

Chapitre 2

Théorie de l'état des contraintes

1. Etude des Contraintes

1.1. Contraintes autour d'un un point

1.1.1. Principe de l'action et de la réaction

En chaque point M d'un solide, il existe des forces intérieures que l'on met en évidence en exécutant une coupure du solide, par une surface S , en deux parties A et B (Figure 1).

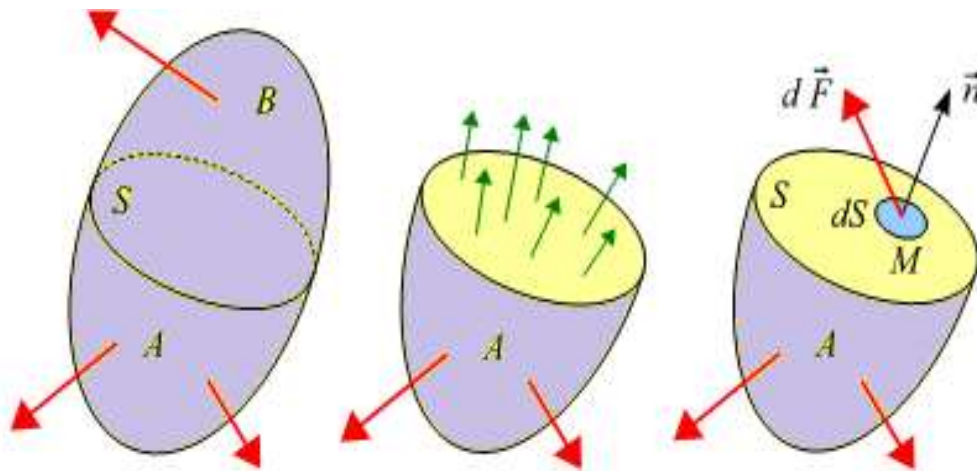


Figure 1. Contrainte dans un point

La partie A , par exemple, est en équilibre sous l'action des forces extérieures qui lui sont directement appliquées et des forces intérieures réparties sur la coupure.

Considérons un point M de S . Soit dS un élément infinitésimal de la surface S entourant M et $\vec{n}$ le vecteur unitaire, perpendiculaire en M à S et dirigé vers l'extérieur de la partie A . Nous appellerons cet ensemble facette $\vec{n}$ en M .

Soit $d\vec{F}$ la force qui s'exerce sur cette facette. On appelle vecteur contrainte sur la facette $\vec{n}$ en M, la quantité :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \frac{d\vec{F}}{ds}$$

L'égalité de l'action et de la réaction s'écrit :

$$d\vec{F}_{A \rightarrow B} = d\vec{F}_{B \rightarrow A}$$

$$\text{Soit } \vec{T}(M, \vec{n})dS = -\vec{T}(M, -\vec{n})dS :$$

D'où :

$$\boxed{\vec{T}(M, \vec{n}) = -\vec{T}(M, -\vec{n})}$$

1.1.2. Tenseur de contraintes

Considérons maintenant le cas spécial dans lequel dS coïncide avec chaque plan de coordonnées (obtenu par la projection de la surface dS sur les axes de référence OXYZ). Les projections de dS sur les axes sont définies par les vecteurs unitaires n_i . Ce concept est schématisé dans la Figure 2 ;

Le vecteur des contraintes se décompose en une contrainte normale et une contrainte tangentielle τ . Cette dernière peut se décomposer dans le plan de la facette en deux composantes parallèles aux axes du plan. On obtient 03 composantes pour chacune des facettes.

