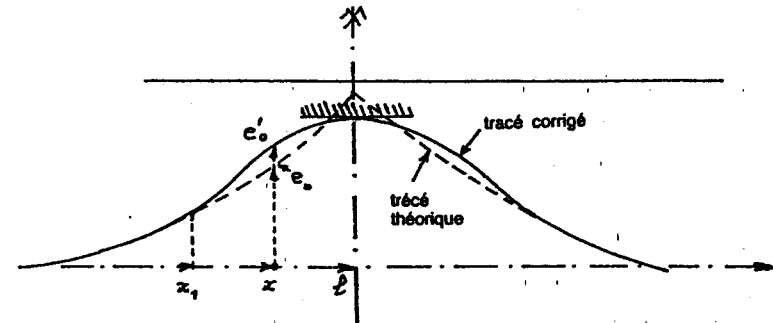


Fig. 22-15. Tracé du câble au droit de l'appui

Cette valeur représente la variation de rotation due au nouveau tracé de câble par rapport à l'ancien (théorique).

Si cette variation de rotation est nulle, la variation de moment hyperstatique est nulle.

On pourra procéder par tâtonnement, car si l'on ne s'éloigne pas trop de l'appui, on peut dire que les aires comprises entre les deux courbes doivent s'annuler.

* On respecte bien $e_2 < e_0 < e_1$.

En fonction de l'abscisse, la valeur calculée de e_0 apparaît dans le tableau suivant.

Tableau 22.2

$\frac{x}{\ell}$	e_1	e_2	e_0
0	+ 0,1167	- 0,1167	+ 0,0233
0,1	+ 0,0076	- 0,1570	- 0,0674
0,2	- 0,0972	- 0,1814	- 0,1309
0,3	- 0,1522	- 0,1898	- 0,1672
0,4	- 0,1725	- 0,1821	- 0,1763
0,5	- 0,1582	- 0,1585	- 0,1583
0,6	- 0,1092	- 0,1188	- 0,1130
0,7	- 0,0256	- 0,0631	- 0,0406
0,8	+ 0,0928	+ 0,0086	+ 0,0591
0,9	+ 0,2069	+ 0,1103	+ 0,1683
1,0	+ 0,3168	+ 0,2420	+ 0,2869

Opérons graphiquement une correction de tracé (fig. 22-16) en adoptant une excentricité + 0,25 m sur appui avec un rayon de courbure du câble supérieur ou égal à 4 m.

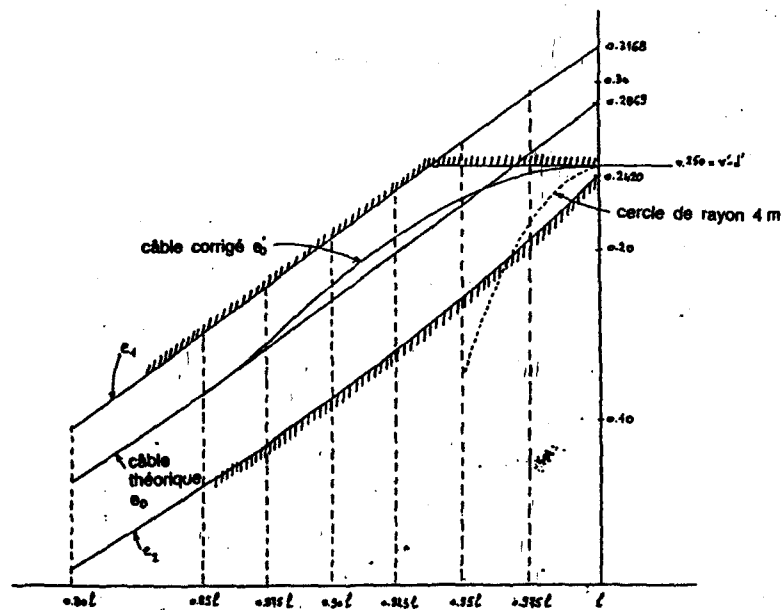


Fig. 22-16

La figure 22-16 ayant une échelle différente en abscisse et en ordonnée, le cercle de rayon 4 m est représenté par une ellipse et l'on peut prendre la parabole de même rayon de courbure au sommet, d'équation $y = \frac{x^2}{2r} = \frac{x^2}{8}$.

Intégrons suivant Simpson avec six tronçons (tableau 22.3).

Tableau 22.3

$\frac{x}{\ell}$	e_1	e_2	e_0	e'_0	$\Delta e = e'_0 - e_0$	Coef. k Simpson	$k \Delta e \frac{x}{\ell}$
0,8	0,0928	0,0086	0,0591				
0,825	0,1217	0,0312	0,0855				
0,85	0,1504	0,0557	0,1125		0	1	0
0,875	0,1788	0,0821	0,1401	0,1460	0,0059	4	0,0207
0,9	0,2069	0,1103	0,1683	0,1800	0,0117	2	0,0211
0,925	0,2348	0,1404	0,1971	0,2090	0,0119	4	0,0440
0,95	0,2624	0,1724	0,2264	0,2300	0,0036	2	0,0068
0,975	0,2897	0,2063	0,2564	0,2420	- 0,0144	4	- 0,0562
1,000	0,3168	0,2420	0,2869	0,2500	- 0,0369	1	- 0,0369

Total = - 0,0006

$$\text{soit: } \int_0^{\ell} \Delta e_0(x) \cdot \frac{x}{\ell} \cdot \frac{P dx}{EI} = \frac{P}{EI} \cdot \frac{20}{30} \cdot (- 0,0006) = - 0,00039 \frac{P}{EI}$$

L'équation des trois moments appliquée au câble théorique donnait un moment hyperstatique nul par définition du choix de $e_0 = 0,6e_1 + 0,4e_2$.

Le changement de tracé ainsi réalisé va entraîner l'existence d'un moment hyperstatique M tel que:

$$4 M \ell = 2 \times (- 0,00039 P) \times 6$$

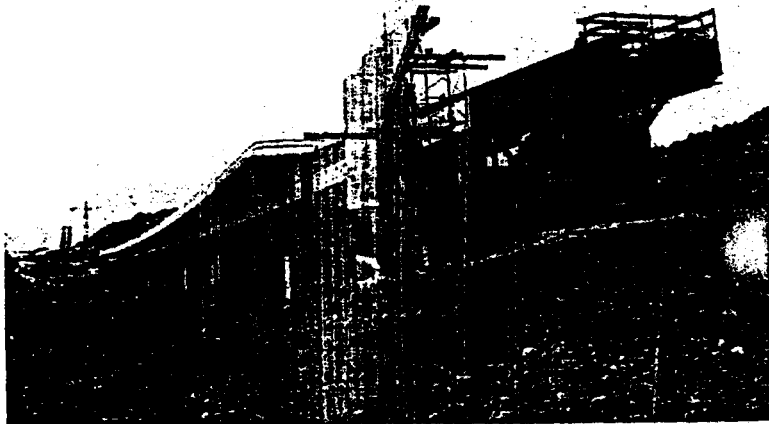
$$M = \frac{2 \times (- 0,00039) \times 4,29 \times 6}{4 \times 20} = 0,00025 \text{ MNm.}$$

Ce qui est négligeable (1,4% du moment minimal au point critique d'abscisse 0,5 ℓ).

REMARQUE:

Le système de charge, variable en fonction de la longueur chargée, nous a permis d'obtenir un fuseau ouvert sur appui. En effet, si la charge était indépendante de la longueur chargée, nous aurions eu dans le cas de poutre à deux travées identiques un fuseau de passage fermé (de hauteur nulle) sur appui et à mi-travée.

Nous n'aurions pas pu effectuer la correction de câble sans augmenter la précontrainte P (qui a pour effet d'ouvrir le fuseau de passage).



Pont poussé de la Digoine (TGV Sud-Est) (doc. Freyssinet International).

23

PRÉCONTRAINT PAR PRÉ-TENSION

1. GÉNÉRALITÉS

La précontrainte par pré-tension est utilisée principalement dans les éléments préfabriqués à fils adhérents à tel point que l'on associe couramment le mot pré-tension à l'expression fils adhérents. Une description sommaire de ce procédé a été faite dans le chapitre 7: «Procédés de précontrainte».

Nous nous proposons dans le présent chapitre de donner des indications complémentaires sur:

- les avantages et inconvénients du procédé,
- les produits réalisés,
- la fabrication en usine,
- un exemple simple: la coque HP,
- les principales dispositions réglementaires de la pré-tension par fils adhérents,
- l'intégration de poutres préfabriquées dans un plancher.

On notera que les trois quarts de tous les aciers de précontrainte fabriqués en France sont utilisés dans les procédés de pré-tension par fils adhérents.

2. AVANTAGES ET INCONVÉNIENTS (tableau 23.1)

Nous citerons, dans le tableau des avantages et inconvénients du procédé, le cas très peu courant de fils adhérents par post-tension réalisé en général sur le site et où l'on remplace la gaine par un produit retardateur de prise* de manière à pouvoir mettre en tension les fils (ou câbles) lorsque le béton de l'élément a atteint la résistance minimum nécessaire et avant que les fils ne soient adhérents au béton.

* Le Lubabon par exemple.

Tableau 23.1

	Post-tension (1) non adhérents	Post-tension adhérents	Pré-tension adhérents
Mode et lieu de préfabri- cation	préfabriqués ou cou- lés sur place	préfabriqués ou cou- lés sur place	préfabriqués en usine ou sur chantier
Type d'acier	filis lisses ou torons filis non lisses	filis crantés ou torons	filis crantés ou torons
Tracé des armatures	droit ou courbe	droit ou courbe	droit ou ligne brisée
Adhérence obtenue	après injection des gaines	après que l'action du retardateur de prise disparaisse	dès détension des aciers
Avantages	tracé le mieux adapté aux sollicitations ou au mode de construc- tion, construction en place et définitive	pas de gaines, an- crages récupérés, pas d'injection	pas de gaines, pas d'ancrages, bonne protection contre la corrosion, une seule mise en tension pour plusieurs poutres, ra- pidité d'exécution
Inconvénients	poses de gaines, en- filage des câbles, in- jection des gaines, mise en tension dans des conditions de chantier quelquefois difficiles	pertes par frottement acier-béton plus im- portantes et par glis- sement à l'ancrage	pas de câbles courbes, pas d'arrêt de câbles en cours de travée, transport de pièces plus ou moins longues sur des tra- jets plus ou moins grands.

(1) Dite à filis non-adhérents par opposition au cas de la 3^e colonne, bien qu'une adhérence indirecte existe après injection des gaines.

3. LES PRODUITS RÉALISÉS

Nous ne parlerons ci-après que des produits préfabriqués en usine et disponibles sur catalogue.

La plupart de ces produits sont des éléments porteurs fléchis, c'est-à-dire des poutres, poutrelles ou dalles.

• les rectangles ou trapèzes

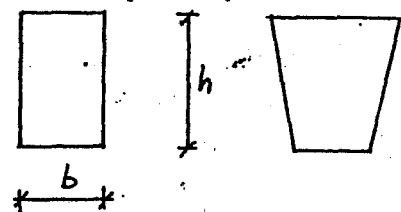


Fig. 23-1.

$b \times h$ de 10×20 à 30×80 cm,
portée de 3 à 20 m

• les poutres en I petit modèle

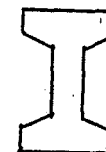


Fig. 23-2.

$b \times h$ de 20×45 à 25×70 cm
portée de 5 à 20 m

• les poutres en I grand modèle à hauteur variable éventuellement (extrados à double pente)

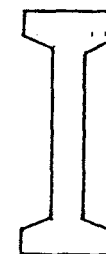


Fig. 23-3.

$b \times h$ de 30×70 à 50×170 cm
portée de 8 à 24 m

• les poutres en double T, de 2,40 m de largeur, au gabarit routier

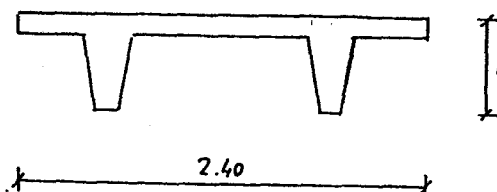


Fig. 23-4.

Hauteur de 40 à 70 cm
Portée de 8 à 25 m

• les poutrelles pour corps creux, faciles à poser à la main

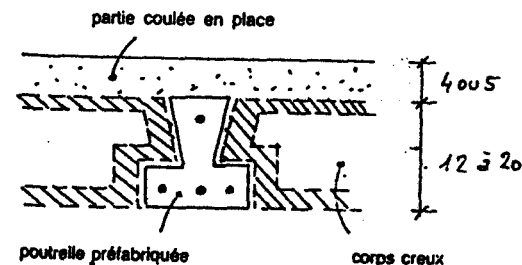


Fig. 23-5.

Portée de 3 à 8 m

- les **prédalles précontraintes**

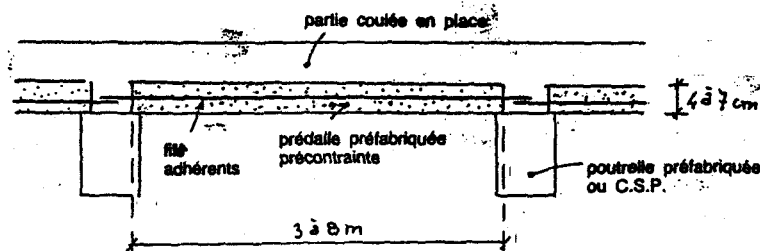


Fig. 23-6.

- les **dalles alvéolées** (type Soprel par exemple)

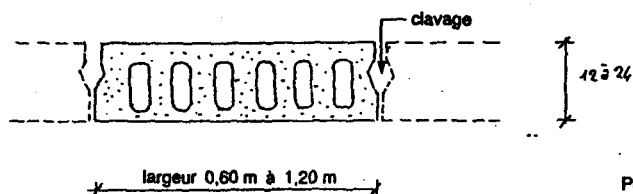


Fig. 23-7.

Portée de 4 à 12 m

Le choix d'un type de poutre se fait sur catalogue en fonction de :

- la portée ;
- la charge d'exploitation ou de poids mort autre que le poids propre de la poutre ;
- la hauteur maximum ;
- l'écartement,

par utilisation d'abaque qui donne l'élément le mieux adapté au problème posé.

L'utilisation de ces produits correspond principalement aux bâtiments de bureaux et d'habitations, aux locaux industriels, couvertures d'usines, ponts routiers, planchers de parking...

4. LA FABRICATION EN USINE

4.1. La description d'une usine type de préfabrication pourrait être la suivante :

- le **site**, situé près des axes de communication et des grands centres de consommation du produit, près d'un canal, d'une rivière navigable ou d'un embranchement ferroviaire pour l'amenée des matériaux : sables, granulats, ciments et l'évacuation des produits finis ;

- à l'**extérieur**, on trouvera les stocks de granulats ou de sable, les silos à ciment et l'aire de stockage des produits finis avec un portique de manutention ;
- à l'**intérieur**, la centrale à béton avec bascules, doseurs automatiques programmés, malaxeurs, les bancs de précontrainte, l'atelier de ferrailage, le système d'étuvage, les ponts roulants.

Exemple :

Huit bancs de précontrainte de 95 à 120 m posés sur le sol et de 1,80 m de largeur sont disposés de telle sorte que l'optimum soit trouvé pour pouvoir réaliser plusieurs longueurs de poutres à la fois, d'utiliser le moins de main-d'œuvre possible, de réduire la place non utilisée au minimum.

Aux extrémités des bancs se trouvent les culées ancrées dans le sol pouvant résister à des efforts de plusieurs MN. Les fils sont fixés sur ces culées après mise en tension des vérins. Des écrans protecteurs en bois épais situés derrière les ancrages permettent d'éviter tout accident corporel en cas de rupture des fils.

Sur les bancs sont disposés des moules pour les différentes formes de produits fabriqués. On peut réaliser sur un seul banc 9 ou 10 poutres de 10 m ou 5 de 20 m. La vibration est assurée par l'action d'excentriques sur les moules.

Un système d'étuvage à la vapeur ou par chauffage électrique (effet Joule) permet d'accélérer le processus de fabrication.

4.2. Le cycle de fabrication pourrait être le suivant, avec deux équipes de 9 heures du matin à minuit :

- **première phase : durée 4 heures**
 - détension des fils,
 - sectionnement des fils,
 - démoulage ;
- **deuxième phase : durée 9 heures**
 - stockage à l'extérieur des produits,
 - nettoyage du moule et mise en place de l'huile de décoffrage,
 - déroulement des fils à partir des tourets,
 - enfilage des cadres d'armatures transversales et des caches d'extrémité de moules,
 - mise en tension des fils au moyen de vérins,
 - mise en place des aciers longitudinaux et transversaux,
 - mise en place des joues de moules,
 - mise en place des plaques d'extrémité de moules ;
- **troisième phase : durée 11 heures**
 - coulage du béton au moyen du pont roulant, vibration,
 - étuvage pendant la nuit.

4.3. Caractéristiques des matériaux et matériels

Toujours dans le cadre de notre exemple, on aurait :

- des coffrages constitués de moules métalliques résistants pour permettre plusieurs centaines de réemplois, des vibrateurs à excentriques fixés sur les moules et fonctionnant à l'air comprimé ou à l'électricité ;
- un béton dosé à 410 kg de CPA par m³, ayant une contrainte caractéristique à 28 jours de 45 MPa et au minimum de 32 MPa lors du décoffrage. Cette résistance du béton au démoulage peut être mesurée par auscultation dynamique sur trois échantillons ;
- des granulats constitués de sable 0/3 et de graviers 8/15, les proportions ayant été déterminées de façon à obtenir le meilleur béton ;
- des aciers en fils crantés (les fils lisses sont interdits) ou des torons ;
- des déviateurs éventuels fixés sur le banc autorisant des pentes de fils jusqu'à 5 % et éventuellement aussi des gaines plastiques situées aux extrémités des poutres pour limiter la précontrainte surabondante en ces points.

5. LA COQUE HP

La coque HP (procédé allemand Silberkuhl, à l'origine) est une coque en selle de cheval d'épaisseur faible (6 à 12 cm), de 65 à 85 cm de hauteur, de 2,50 ou 2,70 m de largeur et de 18 à 28 m de portée (fig. 23-8). Le poids est de l'ordre de 200 à 240 kg/m².

L'équation de sa surface moyenne est celle d'un paraboléoïde hyperbolique (PH) dont le sommet est au centre de l'élément. Du fait que la surface est réglée, on peut disposer d'un couple de droites passant par le sommet et les angles de l'élément, déterminant ainsi le tracé rectiligne des fils de précontrainte. La coupe transversale étant une parabole translatée, son centre de gravité se déplace sur une parabole longitudinale. L'excentricité de la précontrainte est donc parabolique et s'adapte bien aux charges réparties uniformes.

Ce procédé astucieux permet donc d'avoir :

- une bonne inertie de la section,
- une excentricité parabolique,
- des aciers rectilignes faciles à mettre en œuvre.

Les abouts sont légèrement surépaissis pour que les fils de précontraintes restent dans le noyau central et pour résister aux efforts concentrés aux abouts (réaction d'appui, ancrages des fils).

La réalisation de ces coques se fait sur un banc de précontrainte avec un moule inférieur en forme de PH ; une règle vibrante parabolique de niveau variable avance sur des rails à une vitesse de 1 à 2 m à la minute et assure le coffrage supérieur.

Pour une largeur de 2,50 m, une longueur de 20 m et une variation de hauteur de la ligne moyenne de 0,40 m, l'équation de la surface moyenne s'écrit (fig. 23-8) :

$$96x^2 - y^2 = 250z.$$

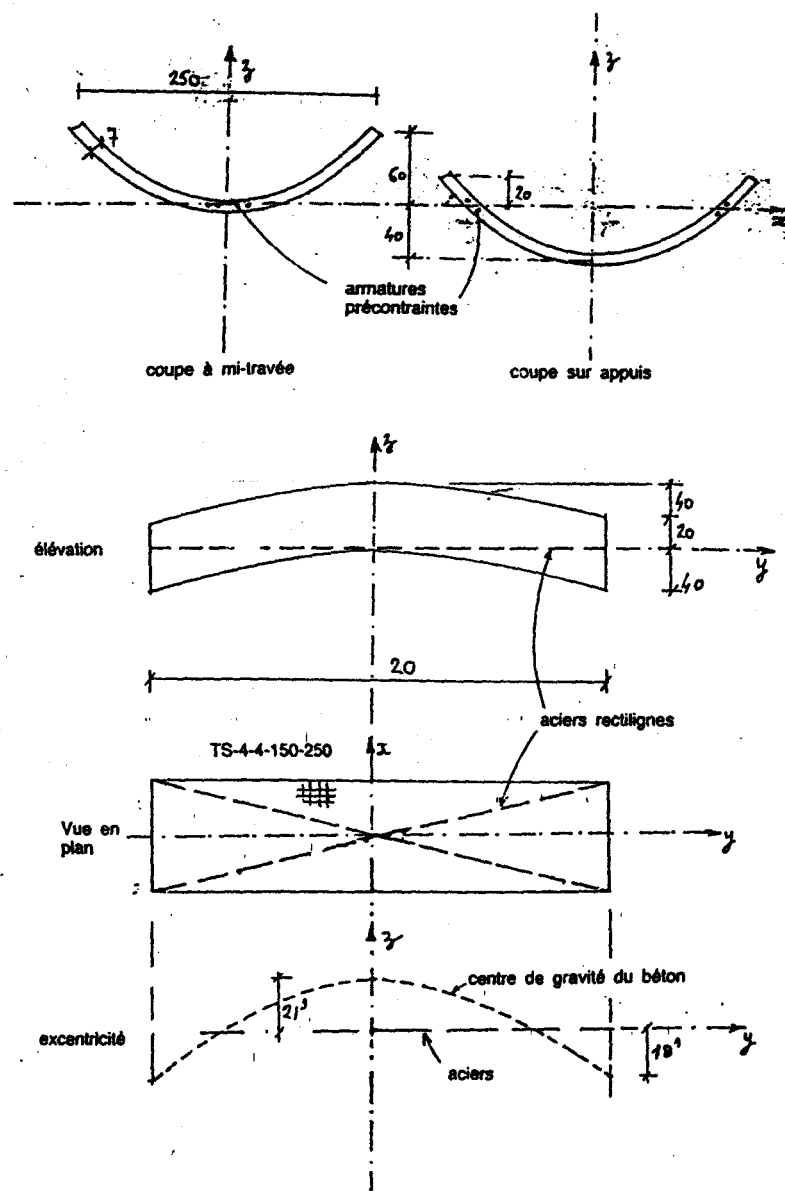


Fig. 23-8. Coupes, vue en plan et élévation d'une coque en paraboléoïde hyperbolique

• Exemple numérique simplifié (fig. 23-9)

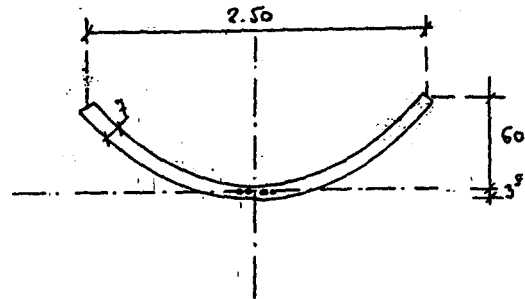


Fig. 23-9. Coupe à mi-travée

Données: $f_{c28} = 35 \text{ MPa}$ $f_{t28} = 2,7 \text{ MPa}$ en classe III de vérification
 $S = 0,199 \text{ m}^2$
 $I = 0,0067 \text{ m}^4$
 $\rho = 0,348$
 $v = 0,381 \text{ m}$ $v' = 0,254 \text{ m}$
 $I/v = 0,01755 \text{ m}^3$ $I/v' = 0,02642 \text{ m}^3$
 $e_o = 0,219 \text{ m}$

charges d'exploitation ou climatique = 1 kN/m^2 .

Les moments sont:

$M_g = 0,199 \times 9,81 \times 10^{-6} \times 2500 \times 20^2/8 = 0,244 \text{ MNm}$
 et: $M_q = 1 \times 2,5 \times 20^2/8 \times 10^{-3} = 0,125 \text{ MNm}$.

Le diagramme des contraintes à vérifier est celui de la figure 23-10.

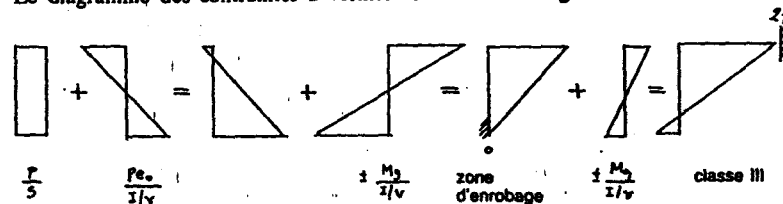


Fig. 23-10. Diagramme des contraintes

$$\text{Soit: } P \left[\frac{1}{S} - \frac{e_o v'}{I} \right] - \frac{M_g v'}{I} \geq 0$$

$$\text{ce qui donne: } P \geq \frac{0,244}{1/0,199 + 0,219/0,0264} = 0,694 \text{ MN.}$$

Avec: $P = 0,70 \text{ MN}$, les contraintes sont celles de la figure 23-11.

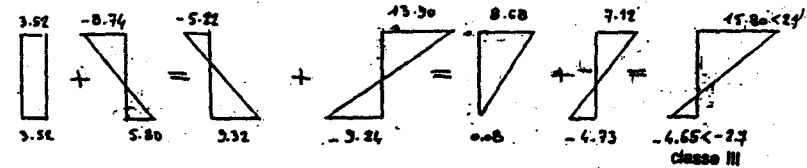


Fig. 23-11. Diagramme des contraintes

Cet effort de précontrainte peut être obtenu par 16 Ø7 tendus en phase finale après pertes à $0,70/616 \times 10^6 = 1136 \text{ MPa}$.

6. PRINCIPALES DISPOSITIONS RÉGLEMENTAIRES (BPEL)

Les principales différences avec la post-tension concernent les pertes de précontrainte et les zones d'about.

6.1. Pertes de précontrainte

On distingue des pertes instantanées:

— par glissement à l'ancrage; le glissement g se répercute, sans s'atténuer, sur toute la longueur du fil; la perte vaut alors:

$$\Delta\sigma_g = E_p \frac{g}{L}$$

— par frottement parasite sur le banc ou au droit des déviateurs éventuels; ces pertes se déterminent expérimentalement et sont en général faibles $\Delta\sigma_f$;

— par retrait du béton sur le banc $\Delta\sigma_r$;

— par relaxation sur le banc $\Delta\sigma_p$;

— par raccourcissement élastique, lors de la détension:

$$\Delta\sigma_b = E_p \frac{\sigma_{bi}}{E_{ij}} (1 + k_i)$$

k_i est un coefficient qui vaut:

0 pour: $\sigma_{bi} \leq 0,5 f_{ci}$ et

$4(\sigma_{bi}/f_{ci} - 0,5)^2$ pour $0,5 f_{ci} < \sigma_{bi} < 0,66 f_{ci}$

σ_{bi} étant la contrainte du béton au niveau du centre de gravité des armatures sous l'action de la précontrainte et du poids propre à l'élément;

— total des pertes instantanées:

$$\Delta\sigma_i = \Delta\sigma_g + \Delta\sigma_f + \Delta\sigma_r + \Delta\sigma_p + \Delta\sigma_b$$

et la contrainte initiale vaut $\sigma_{pi} = \sigma_{po} - \Delta\sigma_i$.

Les pertes différées sont dues:

— au retrait $\Delta\sigma_{ri}$ (voir annexe A),

- au fluage $\Delta\sigma_{fl}$ (voir annexe A),
- à la relaxation $\Delta\sigma_{rel}$.

La concomitance des pertes entraîne une réduction sur leur somme (voir annexe A).

REMARQUE 1:

Le traitement thermique des bétons, la connaissance des phénomènes agissant sur l'élément dans les premiers jours de son existence, le grand nombre d'éléments identiques justifie l'utilisation des formules compliquées du BPEL données en ses annexes 1 et 2.

REMARQUE 2:

Le traitement thermique entraîne une perte d'eau libre en plus des réactions physico-chimiques elles-mêmes consommatrices d'eau libre. Il entraîne également une accélération des pertes par relaxation; on estime que 50 à 70 % des pertes totales par relaxation ont lieu lors du traitement thermique.

La perte d'eau libre amène des pertes de retrait sur le banc qui sont pratiquement nulles.

REMARQUE 3:

Le traitement thermique est à l'origine de pertes importantes dites pertes thermiques (liées à la dilatation thermique):

$$\Delta\sigma_{\theta_{max}} = E_p \alpha_b (\theta_{max} - \theta_0) (1 - \lambda)$$

où: α_b est le coefficient de dilatation thermique du béton (de 0,8 à $1,2 \times 10^{-5}$),
 θ_{max} la température maximum de l'armature,
 θ_0 la température de l'acier lors de la mise en tension, λ un coefficient compris entre 0,1 et 0,50 (il est prudent de prendre 0,1).

6.2. Les bétons utilisés ont des résistances f_{c28} de 35 à 45 MPa et de très fortes résistances à des âges de quelques heures ou quelques jours, grâce à des traitements thermiques (cf. fig. 5-6, chapitre 5 « Bétons »).

La contrainte admissible en cours de fabrication peut être prise égale à $2/3 f_{ct}$ au lieu de $0,6 f_{ct}$.

Le coefficient γ_b , utilisé en ELU pour la contrainte de calcul du béton, peut être pris égal à 1,3 au lieu de 1,5 pourvu que la fabrication fasse l'objet d'une procédure d'homologation avec contrôle.

6.3. Les aciers utilisés, rappelons-le, sont soit des fils non lisses pour des raisons d'adhérence, ou des torons. La contrainte maximale σ_{po} de mise en tension est prise égale à:

$$\sigma_{po} = \text{Min} (0,95 f_{peg}; 0,85 f_{pg})$$

6.4. Règles particulières

Les zones d'about doivent faire l'objet d'une étude particulière:

- le gonflement des aciers lors de la détension (effet Poisson) peut entraîner des éclatements qu'il faut empêcher par des coutures transversales;
- on devra étudier avec soin l'équilibre de la bielle d'appui et les zones de régularisation.

REMARQUE:

Les éléments préfabriqués sont livrés avec des morceaux de fils dépassant des extrémités des poutres et dalles pour permettre une liaison avec le béton coulé en place du reste de la structure (reprise de l'effort de glissement dû à l'effort tranchant). Cette disposition impose la mise en place de caches en extrémités des poutres lors de leur fabrication. Dans certains pays étrangers, les éléments sont coulés sur toute la longueur du banc et recoupés (à la meule ou avec une scie spéciale) aux longueurs voulues. Aucun acier ne dépasse. On compense ceci par une longueur d'appui un peu plus grande, ce qui économiquement semble être une meilleure solution.

7. EXEMPLE DE CALCUL D'UNE POUTRE PRÉFABRIQUÉE PRÉCONTRAINTÉ PAR FILS ADHÉRENTS INTÉGRÉE DANS UNE STRUCTURE DE PLANCHER

Etude de la phase de constructions et de la mise en continuité par des armatures passives sur appuis.

7.1. Données

Deux travées, constituées de deux poutres précontraintes à fils adhérents de 12 m, avec étai en phase de coulage de la table de compression (fig. 23-12).

Béton de poutre préfabriquée: $f_{c28} = 35$ MPa.

Béton coulé en place: $f_{c28} = 25$ MPa.

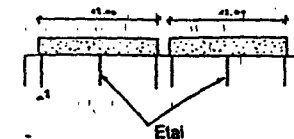


Fig. 23-12. Travée préfabriquée avec étai à mi-portée

7.2. Géométrie

- Poutre préfabriquée:

espacement de 6 m, armatures: 8 T 13, précontrainte: $P = 8 \times 93 \times 10^{-6} \times 1200 = 0,89$ MN en phase finale.

$$\begin{aligned}
 S &= 0,15 \text{ m}^2 \\
 I &= 0,0045 \text{ m}^4 \\
 I/v &= I/v' = 0,015 \text{ m}^3 \\
 \rho &= 1/3 \\
 e_s &= -0,16 \text{ m}
 \end{aligned}$$

On suppose que la précontrainte initiale vaut:

$$P_i = 1,15 P = 1,02 \text{ MN}$$

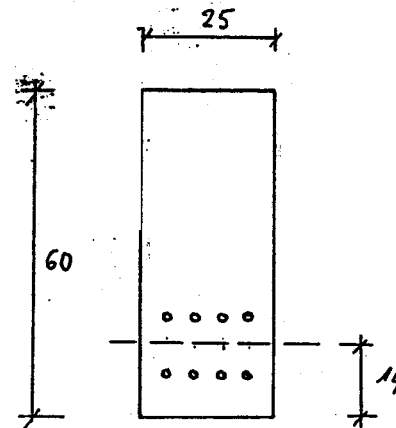


Fig. 23-13. Coupe poutre préfabriquée

• Poutre définitive (fig. 23-14)

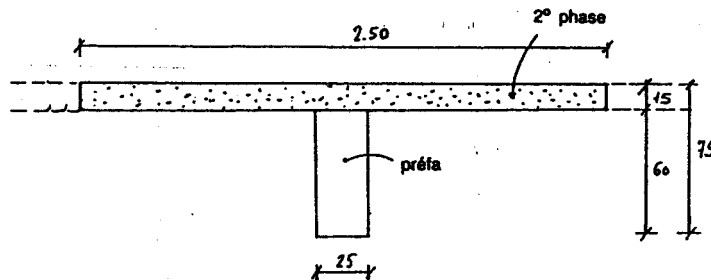


Fig. 23-14. Coupe poutre définitive

$$\begin{aligned}
 0,25 \times 0,75 &= 0,1875 \times 0,375 = 0,070313 \times 2/3 \times 0,75 = 0,035157 \\
 2,25 \times 0,15 &= 0,3375 \times 0,075 = 0,025213 \times 2/3 \times 0,15 = 0,002531 \\
 S &= 0,525 \text{ m}^2 \quad \mu = 0,095526 \quad I_A = 0,037688 \text{ m}^4
 \end{aligned}$$

$$v = \frac{\mu}{S} = 0,182 \text{ m} \quad \text{et} \quad v' = -0,568 \text{ m}$$

$$I = I_A - S v^2 = 0,02027 \text{ m}^4$$

$$I/v = 0,111 \text{ m}^3 \quad \text{et} \quad I/v' = 0,0357 \text{ m}^3 \quad \rho = 0,3733$$

7.3. Phases de construction

7.3.1. Phase 1

Pose de la poutre:

$$g_1 = 0,25 \times 0,6 \times 25 = 3,75 \text{ kN/m}$$

$$M_{g_1} = g_1 L^2/8 = 67,5 \text{ kNm}$$

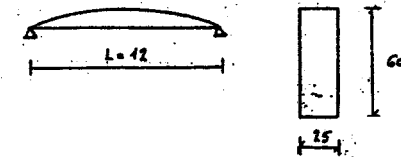


Fig. 23-15. Moment et section en phase I

7.3.2. Phase 2

Mise en place de l'étau juste appuyé sous la poutre, puis coulage de la dalle de largeur 6 m (fig. 23-16):

$$g_2 = 0,15 \times 25 \times 6 = 22,5 \text{ kN/m}$$

$$\begin{aligned}
 M_{g_2} &= -g_2 \ell^2/8 = -22,5 \times 36/8 \\
 &= -101,25 \text{ kNm}
 \end{aligned}$$

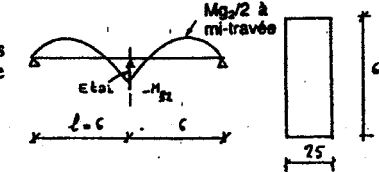


Fig. 23-16. Moment et section en phase II

7.3.3. Phase 3

Une fois le béton de dalle durci: désétalement. Création d'une réaction verticale descendante R (fig. 23-17).

$$R = 5g_2 \ell/4 = 5 \times 22,5 \times 6/4 = 168,75 \text{ kN}$$

et d'un moment isostatique: $M_R = R\ell/4 = 168,75 \times 12/4$

$$M_R = 506,25 \text{ kNm}$$

Examinons successivement les deux cas de non continuité et de continuité sur appuis.

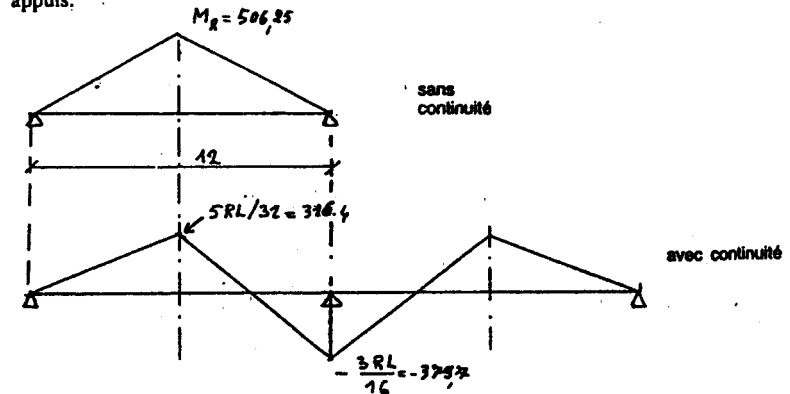


Fig. 23-17. Moment en phase III

7.3.4. Phase 4

Action de la charge d'exploitation de 5 kN/m^2 , soit 30 kN/m :

$$M_{q0} = qL^2/8 = 30 \times 12^2/8 = 540 \text{ kNm}$$

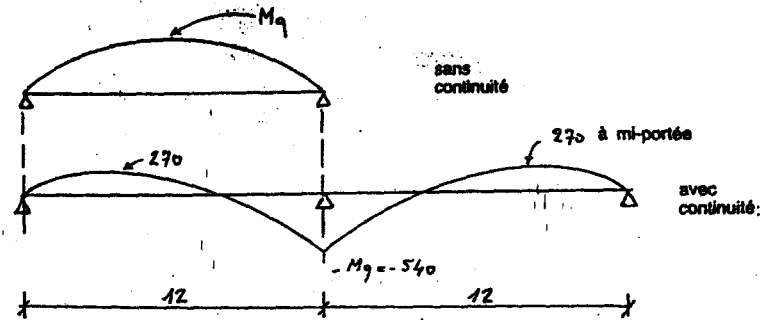


Fig. 23-18. Moment en phase IV

7.4. Nécessité d'un étai en phase de construction (fig. 23-20)

Sans étai, nous aurions les moments et contraintes suivants:

$$M_{s1} = 67,5 \text{ kNm}$$

$$M'_{s2} = 22,5 \times 12^2/8 = 405 \text{ kNm}$$

$$\Delta M \text{ en travée} = M'_{s2} = 405 \text{ kNm}$$

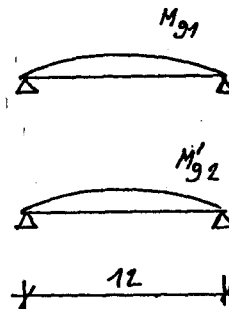


Fig. 23-19. Courbe des moments

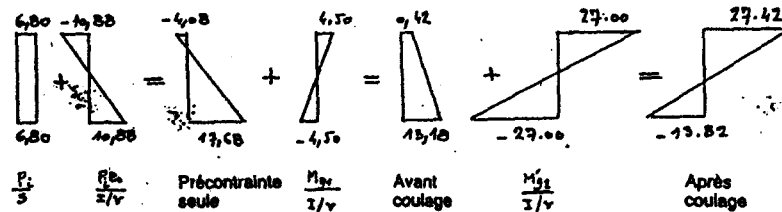


Fig. 23-20. Diagramme des contraintes, poutre sans étai

Précontrainte par pré-tension

On constate que la contrainte est inadmissible; d'où la nécessité de disposer d'un étai. La flèche serait aussi très élevée.