Pour l'ensemble des facettes on obtient neuf composantes qui sont nécessaires à définir l'état de contrainte et forment un tenseur du second ordre appelé tenseur des contraintes σ_{ij} , dont la matrice associée est donnée par :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \leftarrow t_1 \\ \leftarrow t_2 \\ \leftarrow t_3 \end{matrix}$$

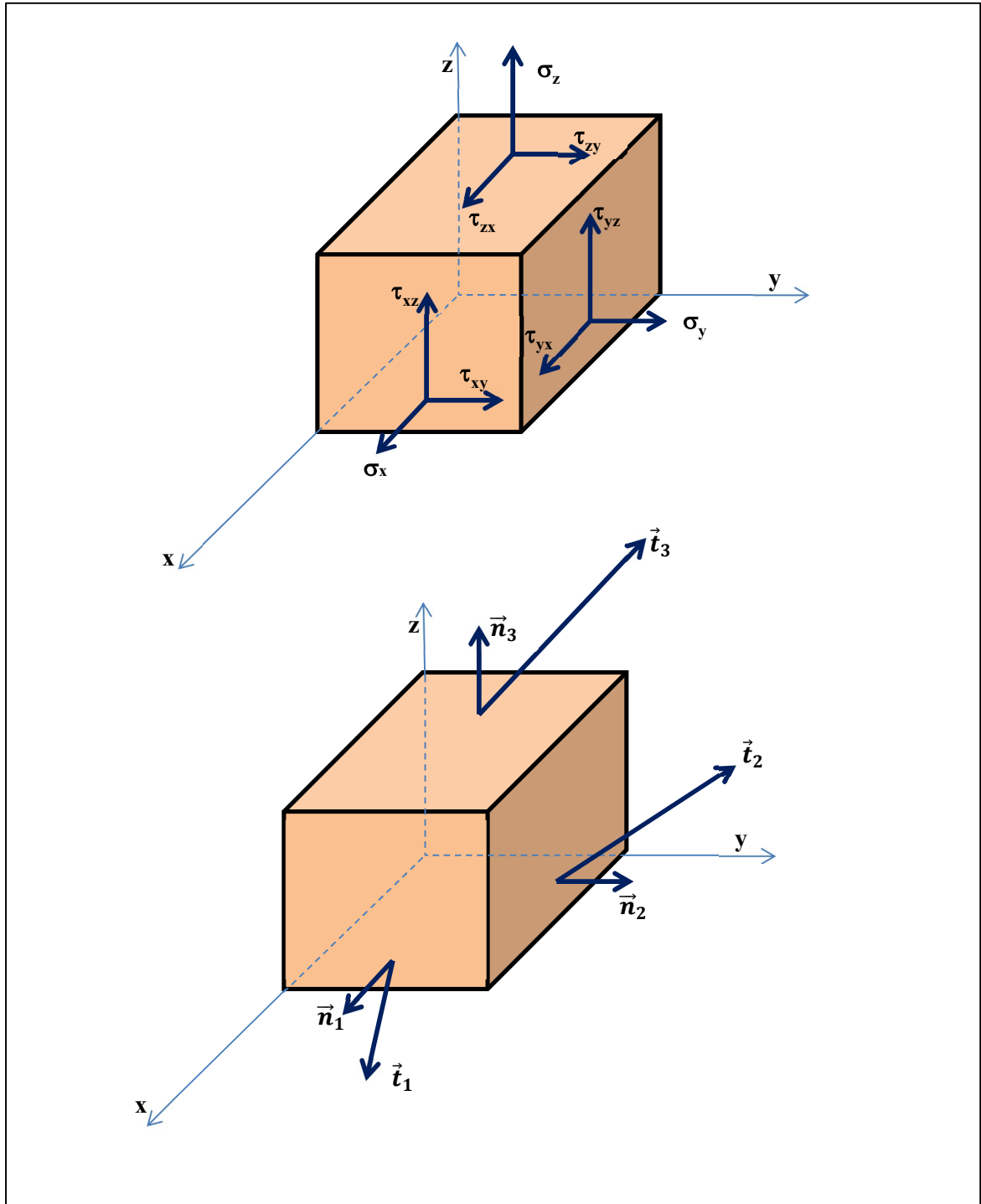


Figure 2. Vecteurs contraintes et composantes σ_{ij}

- Chaque contrainte normale est caractérisée par un seul indice qui représente l'axe selon lequel elle agit, elle est comptée positivement en traction.
- Chaque contrainte tangentielle est caractérisée par deux indices ; le premier désigne la facette sur laquelle la composante agit, alors la seconde désigne l'axe auquel la contrainte tangentielle est parallèle.