7.5. Contraintes admissibles — Classe III

• En construction

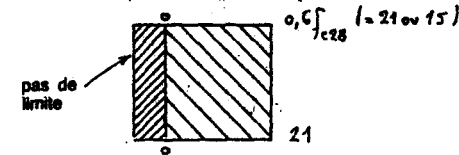


Fig. 23-21. Contraintes admissibles en phase de construction

• Sous combinaisons fréquentes

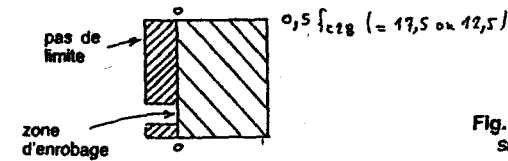


Fig. 23-22. Contraintes admissibles sous combinaisons fréquentes

• Sous combinaisons rares

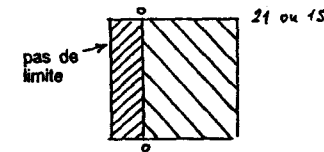
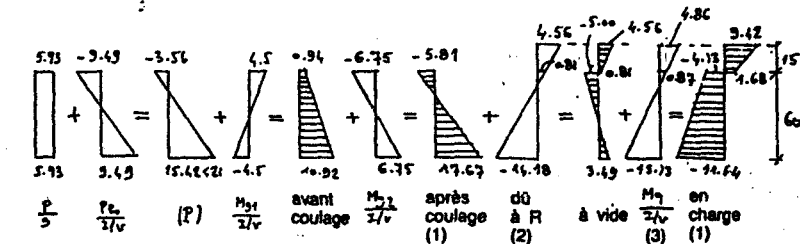


Fig. 23-23. Contraintes admissibles sous combinaisons rares

Les calculs suivants seront exécutés avec la précontrainte finale $P = 0,89 \text{ MN}$. La phase de construction devra être vérifiée avec P_1 .

7.6. Etude des contraintes à mi-travée (abscisse 6 m)

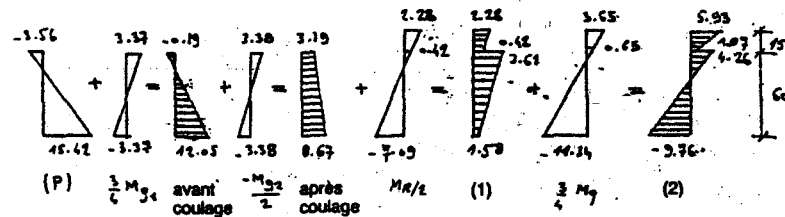
Sans continuité sur appui à l'abscisse 12 m (fig. 23-24).



- (1) A vérifier en flexion avec aciers passifs en classe III
- (2) $506,25/(l/v)$
- (3) $540 \text{ kNm}/(l/v)$ sur appuis simples

Fig. 23-24. Diagramme des contraintes à mi-travée

7.7. Etude des contraintes à l'abscisse 3 m (sans continuité)



- (1) Après désaiaement. A vide classe III
(2) En charge. A vérifier en flexion en classe III

Fig. 23-25. Diagramme des contraintes à l'abscisse 3 m

7.8. Etude des contraintes à l'abscisse 12 m

Avec continuité sur appui.

Moment dû :

$$\begin{aligned} & \text{— à l'enlèvement des étais : } -379,7 \text{ kNm,} \\ & \text{— aux surcharges : } \frac{-540 \text{ kNm}}{-919,7 \text{ kNm}} \end{aligned}$$

Or, le moment résistant de la section rectangulaire 25 × 75 vaut (fig. 23-26), en admettant une contrainte maximum de l'acier en service de 250 MPa :

$$\alpha = \frac{x}{d} = \frac{15}{15 + 16,67} = 0,4737$$

$$F_b = \frac{1}{2} \times \frac{15}{0,6} \times \frac{0,25}{0,6} \times 0,4737 \times 0,69 = 0,613 \text{ MN}$$

$$M = F_b \cdot z = 0,613(1 - 0,4737/3) \times 0,69 = 0,356 \text{ MNm} < 919,7 \text{ kNm}$$

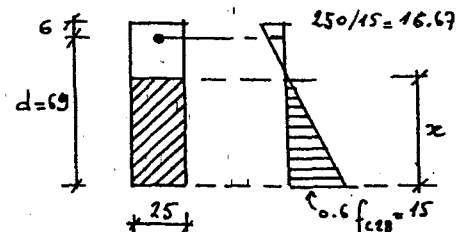


Fig. 23-26. Contraintes admissibles acier et béton

La continuité parfaite ne peut pas être assurée par les aciers de chapeaux passifs. Nous disposerons donc d'une continuité partielle de 356 kNm. Les diagrammes de moment dû à R et q sont alors représentés sur la figure 23-27.

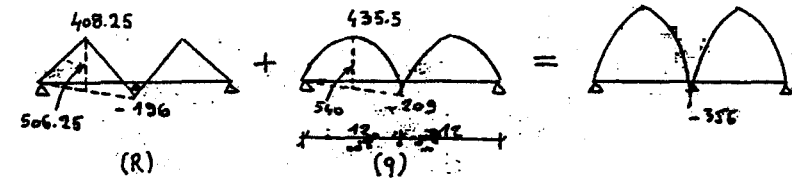


Fig. 23-27. Courbe des moments

On a supposé que la distribution des moments résistants est proportionnelle au moment théorique sur appui, soit : $356/919,7 = 0,387$

d'où : $M = -0,387 \times 506,25 = 196 \text{ kNm}$ sur appui dû à R,

et : $-540 \times 0,387 = -209 \text{ kNm}$ sur appui dû à q.

A mi-travée, les moments deviennent :

$$506,25 - 196/2 = 408,25 \text{ kNm}$$

$$\text{et } 540 - 209/2 = 435,5 \text{ kNm.}$$

7.9. Abscisse 6 m en continuité partielle (fig. 23-28)

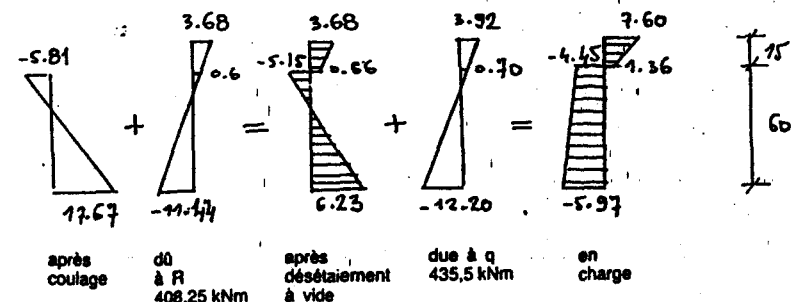


Fig. 23-28. Diagramme des contraintes à l'abscisse 6 m

7.10. Abscisse 3 m en continuité partielle (fig. 23-29)

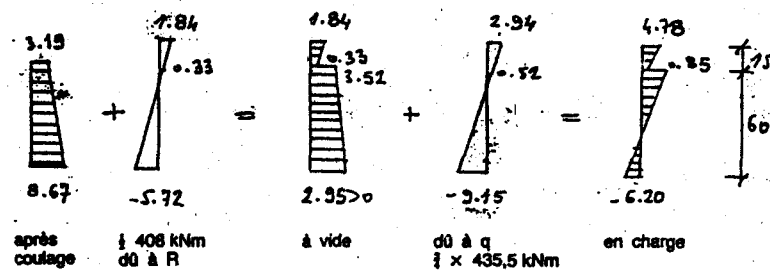


Fig. 23-29. Diagramme des contraintes à l'abscisse 3 m

7.11. Sur appui

Par définition du moment résistant en béton armé.

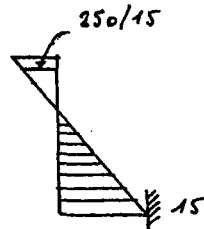


Fig. 23-30. Contraintes admissible en béton armé

7.12. Comme la mise en précontrainte ne se fait que progressivement sur une certaine longueur ℓ_m , d'après le BPEL, on a $\ell_m = 75 \varnothing = 75 \times 13,2 = 990$ mm pour les torons T 13 de 13,2 mm de diamètre nominal, la longueur ℓ_m est égale à :

$$\ell_m = \ell_m + 2(40 - 30) = 99 + 20 = 119 \text{ cm} = 1,19 \text{ m}$$

pour une résistance moyenne du béton de 30 MPa lors du relâchement des armatures.

A cette abscisse de $12 - 1,19 = 10,81$ m, le diagramme des contraintes pour les différents cas de charges devient (à 1,19 m de l'appui central) (fig. 23-31) :

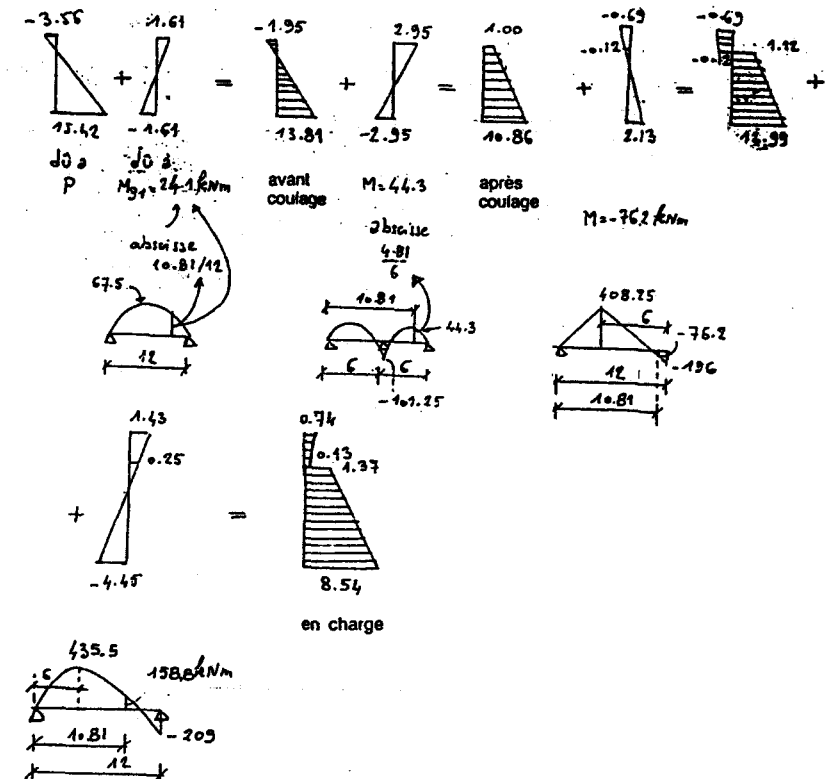


Fig. 23-31. Diagrammes des contraintes et courbes des moments correspondants

7.13. Conclusion

Pour des raisons de résistance de la poutrelle et *a fortiori* de déformations, on a dû disposer un étai à mi-portée de la poutre précontrainte préfabriquée pour supporter le poids du béton coulé en deuxième phase pour la dalle.

Comparons les diagrammes de contraintes à mi-travée avec et sans continuité (partielle) (fig. 23-32) :

On constate :

- une diminution de la contrainte de traction en fibre inférieure ;
- l'économie d'acier réalisée permet de disposer des aciers passifs en chapeaux ;
- un moindre risque de corrosion des aciers de précontrainte* ;

* Car l'ouverture des fissures est plus faible.

- une réduction de la flèche totale sous surcharge;
- la possibilité de supporter des surcharges plus importantes.

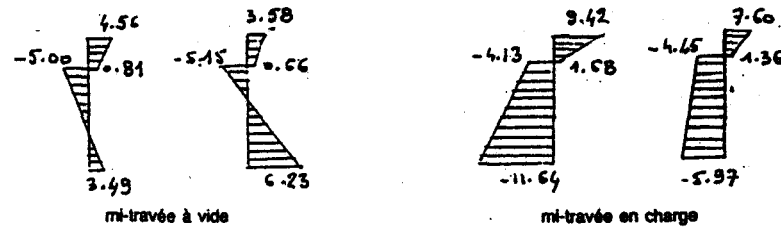


Fig. 23-32. Comparaison des contraintes avec et sans continuité partielle

7.14. Fluage et retrait

La poutrelle préfabriquée est stockée en usine, puis compte tenu des délais de transport et de manutention, il se passe un certain temps entre la fabrication et la pose qui peut varier de deux semaines à plusieurs mois. Pour une poutrelle 25×60 , le rayon moyen vaut:

$$r_m = \frac{0,25/4 \times 0,25^2 + (0,60 - 0,25) \times 0,25 \times 0,25/2}{0,25 \times 0,60} = 0,10 \text{ m} = 10 \text{ cm}$$

(pondération entre une pièce carrée de $0,25 \times 0,25$ et rectangulaire de $0,60 \times 0,25$).

La fonction d'évolution du retrait dans le temps est:

$$f(t) = \frac{j}{j + 9r_m} \text{ avec } r_m = 10$$

et celle du fluage:

$$g(t) = \frac{\sqrt{j}}{\sqrt{j} + 5 \sqrt{r_m}}$$

soit pour une poutrelle à 28 jours d'âge:

$$f(28) \approx 0,259 \text{ (26\% du retrait déjà réalisé)}$$

$$g(28) = 0,251 \text{ (25\% du fluage déjà réalisé)}$$

Après la réalisation de l'ouvrage, on assiste à une suite de l'évolution du retrait ($2,10^{-4} \times 0,74 = 0,15\%$) et du fluage sous des contraintes différentes de celles qui existaient dans la poutrelle avant d'être incorporée à l'ouvrage juste après le coulage; on constate un retrait du béton mis en place plus rapide que celui de la partie préfabriquée, de même pour le fluage.

Par exemple à mi-travée, à vide avec continuité partielle, on obtient les contraintes de la figure 23-33 (avant adaptation des contraintes).

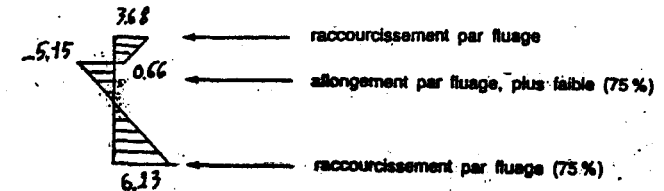


Fig. 23-33. Contraintes à mi-travée, à vide, avec continuité partielle

On assiste alors à une déformation différentielle gênée à la jonction table-nervure due:

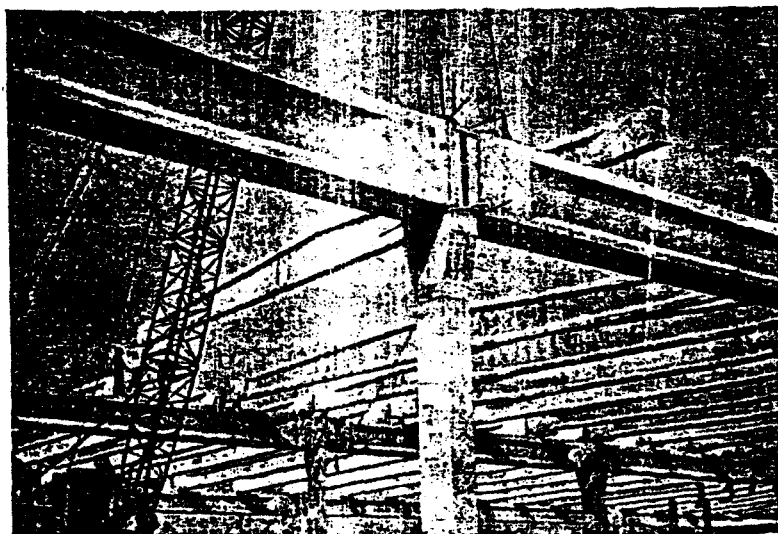
- au retrait 26 %,
- au fluage (allongement au-dessus et raccourcissement au-dessous).

Ces déformations gênées vont trouver un équilibre entre elles qui, avec la condition de continuité, entraînera une redistribution des moments sur appui et par conséquent des moments en travée.

Le calcul exact est très long, car il fait intervenir les lois de comportement des matériaux et leur évolution dans le temps (rhéologie).



Poutrelles précontraintes à fils adhérents pour bâtiment (portée 11 m) avec prédalles en béton armé 5 (Immeuble AGF, Paris, 1977).



Ossature (poteaux, poutres, pannes) en éléments préfabriqués précontraints par pré-tension (fils adhérents). Etablissements Belin à Evry (Essonne) (doc. Freyssinet).

24

EXEMPLE DE POUTRE DE BÂTIMENT

Le problème consiste à déterminer les dimensions et le câblage d'une poutre de reprise de 16 niveaux de bâtiment, sur une portée de 30 m entr'axe des poteaux (fig. 24-1). Le contreventement est assuré par ailleurs par des refends.

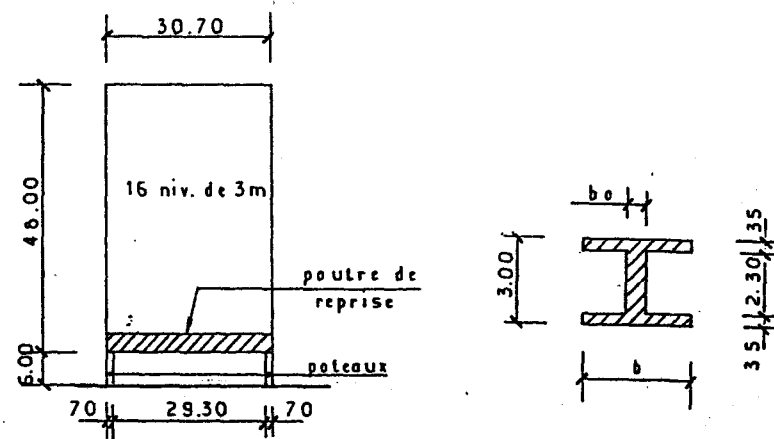


Fig. 24-1. Elévation du bâtiment et section de la poutre

Nous procéderons selon les étapes suivantes:

- dégrossissage de la précontrainte, de l'épaisseur de l'âme b_0 par l'effort tranchant;
- détermination de la largeur de l'aile b et des caractéristiques mécaniques de la section, d'où une nouvelle valeur de la précontrainte;

- dégrossissage du nombre de câbles;
- calcul des pertes de précontraintes, de la contrainte finale et du nombre de câbles;
- vérification des contraintes de flexion à mi-travée;
- vérification de la flexion à la rupture;
- étude du fuseau de passage;
- étude du câblage et détermination de l'épaisseur de l'âme;
- vérification des contraintes de flexion et de cisaillement;
- détermination des armatures verticales pour l'effort tranchant;
- étude de la déformée de la poutre;
- étude des poteaux supports; action de la précontrainte sur les poteaux.

L'inertie des poteaux, faible par rapport à celle de la poutre, conduit à prendre pour la poutre, une portée entre axes $L = 30$ m.

1. DONNÉES

Règlement: BPEL, classe II

Charges permanentes: $g = 0,502$ MN/m

Charges variables: $q = 0,242$ MN/m

Béton: $f_{c28} = 30$ MPa

Acier de précontrainte: toron T 15, TBR

- Aire = 139 mm^2
- $f_{prg} = 1\,814$ MPa
- $f_{peg} = 1\,623$ MPa
- diamètre de la gaine = 105 mm pour les câbles 19 T 15.

Nous essaierons de limiter au maximum la flèche de la poutre sous charges permanentes. L'idéal serait d'avoir une contrainte de compression constante sous charges permanentes.

Nous supposons que des contraintes d'ordre architectural nous conduisent à retenir une poutre en double T symétrique avec une hauteur totale de 3 m, une épaisseur des ailes de $0,35$ m et une hauteur libre intérieure de $2,30$ m.

2. PREMIER DÉGROSSISSAGE DE LA SECTION

L'épaisseur de l'âme devra satisfaire aux conditions de cisaillement maximum $\tau \leq \tau$ en ELS et de contrainte dans la bielle en ELU, qui se traduit par:

$$\tau_u \leq \frac{f_{ctd}}{6} = 5 \text{ MPa.}$$

La longueur des ailes sera déterminée par la condition de contrainte maximum $\sigma_c < \bar{\sigma}_c$ en ELS et la vérification en ELU.

2.1. Sollicitations

— ELS:

- Effort tranchant V sur appui:

$$V = V_g + V_q = 0,502 \times 15 + 0,242 \times 15 = 7,53 + 3,63 = 11,16 \text{ MN}$$

- Moment fléchissant à mi-travée:

$$M_g = g \frac{L^2}{8} = 0,502 \times 30^2/8 = 56,48 \text{ MNm}$$

$$M_q = q \frac{L^2}{8} = 0,242 \times 30^2/8 = 27,22 \text{ MNm}$$

$$M_{\max} = M_g + M_q = 56,48 + 27,22 = 83,70 \text{ MNm}$$

$$\Delta M = M_q = 27,22 \text{ MNm}$$

— ELU:

- Effort tranchant V_u à l'appui*:

$$V_u = 1,35V_g + 1,50V_q = 15,61 \text{ MN}$$

- Moment fléchissant à mi-travée:

$$M_u = 1,35M_g + 1,50M_q = 117,05 \text{ MNm}$$

2.2. Contraintes admissibles (fig. 24-2)

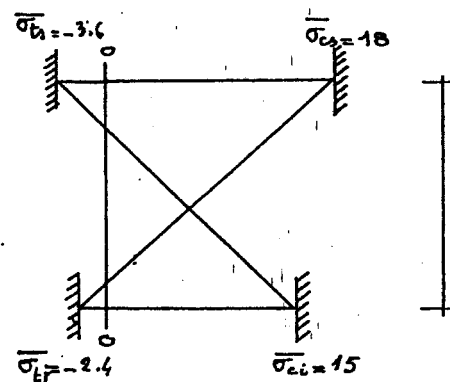


Fig. 24-2. Contraintes admissibles du béton

Avec $f_{c28} = 30$ MPa, nous obtenons:

$$f_{ctd} = 0,06f_{c28} + 0,6 = 2,4 \text{ MPa}$$

$$\bar{\sigma}_{ct} = 0,6f_{c28} = 18 \text{ MPa sous combinaisons rares } M_g + M_q$$

* On peut prendre en compte sur appui, l'effort tranchant correspondant à l'abscisse $h/2$ pour tenir compte d'une transmission directe des charges à l'appui; ce qui n'a pas été le cas ici.

2.3.4. Effort tranchant en ELU

La condition de contrainte maximum dans la bielle se traduit par la relation :

$$\tau_u \leq \frac{f_{ctd}}{6} = 5 \text{ MPa}$$

$$\text{soit : } \tau_u = \frac{V_u - P \sin \alpha}{b_w z} \leq 5$$

$$\text{et : } b_w > \frac{V_u - P \sin \alpha}{5z} = \frac{15,61 - 6}{5 \times 2,4} = 0,801 \text{ m}$$

$$b_w > 0,801 + 0,105 = 0,906 \text{ m.}$$

Compte tenu de l'incertitude sur les hypothèses faites, on pourra retenir :

$$b_w = 0,90 \text{ m}$$

Cette valeur est suffisante pour loger deux gaines $\varnothing 105 \text{ mm}$ sur une même horizontale, avec un enrobage supérieur à $\varnothing 105$ ($5 \times 105 < 900 \text{ mm}$).

2.4. Flexion — Largeur de table

2.4.1. En ELS

On doit vérifier que :

$$\frac{I}{v} \geq \frac{Pph}{\bar{\sigma}_a + \frac{v}{v'} \bar{\sigma}_u} \quad (\text{sur-critique})$$

soit avec les valeurs approchées déjà déterminées :

$$\frac{I}{v} \geq \frac{34,12 \times 0,6 \times 3}{18 - 2,4} = 3,94 \text{ m}^3$$

$$I \geq 3,94 \times 1,5 = 5,91 \text{ m}^4$$

ce qui pour une section en double T symétrique se traduit par :

$$I = \frac{bh^3}{12} - (b - b_o) \frac{(h - 2h_o)^3}{12} \geq 5,91$$

$$\text{ou } 27 b/12 - (b - 0,9) \times 2,3^3/12 \geq 5,91$$

$$\text{et } b \geq 4,05 \text{ m. Retenons } 4,10 \text{ m.}$$

2.4.2. En ELU

On doit vérifier que la valeur du moment réduit μ de la nervure est inférieure à 0,5 pour avoir une racine de l'équation :

$$\alpha = 1,25 (1 - \sqrt{1 - 2\mu})$$

• Résultante de compression de la table extérieure (fig. 24-5)

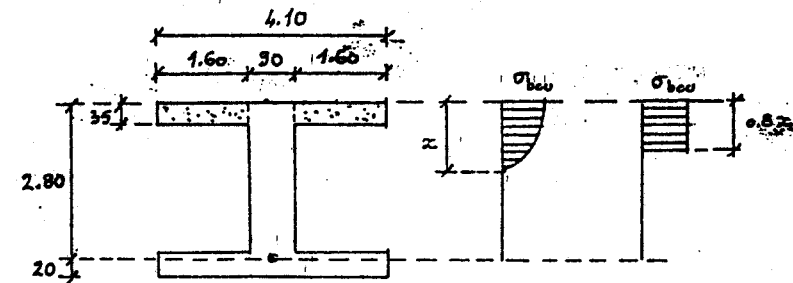


Fig. 24-5. Section de la poutre et diagramme des contraintes en ELU

$$F_{te} = (b - b_o) h_o \bar{\sigma}_{bcu}$$

$$\text{avec : } \bar{\sigma}_{bcu} = 0,85 f_{ctd} / \gamma_b = 0,85 \times 30 / 1,5 = 17 \text{ MPa}$$

$$F_{te} = 3,2 \times 0,35 \times 17 = 19,04 \text{ MN}$$

et le moment correspondant par rapport aux aciers tendus :

$$M_{te} = F_{te} \cdot z_d = 19,04 \times (2,80 - 0,35/2) = 50 \text{ MNm}$$

Le moment à reprendre par la nervure vaut :

$$M_n = M_u + M_{te} = 117,05 - 50 = 67,05 \text{ MNm}$$

$$\text{d'où : } \mu = \frac{M_n}{b_o d^2 \bar{\sigma}_{bcu}} = \frac{67,05}{0,9 \times 2,8^2 \times 17} = 0,559 > 0,5$$

Prenons alors une largeur d'aile de 5,90 m, qui nous conduit à :

$$F_{te} = 5 \times 0,35 \times 17 = 29,75 \text{ MN}$$

$$M_{te} = 29,75 \times 2,625 = 78,09 \text{ MNm}$$

$$M_n = 117,05 - 78,09 = 38,96 \text{ MNm}$$

$$\mu = 0,3248$$

$$\xi = 1,25 (1 - \sqrt{1 - 2\mu}) = 0,510$$

et un surallongement de l'acier de précontrainte égal à :

$$\Delta \epsilon_s = 3,5\% \frac{1 - \xi}{\xi} = 3,363\%, \text{ ce qui est convenable pour bénéficier au mieux de la surtension de l'acier de précontrainte et de la tension des aciers passifs.}$$

On vérifie également que le débord de l'aile $\frac{b - b_o}{2} = 2,5 \text{ m}$ ne dépasse pas le dixième de la portée soit 3 m. Ce qui est vérifié.

2.5. Caractéristiques mécaniques de la section (fig. 24-6)

$$S = 6,20 \text{ m}^2$$

$$I = 8,2054 \text{ m}^4$$

$$I/v = I/v' = 5,470 \text{ m}^3$$

$$\rho = 0,588$$

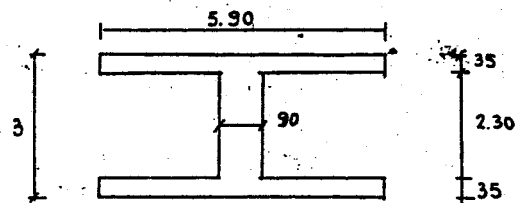


Fig. 24-6. Dimensions de la section

moment statique μ_1 de la partie située au-dessus du centre de gravité :

$$\mu_1 = \frac{bh^2}{8} - (b - b_0) \frac{(h - 2h_0)^2}{8} = 3,331 \text{ m}^3$$

d'où le bras de levier : $z = \frac{I}{\mu_1} = 2,463 \text{ m}$.

3. PRÉCONTRAINTÉ

3.1. Effort de précontrainte en ELS

$$P_{sur} = \frac{83,7 - 0,588 \times 6,2 \times 1,5 \times 2,4}{0,588 \times 1,5 + 1,5 - 0,2} = 32,34 \text{ MN}$$

3.2. Nombre de câbles

En partant d'une valeur approchée de la contrainte de l'acier après pertes de 1 200 MPa ($2/3 f_{pe} = 1\,209 \text{ MPa}$), on obtient une section d'acier A_p :

$$A_p = \frac{P}{1\,200} = 32,34 \times 10^6 / 1\,200 = 26\,950 \text{ mm}^2, \text{ soit } n \text{ câbles } 19 \text{ T } 15,$$

$$n = 26\,950 / 19 / 139 = 10,2, \text{ soit par symétrie } 12 \text{ câbles } 19 \text{ T } 15 \text{ de } 31\,692 \text{ mm}^2 \text{ de section.}$$

3.3. Vérification en ELU

En première approximation, on peut prendre pour σ_3 la valeur :

$$\frac{f_{pe}}{\gamma_p} = \frac{1\,623}{1,15} = 1\,411,3 \text{ MPa}$$

$$\text{soit : } A_p \sigma_3 = 1\,411,3 \times 31\,692 \times 10^{-6} = 44,73 \text{ MN}$$

Alors que la résultante de compression de la table vaut :

$$F_{te} = (b - b_0) h_0 \bar{\sigma}_{bcu}$$

$$F_{te} = 29,75 \text{ MN}$$

et celle de la nervure :

$$F_n = 0,8 \xi b_0 d_0 \bar{\sigma}_{bcu} \text{ avec } \xi = 0,50$$

$$= 0,8 \times 0,5 \times 0,9 \times 2,8 \times 17 = 17,14 \text{ MN}$$

On constate que : $A_p \sigma_3 = 44,73$ est plus petit que $F_{te} + F_n = 46,89 \text{ MN}$.

Nous devons donc :

- soit augmenter la section des aciers de précontrainte, mais il nous est difficile de loger 14 plaques d'ancrage en bout de poutre,
- soit d'introduire des aciers passifs, de préférence de même centre de gravité que les aciers actifs.

Dans ce dernier cas, la section d'acier passif minimum sera donnée par :

$$A_s = \frac{F_{te} + F_n - A_p \sigma_3}{\sigma_s} = \frac{47,23 - 44,73}{347,8} \times 10^4$$

$$A_s = 71,88 \text{ cm}^2$$

Nous retenons :

- largeur de l'aile : 5,90 m,
- épaisseur de l'âme : 0,90 m,
- nombre de câbles : 12 câbles 19 T 15 (31 692 mm²),
- excentricité à mi-travée : - 1,30 m,
- les aciers passifs seront calculés lors de la vérification.

4. CALCUL DES PERTES

4.1. Frottement (calcul à mi-travée)

$$x = 15 \text{ m}$$

$$\alpha = 10^\circ 13' = 0,1768 \text{ radian}$$

$$\varphi = \text{coefficient de frottement linéaire} = 0,0017 \text{ m}^{-1}$$

$$f = \text{coefficient de frottement angulaire} = 0,16 \text{ rd}^{-1}$$

$$\sigma_{p0} = \text{Min } [0,90 f_{pe}; 0,80 f_{pe}]$$

$$= \text{Min } [0,9 \times 1\,623; 0,8 \times 1\,814] = 1\,451,2 \text{ MPa}$$

$$\text{d'où : } e^{-\varphi x - f \alpha} = e^{-0,0017 \times 15 - 0,16 \times 0,1768} = 0,9476$$

et : $\Delta \sigma_f = (1 - 0,9476) \sigma_{p0} = 76 \text{ MPa}$ et la pente de la courbe $\sigma(x)$ peut être considérée comme constante et égale à :

$$\text{pente} = \frac{\Delta \sigma_f}{x} = \frac{76}{15} = 5,067 \text{ MPa/m}$$

4.2. Recul à l'ancrage

Le recul à l'ancrage λ donné par la fiche d'agrément est de 5 mm. La longueur d'influence λ du recul à l'ancrage est telle que :

$$\lambda = \sqrt{\frac{E_p}{\text{pente}}} = \sqrt{\frac{0,005 \times 190\,000}{5,067}} = 13,69 \text{ m} < 15 \text{ m}$$

La section à mi-travée n'est donc pas affectée par le recul à l'ancrage.

4.3. Raccourcissement élastique

$$\Delta\sigma_n = \frac{1}{2} \sigma_{bco} \frac{E_p}{E_i}$$

avec : σ_{bco} = contrainte du béton au niveau du câble à la mise en tension sous l'action de la précontrainte et des charges permanentes.

Cette contrainte est variable suivant :

- la force de précontrainte qui varie avec l'abscisse en fonction des pertes de frottement, du recul à l'ancrage ;
- l'ordonnée du point de passage du câble et le moment à chaque abscisse.

On admet de prendre en compte la contrainte dans la section la plus sollicitée — ici, la section médiane.

Le problème est rendu plus difficile, puisque nous serons obligés de procéder à une mise en tension en plusieurs étapes au fur et à mesure de la construction des étages.

Admettons, pour simplifier, une précontrainte initiale égale à 1,15 fois la précontrainte finale (pertes estimées à 15 %).

La contrainte au niveau du câble vaut, sous précontrainte initiale et charges permanentes avec $e_o = - (1,5 - 0,2) = - 1,30 \text{ m}$:

$$\begin{aligned} \sigma_{bco} &= \frac{1,15 P}{S} + \frac{1,15 P e_o^2}{I} + \frac{M_p e_o}{I} \\ &= \frac{1,15 \times 32,34}{6,20} + \frac{1,15 \times 32,34 \times 1,30^2}{8,2054} - \frac{56,48 \times 1,30}{8,2054} \\ &= 6 + 7,66 - 8,95 = 4,71 \text{ MPa.} \end{aligned}$$

D'autre part, le module d'Young instantané à la date de mise en tension supposé à 15 jours est égale à :

$$E_{i15} = 11\,000 \sqrt[3]{f_{c15}}$$

avec : $f_{c15} = f_{c28} \times 0,685 \log(16) = 24,74 \text{ MPa}$

$$E_{i15} = 32\,054 \text{ MPa}$$

$$\text{d'où : } \Delta\sigma_n = \frac{1}{2} \times \frac{4,71 \times 190\,000}{32\,054} = 14 \text{ MPa.}$$

La valeur de la précontrainte initiale devient :

$$\begin{aligned} \sigma_{pi} &= \sigma_{po} - \Delta\sigma_r - \Delta\sigma_n - \Delta\sigma_p \\ &= 1\,451,2 - 76 - 14 = 1\,361,2 \text{ MPa.} \end{aligned}$$

4.4. Retrait

$$\epsilon_r = 2 \times 10^{-4}$$

$$\text{d'où : } \Delta\sigma_r = \epsilon_r E_n = 2 \times 10^{-4} \times 190\,000 = 38 \text{ MPa}$$

4.5. Fluage

$$\Delta\sigma_n = K \sigma_{bc} \frac{E_p}{E_i}$$

avec : $K = 2$ (valeur approchée dans notre cas),

σ_{bc} = contrainte au niveau du câble sous précontrainte et charges permanentes,

$$\begin{aligned} \sigma_{bc} &= \frac{P}{S} + \frac{P e_o^2}{I} + \frac{M_p e_o}{I} \\ &= \frac{32,34}{6,20} + \frac{32,34 \times 1,3^2}{8,2054} - \frac{56,48 \times 1,3}{8,2054} = 2,93 \text{ MPa} \\ E_i &= 11\,000 \sqrt[3]{30} = 34\,180 \text{ MPa} \end{aligned}$$

$$\text{d'où : } \Delta\sigma_n = 2 \times 2,93 \times \frac{190\,000}{34\,180} = 32,6 \text{ MPa}$$

4.6. Relaxation

$$\Delta\sigma_p = \frac{6}{100} \rho_{1000} \left(\frac{\sigma_{pi}}{f_{prg}} - \mu_o \right) \sigma_{pi}$$

avec : $\rho_{1000} = 2,5$ (toron T 15 classe TBR)

$\mu_o = 0,43$ (classe TBR)

$$\sigma_{pi} = 1\,361,2 \text{ MPa}$$

$f_{prg} = 1\,814 \text{ MPa}$ (rupture garantie)

$$\text{d'où : } \Delta\sigma_p = \frac{6}{100} \times 2,5 \left(\frac{1\,361,2}{1\,814} - 0,43 \right) 1\,361,2 = 65,4 \text{ MPa}$$

4.7. Contrainte finale

$$\begin{aligned} \sigma_p &= \sigma_{pi} - \Delta\sigma_r - \Delta\sigma_n - \frac{5}{6} \Delta\sigma_p \\ &= 1\,361,2 - 38 - 32,6 - \frac{5}{6} \times 65,4 = 1\,236,1 \text{ MPa} \end{aligned}$$

Nous utiliserons les câbles au maximum de leur possibilité, soit :

$$P = 12 \times 19 \times 139 \times 10^{-6} \times 1\,236,1 = 39,17 \text{ MN} > 32,34$$

ce qui aura pour effet de :

- réduire les tractions du béton et par conséquent la quantité d'aciers passifs,
- réduire les déformées de la poutre à vide.