Les quantités $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ sont appelées : contraintes normales et $\tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{xz}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{zy}$ des contraintes tangentielles

1.1.3. Vecteur contraintes agissant sur une facette -Relation de Cauchy

Pour trouver les contraintes dans un point d'un solide, agissant sur une facette quelconque, on étudie le cas d'une facette oblique de surface $A_1A_2A_3=dA$ (Figure 3).

Soit $\vec{n}$ la normale unité extérieure à la surface oblique ; ses composantes n_i sont des cosinus directeurs : par suite, l'aire d'une facette située dans un plan de coordonnées est :

$$dA_i = n_i dA \quad ; \quad \vec{n} \begin{cases} \cos(n, x) \\ \cos(n, y) \\ \cos(n, z) \end{cases} = \begin{cases} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{cases}$$

$$\text{L'aire } OA_2A_3 = dA_1 = n_1 dA$$

$$\text{L'aire } OA_1A_3 = dA_2 = n_2 dA$$

$$\text{L'aire } OA_1A_2 = dA_3 = n_3 dA$$

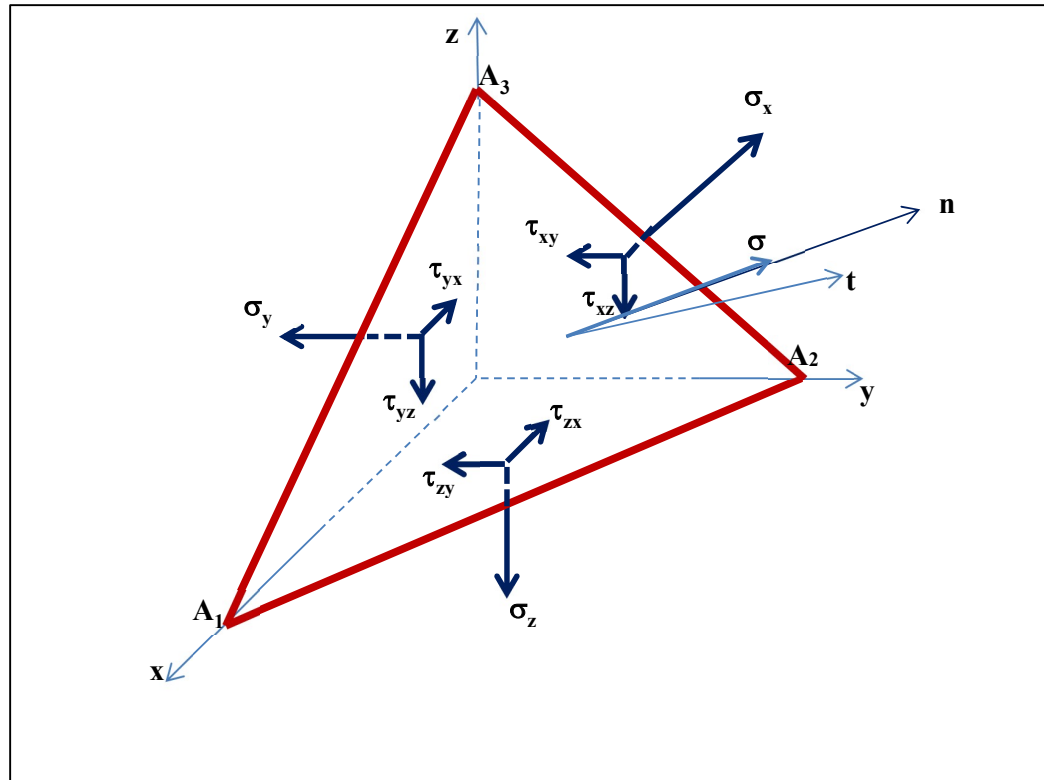


Figure 3. Tétraèdre de Cauchy

Si on écrit les équations d'équilibre en translation du tétraèdre, on obtient :