Nous retiendrons :

$$P = 39 \text{ MN}$$

5. VÉRIFICATION DE LA FLEXION A MI-TRAVÉE

5.1. ELS

On vérifiera que les contraintes restent dans le domaine des contraintes admissibles (fig. 24-7).

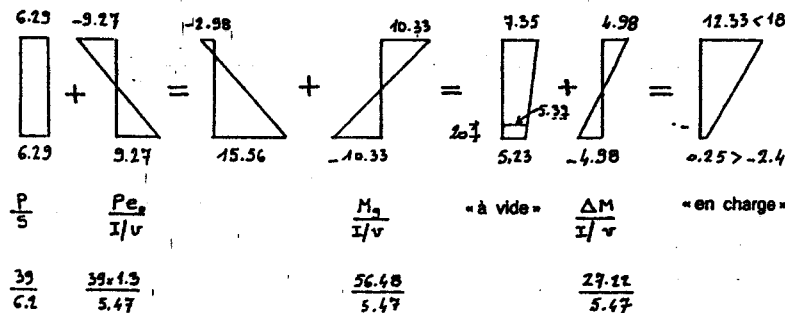


Fig. 24-7. Diagrammes des contraintes

5.2. ELU

- Résultante de compression du béton de la table extérieure :

$$F_{te} = (b - b_o)h_o\sigma_{bca} = 5 \times 0,35 \times 17 = 29,75 \text{ MN}$$

- Moment résistant de la table extérieure par rapport aux aciers tendus :

$$M_{te} = F_{te}(d - h_o/2) = 29,75 (2,8 - 0,35/2) = 78,09 \text{ MNm}$$

- Moment à reprendre par la nervure :

$$M_n = M_u - M_{te} = 117,05 - 78,09 = 38,96 \text{ MNm}$$

- Moment réduit :

$$\mu = \frac{M_u}{bd^2\sigma_{bca}} = \frac{38,96}{0,9 \times 2,8^2 \times 17} = 0,3248 < 0,5$$

- Position de la fibre neutre :

$$e = \frac{x}{d} = 1,25 (\sqrt{1 + 2\mu}) = 0,510$$

et la résultante de compression du béton de la nervure :

$$F_n = 0,8 \xi_b d_o \sigma_{bca} = 0,8 \times 0,51 \times 0,9 \times 2,8 \times 17 = 17,48 \text{ MN}$$

- Sur-allongement des aciers actifs $\Delta \epsilon_3$:

$$\Delta \epsilon_3 = \epsilon_b \frac{1 - \eta \xi}{\xi} = 3,5(1 - 0,51)/0,51 = 3,363 \% < 10 \%$$

- Allongement correspondant à la précontrainte P :

$$\epsilon_1 = \frac{P}{A_p E_p} = \frac{39 \times 10^6}{31\,692 \times 190\,000} = 6,477 \%$$

- Sur-allongement $\Delta \epsilon_2$ pour ramener à zéro la contrainte du béton au niveau du câble (fig. 24-7) :

$$\Delta \epsilon_2 = \frac{5\sigma_{bc}}{E_p} = \frac{5 \times 5,37}{190\,000} = 0,141 \%$$

d'où : $\epsilon_3 = \epsilon_1 + \Delta \epsilon_2 + \Delta \epsilon_3$ (fig. 24-8)

$$\epsilon_3 = 6,477 + 0,141 + 3,363 = 9,981 \%$$

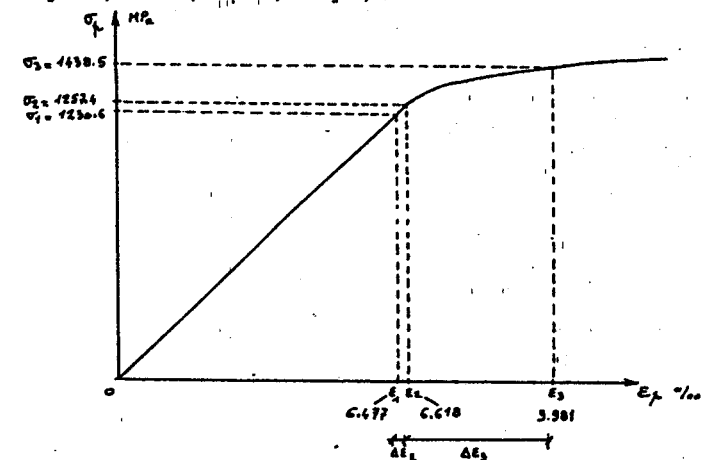


Fig. 24-8. Diagramme contrainte déformation de l'acier

La valeur de σ_3 est calculée en tant que racine de l'équation :

$$\epsilon_3 = \frac{\sigma_3}{E_p} + 100 \left(\frac{\sigma_3 \gamma_e}{f_{pe}} - 0,9 \right)^3 \text{ qui est}$$

$\sigma_3 = 1\,438,5 \text{ MPa}$ (par approximations successives) d'où l'inégalité à vérifier :

$$A_p \sigma_p \leq F_{te} + F_a$$

$$10^{-6} \times 31\,692 \times 1\,438,5 > 29,75 + 17,48$$

$$45,59 > 47,23 \text{ non vérifiée}$$

On détermine alors la section d'acier passif nécessaire A_s :

$$A_s = \frac{47,23 - 45,59}{347,8} \times 10^4 = 47,15 \text{ cm}^2$$

soit :

10 HA 25

6. VÉRIFICATION DE L'EFFORT TRANCHANT

La section la plus défavorable ne peut être déterminée *a priori*, car il nous faut connaître la plus grande valeur de :

$$V_r = V_g + V_q - P \sin \alpha \quad V_r' = V_g - P \sin \alpha$$

et

$$V_{ru} = 1,35 V_g + 1,5 V_q - P \sin \alpha$$

compte tenu d'une valeur de la précontrainte variable avec l'abscisse (fig. 24-9) et d'un angle d'inclinaison du câble variable lui aussi.

6.1. Courbe $P(x)$

Le maximum de P est obtenu au point d'abscisse $\lambda = 13,69 \text{ m}$ (limite d'influence du glissement à l'ancrage), la pente est de $5,067 \text{ MPa/m}$ et la valeur de la contrainte à mi-travée est :

$$\sigma_p = \frac{39 \times 10^6}{31\,692} = 1\,230,6 \text{ MPa}$$

A partir de ces données, on peut tracer la courbe $\sigma_p(x)$ (fig. 24-9).

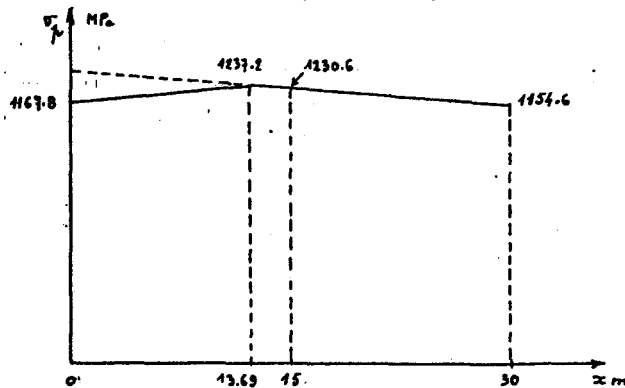


Fig. 24-9. Contraintes de l'acier avant et après blocage de l'ancrage

6.2. Courbe $e_o(x)$

Nous pouvons *a priori* adopter un tracé parabolique pour $e_o(x)$ avec :

$$e_o = +0,04 \text{ m pour } x = 0 \text{ et } x = 30 \text{ m}$$

$$e_o = -1,30 \text{ m pour } x = 15 \text{ m}$$

$$\text{soit : } e_o(x) = \frac{(x - 15)^2}{(15^2/1,34)} - 1,30 = \frac{(x - 15)^2}{167,91} - 1,30$$

$$\text{la pente } \text{tg} \alpha \text{ vaut : } \text{tg} \alpha(x) = \frac{2(x - 15)}{167,91}$$

6.3. Tableau de vérification

Le cisaillement admissible pour $\alpha_x = \frac{P}{S} < 0,4 f_{ct28}$ vaut :

$$\bar{\tau} = \sqrt{0,4 f_{ct28} (f_{ct28} + \sigma_x)}$$

$$\bar{\tau} = \sqrt{0,4 \times 2,4 (2,4 + \sigma_x)}$$

L'effort tranchant admissible vaut :

$$\text{— ELS : } \bar{V}_r = \bar{\tau} b_n z = 0,795 \times 2,463 \bar{\tau} = 1,958 \bar{\tau}$$

$$\text{— en ELU : } \bar{V}_{ru} = \bar{\tau}_u b_n z = 30/6 \times 0,795 \times 2,463 = 9,79 \text{ MN}$$

On constate à la lecture du tableau 24.1 que :

— l'effort tranchant maximum en ELS ne dépasse pas l'effort tranchant admissible : $4,724 < 5,528 \text{ MN}$;

— l'effort tranchant maximum ELU ne dépasse pas $9,175 \text{ MN}$: $9,175 < 9,79 \text{ MN}$;

— il existe même une certaine marge, compte tenu du fait que l'on peut calculer les points situés à moins de $h/2$ de l'appui avec l'effort tranchant correspondant à l'abscisse $h/2 = 1,50 \text{ m}$. On aurait trouvé $V_{ru} = 8,214 < 9,79 \text{ MN}$ à droite et $V_{ru} = -8,148$ à gauche.

Tableau 24.1

$\xi = x/L$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
x (m)	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
P (MN)	37,01	37,49	37,97	38,45	38,94	39,00	38,52	38,04	37,56	37,07	36,59
e_0 (m)	0,040	-0,442	-0,818	-1,086	-1,246	-1,30	-1,246	-1,086	-0,818	-0,442	0,040
$tg \alpha$	0,1787	0,1429	0,1072	0,0715	0,0357	0	0,0357	0,0715	0,1072	0,1429	0,1787
$P \sin \alpha$	6,509	5,305	4,048	2,741	1,390	0	1,376	2,711	4,003	5,246	6,436
$V_0 = \frac{gL}{2} (1 - 2\xi)$	7,530	6,024	4,518	3,012	1,506	0	1,506	3,012	4,518	6,024	7,530
$V_0 = \frac{gL}{2} (1 - \xi)^2$	3,630	2,940	2,323	1,779	1,307	0,908	1,307	1,779	2,323	2,940	3,630
$V_1 = V_0 + V_0 - P \sin \alpha$	4,651	3,659	2,794	2,049	1,422	0,908	1,437	2,079	2,838	3,719	4,724
$V_2 = V_0 - P \sin \alpha$	1,021	0,719	0,470	0,271	0,116	0	0,130	0,300	0,515	0,778	1,094
$V_0 = 1,35 V_1 + 1,5 V_2$ $- P \sin \alpha < 9,8$	9,101	7,238	5,536	3,993	2,603	1,361	2,618	4,022	5,581	7,397	9,175
$\sigma_s = P/S$	5,969	6,047	6,125	6,202	6,280	6,290	6,213	6,135	6,057	5,980	5,902
$\bar{\epsilon} = \sqrt{0,96 (\sigma_s + 2,4)}$	2,834	2,848	2,861	2,874	2,887	2,889	2,875	2,862	2,849	2,836	2,823
$\bar{\sigma}_t = 1,958 \bar{\epsilon}$	5,550	5,576	5,601	5,627	5,652	5,655	5,630	5,605	5,579	5,553	5,528

7. FUSEAU DE PASSAGE

Il nous reste à vérifier en flexion ELS à chaque abscisse la double inéquation :

$$e_2 < e_0 < e_1$$

Comme la section médiane est entièrement comprimée vérifions qu'il en est de même quelle que soit l'abscisse. Nous évitons ainsi de mettre le pourcentage d'acier minimum.

Avec: $e_1 = +c - \frac{M_{\max}}{P}$ (classe I)

$$e_2 = -c' - \frac{M_{\min}}{P} < -1,30 \text{ m}$$

$$c = pv$$

$$c' = pv'$$

$$g = 0,502 \text{ MN/m}$$

$$q = 0,242 \text{ MN/m}$$

$$M_{\max} = (g + q) \frac{x(L - x)}{2}$$

$$M_{\min} = g \frac{x(L - x)}{2}$$

On a bien toujours $e_2 < e_0 < e_1$ (tableau 24.2).

Tableau 24.2

$\xi = x/L$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
x	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
$M_{\max}$	0	30,13	53,57	70,51	80,35	83,7	80,25	70,31	53,57	30,13	0
$M_{\min}$	0	20,33	36,14	47,44	54,22	56,46	54,22	47,44	36,14	20,33	0
P	37,01	37,49	37,97	38,46	38,94	39,00	38,52	38,04	37,56	37,07	36,59
e_1	0,882	0,078	-0,529	-0,946	-1,182	-1,26	-1,26	-0,966	-0,544	-0,069	0,882
e_0	0,040	-0,442	-0,818	-1,086	-1,246	-1,30	-1,246	-1,086	-0,818	-0,442	0,040
e_2	-0,882	-1,30	-1,30	-1,30	-1,30	-1,30	-1,30	-1,30	-1,30	-1,30	-0,882

On peut également calculer les contraintes pour chaque type de charges et à chaque abscisse (cf. tableau 24.3 et fig. 24-10).

Tableau 24.3

$\xi = x/L$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
x	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
σ_1	5,27	7,05	8,24	9,21	6,28	6,29	6,21	6,13	6,06	5,98	5,90
σ_2	0,27	-3,03	-5,68	-7,63	-8,87	-9,27	-8,77	-7,55	-5,61	-3,00	-0,27
σ_3	6,24	3,01	0,45	-1,43	-2,59	-2,98	-2,56	-1,41	0,44	2,98	6,17
σ_4	5,70	9,08	11,80	13,83	15,15	15,56	14,99	13,68	11,67	8,98	5,63
σ_5	0	3,72	6,61	8,67	9,91	10,32	9,91	8,67	6,61	3,72	0
σ_6	6,24	6,73	7,06	7,24	7,32	7,35	7,35	7,26	7,05	6,70	6,17
σ_7	5,70	5,36	5,19	5,16	5,24	5,23	5,08	5,01	5,06	5,26	5,63
σ_8	0	-1,79	-3,19	-4,18	-4,78	-4,98	-4,78	-4,18	-3,19	-1,79	0
σ_9	6,24	8,52	10,24	11,42	12,10	12,32	12,13	11,44	10,24	8,49	6,19
σ_{10}	5,70	3,57	2,01	0,98	0,46	0,26	0,30	0,83	1,88	3,47	5,63
σ_c	5,73	5,45	5,32	5,30	5,38	5,36	5,23	5,16	5,20	5,36	5,67

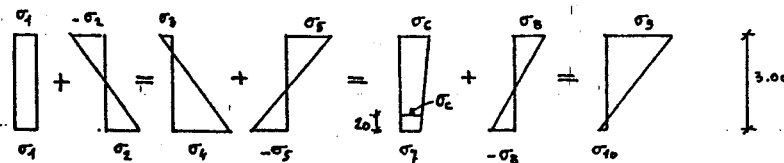


Fig. 24-10. Diagrammes des contraintes

On peut également dessiner le fuseau de passage, en hachuré sur la figure 24-11.

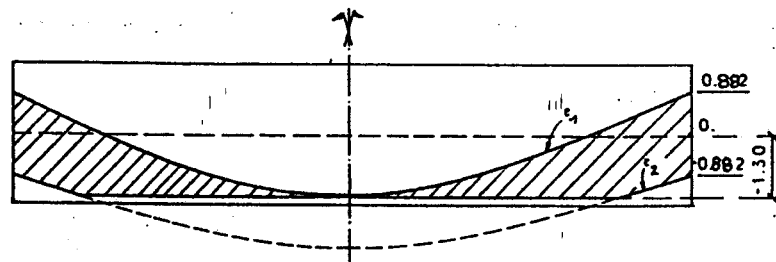


Fig. 24-11. Fuseau de passage du câble

N'importe quel câble situé à l'intérieur du fuseau de passage, convient pour avoir des contraintes en tout point positives ou nulles.

8. ACIERS LONGITUDINAUX

Compte tenu du fait qu'il n'y a pas de traction, on ne disposera que des aciers strictement nécessaires à la résistance de flexion ELU.

Nous calculerons donc le moment à reprendre par la nervure M_n et nous vérifierons que l'inéquation:

$$A_p \sigma_s > F_{te} + F_n$$

est vérifiée. A défaut nous ajouterons des aciers passifs (tableau 24.4).

Tableau 24.4

$\xi = x/L$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
x	0	3	6	9	12	15
$M_u = 1,35 M_g + 1,5 M_q$	0	42,15	74,93	98,35	112,40	117,08
$M_n = M_u - M_{te}$	0	—	—	20,25	34,30	38,99
$\mu = M_n / (0,9 d^2 \times 17)$	0	0,1114	0,1390	0,1979	0,2973	0,3248
$\xi = 1,25 (1 - \sqrt{1 - 2\mu})$	—	0,1480	0,1879	0,2784	0,4541	0,5100
$\epsilon_1 = 1000 P / (A_p E_p)$	—	6,224	6,304	6,384	6,467	6,477
σ_{be}	—	5,45	5,32	5,30	5,38	5,37
$\Delta \epsilon_2 = S_{be} / E_p \times 1000$	—	0,143	0,140	0,139	0,141	0,141
$\Delta \epsilon_3 = 3,5 (1 - \xi) / \xi$	—	10	10	9,071	4,208	3,363
ϵ_3	—	16,367	16,444	15,594	10,816	9,981
σ_3	—	1486,9	1487,3	1483,0	1448,2	1438,5
$A_p \sigma_3$	—	47,11	47,14	47,00	45,90	45,59
$F_{te} + F_n$	—	28,83	34,95	38,56	45,01	47,23
A_s (cm ²)	0	0	0	0	0	47,15

9. ÉTUDE DU CÂBLAGE ET DES ZONES D'ABOUT

Les dimensions de la section et le tracé des câbles en about seront déterminés pour satisfaire les conditions suivantes:

- relever les câbles pour avoir des contraintes de cisaillement et de traction des aciers verticaux acceptables;
- assurer une bonne transmission des bielles d'appui aux cônes d'ancrage en respectant les règles de diffusion de la précontrainte;
- assurer une bonne transmission de l'effort tranchant sur le poteau.

9.1. Disposition des câbles à mi-travée

L'espacement entre axes des câbles est de deux fois le diamètre de la gaine $\varnothing = 105$ mm, et la distance d'une gaine à la paroi la plus proche est de $\varnothing$ d'où le schéma de la figure 24-12.

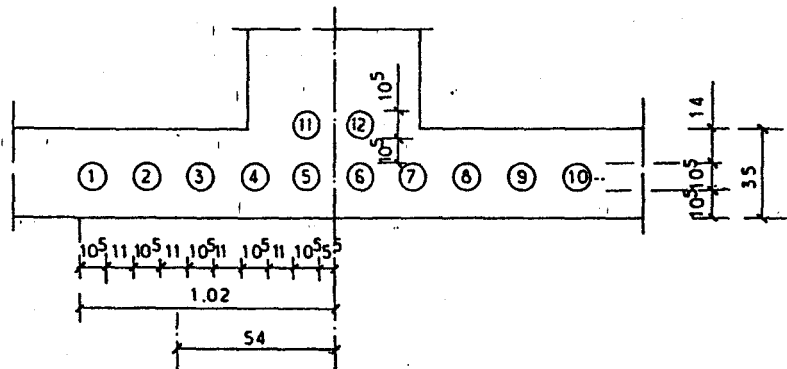


Fig. 24-12. Disposition des câbles à mi-travée

$$d' = \frac{10 \times 1,5 \times 10,5 + 2 \times 2,5 \times 10,5}{12} = 19,25 \text{ cm}$$

Ce qui justifie l'hypothèse de 20 cm que nous avons prise dans nos calculs jusqu'à maintenant.

Nous numérotions les 12 câbles de 1 à 12 pour suivre leur position le long de la poutre.

9.2. Disposition des ancrages à l'appui

Pour transmettre l'effort au poteau, on disposera d'un diaphragme de la dimension du poteau occupant la hauteur de la poutre.

Pour le dessin des ancrages, voir la figure 24-3.

10. CALCUL DES ACIERS VERTICAUX

- La détermination des armatures d'effort tranchant sera faite en état-limite ultime, des abscisses variant de $h/2$ à $L/2 = 15$ m. Les aciers seront déterminés par la formule :

$$\frac{A_t}{s_t} = \left(\tau_u - \frac{f_{tj}}{3} \right) \frac{b_n \gamma_s \beta_u}{f_c}$$

(la poutre étant supposée sans reprise de bétonnage),

avec : $\tan 2\beta_u = \frac{2\tau_u}{\sigma_x}$ et $\beta_u \leq 30^\circ$

$$\alpha_x = \frac{P_u}{S}$$

P_u = valeur de la précontrainte à l'ELU*

$$f_c = 400 \text{ MPa}$$

$$\gamma_s = 1,15$$

$$b_n = 0,90 - 0,105 = 0,795 \text{ m}$$

$$\tau_u = \frac{V_{ru}}{b_n z}$$

$$z = 2,463 \text{ m}$$

$$V_{ru} = 1,35V_g + 1,50V_q - P \sin \alpha \text{ (cf. tableau 24.1)}$$

$$f_{tj} = f_{t28} = 2,4 \text{ MPa}$$

Si nous retenons des armatures verticales composées de 8 HA 12 = $9,04 \text{ cm}^2$, nous devons vérifier le pourcentage minimum :

$$\frac{A_t}{b_n s_t} \cdot \frac{f_c}{\gamma_s} \geq 0,6 \text{ MPa}$$

soit avec $A_t = 9,04$, un écartement maximum :

$$s_t \leq \frac{A_t f_c}{0,6 b_n \gamma_s} = \frac{9,04 \times 400 \times 10^{-4}}{0,6 \times 0,795 \times 1,15} = 0,659 \text{ m}$$

De plus, on devra respecter la condition d'écartement maximum :

$$s_t = \text{Min} [0,8h; 3b_n; 1\text{m}]$$

$$\text{d'où : } s_t \leq 0,65 \text{ m}$$

Les écartements peuvent être lus dans le tableau 24.5 ci-après :

* Dans le tableau de calcul de V_{ru} , on constate que la section la plus défavorable correspond à la section sur appui où la surtension des aciers de précontrainte est nulle (moment nul), donc $P_u = P$ en ce point.

Tableau 24.5

$\xi = x/L$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
x	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
V_u	9,10	7,24	5,34	3,99	2,50	—	2,62	4,02	5,58	7,30	9,17
$v_u = \frac{V_u}{b_w x}$	4,65	3,70	2,83	2,04	1,33	—	1,34	2,05	2,85	3,73	4,68
$\beta_u \pm 30^\circ$	28,6	25,3	21,3	16,66	11,47	—	11,64	16,91	21,6	25,6	28,9
A_s/b_w	50,78	38,22	26,75	16,35	6,98	—	7,09	16,55	27,05	38,62	51,27
s_1	0,178	0,237	0,337	0,552	1,294	—	1,276	0,546	0,334	0,234	0,176
s_1 retenu	0,17	0,23	0,33	0,54	0,65	0,65	0,65	0,54	0,33	0,23	0,17

11. ÉTUDE DES ABOUTS DE LA POUTRE

La vérification de l'équilibre de la bielle d'appui sera menée comme indiqué au chapitre 18 et conformément à l'annexe 3 du BPEL.

De même pour l'équilibre du coin inférieur et la détermination des armatures de renfort aux extrémités.

12. CALCUL DE LA DÉFORMÉE

La poutre étudiée reprend une superstructure de 16 niveaux comportant des cloisonnements et des revêtements scellés (carrelages).

Il est donc important de bien connaître la valeur des flèches de cette poutre sous l'action de la précontrainte, des charges permanentes et des charges variables.

12.1. Flèche due à la précontrainte

Comme nous avons choisi un câble parabolique, son action sur la poutre est ramené à :

- un effort concentré horizontal $P \sin \alpha$ aux appuis, avec une excentricité $e_o = 0,04$ m et une précontrainte moyenne $P = (37,01 + 36,59)/2 = 36,80$ MN ;
- un effort concentré vertical $P \sin \alpha$ aux appuis qui vient en soustraction de l'effort tranchant ;
- une action radiale due à la courbure $p = \frac{P}{r}$ avec une précontrainte moyenne :

$$P = \frac{\sum_{i=1}^n P_i}{11} = 37,88 \text{ MN}$$

et où on peut assimiler le rayon de courbure de la parabole à une constante :

$$\frac{1}{r} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} = y''$$

$$\text{avec : } r = \frac{L^2}{8f} = \frac{30^2}{8 \times (1,30 + 0,04)} = 83,96 \text{ m}$$

$$\text{soit : } p = \frac{P}{r} = \frac{37,88}{83,96} = 0,4512 \text{ MN/m}$$

La valeur de la flèche à mi-portée vaut :

— pour le couple constant $C = P e_o = 36,80 \times 0,04 = 1,472$ MNm :

$$f_1 = \frac{CL^2}{8EI} = \frac{1,472 \times 30^2}{8E \times 8,2054} = \frac{20,18}{E}$$

— pour la charge répartie p :

$$f_2 = \frac{-5pL^4}{384EI} = -\frac{5 \times 0,4512 \times 30^4}{384E \times 8,2054} = -\frac{580}{E}$$

12.2. Flèche due aux actions permanentes

En plus de l'action de la précontrainte, nous calculons la flèche due aux charges permanentes :

$$f_3 = \frac{5gL^4}{384EI} = \frac{5 \times 0,502 \times 30^4}{384E \times 8,2054} = \frac{645,2}{E}$$

Un calcul plus précis aurait pu être mené en utilisant pour la précontrainte et les charges permanentes, la section nette et non la section brute (gaines déduites), et la valeur réelle de la précontrainte à chaque abscisse. Ce calcul plus précis en théorie ne veut pas dire qu'il soit plus proche des résultats réels. Le calcul rapide et approché que nous avons fait est d'une précision suffisante.

La valeur du module d'Young E correspondant aux charges de longue durée sera pris égal à :

$$E_v = \frac{1}{3} \times 11\,000 \sqrt{f_{c28}} = 11\,393 \text{ MPa}$$

$$\text{d'où : } f_1 + f_2 = \frac{20,18 - 580}{11\,393} = -0,0491 \text{ m vers le haut dû à la précontrainte}$$

$$\text{et : } f_3 = \frac{645,2}{11\,393} = 0,0566 \text{ m vers le bas pour les charges permanentes ;}$$

soit en l'absence de charges variables, une flèche totale $5,66 - 4,91 = 0,75$ cm vers le bas, flèche relativement faible qui représente 1/4 000^e de la portée.

12.3. Flèche due aux charges variables

Sous l'action des charges variables maximum $q = 0,242 \text{ MN/m}$ la flèche vaut :

$$f_4 = \frac{5qL^4}{384EI} = \frac{5 \times 0,242 \times 30^4}{384E \times 8,2054} = \frac{311}{E}$$

Pour les charges de courte durée $E_i = 11\,000 \sqrt{30} = 34\,180 \text{ MPa}$.

En toute rigueur, il aurait fallu prendre le moment d'inertie de la section homogénéisée.

Si l'on considère que le mobilier et les éléments fixes de la composante des charges variables $q = 0,242 \text{ MN/m}$ représente 20 % des charges en longue durée, on obtiendra une flèche variant entre : $f = f_1 + f_2 + f_3 + 0,2 f_4 = 0,0093 \text{ m}$ et $f' = f + 0,8 f_4 = 0,0166 \text{ m}$.

La variation de flèche Δf vaut $0,8 f_4 = 7,3 \text{ mm}$, soit $1/4\,110^\circ$ de la portée. Grâce à la précontrainte, la flèche a été très nettement diminuée par rapport à une solution de poutre en béton armé. Un calcul en béton armé aurait donné comme solution une poutre de 6,50 m de largeur d'aile et de 1,80 m d'épaisseur d'âme, une flèche de 5,57 cm sous charges permanentes ($1/539^\circ$) et 0,89 cm sous charges variables de courte durée.

Les flèches f et f' ci-dessus deviendraient :

$$\begin{aligned} f &= 5,93 \text{ cm au lieu de } 0,93 \text{ cm} \\ f' &= 6,46 \text{ cm au lieu de } 1,66 \text{ cm} \end{aligned}$$

et une variation de flèche $\Delta f = 7,2 \text{ mm}$ comparable au 7,3 mm de la solution en béton précontraint.

On constate cependant le grand avantage de la solution précontrainte en annulant pratiquement les effets des flèches des charges permanentes et les conséquences du fluage.

13. ÉTUDE DES POTEAUX SUPPORTS

L'action de la précontrainte sur la poutre va entraîner un raccourcissement élastique, suivi d'un raccourcissement différé dû au fluage du béton.

Ce raccourcissement va entraîner un déplacement vers l'intérieur de la tête des poteaux. Il faut alors vérifier que les poteaux peuvent supporter sans dommage ce raccourcissement imposé, et que la précontrainte ne soit pas, en partie, absorbée par les poteaux.

Supposons les poteaux suffisamment souples pour ne pas entraver le raccourcissement. La tête des poteaux se déplacera donc de la moitié du raccourcissement de la poutre r :

$$r = \frac{L \cdot P}{SE_b}$$

Exemple de poutre de bâtiment

avec : $L = 30 \text{ m}$

$$R = 37,88 \text{ MN}$$

$$S = 6,20 \text{ m}^2$$

$$E_b = E_v \text{ en déformation totale (instantanée + différée)} \\ = 1/3 \times 11\,000 \sqrt{30} = 11\,393 \text{ MPa}$$

on trouve : $r/2 = 0,008 \text{ m}$.

Cherchons à déterminer la section du poteau et l'effort horizontal en tête F (fig. 24-13).

$$\begin{aligned} \text{avec : } N &= \text{charge maximum} = V_g + V_d \\ &= 11,16 \text{ MN} \\ \text{charge minimum} &= V_g = 7,53 \end{aligned}$$

La flèche d'une console avec une charge concentrée en extrémité valant :

$$\frac{r}{2} = \frac{FH^3}{3EI} \text{ on trouve : } F = \frac{3}{2} \frac{rEI}{H^3}$$

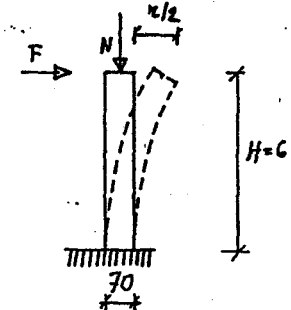


Fig. 24-13. Déformation du poteau

Pour un béton de poteau de même résistance à 28 jours, $f_{c28} = 30 \text{ MPa}$, on a $E_i = 11\,393 \text{ MPa}$; soit :

$$F = 3 \times 0,008 \times \frac{11\,393 I}{6^3} = 1,266 I$$

où I représente le moment d'inertie du poteau.

Si l'on s'impose de ne pas avoir de traction dans les poteaux et de ne pas dépasser la contrainte 12 MPa en compression, le poteau $0,70 \text{ b}$ doit résister en flexion composée aux sollicitations F et N :

$$\begin{aligned} \sigma_b &= \frac{N}{S} \pm \frac{Mv}{I} \\ &= \frac{N}{S} \pm \frac{F H h}{2I} > 0 \text{ et } < 12 \text{ MPa} \end{aligned}$$

$$\text{soit : } \sigma_b = \frac{11,16}{0,7b} + \frac{1,266 I \times 6 \times 0,35}{I} < 12 \text{ MPa}$$

d'où : $b \geq 1,71 \text{ m}$.

Nous retiendrons $b = 1,80 \text{ m}$, soit un poids de poteau de $1,80 \times 0,70 \times 25 \text{ kN/m}^3 \times 6 = 190 \text{ kN} = 0,19 \text{ MN}$

$$\text{et } N_{\max} = 11,16 + 0,19 = 11,35 \text{ MN}$$

$$I = 0,7^3 \times 1,8/12 = 0,05145 \text{ m}^4$$

$$F = 1,266 I = 0,0651 \text{ MN}$$

La section S devient: $S = 0,7 \times 1,8 = 1,26 \text{ m}^2$;

le moment d'inertie: $I = 0,05145 \text{ m}^4$

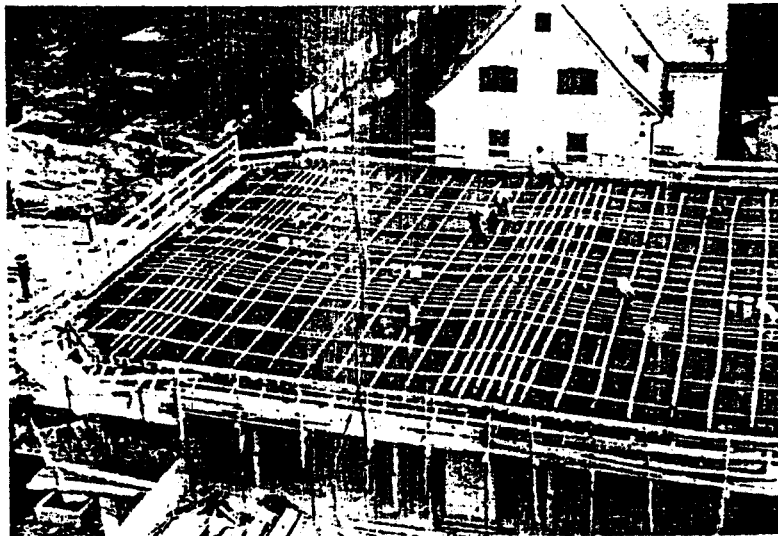
les contraintes:

$$\frac{N}{S} + \frac{M_v}{I} = \frac{11,35}{1,26} + \frac{1,266 \times 6 \times 0,7}{2} = 9,01 + 2,66 = 11,67 < 12 \text{ MPa}$$

et sous charges minimum $N_{\min} = 7,53 + 0,10 = 7,72 \text{ MN}$:

$$\frac{N}{S} - \frac{M_v}{I} = \frac{7,72}{1,26} - \frac{1,266 \times 6 \times 0,7}{2} = 6,13 - 2,66 = 3,47 > 0$$

La valeur de l'effort de précontrainte passant dans le poteau vaut: $F = 0,0651 \text{ MN}$ soit 0,17% de l'effort de précontrainte, ce qui est négligeable et justifie bien l'hypothèse faite précédemment. La valeur F n'affecte pas non plus le raccourcissement ϵ calculé.



Plancher de bâtiment précontraint par post-tension avec monotrons gainés, grainés (unbonded tendons). Klagenfurt (Autriche) (doc. V.S.L.).

25

LES OUVRAGES

Tout type d'ouvrage existant en béton armé pourrait être réalisé en béton précontraint avec de plus un gain de poids, une étanchéité améliorée, des déformations limitées et peut-être une économie financière.

Faire une description détaillée de tous les ouvrages réalisés ou réalisables en béton précontraint remplirait avantageusement plusieurs tomes.

On peut classer les ouvrages:

— suivant leur forme:

- . poutres: rectangulaire, en T, caisson, à hauteur variable...,
- . voiles minces: cylindrique, conique, suspendu...,
- . coques,
- . tirants: rectilignes, paraboliques...

— suivant leur mode de construction: ponts coulés en place, ponts à poutres préfabriquées, ponts poussés, ponts construits par encorbellement successifs, ponts à haubans provisoires...,

— suivant leur fonction: pieux préfabriqués, poteaux préfabriqués, tirants d'ancrages, tirants de voûte, ...

— suivant l'utilisation de la précontrainte: précontrainte nécessaire à la résistance de l'ouvrage, précontrainte complémentaire, précontrainte anti-retrait...

Nous n'étudierons ci-après que quelques exemples simplifiés de:

1. pont en encorbellement,
2. portique simple,
3. enceinte de confinement de réacteur nucléaire,
4. voile suspendu type 1,
5. voile suspendu type 2.

6. façade suspendue de bâtiment,
7. assemblages de blocs préfabriqués,
8. réparation d'ouvrage,
9. tirant,
10. dalle avec précontrainte partielle,
11. réservoir circulaire cylindrique,
12. fût de château d'eau.

1. EXEMPLE 1: PONT EN ENCORBELLEMENT

1.1. Description

On désigne sous ce vocable des ponts en béton précontraint construits à l'avancement, voussoir par voussoir, symétriquement en partant de la pile. On a ainsi deux fléaux en porte-à-faux, c'est-à-dire en encorbellement (fig. 25-1).

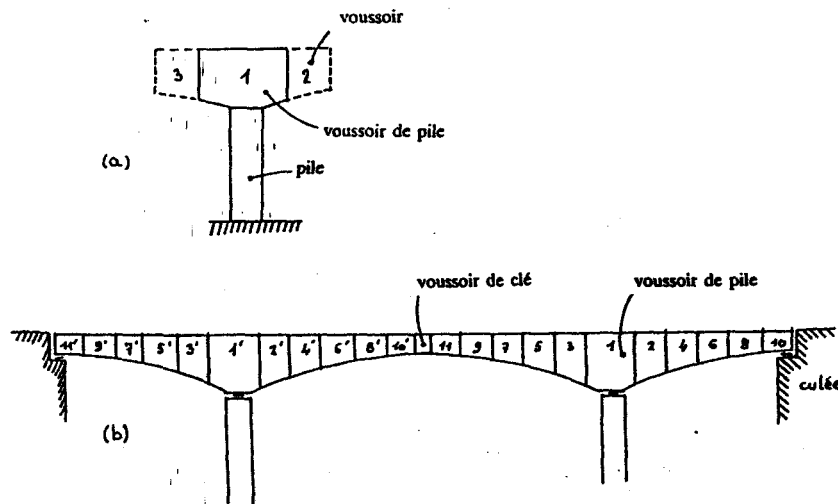


Fig. 25-1. Pont construit par encorbellement

Les voussoirs peuvent être préfabriqués sur une aire près de l'ouvrage ou coulés en place, grâce à un coffrage mobile (équipement mobile).

Le principal avantage de ce procédé est de pouvoir franchir des brèches importantes (de 50 à 250 m) sans avoir à prendre appui entre les piles (franchissement de rivières navigables, de ravins de zones urbanisées...).

On retrouve ainsi une des possibilités offertes par la précontrainte d'assembler des blocs de béton par des câbles de précontrainte qui assurent un serrage des blocs les uns aux autres, ce qui permet une bonne transmission des efforts de compression et de cisaillement.

Ce dernier cas peut être très nettement amélioré par l'utilisation de voussoirs préfabriqués à joints conjugués, c'est-à-dire dont les joints sont crantés et les voussoirs sont coulés en atelier, les uns contre les autres dans les mêmes conditions de contact que lors de leur position définitive.

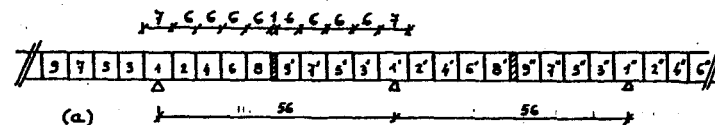
1.2. Mode de calcul

La méthode de construction impose un calcul différent de celui des ponts classiques. Le poids mort des voussoirs est repris par des câbles posés à l'avancement à chaque voussoir, suivant un calcul en console. L'équilibre autour du voussoir de pile est assuré par une construction à l'avancement aussi symétrique que possible et par une fixation temporaire ou définitive du voussoir de pile sur la pile (par des câbles verticaux de précontrainte par exemple).

Les charges appliquées après le clavage, c'est-à-dire après le coulage du voussoir de clé, sont introduites dans un calcul en continuité.

1.3. Exemple simplifié

Soit un pont construit en encorbellements successifs par voussoirs préfabriqués de section constante, et comportant un nombre de travées suffisamment grand pour être considéré comme infini dans les calculs (fig. 25-2). Par simplification également, nous supposons que la précontrainte est constante dans le temps, nous négligerons les pertes par frottement et n'admettrons aucune traction dans le béton en construction et en service.



1.3.1. Caractéristiques géométriques de la section (fig. 25-2 b)

Les caractéristiques de la section sont :

$$S = 4 \times 3,5 - 3,3 \times 3,1 = 3,77 \text{ m}^2$$

$$I = 4 \times \frac{3,5^3}{12} - 3,3 \times \frac{3,1^3}{12} = 6,099 \text{ m}^4$$

$$\frac{I}{v} = \frac{I}{v} = 3,485 \text{ m}^3$$

$$\rho = \frac{6,099}{3,77 \times 1,75^2} = 0,528$$

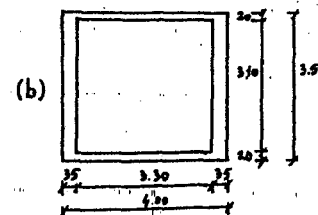


Fig. 25-2. Numérotation des voussoirs et section courante

$$z = \frac{I}{\mu} = \frac{6,099}{\frac{1,75^3 \times 4}{2} - \frac{1,55^3 \times 3,3}{2}} = \frac{6,099}{2,161} = 2,822 \text{ m (0,806 h)}$$

1.3.2. Charges de calcul

- poids propre: $g_1 = 25 \times 3,77 = 94,25 \text{ kN/m}$
- superstructures: $g_2 = 20 \text{ kN/m}$
- exploitation de chantier: $q_1 = 10 \text{ kN/m}$
- exploitation en service: $q_2 = 60 \text{ kN/m}$

1.3.3. Etude des voussoirs n° 2 et 3 (fig. 25-3 et tableau 25.1)

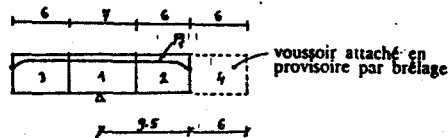


Fig. 25-3. Câblage des voussoirs 2 et 3

Les voussoirs sont préfabriqués et âgés de plus de 28 jours lors de la mise en tension avec $f_{c28} = 35 \text{ MPa}$.

Pour une portée de console ℓ , le moment dû au poids mort et aux surcharges de chantier vaut: $M = -p\ell^2/2$, soit pour une portée de calcul de 9,5 m avant pose du voussoir 4, et 15,5 m après pose.

Tableau 25.1

Moments en MNm	$\ell = 9,5$	$\ell = 15,5$
M_{g1}	- 4,25	- 11,32
M_{q1}	- 0,45	- 1,20
$M_{\max} = M_{g1} + M_{q1}$	- 4,70	- 12,52

On recherche la valeur de la précontrainte P_1 telle que l'on n'ait pas de traction dans le béton avant et après pose du voussoir avec ou sans charges de chantier g_1 :

$$\frac{P_1}{S} + \frac{P_1 e_o}{I/v} + \frac{M_{\max}}{I/v} \geq 0 \text{ en fibre supérieure pour } \ell = 15,5 \text{ m}$$

$$\frac{P_1}{S} - \frac{P_1 e_o}{I/v'} - \frac{M_{g1}}{I/v'} \geq 0 \text{ en fibre inférieure pour } \ell = 9,5 \text{ m}$$

soit:

$$\frac{-M_{\max}(15,5)}{\frac{I}{vS} + e_o} \leq P_1 \leq \frac{M_{g1}(9,5)}{\frac{I}{v'S} - e_o}$$

Tableau 25.2

	Avant pose $\ell = 9,5$	Après pose $\ell = 15,5$
M_{g1}	- 4,25	—
$M_{\max}$	—	+ 12,52
P_1	$\leq 5,86$	$\geq 4,86$

avec $e_o = v - d = 1,75 - 0,10 = 1,65 \text{ m}$, d'où $P_1 = 4,86 \text{ MN}$, soit 46 torons (nombre pair pour deux âmes) T 13 travaillant à $\frac{4,86 \times 10^6}{46 \times 93} = 1136 \text{ MPa} < 1150$.

En supposant que la contrainte dans les aciers après pertes vaut au maximum 1150 MPa (1 T 13 = 93 mm²).

1.3.4. Etude des voussoirs n° 4 et 5 (fig. 25-4 et tableau 25.3)

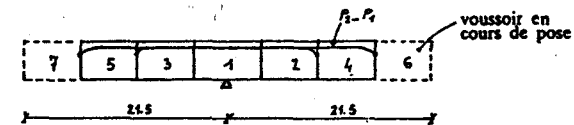


Fig. 25-4. Câblage des voussoirs 4 et 5

Tableau 25.3

	$\ell = 15,5$	$\ell = 21,5$
M_{g1}	- 11,32	(- 21,78)
M_{q1}	- 1,20	- 2,31
$M_{\max}$	(- 12,52)	- 24,09
P_2	$\leq 15,60$	$\geq 9,36$

d'où: $P_2 = 9,36 \text{ MN}$ et 88 T 13 travaillant à la contrainte

$$\sigma_p = \frac{9,36 \times 10^6}{88 \times 93} = 1144 \text{ MPa} < 1150$$

1.3.5. Etude des voussoirs n° 6 et 7 (fig. 25-5 et tableau 25.4)

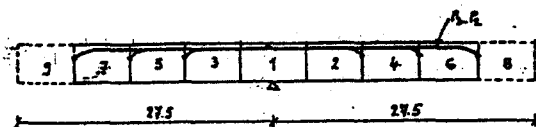


Fig. 25-5. Câblage des voussoirs 6 et 7

Tableau 25.4

	$\ell = 21,5$	$\ell = 27,5$
M_{d1} (MNm).....	- 21,78	(- 35,64)
M_{q1} (MNm).....	- 2,31	- 3,78
M_{max} (MNm).....	(- 24,09)	- 39,42
P_3 (MN).....	$P_1 \leq 30,02$	$P_1 \geq 15,31$
Nombre de torons.....	—	144
Contrainte de l'acier (MPa).....	—	1 143

1.3.6. Etude des voussoirs n° 8 et 9 (fig. 25-6 et tableau 25.5)

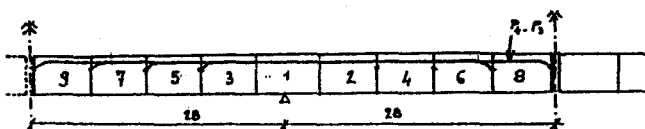


Fig. 25-6. Câblage des voussoirs 8 et 9

Tableau 25.5

	$\ell = 27,5$	$\ell = 28$
M_{d1}	- 35,64	(- 36,95)
M_{q1}	- 3,78	- 3,92
M_{max}	(- 39,42)	- 40,87
P_4	$\leq 49,12$	$\geq 15,88$
Nombre de torons.....	—	150
Contrainte acier.....	—	1 138

1.3.7. Vérification des contraintes

Au lieu de procéder systématiquement au calcul des contraintes, assurons-nous que la précontrainte est suffisante à chaque abscisse :

$$\text{soit : } \frac{P(x)}{3,77} + \frac{1,65 P(x)}{3,485} + \frac{M_{max}(x)}{3,485} \geq 0$$

$$\text{ou } P(x) \geq 0,3884 M_{max}(x)$$

$$\text{avec : } M_{max}(x) = \frac{(g_1 + q_1)}{1\,000} \times \frac{(\ell - x)^2}{2} = \frac{(\ell - x)^2}{19,185}$$

$$\text{d'où : } P(x) \geq \frac{(\ell - x)^2}{49,4} \quad (\text{courbe 1 de la figure 25-7) et le nombre de torons}$$

$$\text{nécessaires } n = \frac{P \times 10^6}{1\,150 \times 93}$$

On peut ainsi déterminer le nombre de câbles nécessaires à chaque abscisse.

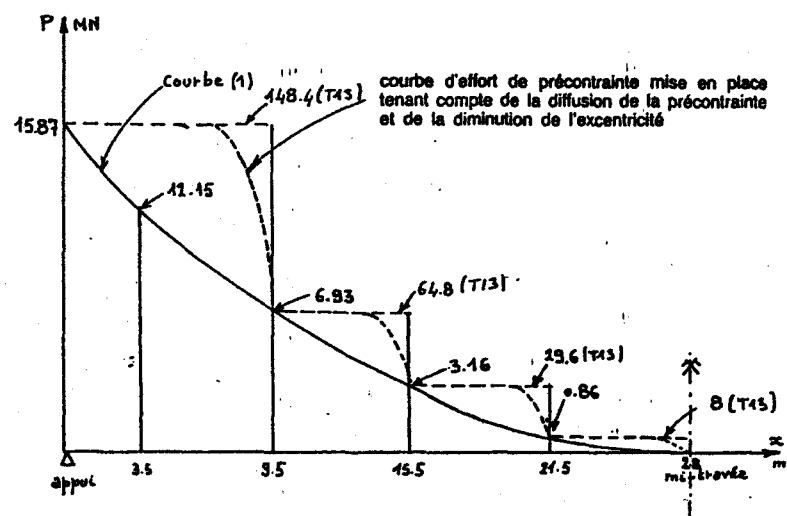


Fig. 25-7. Moment fléchissant et moment résistant

1.3.8. Câblage retenu pour l'encorbellement (fig. 25-8)

Avec un nombre pair de torons, puisqu'il y a deux âmes.

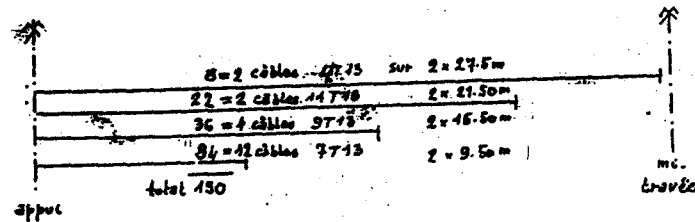


Fig. 25-8. Câblage retenu

1.3.9. Calcul en continuité

On doit ajouter les charges de superstructures g_2 et d'exploitation q_2 , d'où les diagrammes de moment de la figure 25-9: $-pe^2/12$ sur appui et $pe^2/24$ à mi-travée.

La précontrainte est calculée par:

$$P_{\text{sous}} = \frac{\Delta M}{ph}$$

$$P_{\text{sur}} = \frac{M_{\text{max}} + M}{pv + v' - d}$$

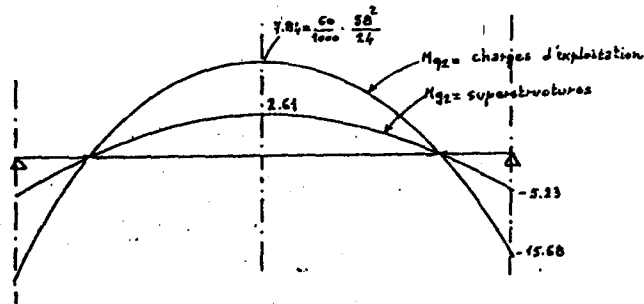


Fig. 25-9. Diagramme des moments fléchissants

Le moment hyperstatique M n'étant pas encore connu, nous ferons une première détermination de la précontrainte en le supposant nul. Les valeurs des différents éléments de calcul pour chaque abscisse de joint de voussoir figurent dans le tableau 25.6.

Tableau 25.6

Abscisse x =	appui 0	3,5	9,5	15,5	21,5	27,5	mi-travée 28
$\Delta M = \frac{60}{1000} \cdot \frac{x(\ell-x)}{2} - 0,06 \cdot \frac{\ell^2}{12}$	-15,68	-10,17	-2,43	3,15	6,57	7,83	7,84
$M_{\text{max}} = \frac{60 + 20}{1000} \cdot \frac{x(\ell-x)}{2} - 0,08 \cdot \frac{\ell^2}{12}$	-20,91	-13,56	-3,24	4,20	8,76	10,44	10,45
$P_{\text{sous}} = \frac{\Delta M}{ph}$ (MN)	8,48	5,50	1,31	1,70	3,56	4,24	4,24
$P_{\text{sur}} = \frac{M_{\text{max}}}{pv + v' - d}$ (MN)	8,12	5,27	1,26	1,63	3,40	4,05	4,06
$c_0 \text{ sous} = pv - \frac{M_{\text{max}}}{P}$ (1)	+1,54	+1,54	+1,54	-1,54	-1,54	-1,54	-1,54
Précontrainte: totale	80 T 13	52 T 13	14 T 13	16 T 13	34 T 13	40 T 13	40 T 13
- hourdis supérieur $n_1 =$	77 T 13	50 T 13	13 T 13	1 T 13	1 T 13	1 T 13	1 T 13
- hourdis inférieur (2) $n_2 =$	3 T 13	2 T 13	1 T 13	15 T 13	33 T 13	39 T 13	39 T 13
Câbles de continuité dans le hourdis supérieur	12 T 13	37 T 13					
Câbles de continuité dans le hourdis inférieur	1 T 13	1 T 13	1 T 13			6 T 13	18 T 13
						14 T 13	1 T 13

(1) $M_{\text{max}} = \frac{80}{60} \Delta M$; $P = \frac{\Delta M}{ph}$ et $c_0 = pb/2 - M_{\text{max}}/P$ donne $c_0 = pb(0,5-4/3) = -1,54$ m.

(2) En respectant un centre de gravité des câbles près de $c_0 = 1,54$ m.

1.3.10. Calcul des moments hyperstatiques

L'équation des trois moments appliquée au calcul des moments hyperstatiques s'écrit :

$$M_{i-1}\ell_i + 2(\ell_i + \ell_{i+1})M_i + M_{i+1}\ell_{i+1} = -6EI(\omega_s - \omega_d)$$

avec ici : $\ell_i = \ell_{i+1}$

$\omega_s = -\omega_d$ par symétrie, car les travées sont identiques

$$M_{i-1} = M_i = M_{i+1}$$

d'où : $6M\ell = -12EI\omega$

$$\text{avec : } \omega = \int_0^\ell \frac{x}{\ell} \cdot \frac{P(x) \cdot e_o(x)}{EI} dx$$

$$\text{et : } M = -\frac{2}{\ell^2} \int_0^\ell x P e_o dx = -\frac{2}{\ell^2} \int_0^{\ell/2} \ell P e_o dx^*$$

La précontrainte P , à prendre en compte, est représentée par les seuls câbles de continuité. Les câbles de console calculés en 1.3.3, 1.3.4, 1.3.5 et 1.3.6 ci-dessus, n'induisent pas de moment hyperstatique (nous avons négligé les effets du fluage et du retrait).

Tableau 25.7

x =	0 à 3,5	3,5 à 9,5	9,5 à 15,5	15,5 à 21,5	21,5 à 27,5	27,5 à 28,0	
P (1).....	8,56	5,56	1,50	1,71	3,64	4,28	
e _o (2).....	1,526	1,523	1,414	-1,444	-1,553	-1,567	
$\int_0^\ell \ell P e_o dx$	+ 2560,3	+ 2845,2	+ 712,6	- 829,7	- 1899,4	- 187,8	$\int_0^{28} \ell P e_o dx = + 3201,2$

(1) P = nombre de torons $\times 1150 \text{ MPa} \times 93 \text{ mm}^2/10^6$

(2) $e_o = \frac{1,65 (n_s - n_i)}{n_s + n_i}$

$$\text{d'où : } M = -\frac{2}{56^2} (-3201,2) = -2,042 \text{ MNm}$$

Pour tenir compte du moment hyperstatique dans la détermination de la précontrainte, on reviendra au paragraphe 1.3.9 en prenant M constant tout le long de la travée, et égal à $-2,042 \text{ MNm}$. Ce qui peut conduire à un léger changement du nombre de torons et un nouveau calcul du moment hyperstatique.

* Car P et e_o ont même valeur pour x et $\ell - x$.

REMARQUE 1 :

Dans les calculs précédents, nous n'avons pas tenu compte du fluage du fêau sous l'action des charges permanentes qui, s'il n'y avait pas continuité, entraînerait une ouverture au droit du clavage (fig. 25-10).

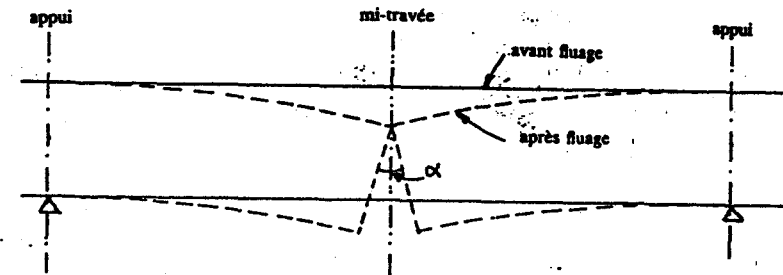


Fig. 25-10. Déformation due au fluage en l'absence de continuité

Pour essayer de limiter cette ouverture à mi-travée, il faut disposer des câbles de continuité inférieurs supplémentaires tels qu'ils induisent une rotation $-\alpha$ à mi-travée.

REMARQUE 2 :

Nous avons supposé que la précontrainte était constante dans le temps. Or, pour bien suivre les phénomènes réels, il faut tenir compte :

— de la différence d'âge des voussoirs pour leur résistance et surtout leur déformation durant les différentes phases de construction, des phénomènes de fluage et de retrait ;

— de la relaxation des aciers qui entraîne, comme pour les phénomènes ci-dessus, une redistribution des moments (augmentation des moments en travée pour la relaxation des aciers de console).

Les calculs sont alors extrêmement longs et laborieux, si l'on veut tenir compte du plus grand nombre possible de paramètres. La non-prise en compte de tous ces phénomènes a entraîné sur des ouvrages existants :

- des différences de niveau entre les deux fêaux lors du clavage,
- des fissurations importantes dans les joints ou en dehors des joints,
- des variations brusques de courbure du profil en long à mi-travée...

1.4. Quelques sections-types de ponts en encorbellement (fig. 25-11)

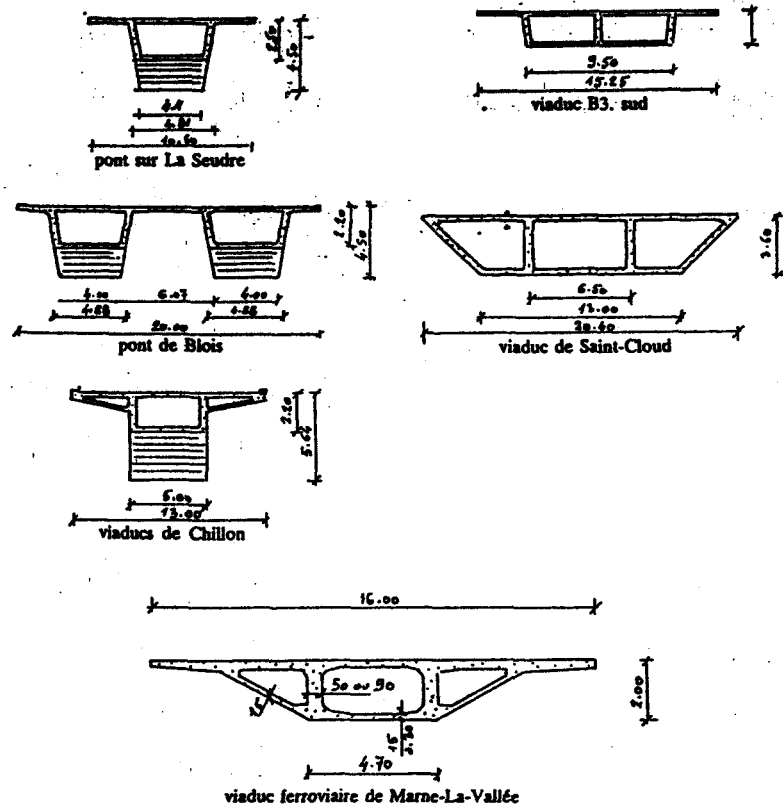


Fig. 25-11. Sections-types de ponts en encorbellement

2. EXEMPLE 2: PORTIQUE SIMPLE

2.1. Rappel de résistance des matériaux

2.1.1. Poutre-console

$$\omega_A = - \frac{Pl^2}{2EI}$$

$$f_A = - \frac{Pl^3}{3EI}$$

$$\omega_A = \frac{Cl}{EI}$$

$$f_A = \frac{Cl^2}{2EI}$$

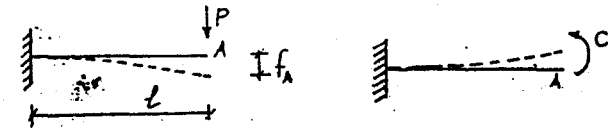


Fig. 25-12. Poutre-console

2.1.2. Portique simple articulé en pied

$$\text{Posons: } k = \frac{HI}{Jl}$$

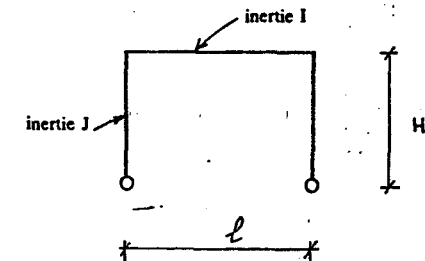


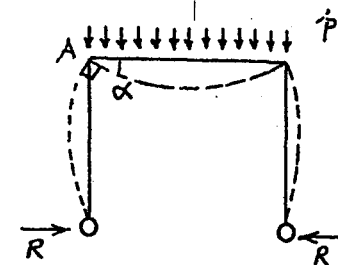
Fig. 25-13. Portique simple

• Charge répartie verticale

Le moment sur appui M_A vaut: $R \cdot H$.

$$M_A = - \frac{pl^2/8}{\frac{3}{2} + \frac{H}{l} \cdot \frac{1}{J}} = - \mu_0 \cdot pl^2/8$$

$$\text{avec: } \mu_0 = \frac{1}{\frac{3}{2} + k}$$

Fig. 25-14. Portique simple
Déformée sous charges réparties
verticales

• Moment constant C dans le montant

Pour un moment dû à une précontrainte P d'excentricité constante e_0 , le moment vaut Pe_0 en isostatique ($C = Pe_0$):

$$M_A = H \cdot R = \frac{-C}{\frac{2}{3} + \frac{H}{l}}$$

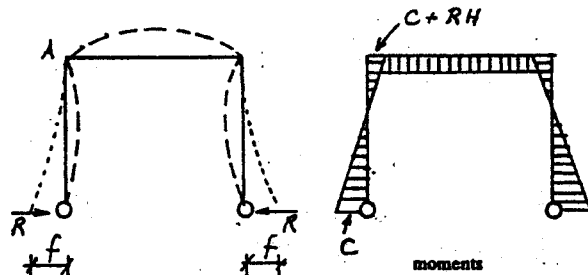


Fig. 25-15. Déformée et courbe des moments sous l'action d'un moment constant dans les montants

• Moment constant C appliqué dans la traverse

$$R = \frac{-C}{H} \cdot \frac{1}{1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{I}{J} \cdot \frac{H}{\ell}}$$

$$M_A = R \cdot H = \frac{-C}{1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{I}{J} \cdot \frac{H}{\ell}} = \frac{-C}{1 + \frac{2}{3} k}$$

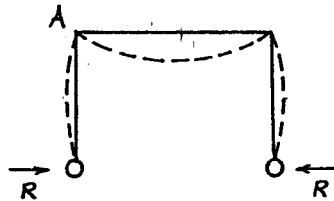


Fig. 25-16. Déformée sous l'action d'un moment constant dans la traverse

• Câble parabolique dans la traverse

On décompose le moment en deux parties (fig. 25-17) :

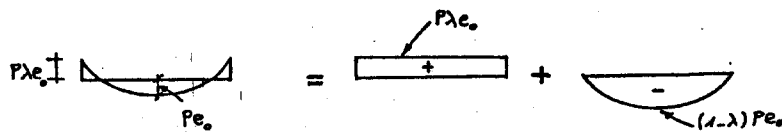


Fig. 25-17. Courbe des moments due à un câble parabolique

— La première correspond à un moment constant Plc_0 dans la traverse, le moment hyperstatique sur appui vaut alors :

$$M_1 = - Plc_0 \cdot \frac{1}{1 + \frac{2}{3} k}$$

— La seconde correspond à un moment parabolique, donc à une charge répartie fictive p dont le moment isostatique à mi-travée vaut $(1 - \lambda)Pe_0$ et qui entraîne un moment sur appui :

$$M_2 = - \frac{(1 - \lambda)Pe_0}{\frac{3}{2} + k}$$

2.1.2. Moment hyperstatique dû au raccourcissement instantané de la traverse

Le raccourcissement de la traverse entraîne une réaction d'appui horizontale R . La précontrainte moyenne appliquée lors de la mise en tension vaut :

- valeur d'origine = 0,
- valeur finale = P .

La réaction d'appui vaut R en valeur finale, comptée positivement comme indiqué sur la figure 25-18. La précontrainte finale dans la traverse vaut donc $P - R$.

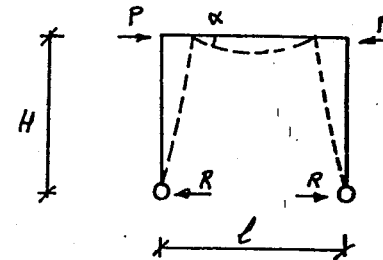


Fig. 25-18. Déformée du portique sous l'action d'un raccourcissement de la traverse

2.2. Recherche d'un tracé de câble

Pour une charge répartie extérieure, on prendra un câble de tracé parabolique (le funiculaire d'une charge répartie uniforme est une parabole).

2.2.1. Recherche d'un câble dont le tracé n'entraîne pas de moment hyperstatique sur appui de traverse

L'existence du moment hyperstatique est liée à la rotation sur appui. Celle-ci est nulle pour un moment parabolique ayant la répartition d'un moment de poutre parfaitement encastree à ses deux extrémités, soit $2/3$ sur appui et $1/3$ en travée, donc une excentricité sur appui double de l'excentricité en travée; cette solution serait impossible pour un câble qui serait déjà à sa limite d'excentricité $v_1 - d_1$ en travée.

2.2.2. Recherche d'un câble

dont le tracé entraîne un moment compensant exactement les charges extérieures p du moment isostatique $M_0 = p\ell^2/8$. On aura alors :

$$e_{\text{(appui)}} = -\frac{\mu_0}{1 - \mu_0} e_{\text{(traverse)}} \quad \text{avec : } \mu_0 = \frac{1}{\frac{3}{2} + k}$$

REMARQUE :

Ce câble n'est pas à proprement parler concordant, car le raccourcissement instantané et différé dû au fluage de la traverse, va entraîner une réaction horizontale RH en pied de portique, donc un moment hyperstatique au sommet du poteau.

2.3. Calcul des moments hyperstatiques

On désignera par e_0 l'excentricité à mi-travée de la traverse et λe_0 , l'excentricité sur appui.

2.3.1. Moment hyperstatique dû au tracé du câble (fig. 25-19)

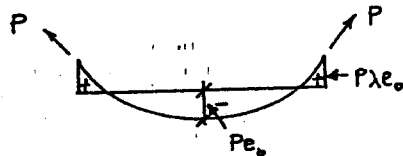


Fig. 25-19. Moment isostatique du au câble (ici λ est négatif)

Le raccourcissement de la traverse vaut 2δ avec :

$$\delta = \frac{\ell}{2} \cdot \frac{(P - R)}{ES_t}$$

où : S_t représente la section de la traverse.

Or, ce raccourcissement doit être égal à la déformée par flexion du montant avec un effort final R :

$$\delta = \frac{RH^3}{3EJ} + \alpha H, \quad \text{avec } \alpha = \frac{RH\ell}{2EI} \quad \text{sous un moment RH dans la traverse}$$

$$\frac{RH^3}{3EJ} + \frac{RH^2\ell}{2EI} = \frac{(P - R)\ell}{2ES_t}$$

$$\text{d'où : } R = \frac{P}{1 + \frac{H^2 S_t}{I} \left(1 + \frac{2}{3} k\right)}$$

et le moment hyperstatique correspondant :

$$M_2 = RH = \frac{PH}{1 + \frac{H^2 S_t}{I} \left(1 + \frac{2}{3} k\right)}$$

2.3.2. Moment hyperstatique dû au raccourcissement différé de fluage de la traverse

On peut admettre que la déformation de fluage est le double de la déformation instantanée, soit un moment hyperstatique :

$$M_3 = 2 M_2$$

2.4. Câble rectiligne dans le montant vertical

Supposons que le câble a une excentricité constante e_1 (fig. 25-20) :

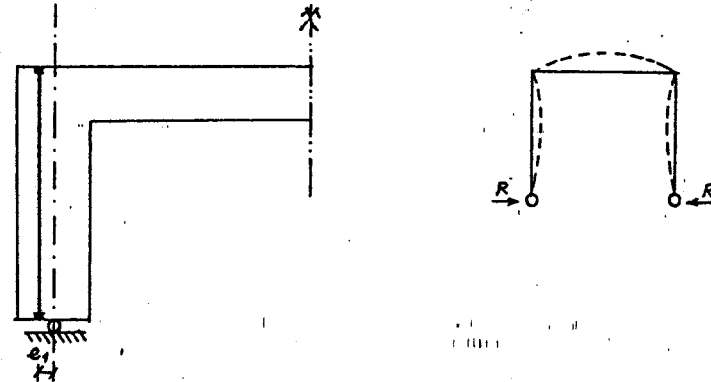


Fig. 25-20. Déformée du portique sous l'action d'un câble rectiligne dans les montants

La réaction d'appui hyperstatique R vaut :

$$R = \frac{Pe_1}{\frac{2}{3} + \frac{1}{k}} \quad \text{et le moment hyperstatique : } M_4 = -RH = \frac{-Pe_1 H}{\frac{2}{3} + \frac{1}{k}}$$

• Retrait-Variation de température

Le retrait et la variation de température entraînent un raccourcissement $\epsilon_r \ell$ avec $\epsilon_r = 2,10^{-4}$ ou $3,10^{-4}$ pour le retrait, ou $\ell \Delta\theta \cdot 10^{-3}$ pour les variations de température $\Delta\theta$ sur l'ensemble du portique. Le raccourcissement de la traverse, qui vaut :

$$2\delta = \ell \left(\epsilon_r - \frac{R}{ES_t} \right)$$

est égal à la déformée du montant sous l'action de la réaction d'appui horizontale R. On obtient alors pour le retrait :

$$\frac{1}{2} \left(\ell \epsilon_r - \frac{R\ell}{ES_t} \right) = \frac{RH^3}{3EJ} + \frac{RH^2\ell}{2EI}$$

Il suffit de remplacer P par $\epsilon_r ES_t$ dans la formule donnant M_2 soit :

$$R_s = \frac{\varepsilon_s E_s}{1 + \frac{H^2 S_s}{I} \left(1 + \frac{2}{3} k\right)} \quad \text{et le moment vaut } M_s = R H$$

$$M_s = \frac{H \varepsilon_s E_s}{1 + \frac{H^2 S_s}{I} \left(1 + \frac{2}{3} k\right)}$$

Pour les variations de température, il suffit de remplacer ε_s par $\Delta\theta \cdot 10^{-5}$:

$$M_s = \frac{H \Delta\theta \cdot 10^{-5} E_s}{1 + \frac{H^2 S_s}{I} \left(1 + \frac{2}{3} k\right)}$$

Lorsque la variation de température n'est pas la même sur les deux faces, interne et externe, on décomposera son effet pour une section symétrique de hauteur totale h , en une partie constante $\frac{\Delta\theta}{2}$ et un moment constant $\lambda \Delta\theta \frac{EI}{h}$.

2.5. Exemple

Soit le portique de la figure 25-21.

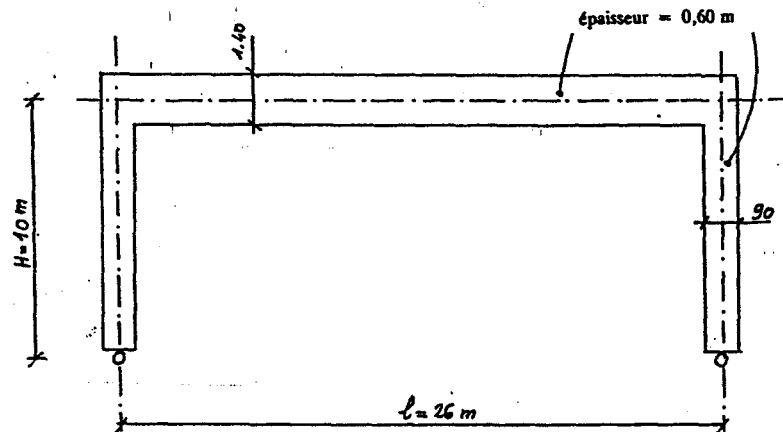


Fig. 25-21 Exemple numérique

Nous prendrons une hauteur de traverse égale à 1,40 m (l/18 environ).

Les données sont:

- contrainte caractéristique du béton; $f_{ctk} = 30$ MPa,
- contrainte admissible de compression du béton: $\bar{\sigma}_c = 18$ MPa;
- contrainte admissible de traction du béton $\bar{\sigma}_t = 0$ (classe I, pour la simplification des calculs de l'exemple),
- charges permanentes réparties sur la traverse $g = 60$ kN/m,
- charges variables réparties sur la traverse $q = 10$ kN/m,
- distance minimum du centre de gravité des câbles au coffrage: $d = 0,15$ m,
- module d'Young différé du béton $E_d = 11\,400$ MPa ($= 11\,000/3 \sqrt{30}$).

Comme le rapport q/g est faible, l'excentricité correspondra vraisemblablement au cas d'une section sur-critique à mi-travée, soit: $e_o = -(v_1 - d_1) = -(1,42 - 0,15) = -0,55$ m.

Les moments d'inertie sont:

$$I = 0,6 \times \frac{1,4^3}{12} = 0,1372 \text{ m}^4 \text{ pour la traverse}$$

$$J = 0,6 \times \frac{0,9^3}{12} = 0,03645 \text{ m}^4 \text{ pour le montant.}$$

2.5.1. Moments extérieurs à mi-travée

Moments isostatiques dans la traverse:

$$M_{g0} = \frac{g \ell^2}{8} = 0,06 \times 26^2/8 = 5,07 \text{ MNm pour les charges permanentes.}$$

$$M_{q0} = \frac{q \ell^2}{8} = 0,01 \times 26^2/8 = 0,845 \text{ MNm pour les charges variables.}$$

$$\text{Posons } k = \frac{HI}{J\ell} = 1,4477$$

$$\text{Le coefficient } \mu_o = \frac{1}{\frac{3}{2} + k} \text{ vaut: } \mu_o = 0,339 \text{ et } 1 - \mu_o = 0,661.$$

Les moments valent:

Tableau 25.8

en travée	sur appui
$M_g = 0,661 M_{g0} = 3,351 \text{ MNm}$	$M_g = -1,719 \text{ MNm}$
$M_q = 0,661 M_{q0} = 0,559 \text{ MNm}$	$M_q = -0,2865 \text{ MNm}$
$M_{\max} = 3,91 \text{ MNm}$	$M_{\max} = -2,006 \text{ MNm}$

2.5.2. Précontrainte isostatique

En supposant la section sur-critique avec $e_o = -0,55$ m, on trouve sans prendre en compte le moment hyperstatique :

$$P = \frac{M_{\max}}{pv_s + v_i - d_i} = \frac{3,91}{0,7/3 + 0,55} = 4,99 \text{ MN}$$

et le module d'inertie existant $\frac{bh^3}{6} = 0,6 \times 1,4^3/6 = 0,196 \text{ m}^3$ doit être supérieur

$$\text{à : } \frac{Pph}{\sigma_{cs}} = \frac{4,99 \times 1,4/3}{18} = 0,129 \text{ m}^3, \text{ ce qui est vérifié.}$$

On constate même, une certaine marge nécessaire pour pouvoir reprendre les moments hyperstatiques non encore calculés. Les valeurs précédentes sont des approches, car les moments hyperstatiques sont fonction de l'effort de précontrainte P . Nous avons calculé cette valeur de P dans le but de la comparer à la valeur hyperstatique.