-Equilibre selon ox :

$$t_1 dA - \sigma_x n_1 dA - \tau_{xy} n_2 dA - \tau_{xz} n_3 dA = 0$$

d'où :

$$t_1 = \sigma_x n_1 + \tau_{xy} n_2 + \tau_{xz} n_3$$

De même pour les autres axes, on obtient :

$$t_2 = \tau_{yx} n_1 + \sigma_y n_2 + \tau_{yz} n_3$$

$$t_3 = \tau_{zx} n_1 + \tau_{zy} n_2 + \sigma_z n_3$$

Ces trois équations sont les formules de Cauchy ; elles peuvent que l'état de contrainte en un point et entièrement défini par la connaissance des composantes des vecteur contraintes agissant sur trois plans orthogonaux en ce point. Ces

équations permettent le calcul du vecteur contraintes t_j sur une facette d'orientation quelconque n_i

En notation indicielle, l'équation de Cauchy est écrite comme suit :

$$t_i = \sigma_{ij} n_j$$

La composante normale du vecteur contrainte s'obtient par la projection sur la normale n_i

$$\sigma = t_i n_i = \sigma_{ij} n_i n_j$$

La projection du vecteur contraintes dans le plan tangent de la surface oblique en M sera appelée composante tangentielle du vecteur contraintes ou vecteur contrainte de cisaillement, tel que :

$$\tau = \sqrt{\|\vec{t}\|^2 - \sigma^2}$$

1.2. Equations d'équilibre

1.2.1. Equilibre en translation

Ecrivons que la projection sur x de la somme des forces appliquées au parallélépipède rectangle infiniment petit, de centre M et de cotés dx, dy et dz. Les contraintes qui interviennent sont représentées sur la figure 4. Le parallélépipède est en équilibre sous les forces appliquées à ses faces et d'une force de volume F