2.5.3. Tracé adopté

Après plusieurs essais, car la valeur du moment hyperstatique dépend du tracé des câbles, nous retiendrons une excentricité sur appui de $+0,20$ m. Le câble aura alors un tracé parabolique tel qu'indiqué sur la figure 25-22.

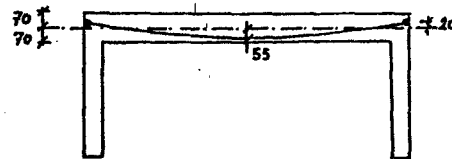


Fig. 25-22. Câblage de la traverse

2.5.4. Calcul des moments hyperstatiques

• *Dû au tracé :* M_1

La réaction hyperstatique R au pied du montant vaut :

$R_i = R_i' + R_i''$ avec R_i' = réaction hyperstatique due à un câble rectiligne d'excentricité constante $e_o = +0,20$ m

$$R_i' = \frac{-Pe_o}{H} \cdot \frac{1}{1 + \frac{2}{3}k} = \frac{-0,20P}{10(1 + \frac{2}{3} \times 1,4477)} = -0,01018P$$

et R_i'' = réaction hyperstatique due à un câble parabolique d'excentricité $-(0,55 + 0,20) = -0,75$ m à mi-travée et nulle aux extrémités. Ce câble a une action identique à celle d'une charge répartie uniforme p , de moment isostatique à mi-travée $C = p\ell^2/8$ et dont le moment sur appui vaut $-\mu_o C$ et en travée $(1 - \mu_o)C$, soit avec $C = -0,75P$:

$$R_i'' = \frac{-\mu_o C}{H} = \frac{0,339 \times 0,75P}{10} = 0,0254P$$

d'où : $R_1 = (0,02543 - 0,01018)P = 0,01525P$

et le moment hyperstatique : $M_1 = R_1H = 0,1525P$

• *Dû au raccourcissement élastique instantané*

$$M_2 = \frac{PH}{1 + \frac{H^2S_t}{I} \left(1 + \frac{2}{3}k\right)} = \frac{10P}{1 + \frac{100 \times 0,6 \times 1,4}{0,1372} \left(1 + \frac{2}{3} \times 1,4477\right)} = 0,0083P$$

• *Dû au raccourcissement différé*

$$M_3 = 2M_2 = 0,0166P$$

• *Dû au retrait*

$$M_4 = \frac{\epsilon_{HES_t}}{1 + \frac{H^2S_t}{I} \left(1 + \frac{2}{3}k\right)} = \frac{2,10^{-4} \times 10 \times 11400 \times 0,6 \times 1,4}{1 + 1203} = 0,016 \text{ MNm}$$

2.5.5. Précontrainte hyperstatique

En remplaçant le moment hyperstatique global :

$$\begin{aligned} M &= M_1 + M_2 + M_3 + M_4 \\ &= 0,1525P + 0,0083P + 0,0166P + 0,016 \\ &= 0,1774P + 0,016 \end{aligned}$$

par sa valeur en fonction de la précontrainte P , on a :

$$P = \frac{M_{\max} + M}{pv_s - e_o} = \frac{3,91 + 0,1774P + 0,016}{0,7/3 + 0,55}$$

d'où : $P = 6,48 \text{ MN}$.

On constate que l'hyperstaticité du système consomme $\frac{6,48 - 4,99}{4,99} = 30\%$ de précontrainte en plus.

2.5.6. Vérification de la section à mi-travée

Le module d'inertie nécessaire est égal à :

$$\left(\frac{I}{v}\right)_{\min} = \frac{Pph}{\sigma_{cs}} = \frac{6,48 \times 1,4/3}{18} = 0,168 \text{ m}^3 < 0,196 \text{ m}^3;$$

la section de béton est suffisante. On est donc certain que les contraintes resteront dans les limites imposées.

2.5.7. Diagramme des moments (fig. 25-23)

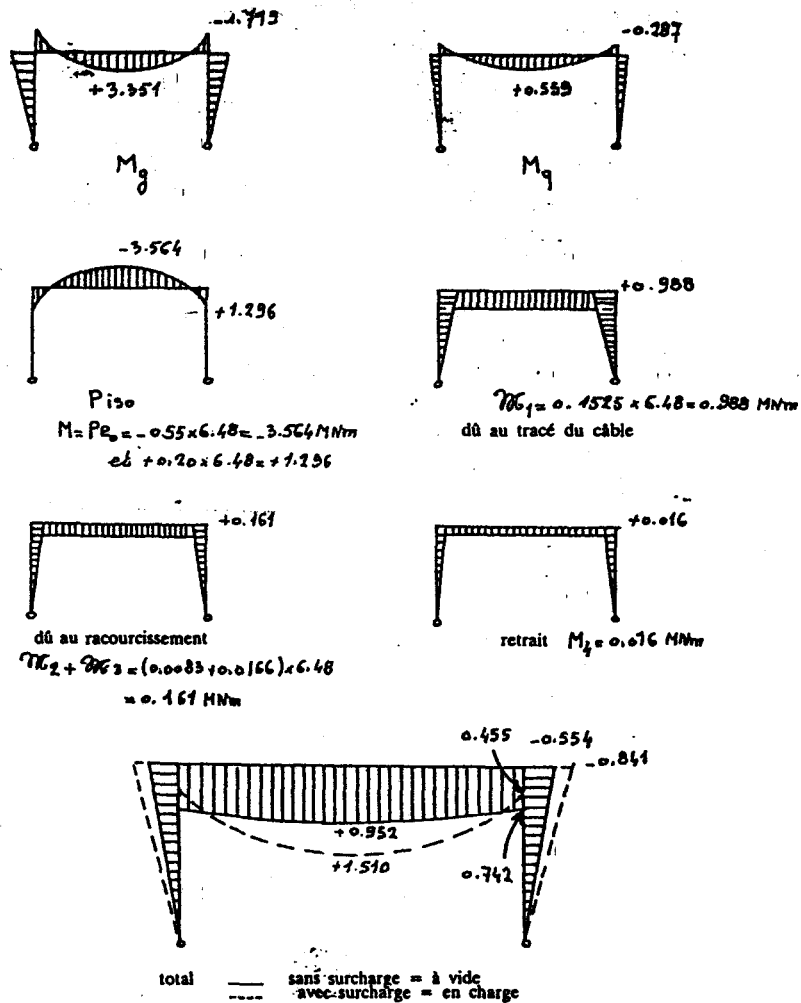


Fig. 25-23. Courbes des moments

2.5.8. Diagrammes des contraintes

Bien que cela ne soit pas nécessaire à mi-travée, car nous avons vérifié le module d'inertie et calculé la précontrainte pour cela, nous dessinerons les diagrammes des

contraintes à mi-travée et sur appui pour mieux visualiser les différentes contraintes dans la section.

• A mi-travée (fig. 25-24).

$$S_t = 0.84 \text{ m}^2 \quad P = 6.48 \text{ MN}$$

$$\frac{I}{v} = 0.196 \text{ m}^3 \quad e_o = -0.55 \text{ m}$$

$$P e_o + M + M_{\max} = 1.51 \text{ MNm}$$

$$P e_o + M + M_{\min} = 0.952 \text{ MNm}$$

$$\Delta M = 0.558 \text{ MNm}$$

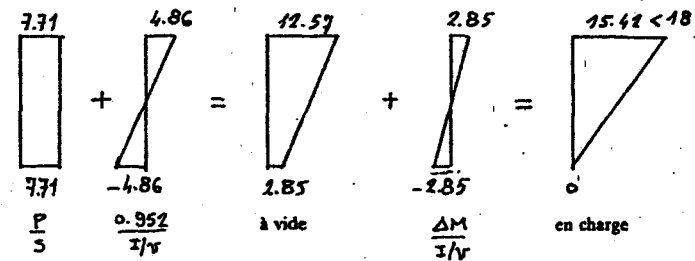


Fig. 25-24. Diagrammes des contraintes à mi-travée

• Sur appui dans la traverse (fig. 25-25)

$$e_o = 0.20 \text{ m}$$

$$P e_o + M + M_{\min} = 0.742 \text{ MNm}$$

$$\Delta M = 0.287 \text{ MNm}$$

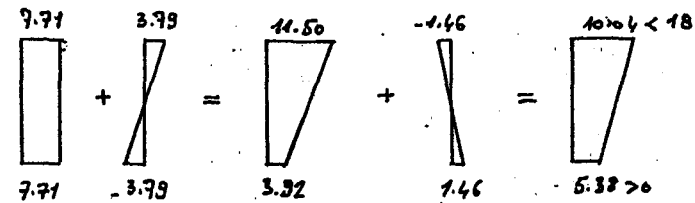


Fig. 25-25. Diagrammes des contraintes à l'appui, dans la traverse

• Sur appui dans le poteau

Le montant est calculé en flexion composée avec un effort normal N égal aux efforts tranchants V_s ou $V_g + V_q$:

$$V_g = -g \frac{\ell}{2} = 13 \times 0,06 = 0,78 \text{ MN}$$

$$V_q = q \frac{\ell}{2} = 13 \times 0,01 = 0,13 \text{ MN}$$

$$0,91 \text{ MN}$$

et un moment correspondant :

$$N = 0,78 \text{ MN} \quad M = 0,554 \text{ MNm}$$

$$N = 0,91 \text{ MN} \quad M = 0,841 \text{ MNm}$$

En calculant le moment par rapport aux aciers tendus avec une hauteur utile de 0,82 m et un bras de levier estimé de 0,72 m, on obtient :

$$M_1 = 0,78 \times 0,37 + 0,554 = 0,843 \text{ MNm}^*$$

$$A = \left(\frac{0,843}{0,72} - 0,78 \right) / \bar{\sigma}_s = 16,28 \text{ cm}^2$$

$$\text{et } M_1 = 0,91 \times 0,37 + 0,841 = 1,118 \text{ MNm}$$

$$A = \left(\frac{1,118}{0,72} - 0,91 \right) / \bar{\sigma}_s = 30,37 \text{ cm}^2 \text{ soit 7 HA 25 sur la face extérieure.}$$

Cependant dans les 1,40 m supérieur du nœud montant-traverse, l'effort normal dû à la réaction verticale de la traverse ne peut pas être pris en compte. Il faudra augmenter la section d'acier pour reprendre un moment de 0,841 MNm avec $N = 0$:

$$A_s = \frac{0,841 \times 10^4}{0,72 \times 240} = 48,67 \text{ cm}^2 \text{ soit 10 HA 25.}$$

REMARQUE 1 :

On pourrait également précontraindre le montant vertical, si les moments maximum et minimum sont de même signe et sont tels que la section calculée en béton armé avec les aciers minimum de poteaux ne soit pas capable de reprendre les efforts. Dans ce cas, on pourra soit augmenter la section d'acier de béton armé, soit mettre un câble de précontrainte dont le tracé peut être linéaire et l'excentricité constante pour éviter que l'ancrage soit dans l'articulation du pied.

REMARQUE 2 :

Dans le cas d'un montant précontraint, il faudra tenir compte dans le calcul des pertes, du raccourcissement instantané et différé dû aux charges verticales permanentes ou variables appliquées avant ou après la mise en précontrainte.

REMARQUE 3 :

Dans l'exemple ci-dessus, du fait de l'hyperstaticité du système, une partie de la précontrainte « passe » dans les appuis par l'intermédiaire des montants. La valeur

* 0,37 représente la distance du centre de gravité de la section de béton aux aciers tendus = $0,90/2 - 0,08 = 0,37 \text{ m}$.
 $\sigma_s = 240 \text{ MPa}$ par exemple en fissuration préjudiciable.

de cet effort est égal à :

$$\frac{M_1 + M_2 + M_3}{H} = \frac{0,1774 \text{ P}}{10} = 0,115 \text{ MN}$$

REMARQUE 4 :

Pour économiser sur la précontrainte et sur le béton des montants, on a intérêt à diminuer l'inertie de ces derniers au maximum. En bâtiment en particulier, il est une règle de bonne construction de disposer de poteaux souples pour supporter sans préjudice les déformations instantanées et différées dues à la précontrainte.

REMARQUE 5 :

L'effort tranchant dans le montant vaut : $\frac{M_1 + M_2 + M_3}{H} = 0,115 \text{ MN}$ sous

l'action hyperstatique de la précontrainte et varie de 0,0554 à 0,0841 MN sous l'action des charges permanentes et variables, de la précontrainte et du retrait. On constate une diminution de l'effort tranchant sous l'action hyperstatique de la précontrainte qui agit en sens inverse de celles des charges permanentes et variables.

Tableau 25.9 (voir remarque 6)

Excentricité sur appui e_0	0	0,20 m	0,40 m	0,55 m
R_i	0	- 0,01018 P	- 0,02036 P	- 0,02799 P
M_1	0,1865 P	0,1525 P	0,1185 P	0,09302 P
P (MN)	6,86	6,48	6,14	5,90
$(I/v)_{\min}$	0,178 < 0,196	0,168	0,159	0,153
Appui traverse				
Moment à vide (MNm) :	- 0,252	0,742	1,631	2,238
- σ_{sup}	6,88	11,50 < 18	15,62 < 18	18,44 > 18
- σ_{inf}	9,46	3,92 > 0	- 1,017 < 0	- 4,39 < 0
	OK	OK	Classe II	Béton insuffisant
A mi-travée				
- σ_{sup}	16,34 < 18	15,42	14,60	14,04
- σ_{inf}	0	0	0	0
Appui poteau				
A_{max} (cm ²)	14,21	32,18 7 HA 25	135,69 11 HA 40	
Coût avec :				
- 7 F/kg acier HA	937 (1)	2 122	8 948	
- 16 F/kg acier BP (hors ancrage)	22 165	20 938	19 839	
Total	23 102	23 060	28 787	
CHOIX	—	Solution retenue	—	—

(1) $14,21 \text{ cm}^2 \times 0,785 \text{ kg/cm}^2 \times 12 \text{ m} \times 7 \text{ F/kg} \times 2 \text{ poteaux} \times 1/2 = 937 \text{ F}$
 $\frac{6,86 \text{ MN}}{(0,6 \times 1814) \text{ MPa}} \times 7850 \text{ kg/m}^3 \times 28 \text{ m} \times 16 \text{ F/kg} = 22165 \text{ F}$

REMARQUE 6 :

On a trouvé une section d'acier de 32,18 cm² dans le montant vertical. En faisant varier la valeur de l'excentricité sur appui en plus ou en moins, on peut étudier comment varie la valeur de la précontrainte et de la section d'acier de béton armé dans le montant (tableau 25.9).

3. EXEMPLE 3: ENCEINTE DE CONFINEMENT D'UN RÉACTEUR 1 300 MW

L'enceinte de confinement d'un réacteur PWR de 1 300 MW est constitué de deux enveloppes en béton (fig. 25-26) :

- une enveloppe extérieure en béton armé de protection contre les chocs extérieurs (chute d'avion), de 55 cm d'épaisseur,
- une enveloppe intérieure en béton précontraint dite de confinement, de 90 cm d'épaisseur et 45 m de diamètre intérieur.

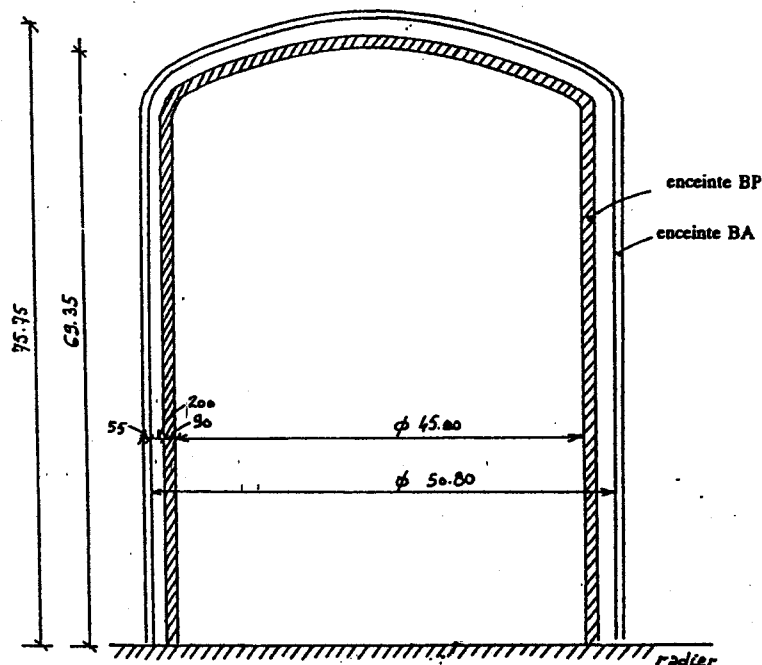


Fig. 25-26. Enceintes de réacteur 1 300 MW

Cette enveloppe précontrainte doit résister, en état-limite de service, à une pression d'épreuve de 0,38 MPa, en conservant une contrainte résiduelle de compression de 1 MPa pour s'assurer d'une bonne étanchéité aux gaz.

La pression intérieure étant uniforme, les aciers de précontrainte devront être soumis, après toutes les pertes, à une traction équilibrant :

— l'effort horizontal F_H

$$F_H = pr + \sigma_b S_1$$

$$F_H = 0,38 \times 22,5 + 1 \times 0,9 = 9,45 \text{ MN par mètre de hauteur,}$$

— l'effort vertical F_V

$$F_V = pr^2 + \sigma_b S_1 \text{ pour l'ensemble du périmètre } 2\pi r$$

$$\text{avec : } S_1 = \frac{\pi}{4} [(45 + 1,8)^2 - 45^2] = 129,78 \text{ m}^2$$

$$\text{et : } \sigma_b = 1 \text{ MPa}$$

$$p = 0,38 \text{ MPa}$$

$$r = 22,5 \text{ m}$$

$$\text{d'où : } F_V = 0,38 \times \pi \times 22,5^2 + 129,78 \times 1 = 734,14 \text{ MN}$$

et par mètre de périmètre :

$$f_v = \frac{F_V}{\pi \varnothing_1} = \frac{734,14}{\pi(45 + 0,9)} = 5,09 \text{ MN/m}$$

La contrainte des aciers, après pertes, est supposée égale à 1 150 MPa pour les câbles verticaux et 1 100 MPa pour les câbles horizontaux (cerces). Les unités utilisées seront des 37 T 15 de $37 \times 139 \text{ mm}^2 = 5 143 \text{ mm}^2$.

Le nombre de câbles nécessaire est donc :

— de $\frac{9,45 \cdot 10^6}{5 143 \times 1 100} = 1,67$ câble(s) par mètre vertical, soit des câbles 37 T 15 en cerces espacés de 0,60 m ;

— de $\frac{5,09 \cdot 10^6}{5 143 \times 1 150} = 0,861$ câble par mètre de périmètre, soit des câbles 37 T 15 espacés de 1,16 m (fig. 25-27).

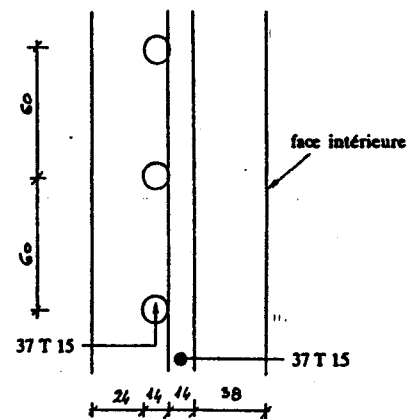


Fig. 25-27. Coupe verticale sur l'enceinte

A la mise en service, la contrainte de l'acier à la mise en tension valant 1 451 MPa, le béton doit avoir une résistance minimum telle que :

$$0,6 f_{ct} \geq \frac{1\,451 A_p}{S} = \frac{1\,451 \times 37 \times 139}{0,6 \times 0,9 \times 10^6} = 13,82 \text{ MPa},$$

soit : $f_{ct} \geq 23 \text{ MPa}$.

4. EXEMPLE 4: VOILE SUSPENDU - 1^{er} CAS

Le voile suspendu en béton précontraint est constitué d'une coque conique ou cylindrique dont la coupe est une chaînette. L'utilisation de fil ou toron permet de réaliser des coques de faible épaisseur : 6 à 10 cm.

Un exemple est donné par la couverture d'un restaurant à Abidjan* constituée de 12 tronçons coniques de 9 m d'ouverture à la périphérie (fig. 25-28).

La charge permanente g vaut : $g = 25 \times 0,06 = 1,5 \text{ kN/m}^2$.

La charge d'exploitation q est supposée égale à $q = 0,5 \text{ kN/m}^2$.

On souhaite, pour des raisons d'étanchéité, avoir une contrainte résiduelle de 1 MPa dans le béton.

En assimilant la chaînette à une parabole, on calcule le rayon de courbure par :

$$r = \frac{l^2}{8f} = \frac{9,06^2}{8 \times 0,7} = 14,66 \text{ m}$$

sur la périphérie, d'où un effort de traction dans le voile, dû aux charges permanentes :

$$N_g = gr = 1,5 \times 14,66 = 22 \text{ kN}$$

et aux charges d'exploitation :

$$N_q = qr = 0,5 \times 14,66 = 7,33 \text{ kN}$$

En état-limite de service, l'effort de traction de l'acier de précontrainte pour un mètre de largeur à la périphérie vaut :

$$P = N_g + N_q + 1 \times S = (22 + 7,33) \cdot 10^{-3} + 0,06 = 0,0893 \text{ MN/m}.$$

En supposant que la contrainte après pertes, est de 900 MPa, la section d'acier nécessaire est égale à :

$$A_p = \frac{0,0893}{900} \cdot 10^6 = 99,2 \text{ mm}^2/\text{m} \text{ soit un } \varnothing 10 \text{ espacé de } \frac{78,54}{99,2} = 0,79 \text{ m}.$$

Ces aciers seront disposés avec des espacements croissants lorsqu'on s'éloigne de la périphérie vers le centre. Ils seront protégés par des gaines en polyéthylène de 15 mm de diamètre extérieur disposés dans l'axe du voile de 60 mm d'épaisseur.

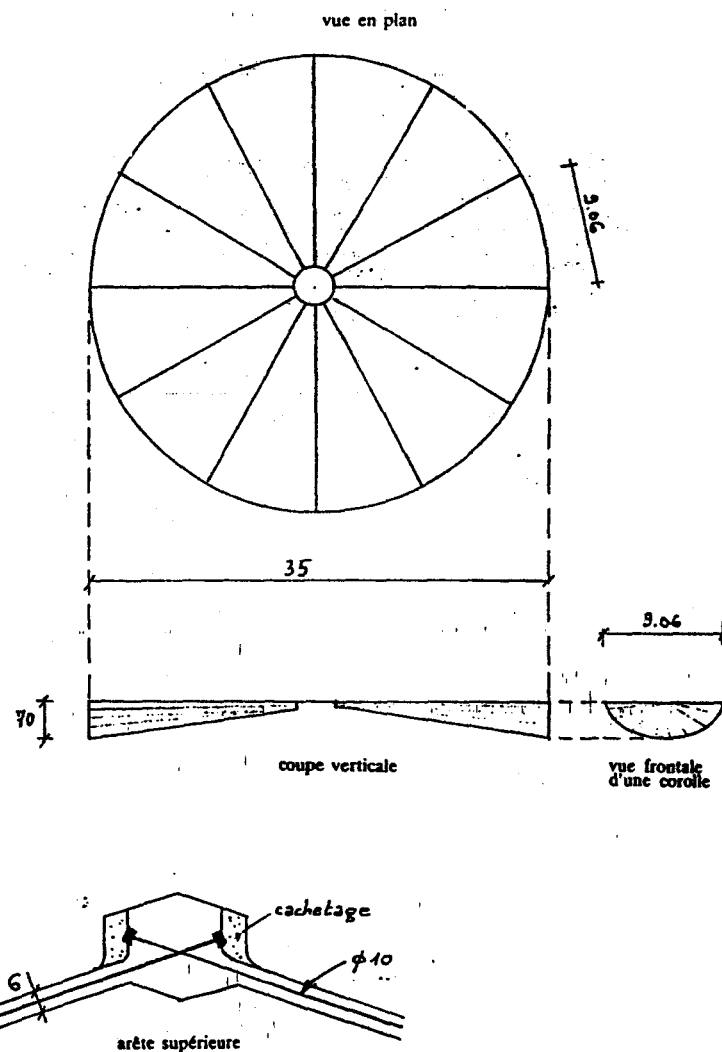
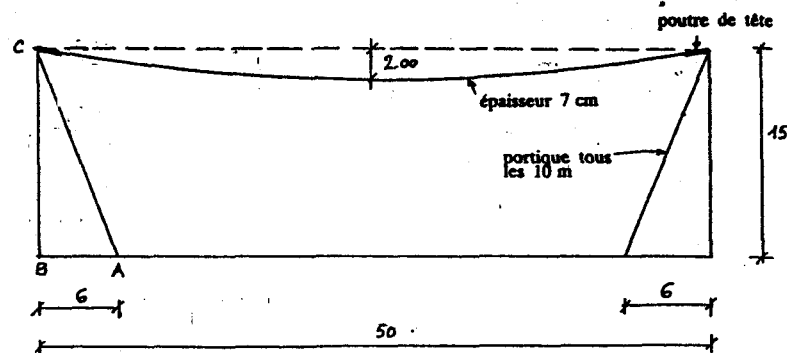


Fig. 25-28. Exemple de couverture par voile suspendu

* Article *Annales ITBTP* n° 214, oct. 1965, pp. 1314-1316.

5. EXEMPLE 5: VOILE SUSPENDU - 2^e CAS

On trouve ce type de couverture par voiles suspendus par exemple, dans les hangars pour avions gros porteurs (Francfort)

Fig. 25-29. Couverture par voile suspendu (2^e cas)

5.1. Données

- charges permanentes: $g = 0,07 \times 25 = 1,75 \text{ kN/m}^2$,
- neige ou vent: $q = 0,45 \text{ kN/m}^2$,
- unités torons T 13 ou T 15: contrainte après pertes (25%) = $0,8 \times 0,75 \times 1814 = 1088 \text{ MPa}$,
- béton: $f_{cj} = 25 \text{ MPa}$.

5.2. Plan de l'exercice

- détermination du voile précontraint,
- détermination de la poutre précontrainte de tête en C,
- détermination du portique de stabilité précontraint A-B-C.

5.3. Étude du voile suspendu

$$\text{Charge verticale en C: } V = (g + q) \frac{\ell}{2} (1 + \varepsilon)$$

la valeur de ε prend en compte la longueur développée du voile que l'on peut estimer égale à $1,02 \times 50 = 51 \text{ m}$:

$$V = (1,75 + 0,45) \times 1,02 \times \frac{50}{2} \times 10^{-3} = 0,0561 \text{ MN/m.}$$

* Si la flèche ne dépasse pas le 1/16 de la portée 0, la longueur développée ne dépasse pas 1,02 ℓ .

La composante suivant le voile vaut $N = \frac{V}{\sin \alpha}$, α étant l'angle avec l'horizontale de la tangente au voile en C.

Si l'on assimile la chaînette à une parabole, on a: $\text{tg } \alpha = \frac{2 \times 2}{50^2} = 0,16$

soit: $\sin \alpha = 0,158$ et: $N = 0,355 \text{ MN/m}$.

Pour des raisons de sécurité de la structure et d'étanchéité, nous maintiendrons une contrainte moyenne résiduelle de 3 MPa dans le béton après pertes, ce qui conduit à une contrainte de compression à la mise en tension de $3 \times (1/0,75) = 4 \text{ MPa}$.

Nous pourrions réaliser la précontrainte en deux familles:

• 1^{re} famille: câble monotoron destiné uniquement à assurer la contrainte de compression résiduelle du béton. Les ancrages prennent appui sur le voile lui-même, à la jonction voile-poutre de tête. La section d'acier est déterminée par:

$$A_p = \frac{3 \times 0,07}{1088} \cdot 10^6 = 193 \text{ mm}^2/\text{m}$$

soit 1 T 13 tous les $93/193 = 0,48 \text{ m}$.

• 2^e famille: câble monotoron destiné à suspendre le voile et à ramener sur la poutre de tête les charges verticales du voile:

$$A_p = \frac{0,355}{1088} \cdot 10^6 = 327 \text{ mm}^2$$

soit 1 T 15 tous les $139/327 = 0,42 \text{ m}$.

Pour que le retrait et le fluage du béton du voile puissent se faire sans désordre, on désolidarise le voile de la poutre de tête par un joint étanche. Le fait que les torons soient graissés et non injectés permettra un libre déplacement relatif (au frottement près).

Nous retiendrons la disposition indiquée sur la figure 25-30.

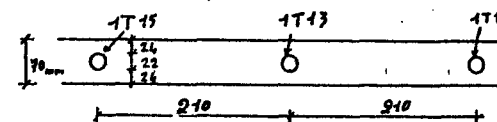


Fig. 25-30. Coupe transversale

5.4. Poutre raidisseuse de tête (fig. 25-31)

Le calcul est celui d'une poutre continue de n travées de 10 m.

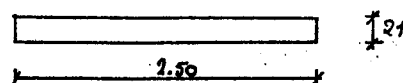


Fig. 25-31. Poutre raidisseuse de tête

La section est certainement sur-critique, du fait de la faible variation de charge par rapport aux charges permanentes.

La poutre est soumise à une charge répartie égale à 0,355 MN/m. Si le tracé du câble est tel que les moments hyperstatiques soient nuls*, on aura besoin d'une précontrainte P égale à :

$$P = \frac{M_{\max} + \rho S v \bar{\sigma}_{ti}}{\rho v + v' - d'}$$
 en classe II

avec: $\bar{\sigma}_{ti} = -2,1$ MPa

$$M_{\max} = 0,355 \times 10^2 \times 0,106 = 3,76 \text{ MNm}^{**}$$

$$\rho = 1/3$$

$$v = v' = 1,25 \text{ m}$$

$$d' = 0,175 \text{ m (fig. 25-32)}$$

$$\text{d'où: } P = \frac{3,76 - 1/3 \times 0,21 \times 2,5 \times 1,25 \times 2,1}{1/3 \times 1,25 + 1,25 - 0,175} = 2,21 \text{ MN}$$

$$\text{et une section d'acier } A_p = \frac{2,21 \times 10^6}{1088} = 2033 \text{ mm}^2$$

$$\text{soit: } \frac{2033}{139} = 14,6 \text{ torons T 15: un câble 8 T 15 + un câble 7 T 15.}$$

Comme le diamètre extérieur des gaines est de 70 mm, nous disposerons d'une épaisseur de poutre de $3 \times 7 = 21$ cm pour satisfaire aux conditions d'enrobage des gaines (fig. 25-32).

• Vérification de la section de béton

Le module d'inertie I/v doit vérifier l'inégalité suivante en classe II:

$$\frac{I}{v} = \frac{bh^2}{6} \geq \frac{Pph}{\bar{\sigma}_{cs} + \frac{v}{v'} \bar{\sigma}_{ti}} = \frac{2,21 \times 1/3 \times 2,5}{15 + (-2,1)} = 0,143 \text{ m}^3$$

en admettant une contrainte admissible de compression de 15 MPa.

$$\text{Or, } \frac{I}{v} = \frac{bh^2}{6} = 0,21 \times 2,5^2/6 = 0,219 > 0,143, \text{ ce qui est vérifié.}$$

* Tracé de câble concordant pour simplifier les calculs.

** Pour une poutre continue de 10 travées, le moment maximum sur appui vaut $-0,106 p \ell^2$ (sur le 2^e appui).

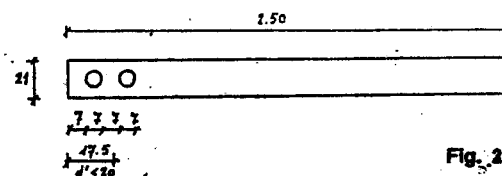


Fig. 25-32. Poutre raidisseuse de tête. Coupe transversale

5.5. Etude du portique de stabilité (fig. 25-33)

5.5.1. Calcul de N_2

Le moment par rapport au point A vaut:

$$N_3 d_1 = 6 N_2$$

$$\text{avec: } AC = \sqrt{6^2 + 15^2} = 16,155 \text{ m}$$

$$d_1 = AC \cdot \sin \alpha_1$$

$$\alpha_1 = \pi/2 - \alpha - \alpha_2$$

$$\alpha = \text{Arctg}(0,16) = 9,09^\circ$$

$$\alpha_2 = \text{Arctg}(6/15) = 21,80^\circ$$

$$\text{d'où: } \alpha_1 = 59,11^\circ$$

$$d_1 = 13,863 \text{ m}$$

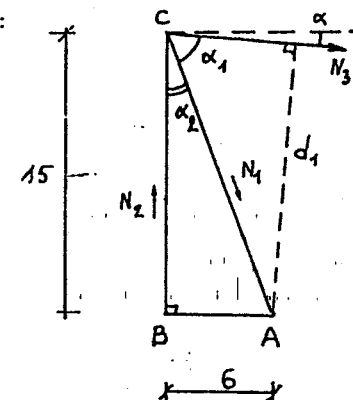


Fig. 25-33. Stabilité du portique de rive

et comme $N_3 = 0,355$ MN, le moment $N_3 d_1$ vaut:

$$M = 0,355 \times 13,863 = 4,922 \text{ MNm}$$

$$\text{d'où: } N_2 = M/6 = 0,820 \text{ MN/m}$$

$$\text{et } N_1 = N_3 \cos \alpha_1 + N_2 \cos \alpha_2 = 0,183 + 0,761 = 0,944 \text{ MN/m.}$$

Le portique de stabilité est constitué d'un tirant BC et d'un poteau AC.

5.5.2. Le câble du tirant BC

Il est déterminé par:

$$A_p = \frac{N_2}{1088} \cdot 10^6 = 754 \text{ mm}^2 \text{ pour un mètre de voile, soit } 7540 \text{ mm}^2 \text{ par tirant,}$$

et la section de béton nécessaire pour résister à la mise en tension, avant pertes différées de 25 % (coefficient multiplicateur 1,33) et avant décintrement:

$$B = \frac{1,33 N_2}{\sigma_b} \cdot \frac{1,33 \times 0,82 \times 10}{15} = 0,727 \text{ m}^2/\text{m}$$

Nous retiendrons une section $0,85 \times 0,90$ pour tenir compte de la section de la gaine et de son poids propre, et 5 câbles 11 T 15.

Le poteau AC doit reprendre un effort $N_1 = 0,944 \times 10 = 9,44$ MN par poteau, soit une dimension approchée de $9,44/(10 \text{ MPa}) = 0,94 \text{ m}^2$, soit $0,85 \times 1,15 \text{ m}$.

5.5.3. Equation de la chaînette de 2 m de flèche

Elle est de la forme $y = r \cdot \text{ch}(x/r)$, où r représente le rayon de courbure au sommet et l'ordonnée de ce même sommet. A l'extrémité on a (fig. 25-34):

$$y = r + 2$$

$$x = 25$$

soit: $r + 2 = r \cdot \text{ch}(25/r)$

d'où la valeur de r :

$$r = 156,5825 \text{ m}$$

La pente en B vaut:

$$y'_B = \text{sh}(25/156,5825) = 0,160339$$

valeur très proche de celle de la parabole qui vaut: $2 \times 2/25 = 0,16$.

L'abscisse curviligne est donnée par:

$$s = r \cdot \text{sh}(x/r) = 156,5825 \cdot \text{sh}(25/156,5825) = 25,10635 \text{ m}$$

soit 0,4 % de longueur supplémentaire au lieu de 2 % pris *a priori*

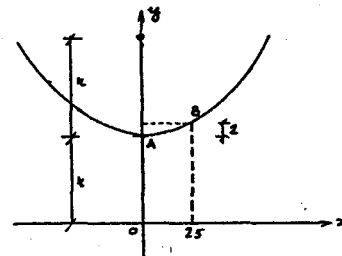


Fig. 25-34. Chaînette

6. EXEMPLE 6: FAÇADE SUSPENDU PAR TIRANTS PARABOLIQUES ET VERTICAUX*

• Hypothèses de charges: (fig. 25-35)

- charges permanentes: 22 kN/m de façade et par niveau (huit niveaux),
- charges variables: 10 kN/m de façade et par niveau ou 65 kN/m de façade pour l'ensemble compte tenu des réductions de surcharges.

• Hypothèses sur les matériaux:

- contrainte caractéristique du béton à la compression: 35 MPa,
- contrainte de l'acier après pertes de précontrainte: 1 100 MPa,
- type d'acier: torons T 15 de 139 mm² de section unitaire.

* Le siège de la Federal Reserve Bank à Minneapolis est construit suivant ce principe. Ses caractéristiques sont: portée = 83,20 m, tirant d'air = 9,15 m, piles de 65 m de hauteur; 10 planchers avec une trame de suspension de 1,53 m.

6.1. Etude du tirant parabolique (fig. 25-35)

La charge de calcul vaut:

— pour les charges permanentes:

$$g = 22 \times 9 = 198 \text{ kN/m} = 0,198 \text{ MN/m}$$

— pour les charges variables:

$$q = 65 \text{ kN/m} = 0,065 \text{ MN/m}$$

Le câble est funiculaire des charges appliquées par chaque potelet de façade (qui joue le rôle de tirant pour la partie située au-dessous du tirant parabolique et de poteau pour la partie située au-dessus).

La force maximum de traction du câble vaut:

$$N = \frac{p\ell}{2 \sin \alpha}$$

$$\text{avec: } \tan \alpha = \frac{2 \times 23}{21} = 2,19$$

$$p = g \text{ ou } g + q$$

$$\text{soit: } N_G = 0,198 \times 21 / \sin(65,46^\circ) = 4,571 \text{ MN}$$

$$N_Q = 0,065 \times 21 / \sin(65,46^\circ) = 1,500 \text{ MN}$$

$$N_G + q = 6,071 \text{ MN}$$

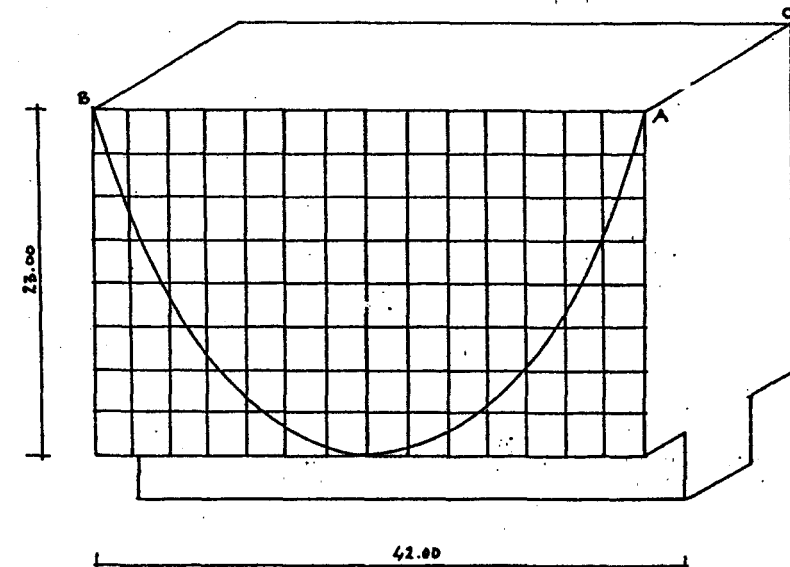


Fig. 25-35. Bâtiment à façade suspendue

La section d'acier nécessaire vaut, en supposant $\sigma_p = 1\,100\text{ MPa}$:

$$A_p = \frac{N_G + \sigma}{1\,100} = \frac{6,071 \times 10^6}{1\,100} = 5\,519\text{ mm}^2$$

pour éviter toute traction dans le tirant (classe I)

soit: $5\,519/139 = 40\text{ T } 15$ (2 câbles 20 T 15)

La section de béton du tirant doit être capable de reprendre l'effort de compression dû au tirant lors de la mise en tension, le poids mort est alors mobilisé par le raccourcissement du tirant.

En supposant que les pertes de précontrainte sont de 20 % de l'effort initial, on trouve une section de béton égale à:

$$B = \frac{6,071/0,8 - 4,571}{21} = 0,144\text{ m}^2$$

soit une section de $0,32 \times 0,50\text{ m}^2$.

L'avantage de la solution tirant précontraint est de diminuer fortement les déformations. On peut encore diminuer cette déformation en augmentant la section de béton du tirant. Nous retiendrons pour le tirant une section de $0,40 \times 0,50\text{ m}$. La longueur développée du tirant vaut 65,2 m et le raccourcissement élastique à la mise en tension vaut:

$$\frac{\Delta \ell}{\ell} = \frac{P/0,8 - N_G}{B \cdot E_1}$$

avec: $P = 6,071\text{ MN}$

$N_G = 4,571\text{ MN}$

$E_1 = 36\,000\text{ MPa}$

$$\Delta \ell = \frac{65,2}{36\,000} \left(\frac{6,071}{0,8} - 4,571 \right) \times \frac{1}{0,4 \times 0,5} = 0,027\text{ m soit } 27\text{ mm.}$$

Ce qui correspond à un raccourcissement dans le plan vertical à mi-portée égal à:

$$\Delta \ell \cdot \frac{H}{L} = \frac{23}{65,2} \times 27 = 9,5\text{ mm}$$

Avec un tirant de $0,32 \times 0,50\text{ m}$, on aurait eu un raccourcissement vertical à mi-portée égal à:

$$9,5 \times \frac{40 \times 50}{32 \times 50} = 11,9\text{ mm}$$

Sous l'action du fluage, le raccourcissement du tirant sera égal à:

$$\frac{\Delta \ell}{\ell} = \frac{P - N_G}{BE/2} = \frac{6,071 - 4,571}{0,4 \times 0,5 \times 18\,000} = 0,417\%$$

* $\sigma_p = 0,6 \times 35 = 21\text{ MPa}$.

** 2 gâches $\varnothing 100 + 0,144 < 0,32$.

soit $\Delta \ell = 65,2 \times 0,417 = 27,2\text{ mm}$ et verticalement: 9,6 mm.

L'allongement sous surcharge, tant en chargement instantané:

$$\Delta \ell = \frac{N_G}{BE_1} = \frac{65,2 \times 1,50}{0,4 \times 0,5 \times 36\,000} = 0,00136\text{ m}$$

soit verticalement: $\frac{23}{65,2} \times 13,6 = 4,8\text{ mm}$

Ces déformations sont compatibles avec la bonne tenue des cloisonnements et des façades.

On devra étudier le plancher-terrasse, qui reçoit un effort de compression N_c :

$$N_c = \frac{(g + q)\ell/2}{\text{tg} \alpha}$$

$$N_c = \frac{(0,198 + 0,065) \times 21}{2,19} = 2,522\text{ MN}$$

6.2. Tirant suspendu de façade

Les tirants les plus longs, situés près des extrémités du bâtiment, reprennent un effort de traction dû aux charges permanentes et variables des planchers. Ces charges sont croissantes en escalier à partir du bas. On devra donc déterminer la précontrainte, qui sera constante tout le long du tirant, en étudiant le point le plus haut et le point le plus bas du tirant.

6.3. Tirant éventuellement précontraint

Pour reprendre les charges en porte-à-faux des façades dans le plan des pignons (Tirant AC sur la figure 25-36). Le pignon est schématisé suivant la figure 25-36:

$$\text{tg} \beta = \frac{23}{11} \rightarrow \beta = 64,44^\circ$$

d'où l'effort de traction maximum N_T correspondant à $g + q$:

$$N_T = (0,198 + 0,065) \times \frac{42}{2} \times \cotg \beta = 2,64\text{ MN}$$

soit une section de tirant égale à:

$$A_p = \frac{2,64}{1\,100} \times 10^6 = 2\,401\text{ mm}^2$$

Soit 18 T 15

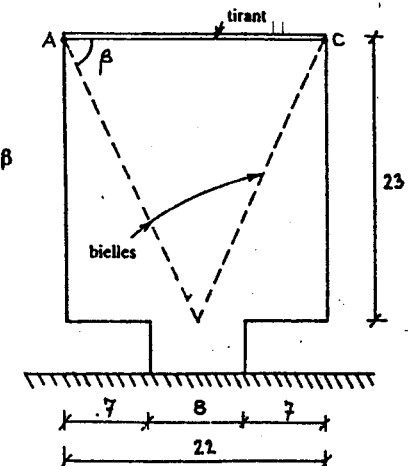


Fig. 25-36. Equilibre du pignon

REMARQUE:

Nous avons supposé dans l'exemple précédent, que seule la façade était suspendue et que les planchers reposaient sur une file d'appui située dans le plan longitudinal médian du bâtiment.

7. EXEMPLE 7: ASSEMBLAGE DE BLOCS PRÉFABRIQUÉS

En dehors du cas bien connu des ponts construits en encorbellement, étudié à l'exemple 1 ci-dessus, on peut également réaliser des structures, par assemblage de blocs préfabriqués creux et pleins.

Par exemples:

- le stade du Parc des Princes à Paris,
- le stade olympique de Montréal (fig. 25-37),
- les piles du viaduc de Bellegarde (Ain)... (voir photo page 23)

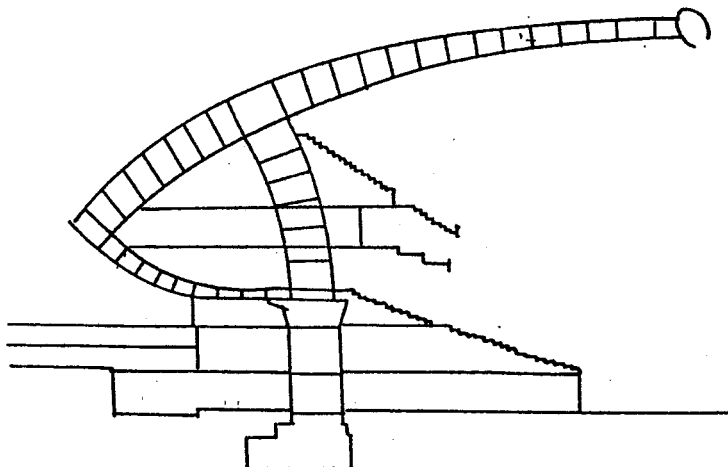


Fig. 25-37. Coupe transversale du stade olympique de Montréal

8. EXEMPLE 8: RÉPARATION D'OUVRAGES

La précontrainte est très utile dans le cas de réparation d'ouvrage, par son action immédiate lors de la mise en tension qui entraîne une solidarisation des éléments constitutifs. Par exemple, le renforcement au glissement et au renversement du barrage de Olmos Dam au Texas construit en 1927 et renforcé en 1979 (fig. 25-38).

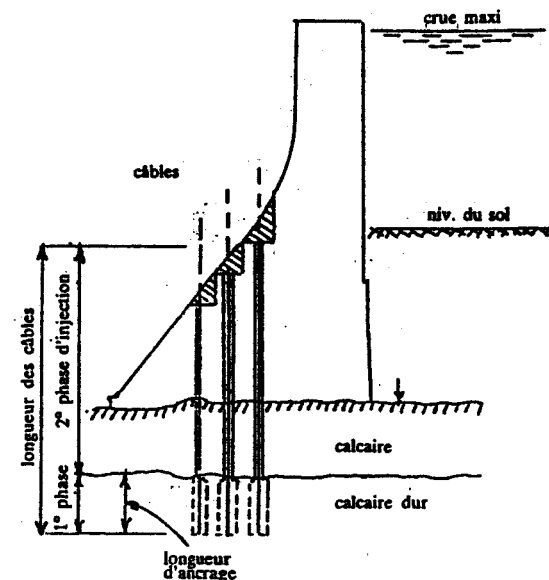


Fig. 25-38. Réparation du barrage d'Olmos Dam par adjonction de précontrainte

Un autre exemple de réparation d'ouvrage est celui d'un massif de béton sous machine vibrante et dont la masse insuffisante entrerait en résonance avec le matériel situé au-dessus. On pourra augmenter la masse du massif par adjonction de deux blocs de béton, liés au premier massif par des barres de précontrainte (fig. 25-39).

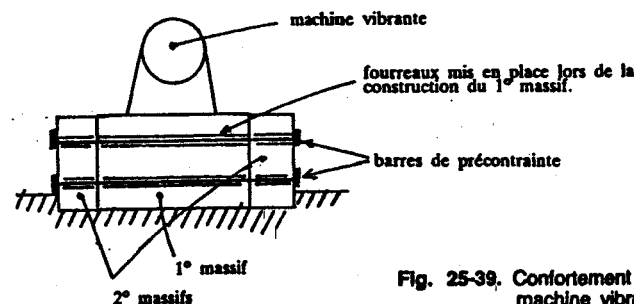


Fig. 25-39. Confortement d'un massif de machine vibrante

Le calcul de l'effort de précontrainte doit être mené de façon à s'assurer que l'effort de frottement induit est supérieur, avec un coefficient de sécurité suffisant, à l'effort de glissement provoqué par les vibrations.

9. EXEMPLE 9: TIRANTS

En plus des exemples traités au chapitre 12 « Tirants », on peut citer l'exemple de l'ancrage de la culée du vélodrome olympique de Montréal (1976) (fig. 25-40).

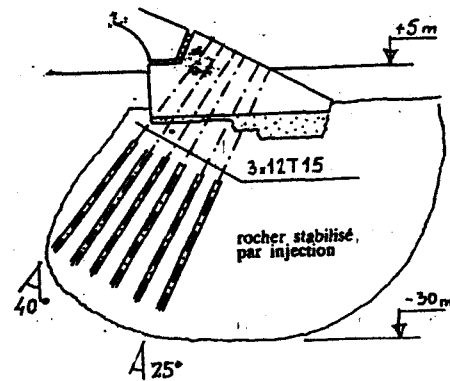


Fig. 25-40. Ancrage de la culée du vélodrome olympique de Montréal

10. EXEMPLE 10. DALLE CONTINUE A CABLES NON ADHÉRENTS EN PRÉCONTRAINTÉ PARTIELLE

10.1. Présentation du procédé

Cette nouvelle méthode de calcul et d'exécution de dalles continues ou planchers-dalles est peu courante en France, mais plus utilisée dans les pays anglo-saxons. Par exemple aux Etats-Unis, la plupart des dalles de planchers relèvent de la précontrainte partielle à câbles non adhérents (unbonded tendons).

Le principe consiste en une précontrainte partielle par post-tension réalisée par des monotorons (ou des fils) placés dans des gaines plastiques remplies de graisse. Cette précontrainte est généralement calculée pour équilibrer les charges permanentes (flèche nulle sous charges permanentes), mais elle devra être au moins telle que le béton reste toujours comprimé sous charges permanentes. Le tracé pourra être constitué de morceaux de paraboles pour suivre au mieux les courbes des moments.

Les principaux avantages de ce procédé sont :

- une déformation sous charges permanentes réduite, voire nulle ;
- une diminution notable de la fissuration due au retrait ;
- une diminution de la fissuration de flexion.

La structure porteuse devra naturellement être suffisamment souple pour ne pas « appeler » dans les voiles ou les poteaux, une partie de l'effort de précontrainte de la dalle.

Quant au coût, une étude des dépenses de cette solution et de la solution classique en béton armé montre qu'elles sont tout à fait comparables.

Les taux de précontrainte mis en place habituellement varient de 1,2 à 2 MPa en contrainte moyenne (P/S).

10.2. Recherche d'un câblage équilibrant les charges permanentes

Un tracé de câble qui entraînerait :

- un moment nul sur les deux appuis de rive,
- une charge radiale p opposée à la charge permanente g , donnerait une répartition du moment total de précontrainte opposée au moment dû aux charges permanentes.

En effet, si l'on applique la méthode externe, on considère des tracés de câble paraboliques de courbure $1/r$ tels que :

$$p = \frac{-P}{r} = -g$$

soit (fig. 25-41) : $P\delta = M_0 = \frac{g\ell^2}{8}$

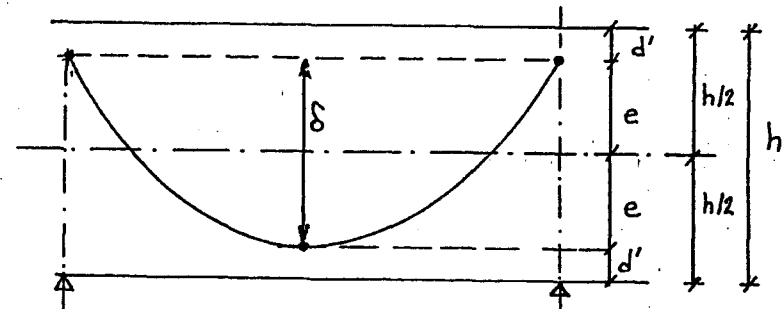


Fig. 25-41. Câblage de travée courante

Si l'on donne à δ la valeur maximum $2e$ avec $e = \frac{h}{2} - d'$, on obtient la précontrainte minimum :

$$P = \frac{g\ell^2}{8\delta} = \frac{g\ell^2}{16e}$$

Ce câble, constitué de successions de paraboles de courbure g/P a même action que les charges permanentes changées de signe. L'ensemble [précontrainte + charges permanentes] n'entraîne que des contraintes de compression constantes dans toute la section, quelle que soit l'abscisse : $\sigma_x = \frac{P}{S}$

10.3. Exemple numérique

Soit un plancher constitué d'une dalle continue dans un seul sens de 5 travées de 7,5 m supportée par des poutres parallèles de 0,50 m de largeur (fig. 25-42).

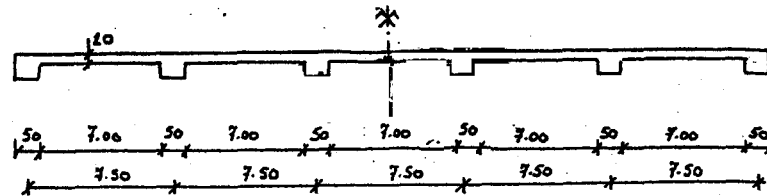


Fig. 25-42. Dalle continue de 5 travées

Nous supposons l'épaisseur de la dalle égale à $1/35$ pour 7,5 m de portée soit $h = 0,20$ m.

Les données sont les suivantes :

- béton : $f_{c28} = 30$ MPa et $f_{t28} = 2,4$ MPa,
- acier : contraintes des armatures actives après pertes
 $\sigma_p = 1150$ MPa à 1200 MPa pour des torons T 13 ou T 15,
- enrobage à l'axe des torons $d' = 35$ mm (gaine de 20 mm de diamètre environ),
- charges d'exploitation $q = 5$ kN/m².

10.3.1. Calcul de la précontrainte P

Le câblage aura le tracé théorique indiqué sur la figure 25-43 en excentrant au maximum sur appui et en travée sauf sur les appuis de rive.

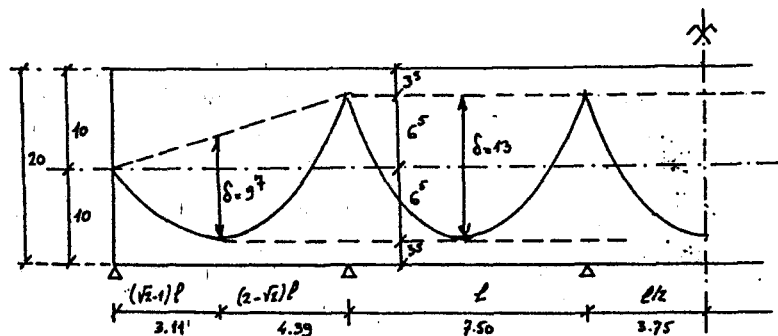


Fig. 25-43. Câblage des travées de rive et courantes

On trouve une flèche de câble de 9,7 cm en travée de rive et 13 cm en travée intermédiaire, d'où la précontrainte nécessaire :

— en rive :

$$P = \frac{8e^2}{85} = \frac{5 \times 7,5^2}{8 \times 0,097} = 362 \text{ kN}$$

— intermédiaire :

$$P = \frac{5 \times 7,5^2}{8 \times 0,13} = 270 \text{ kN}$$

soit :

$$\text{— en câbles filants : } A_p = \frac{270 \times 10^{-3}}{1150} \times 10^6 = 234 \text{ mm}^2$$

$$T13 \quad s = 93/234 = 0,40 \text{ m}$$

— en câbles supplémentaires en travée de rive :

$$A_{p2} = \frac{(362 - 270) \times 10^{-3} \times 10^6}{1150} = 80 \text{ mm}^2$$

$$T13 \quad s = 1,00 \text{ m}$$

10.3.2. Tracé réel du câble

Pour obtenir un tracé de câble constructible, on supprimera les angles vifs sur appui par des fractions de paraboles sur une longueur 0,1 l . Le point de contact des deux morceaux de parabole situé à l'abscisse 0,1 l et 0,9 l a une tangente commune. Ce point se trouve sur la droite joignant les sommets des deux paraboles (fig. 25-44) à l'ordonnée $0,6 \left(\frac{h}{2} - d' \right)$ en travée intermédiaire et $\frac{1,8 - \sqrt{2}}{2,0 - \sqrt{2}} \left(\frac{h}{2} - d' \right)$ en travée de rive.

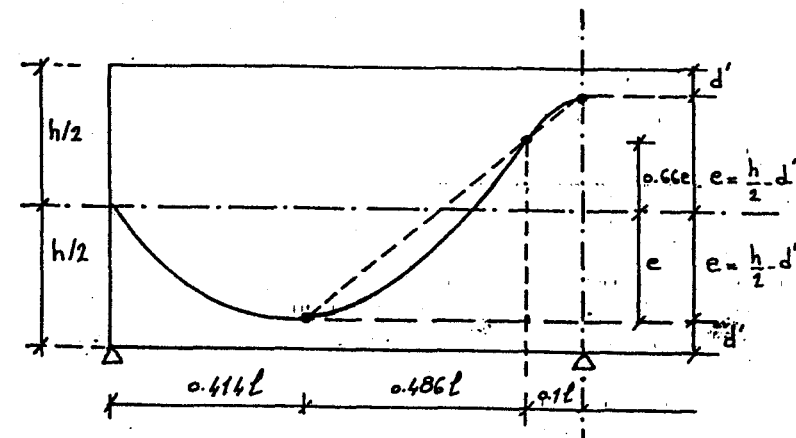


Fig. 25-44 a. Travée de rive — Tracé constructible du câble

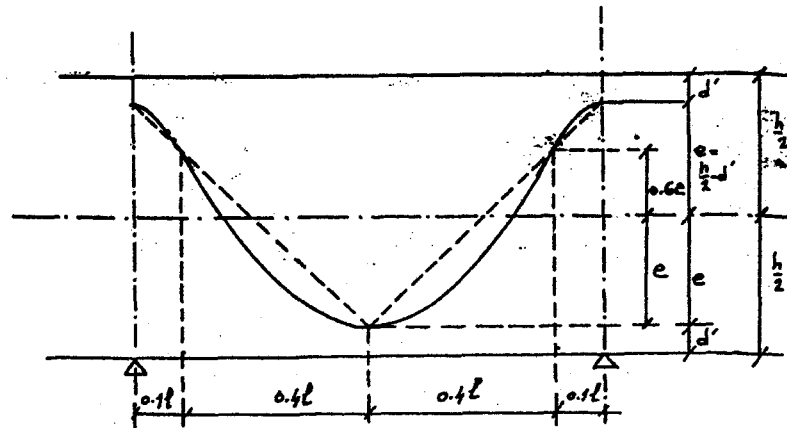


Fig. 25-44 b. Travée intermédiaire — Tracé constructible du câble

On voit que la solution pour obtenir le même effort de précontrainte nécessaire dans toutes les travées est d'avoir des travées de rive plus courtes, égales à $\sqrt{3/4} = 0,866$ fois les travées centrales. Dans notre cas, on aurait obtenu 7,50 m pour les travées intermédiaires et 6,50 m pour les travées de rive.

On peut alors déterminer le tracé correspondant à la dalle étudiée (fig. 25-45). On négligera les moments hyperstatiques de précontrainte entraînés par le changement de tracé du câble (écrêtage).

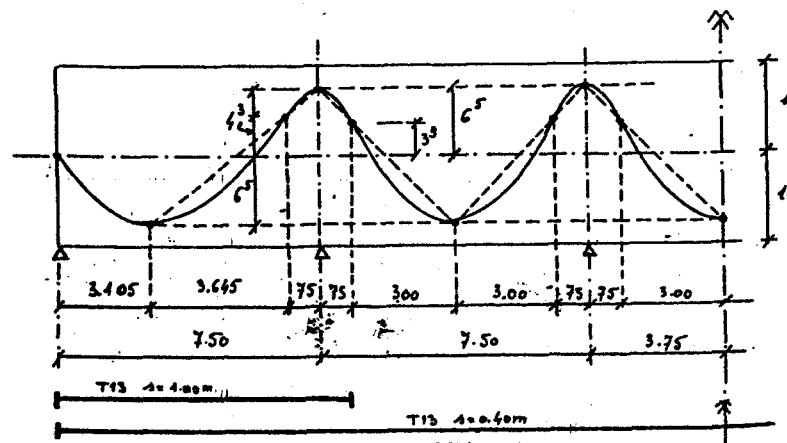


Fig. 25-45. Câblage

10.3.3. Etat-limite de service — ELS

Sous l'action de la précontrainte et des charges permanentes, la contrainte est constante dans le béton quelle que soit l'abscisse; sous l'action des charges variables, le moment calculé suivant l'équation des trois moments, entraîne une contrainte de flexion σ_q (fig. 25-46). On pourra regrouper les résultats des calculs sous forme de tableau (tableau 25.10).

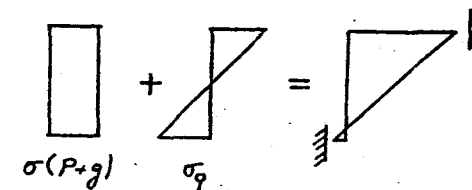


Fig. 25-46. Diagrammes des contraintes

Tableau 25.10

	Travée de rive près de mi-travée	1 ^{er} appui intérieur	Mi-travée centrale	
Précontrainte P en MN	0,362	0,362 0,270	0,270	
Moment maximum dû aux charges variables	$\frac{q\ell^2}{10,13}$	$\frac{q\ell^2}{9,75}$	$\frac{q\ell^2}{11,69}$	
kNm	27,76	28,85	24,06	
Contrainte σ_q (MPa): $\sigma_q = \frac{6 M_q}{h^2}$	4,16	4,33	3,61	
Contrainte finale (MPa)	fibre sup.	1,81 + 4,16 = 5,97	1,35 - 4,33 = - 2,98	1,35 + 3,61 = 4,96
	fibre inf.	1,81 - 4,16 = - 2,35	1,35 + 4,33 = 5,68	1,35 - 3,61 = - 2,26
Acier de traction passif: $A_s = \left(\frac{B_1}{1\,000} + \frac{F_{B1}}{f_c} \cdot \frac{f_{t28}}{\sigma_1} \right) 10^4 \text{ (cm}^2\text{)}$				
	2,26	2,75	2,51	

On constate que les contraintes de traction sont inférieures à $f_{t28} = 2,4$ MPa, sauf sur appui où $2,98 > 2,40$ MPa que l'on devra calculer en classe III.

10.3.4. Etat-limite ultime — ELU

Comme la précontrainte équilibre la charge répartie g , nous calculerons les moments ultimes par :

$$M_u = 0,35M_g + 1,5M_q$$

et nous étudierons la section en flexion composée comme une section en béton armé (du fait que les câbles sont non adhérents), avec un effort de compression centré, car la courbure du câble a été utilisée pour compenser les charges permanentes g .

Nous pouvons alors dresser le tableau des résultats (tableau 25.11) où nous avons négligé les conséquences de la surtension des aciers actifs.

Tableau 25.11

	Travées de rive près de mi-travée	1 ^{er} appui intérieur	Mi-travée intermédiaire centrale
M_s	$\frac{g\ell^2}{13,82} = 20,35$	$\frac{-g\ell^2}{9,75} = -28,85$	$\frac{g\ell^2}{21,72} = 12,95$
M_q	$\frac{q\ell^2}{10,13} = 27,76$	$\frac{-q\ell^2}{9,75} = -28,85$	$\frac{q\ell^2}{11,69} = 24,06$
M_u (kNm).....	48,76	- 53,37	40,62
M'_u = moment par rapport aux aciers passifs tendus: $M'_u = M_u$	72,29	- 70,92	58,77
$A'_s = \frac{M'_u Y_s}{z f_c}$	13,77	13,42	10,87
$A_s = A'_s - \frac{P Y_s}{f_c}$	3,36	5,66	3,11
Acier nécessaire en ELS (cm ²).....	3,36	5,66	3,11
Soit par m.....	5 HA 10	5 HA 12	4 HA 10

10.3.5. Calcul des déformées (ELS)

La flèche due aux charges permanentes est annulée par la précontrainte. Seule subsiste la flèche due aux charges variables.

Pour une travée de portée ℓ soumise à une charge uniforme q et à des moments aux extrémités M_1 et M_2 , la flèche à mi-travée vaut:

$$f = \frac{5q\ell^4}{384EI} + \frac{(M_1 + M_2)\ell^2}{16EI}$$

d'où en travée de rive:

$$f = \frac{5 \times 5 \times 10^{-3} \times 7,5^4}{384 \times 22,8} + \frac{(0 - 5 \times 10^{-3} \times 7,5^2/19) \times 7,5^2}{16 \times 22,8}$$

$$= 0,00903 - 0,00228 = 0,00675 \text{ m} = 6,75 \text{ mm}$$

avec:

$$E = E_1 = 11\,000 \sqrt[3]{f_{c28}} = 11\,000 \sqrt[3]{30} = 34\,180 \text{ MPa}$$

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{0,2^3/12}{12} = 667 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$EI = 22,8$$

$$\text{soit: } \frac{f}{\ell} = \frac{1}{1\,111}$$

et en travée intermédiaire centrale:

$$f = 0,00903 - \frac{(5 \times 10^{-3} \times 7,5^2 \times 2/25,34) 7,5^2}{16 \times 22,8} = 0,00561 \text{ m}$$

$$\text{soit: } \frac{f}{\ell} = \frac{1}{1\,337}$$

On constate que le procédé permet de réduire les flèches dans des proportions considérables.

11. EXEMPLE 11: RÉSERVOIR CIRCULAIRE CYLINDRIQUE

11.1. Types de réservoir circulaire

La poussée de l'eau, qui est une poussée radiale perpendiculaire à la paroi, entraîne dans celle-ci un effort de traction pure $F = p \cdot r$, si r représente le rayon de courbure de la paroi et p la pression exercée par le liquide.

Cet effort de traction entraîne donc une rupture de béton tendu dans la solution béton armé et une moindre étanchéité.

La précontrainte offre l'avantage de compenser cette traction par un effort de compression supérieur, de façon à maintenir une contrainte résiduelle positive dans le béton, assurant ainsi une meilleure étanchéité et de moindres mouvements pour l'étanchéité éventuelle.

Les réservoirs circulaires peuvent être précontraints par des câbles situés à l'intérieur de la jupe (fig. 25-47 a) avec des bossages (4 ou 6 par tour) permettant une répartition équilibrée des pertes de précontrainte par frottement.

Une deuxième possibilité consiste à enrouler sur la jupe coulée en première phase, des spirales ou cerces de fils tendus et de projeter ensuite un mortier de protection (fig. 25-47 b).

La paroi cylindrique peut être constituée d'éléments préfabriqués précontraints par pré-tension (fils adhérents) et assemblés sur le site par post-tension circulaire extérieure protégée par un béton projeté* ou intérieure avec des bossages prévus dans les panneaux préfabriqués** (fig. 25-48).

* Par exemple un réservoir de LPG aux Etats-Unis (1974), constitué de deux enceintes de 37 et 41 m de diamètre, formées de panneaux préfabriqués de 18,30 m de hauteur et 2,44 m de largeur avec des assemblages en béton coulé sur place.

** Par exemple, le réservoir de 76 000 m³ de Riverton Heights (Etat de Washington) 103 m de diamètre, 108 panneaux préfabriqués de 10 m de longueur, épaisseur variable de 0,20 au sommet à 0,35 en pied, articulé en pied, assemblés avec des potelets coulés en place, le tout précontraint par post-tension par câbles T 13 intérieurs.

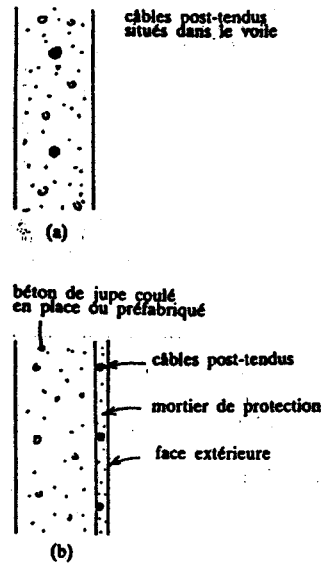


Fig. 25-47. Réservoirs
Dispositions des armatures
de précontrainte

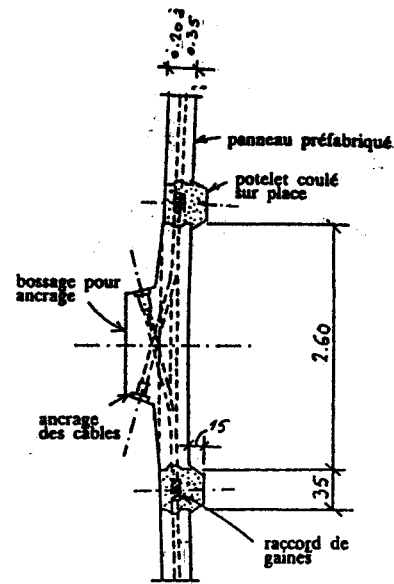


Fig. 25-48. Réservoir
Bossage pour ancrage des câbles

11.2. Type d'attache de la jupe et du radier

La jupe peut être :

- simplement appuyée sur le radier et pouvant glisser horizontalement. Il n'y a pas d'effort transmis horizontalement entre le radier et la jupe, donc pas de moment transversal dans la jupe (fig. 25-49 a);
- articulée dans le radier. L'effort horizontal correspondant à une réaction d'appui entraîne un moment transversal dans la jupe. L'effort de traction en partie basse de la jupe diminue car il est transféré en partie dans le radier (fig. 25-49 b);
- encastree dans le radier. Le moment d'encastrement réduit encore un peu plus l'effort de traction dans la jupe (fig. 25-49 c).

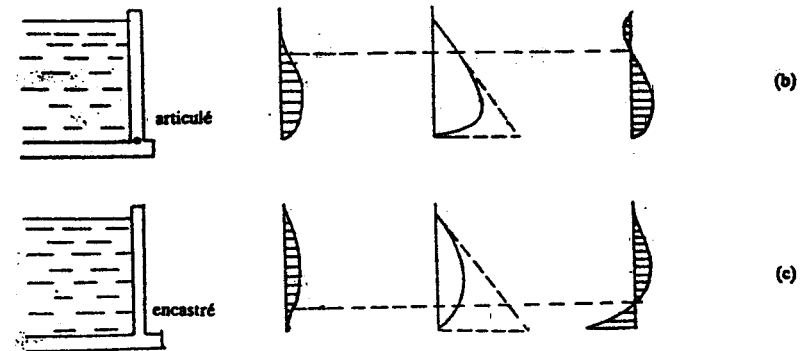
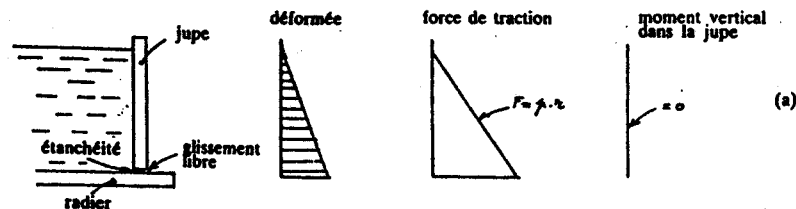


Fig. 25-49. Réservoirs
Différentes disposition de jonction de la jupe sur le radier

11.3. Méthodes de calcul

La poussée radiale p entraîne une traction dans la paroi $F = p \cdot r$ (voir chap. 11 « Pertes de précontraintes par frottement »).

Dans le cas a) de la figure 25-49, l'effort de traction est fonction de la seule hauteur du liquide h :

$$F = \bar{\omega} r h \quad (\bar{\omega} = \text{poids spécifique du liquide})$$

pour un réservoir contenant un liquide, ou $F = \text{constante}$ pour un gaz. Dans les cas b) et c) de la figure 25-49, l'action du radier entraîne une distribution de l'effort de traction entre le radier et la jupe.

Nous allons montrer que le calcul se ramène à celui d'une poutre sur appuis élastiques.

- Soit : p = la pression exercée à la cote z ,
 r = le rayon du réservoir (au milieu de l'épaisseur de la jupe),
 e = l'épaisseur de la jupe à la cote z ,
 S = la section de la jupe : $S = e \times l$ pour une hauteur unité,
 ℓ = le périmètre de la jupe $\ell = 2\pi r$.

Sous l'action de p le périmètre de la jupe s'allonge de :

$$\frac{\Delta \ell}{\ell} = \frac{\sigma}{E} = \frac{F}{ES} = \frac{pr}{ES}$$

Le rayon augmente donc de Δr tel que :

$$\frac{\Delta r}{r} = \frac{\Delta \ell}{\ell} = \frac{pr}{ES} \text{ soit } \Delta r = \frac{pr^2}{ES}$$

Or, puisque l'augmentation du rayon est proportionnelle à la pression p , on peut définir un coefficient de raideur :

$$k = \frac{\text{contrainte}}{\text{déformation}} = \frac{p}{\Delta r} = \frac{ES}{r^3}$$

Nous sommes ramenés au cas d'une poutre sur appuis élastiques, dont la déformée Δr , que nous appellerons y par simplification, vérifie l'équation différentielle de Lagrange, dont la solution est de la forme :

$$y = (A \cos \beta z + B \sin \beta z)e^{-\beta z}$$

Les coefficients A et B sont déterminés par les conditions aux limites :

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{kb}{4EI}}$$

la longueur élastique λ vaut : $\lambda = \frac{1}{\beta}$

soit pour une largeur unité $b = 1 \text{ m}$:

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{h^3}{12}$$

h = épaisseur de la jupe

on obtient :

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{4EI}{kb}} = \sqrt[4]{\frac{4Eh^3}{12ES}} = \sqrt[4]{\frac{h^3}{3}} = 0,76 \sqrt{h}$$

Ainsi pour $r = 30 \text{ m}$, $h = 0,20 \text{ m}$, on obtient :

$$\lambda = 1,86 \text{ m et } \beta = 0,537 \text{ m}^{-1}$$

Le cas b) correspond à une poutre sur appuis élastiques avec un appui fixe et soumise à une charge répartie triangulaire (fig. 25-50). Si l'on ne possède pas de programmes de calcul, on peut remplacer l'appui par une charge concentrée R telle que la flèche en ce point soit nulle.

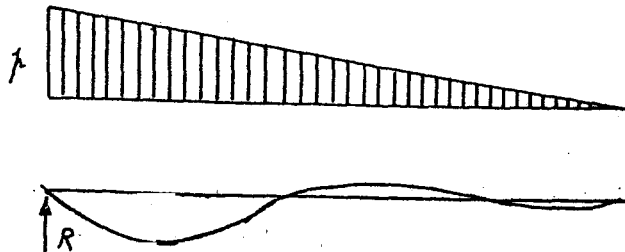


Fig. 25-50. Déformée de la jupe articulée dans le radier

Le cas c) correspond au calcul d'une poutre sur appuis élastiques avec un encastrement élastique à une extrémité (en fonction de la raideur du radier). On peut procéder de la même façon en introduisant un couple concentré et une réaction R tels que la flèche y soit nulle et que la rotation soit proportionnelle au couple dans un rapport correspondant à la raideur à la flexion du radier.

EXEMPLE 12: FÛT DE CHÂTEAU D'EAU

12.1. Description

Soit un château d'eau dont le fût est constitué de blocs carrés égaux assemblés par précontrainte de post-tension (fig. 25-51).