N.B : la figure ne montre que les forces parallèles à l'axe x par simplicité

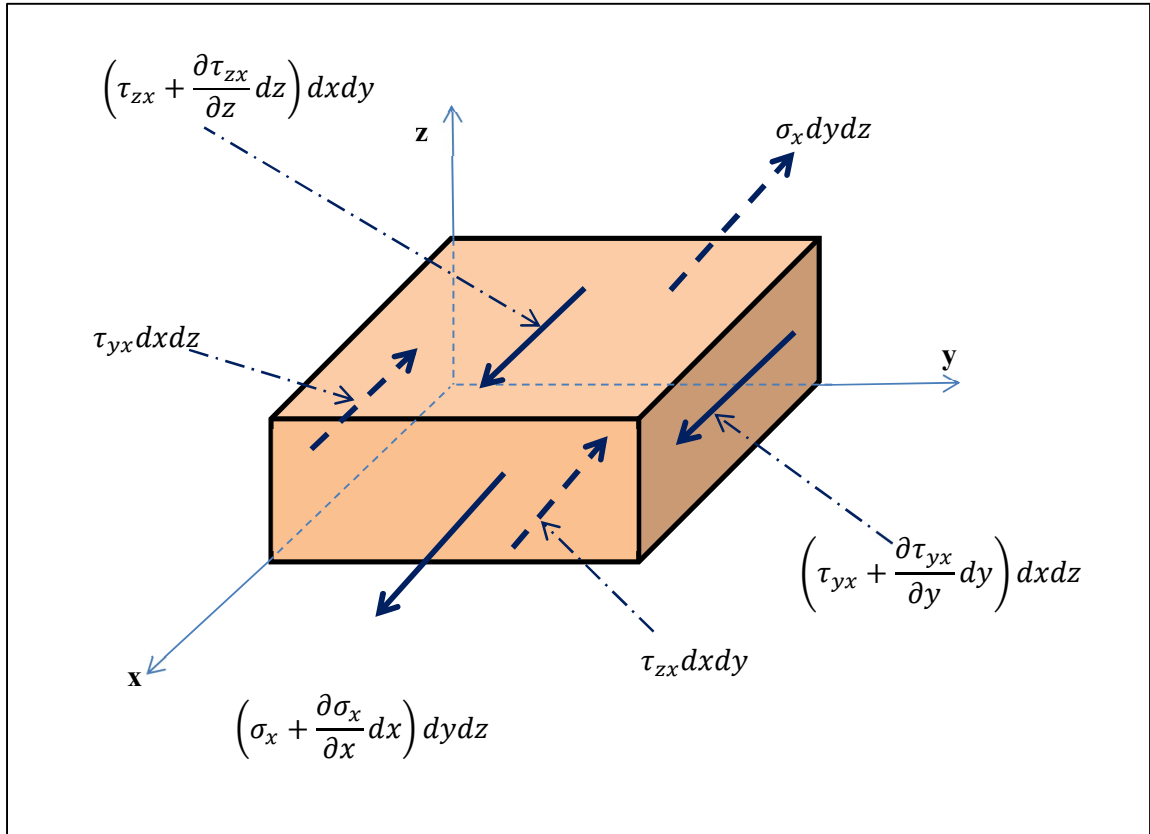


Figure 4. Cube élémentaire isolé (translation selon x1)

-Equilibre selon x

$$\begin{aligned}
 & -\sigma_x dydz + \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dydz - \tau_{yx} dx dz \\
 & + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz - \tau_{zx} dx dy + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) dx dy + F_x dx dy dz = 0
 \end{aligned}$$

Après simplification, il reste

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + F_x = 0$$

On retrouve deux équations semblables selon y et z, l'ensemble de ces trois équations aux dérivées partielles s'écrit

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + F_j = 0$$

ou

$$\partial_j \sigma_{ij} + F_j = 0$$

En notation explicité, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + F_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + F_y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + F_z &= 0 \end{aligned}$$

1.2.2. Equilibre en rotation

En exprimons l'équilibre de rotation autour de l'axe x. La figure ne montre que les forces qui interviennent quand on considère l'axe x

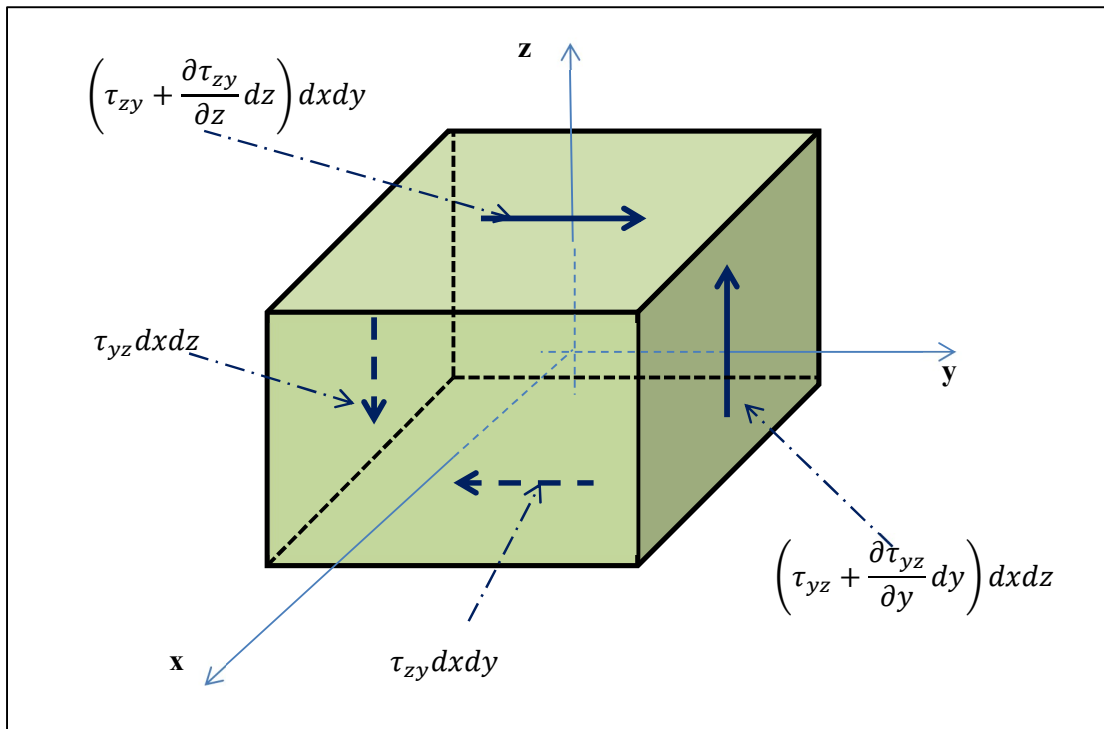


Figure 5. Cube élémentaire isolé (rotation autour de x1)

$$\frac{1}{2} \left(\tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dz \right) dx dy dz + \frac{1}{2} \tau_{zy} dx dy dz - \frac{1}{2} \left(\tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy \right) dx dz dy - \frac{1}{2} \tau_{yz} dx dz dy = 0$$

Alors les accroissements produisent des termes de 4^{ème} ordre négligeables (infiniment petits). L'expression précédente se réduit donc, selon x, à :

$$\frac{1}{2} (\tau_{zy}) dx dy dz + \frac{1}{2} \tau_{zy} dx dy dz - \frac{1}{2} (\tau_{yz}) dx dz dy - \frac{1}{2} \tau_{yz} dx dz dy = 0$$

$$\tau_{zy} dx dy dz - \tau_{yz} dx dz dy = 0$$

Soit

$$\tau_{zy} = \tau_{yz}$$

Si on procède semblablement selon les deux autres axes (équilibre de rotation autour de y et z, on obtient respectivement

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} \quad \text{et} \quad \tau_{xy} = \tau_{yx}$$

En notation indicielle, on a

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (i \neq j)$$

Cette propriété montre le tenseur des contraintes est symétrique et s'appelle également principe de la réciprocité des contraintes tangentielles.

1.3. Contraintes principales - diagonalisation du tenseur contraintes

Le tenseur des contraintes est une matrice symétrique à coefficients réels. Elle a trois valeurs propres réelles (distinctes ou confondues). Si les trois valeurs propres sont distinctes, les vecteurs propres associés sont perpendiculaires entre eux.

Il existe donc en M un repère orthonormé $(\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3)$, tel que sur les facettes $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ et $\vec{n}_3$, la contrainte de cisaillement est nulle.

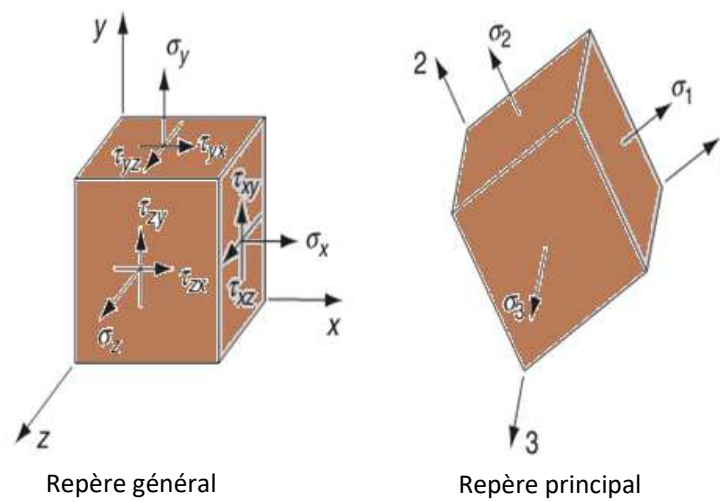


Figure 6. Définition des contraintes principales

Dans le repère principal, le tenseur des contraintes s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

où les contraintes normales $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ sont les contraintes principales.