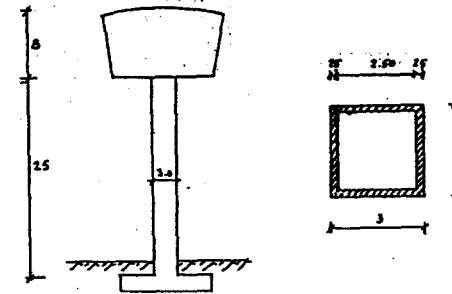


Fig. 25-51. Château d'eau
Elévation et coupe du fût

Les données sont les suivantes :

- $f_{c28} = 35 \text{ MPa}$,
- moment d'encastrement dans la fondation dû au vent normal ;
 $M_v = 7,8 \text{ MNm}$,
- charge verticale permanente au pied du fût :
 $N_G = 5,4 \text{ MN}$,
- charge verticale variable due à l'eau du réservoir :
 $N_Q = 16 \text{ MN}$

Les caractéristiques géométriques de la section sont :

- $S = 2,75 \text{ m}^2$
- $I = 3,495 \text{ m}^4$
- $I/v = 2,330 \text{ m}^3$
- $i = 1,127 \text{ m}$
- $\rho = 0,565$
- $\rho_v = 0,847 \text{ m}$ (noyau central)

12.2. Etude en ELS

Le poteau est soumis à la flexion composée avec un élancement :

$$\lambda = \frac{2H}{i} = \frac{2 \times (25 + 4)}{1,127} = 51,5$$

* Un exemple de construction de ce type est celui de la tour de contrôle de l'aéroport d'Orlando en Floride, constitué de 4 piles de 23 blocs préfabriqués de $3 \text{ m} \times 3 \text{ m} \times 2,3 \text{ m}$, soit 53 m de hauteur, assemblés par post-tension.

Nous supposons en première approche que les effets du second ordre peuvent être négligés.

L'excentricité maximum de la charge vaut :

$$e = \frac{M}{N} = \frac{7,8}{5,4} = 1,444 \text{ m} > p_v = 0,847 \text{ m}$$

elle est située en dehors du noyau central.

Pour éviter toute traction dans le béton sous charges de vent, nous devons ajouter une précontrainte centrée P pour vérifier :

$$e = \frac{M}{N + P} = p_v$$

$$\text{d'où : } P = \frac{M}{p_v} - N = 7,8/0,847 - 5,4 = 3,81 \text{ MN}$$

soit : 24 T 15 (6 T 15 par face)

$$\text{avec une contrainte } \sigma_p = \frac{3,81}{24 \times 139} \times 10^6 = 1142 \text{ MPa après pertes.}$$

Les contraintes dans le béton sont données dans le diagramme de la figure 25-52.

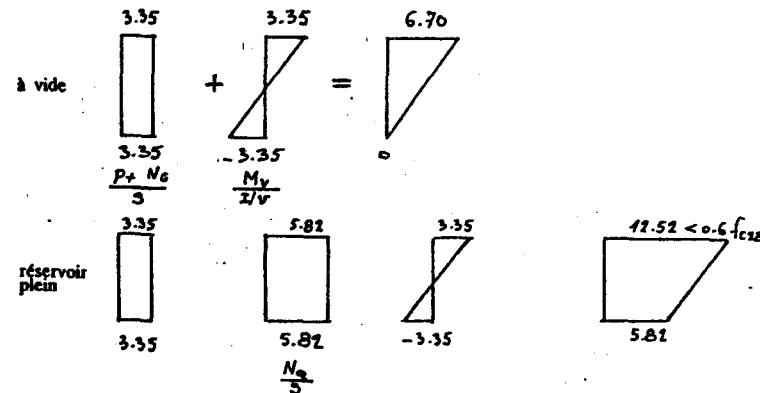


Fig. 25-52. Diagramme des contraintes

12.3. Etude en ELU

Les sollicitations deviennent :

$$N_{\text{umax}} = 1,35N_G + 1,35N_Q + P = 32,70 \text{ MN}$$

(un coefficient 1,35 pour les charges d'eau a été pris, car la charge est bornée par le trop-plein et lentement variable).

$$N_{\text{umin}} = N_G + P = 9,21 \text{ MN}$$

moment :

$$M_u = 1,2 \times 1,5 M_i = 14,04 \text{ MNm}$$

L'étude de la section en flexion composée peut être menée clairement sur le diagramme d'interaction moment-effort normal (M, N).

Pour dégrossir le problème, nous commencerons par établir un diagramme d'interaction avec 5 points correspondant à 5 positions de la fibre neutre. Le moment résistant est calculé par rapport au centre de gravité de la section.

$$1. x = 0 \quad \text{donne } M = N = 0$$

$$2. x = \infty \quad \text{donne } M = 0$$

$$N = \frac{0,85 f_{ct28}}{\gamma_b} \times S = \frac{0,85 \times 35 \times 2,75}{1,5} = 54,54 \text{ MN}$$

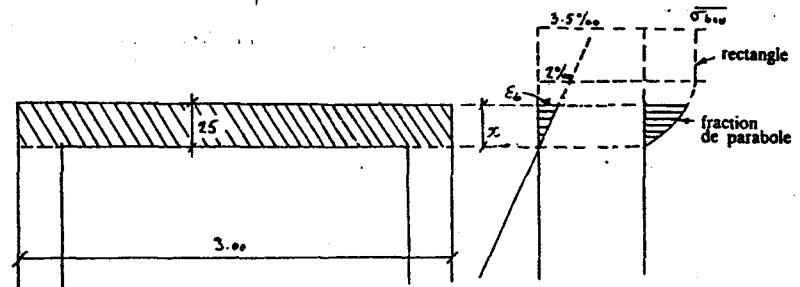


Fig. 25-53. Déformations et contraintes pour $x = 0,25 \text{ m}$

$$3. x = 0,25 \quad \text{donne } N = \alpha b x \bar{\sigma}_{bcu} \quad (\text{fig. 25-53})$$

avec : $b = 3 \text{ m}$

$$\bar{\sigma}_{bcu} = \frac{0,85 \times 35}{1,5} = 19,83 \text{ MPa}$$

$$\alpha = \frac{5 \xi (3 - 8 \xi)}{3(1 - \xi)^2} \quad (\text{coefficient de remplissage de la parabole incomplète**})$$

$$\text{si } \xi = \frac{x}{d} < \frac{1}{6}$$

$$d = h - d' = 3 - 0,125 = 2,875 \text{ m}$$

$$\text{d'où : } \xi = \frac{0,25}{2,875} = 0,087 < 1/6$$

$$\alpha = 0,4006$$

$$N = 0,4006 \times 3 \times 0,25 \times 19,83 = 5,958 \text{ MN}$$

* Voir chapitre 2. § 4.1. Remarques.

** Voir «Traité de Béton Armé», op. cit., chapitre 14.

$$\text{et: } M = N \left(\frac{h}{2} - \xi'x \right)$$

$$\xi' = \frac{4 - 9\xi}{4(3 - 8\xi)} \quad (\text{position du centre de gravité})$$

$$\xi' = 0,3491$$

$$M = 5,958 (1,50 - 0,3491 \times 0,25) = 8,4171 \text{ MNm}$$

4. $x = h/2 = 1,50$ par différence de deux rectangles de béton:
[3 m × 1,5 m] et [2,5 m × 1,25 m]

$$\text{Soit: } x = 150 \rightarrow \xi = 1,5/2,875 = 0,5217$$

$$\alpha = 17/21 \quad (\text{car } \xi > 3,5/13,5 = 0,2593)$$

$$\xi' = 99/238 \quad (\approx 0,4)$$

$$N_1 = \alpha b x \bar{\sigma}_{bcu} = 17/21 \times 1,5 \times 3 \times 19,83 = 72,2379$$

$$M_1 = N_1(h/2 - \xi'x) = 63,284$$

$$\bullet x = 1,50 - 0,25 = 1,25$$

$$\rightarrow \xi = 1,25/(2,875 - 0,25) = 0,4762 > 3,5/13,5$$

$$\alpha = 17/21$$

$$\xi' = 99/238$$

$$N_2 = 17/21 \times 2,5 \times 1,25 \times 19,83 = 50,1652 \text{ MN}$$

$$M_2 = N_2(h/2 - \xi'x - 0,25) = 50,1652 \left(1,5 - \frac{9}{238} \times 1,25 - 0,25 \right) = 36,6227 \text{ MNm}$$

$$\text{d'où: } N = N_1 - N_2 = 72,2379 - 50,1652 = 22,0727 \text{ MN}$$

$$M = M_1 - M_2 = 63,284 - 36,623 = 26,661 \text{ MNm}$$

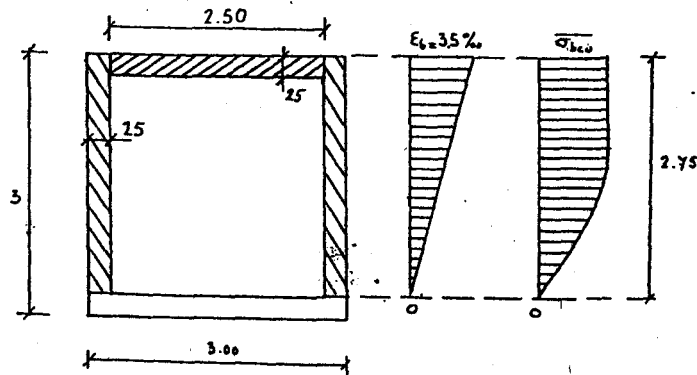


Fig. 25-54. Déformations et contraintes pour $x = 2,75$ m

5. $x = h = 2,75$ (fig. 25-54) "somme de deux rectangles:
[0,50 × 2,75] et [2,50 × 0,25]

$$N = \frac{17}{21} \times 0,50 \times 2,75 \times 19,83 + 0,25 \times 2,5 \times 19,83$$

$$= 22,0727 + 12,3938 = 34,4664 \text{ MN}$$

$$M = 22,0727 \times \left(1,50 - \frac{9}{238} \times 2,75 \right) + 12,3938 (1,50 - 0,125)$$

$$= 24,9014 \text{ MNm}$$

D'où le diagramme d'interaction (M, N) calculé sans tenir compte de la surtension des aciers (fig. 25-55).

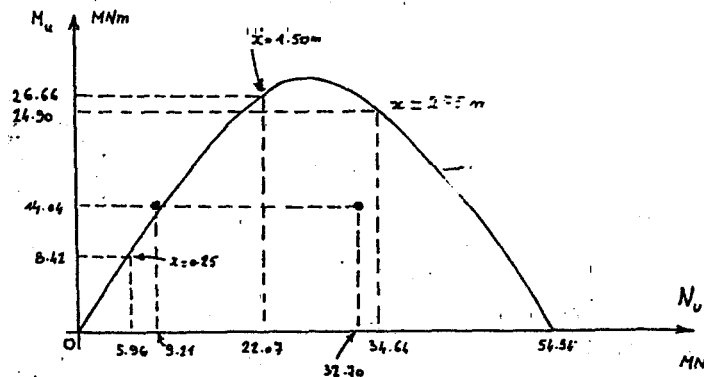


Fig. 25-55. Courbe d'interaction moment-effort normal en ELU

On constate sur le diagramme d'interaction (M, N) que pour un moment ultime extérieur de 14,04 MNm, le point représentatif, correspondant à l'effort normal maximum, est à l'intérieur du diagramme, et la section est donc suffisante. Par contre, pour l'effort normal minimum de 9,21 MN, le point représentatif est légèrement à l'extérieur de la courbe, il correspond à une position de la fibre neutre de l'ordre de 0,35 m de la fibre la plus comprimée.

Dans ce qui précède, nous avons supposé la précontrainte comme constante et n'avons pas tenu compte de la surtension des aciers dans les zones de béton tendu ou de leur détension dans les zones les plus comprimées.

La mise en précontrainte à lieu à la fin de la pose des blocs préfabriqués dont le poids est de:

$$25 \times 2,75 \times 25 \times 10^{-3} = 1,72 \text{ MN} \quad (175 \text{ tonnes})$$

Le coulage du réservoir entraîne un poids supplémentaire de

$$5,4 - 1,72 = 3,68 \text{ MN}$$

soit un raccourcissement élastique du fût et donc une diminution de l'effort de précontrainte:

$$\epsilon_b = \frac{3,68}{12\,000 \times 2,75} = 0,111\%$$

avec: $E_v = 1/3 \times 11\,000 \sqrt[3]{33} = 12\,000 \text{ MPa}$

$$E_i = 3E_v = 36\,000 \text{ MPa}$$

soit une détension des aciers de:

$$\Delta\sigma_p = 0,111/1\,000 \times 190\,000 = 21,1 \text{ MPa, ou } 2\% \text{ de la contrainte.}$$

Si l'on examine ce qui se passe à chaque étape, on a successivement:

• à la mise en tension* avec: $P = 3,81 \text{ MN}$, $A_p = 24 \times 139 = 3\,336 \text{ mm}^2$

$$\sigma_{p0} = 1\,142,1 \text{ MPa} \left(= \frac{P}{A_p} \right); \epsilon_{p1} = \frac{1\,142,1}{190\,000} = 6,011\%$$

$$\epsilon_{b1} = \text{raccourcissement différé du béton: } \frac{1,72 + 3,81}{18\,000 \times 2,75} = 0,112\% \text{ après fluage}$$

$$\text{et } \sigma_{p1} = \sigma_{p0} - \epsilon_{b1} \cdot E_p = 1\,142,1 - 0,112/1\,000 \times 190\,000 = 1\,120,8 \text{ MPa}$$

• après le coulage du réservoir

$$\epsilon_{b2} = 0,111\% = \Delta\epsilon_{p2} \text{ après fluage}$$

$$\sigma_{p2} = 1\,120,8 - 21,1 = 1\,099,7 \text{ MPa}$$

• après remplissage du réservoir

— en raccourcissement instantané:

$$\epsilon_{b3} = \frac{N_0}{E_i S} = \frac{16}{36\,000 \times 2,75} = 0,162\%$$

— en raccourcissement total après fluage (eau stockée pendant des années au maximum de 16 MN):

$$\epsilon_{b4} = 3\epsilon_{b3} = 0,485\%$$

$$\Delta\epsilon_{p4} = 0,485/1\,000 \times 190\,000 = 92,1 \text{ MPa}$$

A la vidange du réservoir, il reste une déformation différée, en supposant un retour élastique à $0,162\% = \epsilon_{b3}$, soit un raccourcissement:

$$\epsilon_{b5} = 2\epsilon_{b3} = 0,323\%$$

$$\Delta\sigma_{p5} = 61,4 \text{ MPa}$$

L'état est donc pour le béton:

— un raccourcissement: $\epsilon_{b6} = \epsilon_{b1} + \epsilon_{b2} + \epsilon_{b5} = 0,547\%$

* Par simplification de l'exercice, nous avons négligé les pertes de précontrainte.

— et pour l'acier une contrainte: $\sigma_{p6} = 1\,120,8 - 21,1 - 61,4 = 1\,038,3 \text{ MPa}$.

On peut lire sur la figure 25-56, pour une valeur de $x = 0,35 \text{ m}$, les contraintes et allongements de l'acier avec:

$$\epsilon_p = \frac{\sigma_p}{E_p} + 100 \left(\frac{\sigma_p \gamma_p}{f_{peg}} - 0,9 \right)^3 \text{ si } \sigma_p > \frac{f_{peg}}{\gamma_p} : 0,9$$

$$\epsilon_p = \frac{\sigma_p}{E_p} \text{ si } \sigma_p \leq 0,9 f_{peg}/\gamma_p$$

et les raccourcissements du béton.

Nous supposons que les 24 T 15 sont répartis en 4 câbles 6 T 15 au milieu des faces de la section.

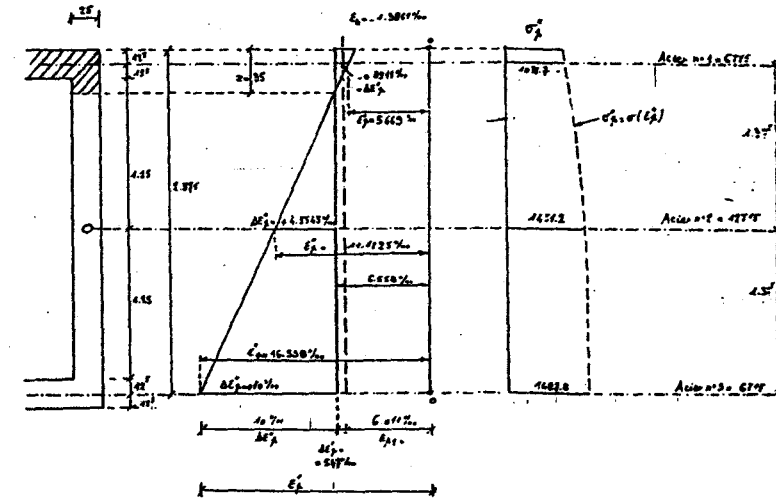


Fig. 25-56.

Pour $x = 0,40$, $\xi = \frac{x}{d} = \frac{0,4}{2,875} = 0,1391$ est inférieur à $1/6$ (car $2/(2 + 10) = 1/6$ est la limite de la parabole).

Nous utiliserons les mêmes formules pour α et ξ que pour $x = 0,25$ ci-dessus.

Pour le calcul des aciers nous aurons:

$$\epsilon_b = 10\% \frac{\xi}{1 - \xi}$$

$$\Delta\epsilon_{p3} = 10\%$$

Nous pouvons alors tracer la portion du diagramme d'interaction au voisinage de $M_u = 14,04 \text{ MNm}$ et $N_u = 9,21 \text{ Mn}$ (fig. 25-57).

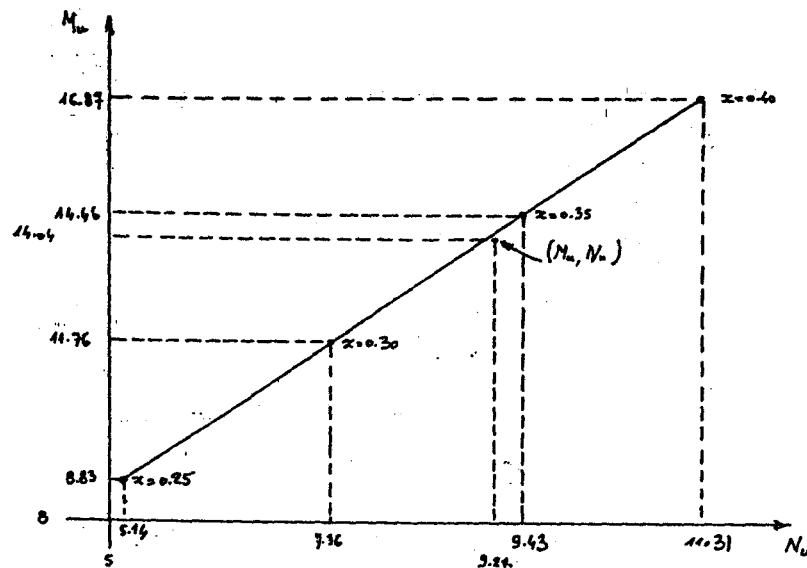


Fig. 25-57. Courbe d'interaction moment-effort normal-agrandissement

Le point représentatif se situe de peu à l'intérieur de la courbe. La précontrainte adoptée est donc suffisante :

$$P = 3,81 \text{ MN}$$

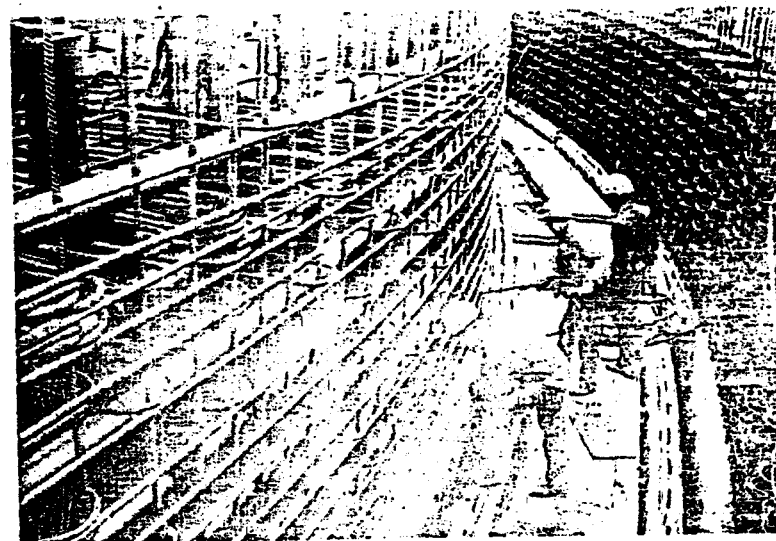
avec : 24 T 15

Sinon nous avons la possibilité :

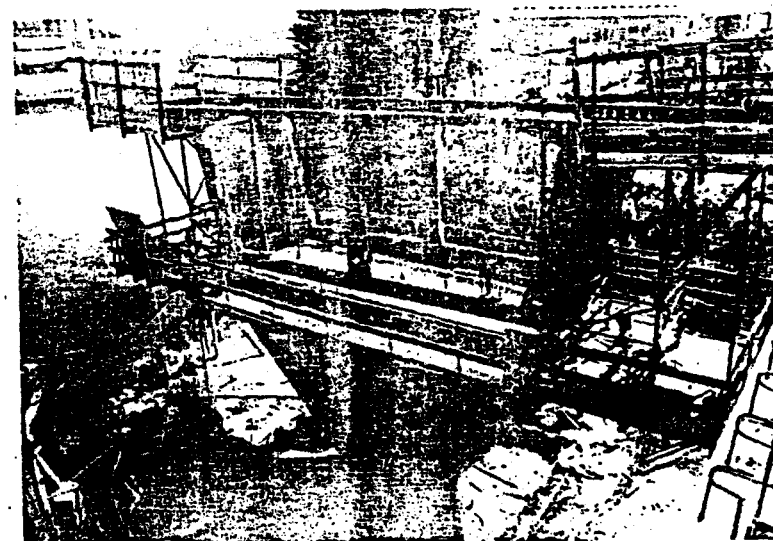
- soit d'augmenter la précontrainte,
- soit d'introduire des aciers passifs.

Il faudrait également vérifier l'ouvrage au flambement, ce qui exige des calculs longs et fastidieux que l'on recommande de traiter sur ordinateur, suivant le principe de la méthode Faessel*.

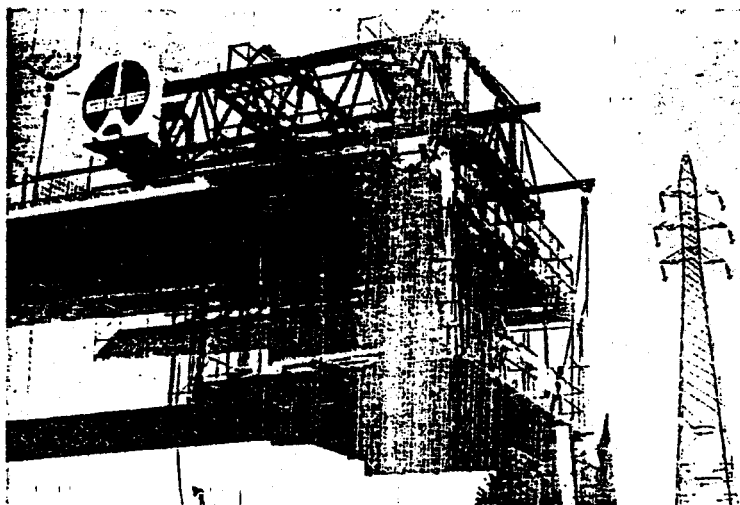
* Voir « Traité de Béton Armé », op. cit., chapitre 15.



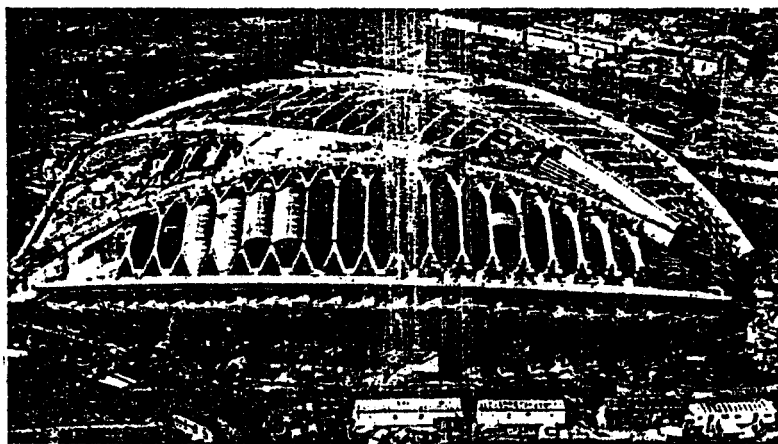
Ferrailage et câblage d'une enceinte précontrainte d'un réacteur nucléaire PWR de 1300 MW à Paluel (Seine-Maritime) (doc. Freyssinet).



Coffrage d'un voussoir sur pile (Carrefour Pompadour, 1984)



Equipage mobile pour voussoirs coulés en place. Viaduc SNCF de Nanterre sur la Seine (1977).



Piscine olympique de Montréal-Construction par éléments préfabriqués assemblés par post-tension. (doc. Freyssinet).

ANNEXE A

DÉFORMATIONS DIFFÉRÉES

Les déformations différées ont une action importante en béton précontraint, en agissant non seulement sur les déformations comme en béton armé, mais aussi sur :

- la valeur de la précontrainte en fonction du temps,
- la répartition des sollicitations dans les systèmes hyperstatiques.

Il est donc nécessaire de connaître aussi bien que possible l'évolution de ces phénomènes dans le temps et leur variation en fonction des nombreux paramètres pouvant avoir une influence sur leur comportement.

Bien que la relaxation ne soit pas une déformation, mais une chute de tension à longueur constante en fonction du temps passé, nous étudierons également ce phénomène en plus du retrait et du fluage.

1. LE RETRAIT

Le retrait est un raccourcissement du béton non chargé, contrairement au fluage qui est un raccourcissement du béton soumis à une contrainte de compression soutenue dans le temps.

Le retrait, dit retrait hydraulique, est dû principalement à une évaporation de l'eau qui avait été mise dans le béton pour améliorer le gâchage et la mise en œuvre. Il dépend d'un certain nombre de paramètres : la géométrie de la pièce, la proportion d'armatures passives longitudinales, le taux d'humidité relative de l'atmosphère en contact avec la pièce, le dosage du ciment, la quantité d'eau de gâchage...

Différentes formules ont été avancées pour essayer de transcrire l'influence des différents paramètres sur le retrait (code-modèle FIP/CEB, IP1, IP2...).

Le BPEL propose les formules suivantes :

- en fonction du temps, de l'instant t_0 à l'instant t :

$$\varepsilon_r(t_0, t) = \varepsilon_r[r(t) - r(t_0)]$$

où ε_r est la valeur finale du retrait et $r(t)$ une fonction du temps t variant de 0 à 1 lorsque le temps varie de zéro à l'infini, avec :

$$r(t) = \frac{t}{t + 9r_m}$$

où t représente l'âge du béton exprimé en jours et r_m le rayon moyen de l'élément étudié en cm (fig. A1, A2, A3).

Pour la détermination du rayon moyen r_m , on pourra s'inspirer des figures A1 et A2. Pour une poutre-caisson, on considère que la face intérieure du caisson n'est pas au contact de l'air renouvelé, le rayon moyen est égal à l'épaisseur de l'âme par exemple.

La fonction $r(t)$ a l'allure de la courbe de la figure A3.

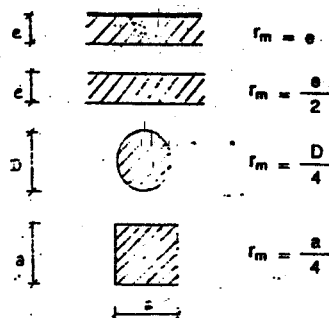


Fig. A1. Rayon moyen — Le rayon moyen est égal au rapport de la section de la pièce au périmètre extérieur au contact de l'air

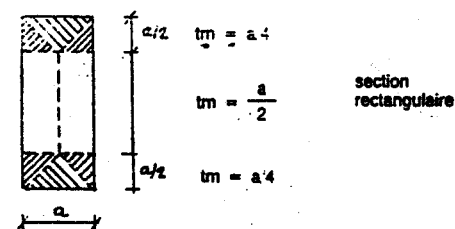
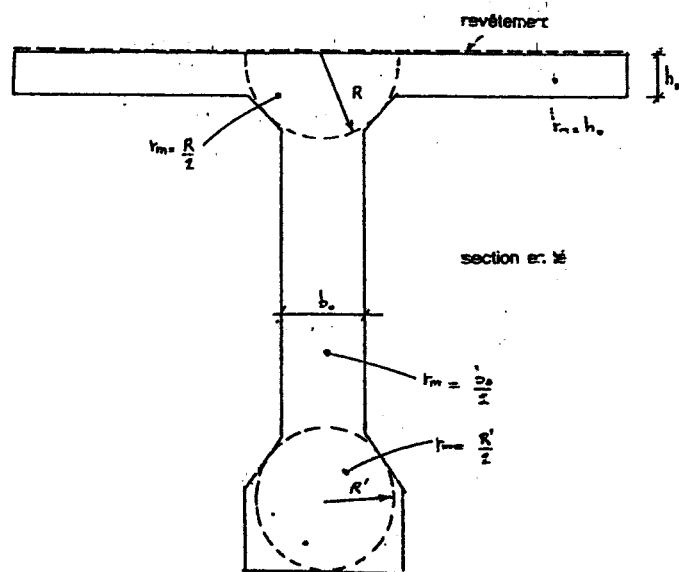


Fig. A2. Rayon moyen de section rectangulaire ou en T

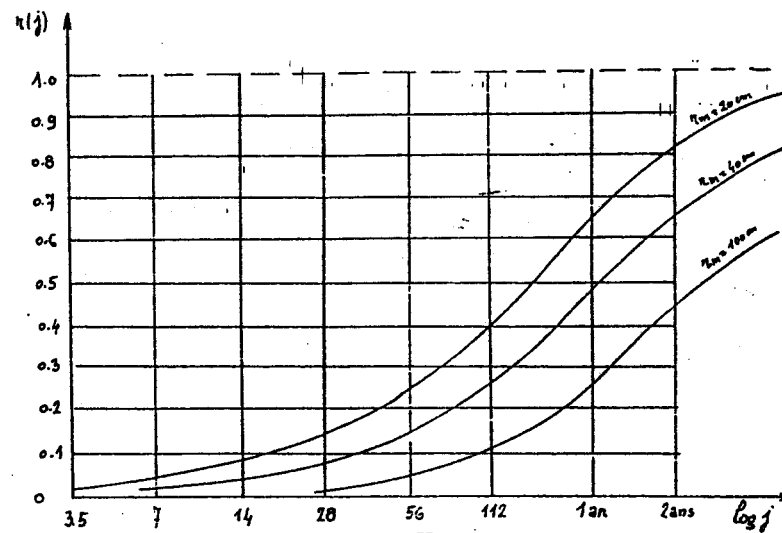


Fig. A3. Evolution du retrait dans le temps

• Calcul de ε_r (valable pour un béton à base de ciment Portland) :

$$\varepsilon_r = k_s \cdot \varepsilon_o$$

Calcul de k_s , fonction du pourcentage d'armatures adhérentes longitudinales passives ou de prétension et qui gênent le retrait :

$$k_s = \frac{1}{1 + 20\rho_s}$$

avec : $\rho_s = \frac{A_s}{B}$

B = section totale du béton

A_s = section d'armatures longitudinales adhérentes.

- Calcul de ε_a : fonction de l'humidité relative de l'atmosphère :

$$\varepsilon_a = 60 \cdot 10^{-6} \quad \text{dans l'eau}$$

$$\varepsilon_a = (100 - \rho_h) \left(6 + \frac{80}{10 + 3r_m} \right) \cdot 10^{-6} \quad \text{dans l'air}$$

avec : ρ_h = hygrométrie ambiante moyenne (0 à 100)

r_m = rayon moyen en cm (voir ci-dessus).

A défaut d'informations plus précises, on pourra prendre :

$\rho_h = 55$ dans le quart Sud-Est de la France,

$\rho_h = 70$ dans le reste de la France,

pour des dosages en eau de 180 litres par m^3 et 400 kg de ciment par m^3 .

2. LE FLUAGE

Le fluage désigne la déformation lente du béton soumis à une contrainte soutenue dans le temps. L'ordre de grandeur de cette déformation est de deux fois la déformation instantanée.

Les paramètres entrant en ligne de compte sont :

- le temps t au moment du calcul du fluage,
- le temps, âge du béton lors de la mise en charge à la contrainte σ_i ,
- la proportion d'armatures longitudinales qui gênent le fluage,
- les dimensions de la pièce par son rayon moyen r_m en cm,
- l'humidité relative ambiante moyenne ρ_h .

$$\varepsilon_a(t) = \varepsilon_{ic1} \cdot K_R(t_1) \cdot f(t - t_1)$$

où ε_{ic1} représente la déformation conventionnelle instantanée produite par la contrainte σ_1 :

$\varepsilon_{ic1} = \frac{\sigma_1}{E_{128}}$ pour un module linéaire du diagramme contrainte-déformation (valable pour $\sigma_1 \leq 0,50 f_{c28}$),

$$\varepsilon_{ic1} = \frac{\sigma_1}{E_{128}} (1 + k_i) \quad \text{pour } 0,5 f_{c28} < \sigma_1 \leq 0,66 f_{c28}$$

$$k_i = 4 \left(\frac{\sigma_1}{f_{c28}} - 0,5 \right)^2$$

- Calcul de $K_R(t)$

$$K_R(t) = k_s [k_e + k_c \cdot k(t)]$$

avec : $k_s = \frac{1}{1 + 20\rho_s}$ déjà vu à propos du retrait

$$k_e = 0,4$$

$$k_c = \frac{120 - \rho_h}{30} + \frac{2}{3} \cdot \frac{100 - \rho_h}{20 + r_m}$$

ρ_h = humidité relative, 0 à 100 (dans l'eau $\rho_h = 100$)

r_m = rayon moyen de la pièce en cm

$$k(t) = \frac{100}{100 + t}$$

t = Age du béton exprimé en jours, compté à partir du jour de fabrication.

- Calcul de $f(t)$

$$f(t) = \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t} + 5\sqrt{r_m}}$$

avec : t = durée d'application du chargement en jours.

2.1. Succession d'accroissements de contrainte

Il est courant, pour un élément en béton précontraint d'être soumis à une succession de chargements successifs tels : le coulage de deuxième phase du tablier de jonction entre les poutres préfabriquées, le poids des superstructures, les charges d'exploitation variables pour un pont, ou bien le coulage des chapes, la mise en place des revêtements et des cloisons et les charges d'exploitation pour un bâtiment.

Pour déterminer la déformation de fluage au temps t , on peut admettre de superposer les effets de chaque variation de contrainte :

$$\varepsilon_a(t) = \sum_{j=1}^n \Delta \varepsilon_{icj} \cdot K_R(t_j) \cdot f(t - t_j) \quad \text{pour } t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_j < t$$

où : $\Delta \varepsilon_{icj}$ est la variation de déformation conventionnelle instantanée correspondant à la variation de contrainte $\Delta \sigma_j$ (fig. A4), appliquée au temps t_j , pourvu que la contrainte finale σ_j reste inférieure à $0,7 f_{c_j}$ et que les variations $\Delta \sigma_j$ soient toutes positives (fig. A5).

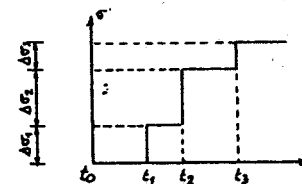


Fig. A4. Accroissement de contrainte dans le temps

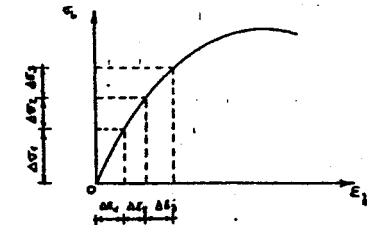


Fig. A5. Diagramme contrainte-déformation du béton

2.2. Diminution de contrainte — Retour de fluage

Il n'est pas rare qu'un ouvrage soit soumis à des cycles de chargements et de déchargements (entrepôts, neige...). Le fluage est un phénomène qui n'est que partiellement réversible ; ce retour en arrière incomplet s'appelle retour de fluage.

Ainsi, pour le chargement de la figure A6.

Une diminution de contrainte $\Delta\sigma_2$ négative à l'instant t_2 est telle que :

$$\sigma_2 = \sigma_1 + \Delta\sigma_2.$$

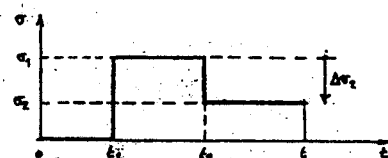


Fig. A6. Diminution de contrainte dans le temps

On a donc :

— une déformation de fluage de t_1 à t due à σ_2

$$\varepsilon_{n1}(t) = \varepsilon_{ic2} \cdot K_n(t_1) \cdot f(t - t_1)$$

où : ε_{ic2} est fonction de σ_2 , par exemple : $\varepsilon_{ic2} = \frac{\sigma_2}{E_{128}}$ en modèle linéaire ;

— une déformation de fluage de t_1 à t_2 due à la différence $\sigma_1 - \sigma_2 = -\Delta\sigma_2$ (positive) :

$$\varepsilon_{n2} = (\varepsilon_{ic1} - \varepsilon_{ic2}) \cdot K_n(t_1) \cdot f(t_2 - t_1)$$

— une déformation de « retour de fluage » due à l'application de la contrainte $\sigma_1 - \sigma_2 = -\Delta\sigma_2$ qui avait été appliquée entre t_1 et t_2 , retour de fluage agissant entre t_2 et t que l'on peut évaluer par la formule :

$$\varepsilon_{n3}(t) = \Delta\varepsilon_{ic2} \cdot K_n(t_1) \cdot \frac{f(t_2 - t_1)}{k_r(t_2 - t_1)} \cdot g(t - t_2)$$

avec les nouvelles fonctions :

$$k_r(t) = \begin{cases} 4\sqrt{\log t} & \text{si } t \geq 2 \text{ jours} \\ 1 + 0,6 t & \text{si } t < 2 \text{ jours} \end{cases}$$

$$\text{et : } g(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + t}}$$

La déformation totale de fluage vaut alors :

$$\begin{aligned} \varepsilon_n(t) = & \varepsilon_{ic1} \cdot K_n(t_1) \cdot f(t_2 - t_1) \\ & + \varepsilon_{ic2} \cdot K_n(t_1) \cdot [f(t - t_1) - f(t_2 - t_1)] \\ & + (\varepsilon_{ic1} - \varepsilon_{ic2}) \cdot K_n(t_2) \cdot \frac{f(t_2 - t_1)}{k_r(t_2 - t_1)} \cdot g(t - t_2) \end{aligned}$$

2.3. Rechargement

Dans le cas d'un rechargement $\Delta\sigma_3$ à l'instant t_3 (fig. A7), on admet de superposer au calcul précédent la déformation de fluage de t_3 à t .

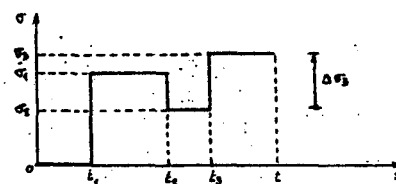


Fig. A7. Diminution de contrainte et rechargement

2.4. Exemple numérique

2.4.1. Données

$$f_{c28} = 35 \text{ MPa}, \rho_s = \frac{A_s}{B} = 0,007, \rho_h = 60\% \text{ H.R.}$$

Supposons les chargements successifs de la figure A8.

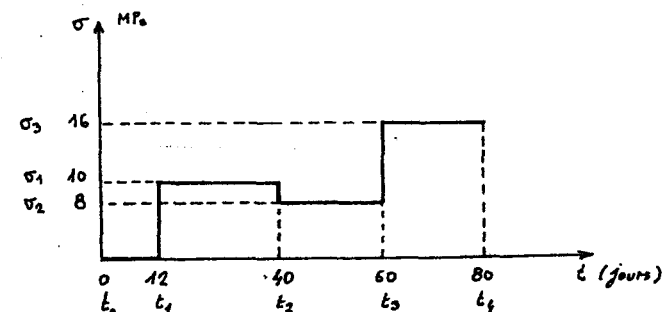


Fig. A8. Diminution de contrainte et rechargement — Exemple numérique

2.4.2. Fluage de t_1 à t_2

$$\varepsilon_{ic1} = \frac{\sigma_1}{E_1} \text{ car } \sigma_2 = 10 < 0,5f_{c28} = 17,5 \text{ MPa.}$$

E_1 ayant la valeur comprise entre E_{112} et E_{128} :

$$E_{128} = 11\,000 \sqrt[3]{35} = 35\,980 \text{ MPa}$$

$$f_{c12} = 0,685f_{c28} \cdot \log(13) = 26,71 \text{ MPa}$$

$E_{112} = 11\,000 \sqrt[3]{f_{c12}} = 32\,880 \text{ MPa}$, en valeur moyenne arithmétique sur 5 valeurs calculées de E_{ij} , on trouve $E_1 = 34\,630 \text{ MPa}$;

$$\varepsilon_{ic1} = \frac{10}{34\,630} = 0,289\text{‰}$$

$$K_n(t_1) = k_s \cdot [k_e + k_r \cdot k(t_1)]$$

$$k_s = \frac{1}{1 + 20 \times 0,007} = 0,8772$$

$$k_e = 0,4$$

$$k_c = \frac{120 - 60}{30} + \frac{2}{3} \cdot \frac{100 - 60}{20 + 20} = 2,667$$

$$k(t_1) = \frac{100}{100 + 12} = 0,8929$$

$$\text{d'où: } K_n(t_1) = 0,8772 [0,4 + 2,667 \times 0,8929] = 2,440$$

$$f(t_2 - t_1) = \frac{\sqrt{40 - 12}}{\sqrt{40 - 12} + 5\sqrt{20}} = 0,1914$$

$$\text{soit: } \varepsilon_1 = \frac{0,289}{1\,000} \times 2,440 \times 0,1914 = 0,135/1\,000$$

2.4.3. Fluage de t_2 à t_3

$$\text{avec: } \varepsilon_{ic2} = \frac{8}{E_{ic2}} = \frac{8}{35\,990} = 0,228/1\,000$$

$$K_n(t_1) = 2,440$$

$$f(t_3 - t_1) = f(48) = 0,2366$$

$$f(t_2 - t_1) = f(28) = 0,1914$$

$$\text{d'où: } \varepsilon_2 = \frac{0,2228}{1\,000} \times 2,44 \times (0,2366 - 0,1914) = 0,0246/1\,000$$

2.4.4. Retour de fluage de σ_1 à σ_2 sur t_2 à t_3

$$k_r(t_2 - t_1) = k_r(28) = 4 \sqrt{\log 28} = 4,812$$

$$g(t_3 - t_2) = g(20) = 1 - \frac{1}{\sqrt{21}} = 0,7818$$

$$\text{d'où: } \varepsilon_3 = \frac{0,289 - 0,2228}{1\,000} \times 2,44 \times \frac{0,1914}{4,812} \times 0,7818 = 0,005/1\,000$$

et la déformation totale de fluage à l'instant t_3 vaut:

$$\varepsilon'_3 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = (0,1350 + 0,0246 + 0,0050)/1\,000 = 0,1646\text{‰}$$

2.4.5. Calcul à l'instant t

$$\varepsilon = \varepsilon'_3 + \varepsilon_4$$

$$\text{avec: } \varepsilon_4 = (\varepsilon_{ic3} - \varepsilon_{ic2}) \cdot K_n(t_3) \cdot f(t_4 - t_3)$$

$$k_s = 0,8772$$

$$k_e = 0,4$$

$$k_c = \frac{2,667}{100}$$

$$k(t_3) = \frac{100}{100 + 80} = 0,5555$$

$$K_n(t_3) = 0,8772(0,4 + 2,667 \times 0,5555) = 1,650$$

$$f(20) = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{20} + 5\sqrt{20}} = 1,667$$

$$\varepsilon_{ic3} = \frac{16}{35\,980}$$

$$\varepsilon_{ic2} = \frac{-8}{35\,980}$$

$$\text{d'où: } \varepsilon_4 = \frac{16 - 8}{35\,980} \times 1,650 \times 0,1667 = 0,0611/1\,000$$

$$\text{et: } \varepsilon_{\text{final}} = \frac{0,1646 + 0,0611}{1\,000} = 0,2257\text{‰}$$

3. LA RELAXATION

On a vu, pour le calcul des pertes, une formule simple de détermination des pertes de relaxation:

$$\Delta\sigma_p = \frac{6}{100} \cdot \rho_{1\,000} \left(\frac{\sigma_{pi}(x)}{f_{prg}} - \mu_0 \right) \sigma_{pi}(x) \quad (A.1)$$

Si l'on désire connaître l'évolution dans le temps de la relaxation, on pourra utiliser la méthode de calcul suivante:

$$\Delta\sigma_p(x,t) = k_1 \cdot \rho_{1\,000} \left(\frac{t}{1\,000} \right)^{\mu_1 - \mu_2} \cdot e^{-\frac{10\mu_1 - 7,5}{k_2}} \cdot \sigma_{pi}(x) \quad (A.2)$$

avec: $\mu = \frac{\sigma_{pi}(x)}{f_{prg}}$, t en heures

$$k_1 = 6 \cdot 10^{-3} \text{ pour } \rho_{1\,000} \leq 2,5$$

$$= 8 \cdot 10^{-3} \text{ pour } \rho_{1\,000} > 2,5$$

$$k_2 = 1,1 \text{ pour } \rho_{1\,000} \leq 2,5 \text{ (acier TBR)}$$

$$= 1,5 \text{ pour } \rho_{1\,000} \geq 8 \text{ (acier RN)}$$

$$= 1,25 \text{ pour } 2,5 < \rho_{1\,000} < 8$$

La formule simplifiée (A.1) correspond à un temps t de l'ordre de $5 \cdot 10^5$ heures (11 ans et 152 jours).

3.1. Variation de la tension de l'armature avec le temps

Lorsque la variation de tension de l'acier en fonction du temps est connue, on peut déterminer, pour chaque étape, la relaxation correspondante (perte de tension) $\Delta\sigma_i$ (fig. A9).

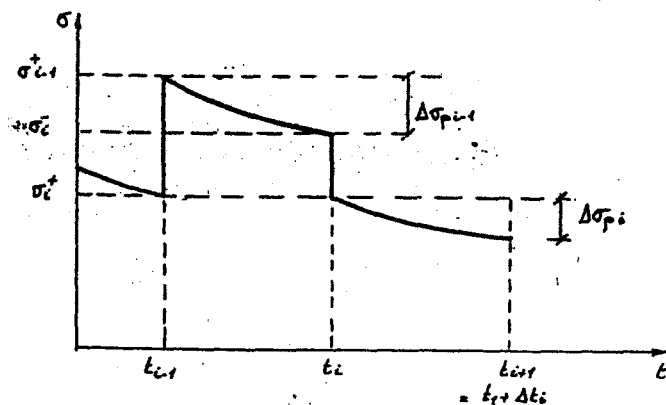


Fig. A9. Variation de tension dans le temps

En désignant par σ_i^+ et σ_i^- les tensions de l'armature avant et après déformation instantanée à l'instant t_i , $\sum_{j=1}^{i-1} \Delta\sigma_{pj}$ la somme des relaxations effectuées pendant les phases précédentes, la méthode consiste à calculer le temps fictif t_e pour passer, par relaxation, de $\sigma_i^+ + \sum_{j=1}^{i-1} \Delta\sigma_{pj}$ à σ_i^- , donc à résoudre en t_e l'équation (A.2) qui donne les mêmes pertes $\sum_{j=1}^{i-1} \Delta\sigma_{pj}$ soit :

$$k_1 \rho_{1000} \left(\frac{t_e}{1000} \right)^{3(1-\mu)/4} \cdot e^{-\frac{10\mu-7.5}{t_e}} \cdot \left(\sigma_i^+ + \sum_{j=1}^{i-1} \Delta\sigma_{pj} \right) = \sum_{j=1}^{i-1} \Delta\sigma_{pj}$$

$$\text{avec : } \mu = \frac{\sigma_i^+ + \sum_{j=1}^{i-1} \Delta\sigma_{pj}}{f_{prg}}$$

d'où la valeur de t_e et le calcul de la relaxation

$$\Delta\sigma_i = k_1 \rho_{1000} \left(\frac{t_e + \Delta t_i}{1000} \right)^{3(1-\mu)/4} \cdot e^{-\frac{10\mu-7.5}{t_e}} \cdot \left(\sigma_i^+ + \sum_{j=1}^{i-1} \Delta\sigma_{pj} \right) - \sum_{j=1}^{i-1} \Delta\sigma_{pj}$$

3.2. Concomitance de la relaxation, du retrait et du fluage

Dans le chapitre du calcul des pertes, nous avons vu une réduction de 1/6 de la relaxation pour tenir compte de l'interaction des trois pertes entre elles.

Si l'on désire plus de précision, on pourra utiliser la méthode suivante pour l'intervalle de temps (t_i, t_{i+1}) :

$$\Delta\sigma = \Delta\sigma_{pj} + \Delta\sigma_{ri} - \Delta\sigma_{fi} = \frac{2 \cdot \Delta\sigma_{pj} (\Delta\sigma_{ri} + \Delta\sigma_{fi})}{\sigma_i^+}$$

où : σ_i^+ est la contrainte dans les armatures de précontrainte au début de la phase considérée ;

$\Delta\sigma_{pj}$ est la perte par relaxation qui s'effectuerait dans l'intervalle de temps (t_i, t_{i+1}) , si l'allongement des armatures était constant dans cet intervalle de temps ;

$\Delta\sigma_{ri} = E_p \cdot k_r \cdot \varepsilon_c [r(t_{i+1}) - r(t_i)]$ est la perte due au retrait dans l'intervalle (t_i, t_{i+1}) ;

$\Delta\sigma_{fi} = E_p \cdot \Delta\varepsilon_{fi}$ est la perte due au fluage dans l'intervalle (t_i, t_{i+1}) , sous contrainte constante, correspondant à la fin de la phase considérée, au niveau du centre de gravité des armatures.

ANNEXE B

INTÉGRALES DE MOHR

Pour le calcul d'une rotation ou d'une flèche dues à un moment ou à un effort tranchant, on pourra avantageusement utiliser la méthode des intégrales de Mohr avec la formule :

$$\text{flèche ou rotation} = k \cdot \frac{\ell}{EI} \cdot \bar{m} \cdot \bar{M} \\ \left(\text{ou } \frac{\ell}{GS_x} \right)$$

où : ℓ est la portée de la travée étudiée,

I son moment d'inertie,

S_x sa section réduite d'effort tranchant,

E le module d'Young, et G le module transversal,

$\bar{M}$ la valeur maximale du moment (ou de l'effort tranchant) dû aux charges de calcul,

$\bar{m}$ la valeur maximale du moment (ou de l'effort tranchant) dû à un couple unité pour une rotation ou à une charge unité pour une flèche,

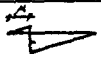
k est la surface obtenue en multipliant les deux diagrammes correspondant aux courbes de m et M (de valeurs maximum $\bar{m}$ et $\bar{M}$), pour une hauteur et une longueur unité.

1. EXEMPLE 1

Calcul de la rotation sur appui due à une charge répartie uniforme d'une travée isostatique (fig. B 1).

Le coefficient k peut être lu sur le tableau ci-après pour une parabole dans la première colonne et un triangle dans la première rangée :

$$k = 1/3 \text{ d'où : } \omega = \frac{1}{3} \cdot \frac{\ell}{EI} \cdot 1 \cdot \frac{p\ell^2}{8} = \frac{p\ell^2}{24EI}$$

						
$\mu = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$\mu < \frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{5}{12}$	$\frac{7}{48}$	$\frac{7}{48}$
$\mu > \frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{5}{12}$	$\frac{7}{48}$	$\frac{7}{48}$
$\lambda < \mu$	$\frac{2-\lambda}{6}$	$\frac{1+\lambda}{6}$	$\frac{1-2\lambda}{6}$	$\frac{1+\lambda-\lambda^2}{3}$	$\frac{\lambda^2-3\lambda+3}{12}$	$\frac{1-\lambda+\lambda^2}{12}$
$\lambda > \mu$	$\frac{2-\lambda}{6}$	$\frac{1+\lambda}{6}$	$\frac{1-2\lambda}{6}$	$\frac{1+\lambda-\lambda^2}{3}$	$\frac{\lambda^2-3\lambda+3}{12}$	$\frac{1-\lambda+\lambda^2}{12}$
$\mu < \frac{1}{2}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{24}$	$-\frac{1}{24}$
$\mu > \frac{1}{2}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{24}$	$-\frac{1}{24}$
$\lambda < \mu$	$\frac{3\lambda^2+3\mu^2-6\mu+2}{6}$	$\frac{\lambda^2}{2} - \frac{1}{3}$	$\frac{\lambda^2}{2} - \frac{1}{6}$	$\frac{6\lambda^2-4\lambda^3-1}{3}$	$\frac{\lambda^3-\lambda^2-\lambda-1}{4}$	$\frac{4\lambda^3-1}{12}$
$\lambda > \mu$	$\frac{3\lambda^2+3\mu^2-6\mu+2}{6}$	$\frac{\lambda^2}{2} - \frac{1}{3}$	$\frac{\lambda^2}{2} - \frac{1}{6}$	$\frac{6\lambda^2-4\lambda^3-1}{3}$	$\frac{\lambda^3-\lambda^2-\lambda-1}{4}$	$\frac{4\lambda^3-1}{12}$
$\frac{6\mu-3\mu^2-2}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$
$\frac{3\mu^2-1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$
$\mu - \mu^2 + \frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$
$\frac{6\mu^2-4\mu^3-2}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$
$\frac{\mu^3-\mu^2+\mu-\frac{1}{4}}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{15}$
$\frac{4\mu^3-1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{5}$
$\frac{1}{2} \left(\mu - \mu^2 - \frac{1}{4} \right)$	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{7}{60}$	$-\frac{2}{15}$
$\frac{1}{2} \left(\mu^3 - 3\mu^2 + 2\mu - \frac{1}{4} \right)$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{2}{15}$	$-\frac{7}{60}$
$\frac{\sqrt{3}}{40} (15\mu^4 - 60\mu^3 + 60\mu^2 - 8)$	$\frac{\sqrt{3}}{5}$	$\frac{7\sqrt{3}}{40}$	$\frac{\sqrt{3}}{40}$	$\frac{3\sqrt{3}}{10}$	$\frac{\sqrt{3}}{8}$	$\frac{\sqrt{3}}{10}$
$\frac{\sqrt{3}}{40} (30\mu^2 - 15\mu^4 - 7)$	$\frac{7\sqrt{3}}{40}$	$\frac{\sqrt{3}}{5}$	$-\frac{\sqrt{3}}{40}$	$\frac{3\sqrt{3}}{10}$	$\frac{\sqrt{3}}{10}$	$\frac{\sqrt{3}}{8}$
$\lambda < \mu$	$\frac{\lambda^2}{2} (1-\lambda)$	$\frac{\lambda}{2} (1-\lambda)$	$\lambda(1-\lambda)$	$\frac{2}{3} \lambda(1-\lambda) (2\lambda-1)$	$\frac{\lambda(1-\lambda)(2-\lambda)}{3}$	$\frac{\lambda}{3} (1-\lambda^2)$
$\lambda > \mu$	$\frac{\lambda^2}{2} (1-\lambda)$	$\frac{\lambda}{2} (1-\lambda)$	$\lambda(1-\lambda)$	$\frac{2}{3} \lambda(1-\lambda) (2\lambda-1)$	$\frac{\lambda(1-\lambda)(2-\lambda)}{3}$	$\frac{\lambda}{3} (1-\lambda^2)$
$\mu < \frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$
$\mu > \frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$

* cubique = moment d'un chargement réparti triangulaire = $px(1-x^2)l^3/6$, max. = $\sqrt{3}/27 px^3$
pour $x = \sqrt{3}/3$

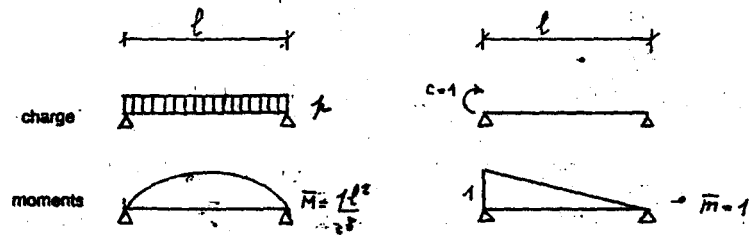


Fig. B 1. Charge répartie uniforme
Calcul de la rotation sur appui

2. EXEMPLE 2

Calcul de la flèche d'effort tranchant à l'abscisse $0,4 \ell$ d'une travée isostatique soumise à une charge répartie uniforme (fig. B 2).

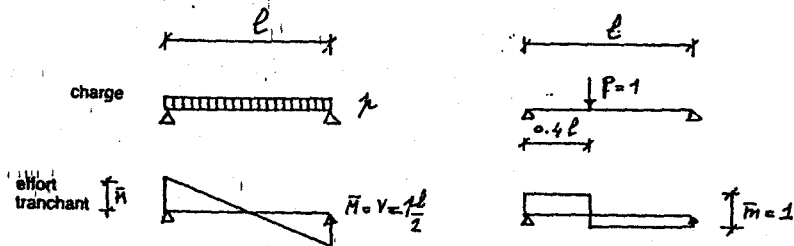


Fig. B 2. Charge répartie uniforme
Flèche due à l'effort tranchant

Le coefficient k est lu sur le tableau ci-après pour l'avant-dernier schéma de la première colonne avec le schéma de la neuvième colonne:

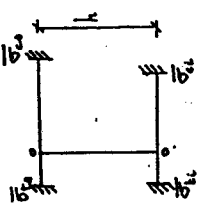
$$k = \lambda(1 - \lambda) \text{ d'où: } f = \lambda(1 - \lambda) \cdot \frac{\ell}{GS_1} \cdot 1 \cdot \frac{pl}{2} = \lambda(1 - \lambda) \frac{p\ell^2}{2GS_1}$$

$$\text{pour } \lambda = 0,4, \text{ on obtient: } f = 0,12 \frac{p\ell^2}{GS_1}$$

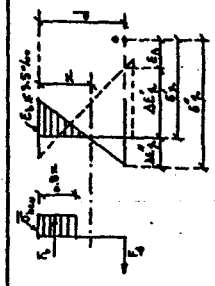
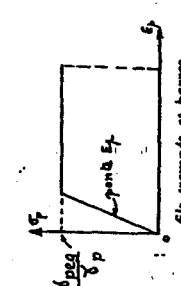
ANNEXE C

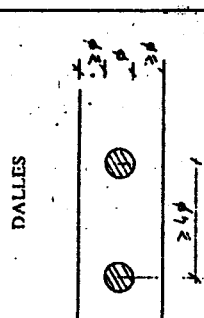
FORMULAIRE DE CALCUL DES ÉLÉMENTS FLÉCHIS

Béton précontraint BPEL

Unités	Efforts tranchants en MN, moments en MNm, contraintes en MPa Longueurs en m, aciers en cm ² ou en mm ² M_{max} = moment maximum, M_{min} = moment minimum, ΔM = variation du moment	Article BPEL	Pages du cours BP
ELS	BÉTON $f_{tj} = 0,06 f_{tj} + 0,6$ $E_{tj} = 11\,000 \sqrt{f_{tj}}$ $f_{tj} = 0,685 f_{ca} \log(j+1) \geq f_{ca}$ — Contraintes admissibles • compression σ_{cs} σ_{ci} • traction σ_{ts} σ_{ti}  ACIER $E_p = 200\,000$ MPa fils et barres $\sigma_{ps} = \text{Min } (0,80 f_{ps}; 0,90 f_{ps})$ $\sigma_{p1} = 1,02 \sigma_{ps} - 0,8 \Delta \sigma_p \rightarrow P_1 = A_p \sigma_{p1}$ $\sigma_{p2} = 0,98 \sigma_{ps} - 1,2 \Delta \sigma_p \rightarrow P_2 = A_p \sigma_{p2}$ Contraintes admissibles en classe III: $\sigma_p - \sigma_p \leq 0,10 f_{ps}$: combinaisons rares ou en construction section d'enrobage en combinaisons rares ou en construction section d'enrobage en combinaisons fréquentes $\sigma_s = \text{Min } (2/3 f_{tj}; 150 \text{ N})$ $\sigma_s = 60 \text{ MPa}$	Annexe 12 2.1.3. 2.1.4.2. 2.1.2. 6.1.2.1. 6.1.2.2. 6.1.2.3. 6.1.2.4. 2.2.5. 3.2.2. 3.3.1. 4.1.3.1. 6.1.2.4.	54-57-59 126-133-134 127-133-134 70 145 166 167 128-133-134

Unités	SOLLICITATIONS	Article	Pages du cours BP
FLEXION	$M = M_s + M_d$ $V_{red} = V_s + V_d - P \sin \alpha$ à l'abscisse $h/2$	4.6. 7.1.	110 à 117 270 à 273
	CONTRAINTES $\sigma_s = \frac{P}{S} \pm \frac{P e_s}{I_v} \pm \frac{M_s}{I_v} \pm \frac{M_d}{I_v}$	5.2.	204
	PRÉCONTRAINTÉ (classe I et II) $P_{max} = \frac{\Delta M}{ph} + \frac{S}{h} (v \sigma_{ti} + v' \sigma_{ts})$ (sous-critique) $P_{sur} = \frac{M_{max} + \rho S v \sigma_{ti}}{pv + v' - d'}$ (sur-critique)		222 224
	EXCENTRICITÉ $e_{s(rem)} = pv - \frac{M_{max} + \rho S v \sigma_{ti}}{p} = -pv' - \frac{M_{min} + \rho S v' \sigma_{ts}}{p}$ $e_{s(sur)} = -(v' - d')$		222 223
	INERTIE $(I_v)_{min} = \frac{\Delta M}{\Delta \sigma_s}$ $(I_v)_{sur} = \frac{P rh}{\sigma_{cs} + \frac{v}{v'} \sigma_{ti}}$ $I_v' = \frac{\Delta M}{\Delta \sigma_i}$		222 224
EFFORT TRANCHANT	ACIER PASSIF (classe II et III) $A_s \geq \frac{D_1}{1\,000} + \frac{N_{br}}{f_c} \cdot \frac{f_{tj}}{\sigma_{ti}}$	6.1.3.2. 5.3.	247
	RENDEMENT: ρ $\square$ 1/3 Γ 0,4 à 0,5		228 à 239
	• bras de levier $z = I_v / V$ • largeur nette $b_n = b_o - \frac{1}{2} \Sigma \phi_s$ $\tau = \frac{V_{red}}{b_o z}$	7.2.1.	274 277 304

	Cisaillement admissible $\bar{\tau} = 0,4 f_{tj} (f_{tj} + \sigma_a)$ si $\sigma_a = \frac{P}{S} \leq 0,4 f_{tj}$		7.22. 7.23.	288	
ELU FLEXION	BÉTON $\bar{\sigma}_{bm} = \frac{0,85 f_{cm}}{\gamma_b} \quad \gamma_b = 1,5$		6.3.3.1.	259 261	
	ACIER $\gamma_p = 1,15$ $\epsilon_p = \frac{P}{A_p E_p}$ $\sigma_p = \frac{P}{A_p} + S \sigma_{bm}$		4.5.	111 à 117 264	
σ_{bm} = contrainte du béton au niveau du câble en combinaison quasi-permanente $\epsilon_p = f(\sigma_p)$ $\Delta \epsilon_p = \text{Min} \left(10 ; 3,5 \frac{1 - \frac{\epsilon_p}{\epsilon_{pu}}}{\frac{\epsilon_p}{\epsilon_{pu}}} \right) \%$ $\sigma_p = f(\epsilon_p)$			Sollicitations $M_u = 1,35 M_g + 1,5 M_q$ $\beta = \frac{M_q}{M_g + M_q}$ en  $\xi = \frac{x}{d} = 1,25 (1 - \sqrt{1 - 2\beta})$ Vérifier : $A_p \sigma_p \geq F_b$		
EFFORT TRANCHANT			Annexe 2	71	
	SOLLICITATIONS $V_{red,u} = 1,35 V_g + 1,5 V_q - P_a \sin \alpha$; $\sigma_{sm} = \frac{P_a}{S}$ à l'abscisse h/2 ou $V_g - P_a \sin \alpha$ CISAILEMENT $\tau_u = \frac{V_{red,u}}{b_w z}$ $\rightarrow$ Ig 20. $\tau_u = \frac{2 \tau_{su}}{\sigma_{sm}} \rightarrow \beta_u \leq 30^\circ$		7.1. 7.31.	270 à 273 274-291	

	$\sigma_{sm} \leq \frac{0,85 f_{tj}}{1,5 \gamma_b} \rightarrow \tau_u \leq \frac{0,85 f_{tj}}{3 \gamma_b} \sin 2 \beta_u$	7.33.	294-295
	si $\beta_u \geq 30^\circ \rightarrow \tau_u \leq \frac{f_{tj}}{6}$	7.32	293
ACIERS TRANSVERSAUX VERTICAUX PASSIFS		7.322.	294
	$\frac{A_t}{s_t} = \frac{(f_{tj} - f_{yd}) b_w \gamma_b \lg \beta_u}{f_e}$ si reprise de coulage : $\beta_u = 45^\circ$ $f_{tj}/3 = 0$ % minimum : $\frac{A_t}{s_t} \geq \frac{0,6 b_w \gamma_b}{f_e}$ espacement maximum : $s_t = \text{Min} (0,8 h ; 3 b_w ; 1 \text{ m})$	7.322.	294
Dispositions constructives pour $\phi \geq 5 \text{ cm}$		10.2.2.	366 à 368

INDEX

- ABOUT: 319.
 ACIER (voir armature): 103.
 ACIER ACTIF: 67, 127, 130, 259, 293.
 ACIER PASSIF: 67, 127, 131, 169, 243, 247, 259, 293.
 ACTION: 17, 30, 32, 109.
 ACTION ACCIDENTELLE: 34, 37, 133.
 ACTION PERMANENTE: 33, 127, 129.
 ACTION VARIABLE: 34.
 ADHÉRENCE: 74, 86, 137, 139, 140, 291.
 ADHÉRENCE D'ENTRAÎNEMENT: 141, 143.
 ADJUVANTS: 53, 64.
 ANCRAGE: 20, 319, 327, 328.
 ANCRAGE ACTIF: 104.
 ANCRAGE PASSIF: 104.
 ARMATURE (voir acier): 21.
 ARMATURE ACTIVE: 269, 294.
 ARMATURE DE PEAU: 257.
 ARMATURE LONGITUDINALE: 314, 328.
 ARMATURE PASSIVE: 75, 82, 127, 128, 257, 269, 294, 365, 368.
 ARMATURE TRANSVERSALE: 292, 313, 327, 328.
 AXE NEUTRE: 263, 269.
- BARRE: 14, 21, 69, 71, 131.
 BÂTIMENT: 35, 110, 126, 127, 203, 307.
 BÉTON: 21, 51.
 BÉTON LÉGER: 52.
 BIELLE: 294, 312, 319, 321, 330.
 BRAS DE LEVIER: 122, 264, 277.
- CÂBLE: 21, 74, 83, 84, 86.
 CÂBLE CONCORDANT: 195, 197, 347, 350, 351.
 CÂBLE NON ADHÉRENT: 144, 510.
- CADRES: 77.
 CAILLOUX: 48.
 CENTRE DE PRESSION: 207, 208, 254, 255.
 CHARGES CLIMATIQUES: 35, 110.
 CHARGES D'EXPLOITATION: 35, 110.
 CHARGES PERMANENTES: 110, 115, 143.
 CIMENT: 41.
 CISAILLEMENT: 269, 274, 276, 280, 288, 308, 309, 312, 327.
 CLASSE: 125, 126, 127, 203, 204, 220, 240.
 CLAVETTES: 151.
 COEFFICIENT DE DILATATION THERMIQUE: 64, 74.
 COEFFICIENT D'ÉQUIVALENCE: 118, 119.
 COEFFICIENT DE SÉCURITÉ: 33, 131.
 COIN INFÉRIEUR: 319, 332.
 COMBINAISON: 32, 110.
 COMBINAISON ACCIDENTELLE: 37, 129.
 COMBINAISON FONDAMENTALE: 34.
 COMBINAISON FRÉQUENTE: 37, 127, 128.
 COMBINAISON QUASI PERMANENTE: 38, 126, 243.
 COMBINAISON RARE: 37, 126, 127, 128.
 CONDUIT: 100.
 CONTRAINTE: 17, 18, 125.
 CONTRAINTE ADMISSIBLE: 125, 126, 127, 288.
 CONTRAINTE DE COMPRESSION: 126.
 COULIS: 21, 86, 143, 206.
 COUPLEURS: 104, 328, 368.
 COURBE INTRINSÈQUE: 282.
- DIAGRAMME CONTRAINTE-DÉFORMATION: 58, 71, 75, 130, 131, 132.
 DIAGRAMME DES 3 PIVOTS: 128.
 DIAGRAMME D'INTERACTION: 199, 525.
 DIAGRAMME PARABOLE-RECTANGLE: 130.

DIAGRAMME RECTANGULAIRE SIMPLIFIÉ: 130, 262.

ÉCARTEMENT MAXIMUM: 294, 297.
EFFORT TRANCHANT: 116, 133, 269, 292, 350.

ENROBAGE: 103, 366, 368.
ÉPAISSEUR NETTE (voir largeur nette): 276, 281, 287.

ÉPINGLES: 77.
ÉPREUVE DE CONTRÔLE: 52.
ÉPREUVE DE CONVENANCE: 52.
ÉTAT-LIMITE: 30.
ÉTAT-LIMITE DE SERVICE: 30, 31, 126, 133, 165, 199, 286.
ÉTAT-LIMITE ULTIME: 30, 31, 129, 165, 259, 291.

ÉTRIERS: 77.
ÉTRIERS ACTIFS: 285, 286, 298, 299.
ÉTRIERS PASSIFS: 295.
EXCENTRICITÉ: 138, 199, 204, 208, 217, 222, 223, 254.

FIL: 14, 21, 68, 71, 131.
FILS ADHÉRENTS: 14, 83.
FLUAGE: 11, 60, 161, 164, 167.
FRETAGE: 326.
FROTTEMENT: 146, 147.
FUSEAU DE PASSAGE: 344.

GAÎNE: 21, 83, 84, 86, 103, 143, 144, 146, 206, 269, 276, 366.
GLISSEMENT (voir recul): 151, 167.
GRANULATS: 47.
GRANULATS LÉGERS: 49.
GRAVIERS: 52.
GRAVILLONS: 48.

HOOKE, LOI DE: 117.

INJECTION: 86, 128, 143, 144.

LARGEUR NETTE (voir épaisseur nette): 143, 276, 286.
LIGNE DE PRÉCONTRAÎNTE: 255, 344, 351, 352, 354.
LIMITE D'ÉLASTICITÉ: 70, 131.

MASSE VOLUMIQUE DU BÉTON: 62.
MÉTHODE DIRECTE (OU INTERNE): 189, 191, 347.
MÉTHODE EXTERNE: 189, 191, 345.
MODULE D'ÉLASTICITÉ LONGITUDINALE: 70, 260, 310.
MODULE D'ÉLASTICITÉ TRANSVERSALE: 310.
MOHR, CERCLE DE: 280.
MOMENT: 115.
MOMENT HYPERSTATIQUE: 138, 141, 191, 195, 345, 347, 348.
MOMENT HYPERSTATIQUE DE PRÉCONTRAÎNTE: 190, 191.
MOMENT ISOSTATIQUE: 191, 195, 347.
MOMENT ISOSTATIQUE DE PRÉCONTRAÎNTE: 191, 201.

NOYAU DE PASSAGE: 255.
NOYAU LIMITE: 255.

PERTES: 145, 166, 299, 366.
PERTES DIFFÉRÉES: 162, 165, 166.
PERTES INSTANTANÉES: 162, 164, 166.
PIEU PRÉCONTRAÎNTE: 181.
PLAQUES D'ANCRAGE: 104.
PLAQUES D'APPUI: 104.
POISSON, COEFFICIENT DE: 61.
PONTS-ROUTES: 35.
PORTÉE: 123.
PORTÉE CRITIQUE: 219.
POST-TENSION: 14, 21, 74, 84, 87, 119, 127, 128, 145, 150.
POURCENTAGE MINIMUM: 293, 297.
PRÉCONTRAÎNTE: 9.
PRÉCONTRAÎNTE: 9, 21, 199, 217, 221, 223, 281.
PRÉCONTRAÎNTE EXTÉRIEURE: 10.
PRÉCONTRAÎNTE PROBABLE: 166.
PRÉCONTRAÎNTE, PROCÉDÉS DE: 87.
PRÉ-TENSION: 14, 21, 81, 119, 127, 128, 145, 163, 368.

RÉACTION HYPERSTATIQUE DE PRÉCONTRAÎNTE: 190, 347, 350.
RECU (voir glissement): 163.
RELAXATION: 74, 162, 163, 168.
RENDEMENT: 202, 207, 228, 229.
RÉSAL, EFFET: 271.
RÉSERVOIR: 203, 517.
RÉSISTANCE A LA COMPRESSION: 54.
RÉSISTANCE A LA TRACTION: 56, 57.

RÉSISTANCE CARACTÉRISTIQUE: 55.
RETRAIT: 11, 60, 161, 164, 167.
ROTATION: 310, 317, 354.

SABLES: 49, 52.
SECTION BRUTE: 116, 119, 206.
SECTION D'ENROBAGE: 127, 243, 253.
SECTION FISSURÉE: 119, 127.
SECTION HOMOGÈNE: 118, 119, 121, 206.
SECTION NETTE: 118, 119, 121, 170, 206, 286.
SECTION SOUS-CRITIQUE: 202, 209, 215, 221.
SECTION SUR-CRITIQUE: 202, 210, 215, 223.
SOLLICITATION: 17, 30, 109, 115.

TABLE DE COMPRESSION EN TEMPÉRATURE: 116.
TENSION A L'ORIGINE: 145, 200.
TENSION INITIALE: 163.
TIRANT: 169, 170, 251, 205, 300.
TIRANT D'ANCRAGE: 185, 187.
TORON: 14, 21, 68, 71, 131, 133, 167.
TORSION: 307.
TRACE: 366.
TRACTION SIMPLE: 126.

VÉRINS: 104, 145.

YOUNG, MODULE D': 58, 131, 167.

ACHEVÉ D'IMPRIMER
SUR LES PRESSES DE
L'IMPRIMERIE CHIRAT
42540 ST-JUST-LA-PENDUE
EN JUILLET 1985
DÉPÔT LÉGAL 1985 N° 0110

IMPRIMÉ EN FRANCE

LE BÉTON PRÉCONTRAIT AUX ÉTATS-LIMITES

Jusqu'à maintenant, le béton précontraint a été calculé par des méthodes élastiques pour des charges de service suivant la méthode déterministe. La nouvelle méthode aux états-limites, apparue en même temps qu'en béton armé, bouleverse les habitudes de calcul.

Ce cours complet représente l'état actuel de l'école française du béton précontraint et s'adresse donc à tous ceux qui ont à concevoir, calculer, vérifier des ouvrages en béton précontraint pour ouvrages d'art, génie civil et bâtiment.

On y trouvera :

- la théorie exposée de façon concise avec la démonstration des formules présentées, ainsi que celles du BPEL;
- de nombreux exemples numériques, du plus simple au plus compliqué;
- des applications de calculs de poutres isostatiques ou continues, de portique, de structures composées de blocs assemblés, de voiles suspendus, de dalles continues de bâtiment, de pont en encorbellement (modèle simplifié), de tirant, tirant d'ancrage...
- de nombreux tableaux de calcul ou tableaux-résumés en fin de chapitres;
- un formulaire en fin d'ouvrage avec références aux pages du livre et aux articles du BPEL.

Cet ouvrage s'adresse aussi bien :

- aux étudiants qui y trouveront les bases du béton précontraint en leur ouvrant la voie à la pratique;
- qu'aux ingénieurs confirmés qui veulent approfondir leurs connaissances dans un des nombreux domaines d'application de ce « matériau » inventé par Freyssinet il y a 50 ans.