Les trois contraintes principales sont les racines de l'équation caractéristique :

$$\boxed{\det[\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}] = 0}$$

Soit :

$$\det \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma \end{bmatrix} = -\sigma^3 + I_1 \sigma^2 - I_2 \sigma + I_3 = 0$$

Les contraintes principales sont indépendantes du repère. I_1 , I_2 et I_3 sont des invariants :

$$I_1 = \text{tr}(\sigma) = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \left[(\text{tr}(\sigma))^2 - \text{tr}(\sigma^2) \right] = \sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{xx}\sigma_{zz} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} - (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)$$

$$= \sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3$$

$$I_3 = \det(\sigma) = \sigma_{xx}\sigma_{yy}\sigma_{zz} + 2\tau_{xy}\tau_{xz}\tau_{yz} - \sigma_{xx}\tau_{yz}^2 - \sigma_{yy}\tau_{xz}^2 - \sigma_{zz}\tau_{xy}^2$$

$$= \sigma_1\sigma_2\sigma_3$$

Dans le repère principal, les composantes du vecteur contraintes sur la facette $\vec{n}$ sont :

$$\begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 n_1 \\ \sigma_2 n_2 \\ \sigma_3 n_3 \end{Bmatrix}$$

où : n_1 , n_2 et n_3 sont les composantes de $\vec{n}$.

Pour déterminer les directions principales correspondantes aux contraintes principales, il suffit de résoudre les équations suivantes, pour chacune des contraintes principales :

$$\begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix} = 0$$

et

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

On trouve trois groupes de cosinus directeurs, tel que :

$$\sigma_1 \rightarrow n_j^1 \rightarrow \begin{cases} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{cases} \quad ; \quad \sigma_2 \rightarrow n_j^2 \rightarrow \begin{cases} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{cases} \quad ; \quad \sigma_3 \rightarrow n_j^3 \rightarrow \begin{cases} l_3 \\ m_3 \\ n_3 \end{cases}$$

1.4. Tenseur contraintes déviateur et sphérique

La contrainte normale moyenne σ_m est définie par :

$$\sigma_m = \frac{1}{3} \text{tr}(\sigma_{ij}) = \frac{\sigma_{ii}}{3} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$$

Un tenseur contraintes peut décomposer en sa somme en deux parties, sphérique σ_s et déviatorique s_{ij}

tel que :

$$\sigma_{ij} = \sigma_s + s_{ij}$$

$$\sigma_s = \frac{1}{3} \text{tr}(\sigma_{ij}) \cdot I \quad ; \quad I : \text{tenseur unité}$$

$$\sigma_s = \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix} ;$$

$$s_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_m & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_m & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_m \end{bmatrix}$$

Propriétés :

- σ_{ij} et s_{ij} ont les mêmes directions principales.
- Le tenseur déviateur s_{ij} a, pour directions principales, les mêmes directions que celles du tenseur contraintes σ_{ij} , et pour contraintes principales, les valeurs :

$$s_1 = \sigma_1 - \sigma_m ; s_2 = \sigma_2 - \sigma_m ; s_3 = \sigma_3 - \sigma_m$$

- Le premier invariant de s_{ij} , est nul ($J_1=0$). Les autres invariants J_2 et J_3 du déviateur sont définis de la même façon que les invariants du tenseur des contraintes

$$J_2 = s_{11}s_{22} + s_{11}s_{33} + s_{22}s_{33} - (s_{12}^2 + s_{13}^2 + s_{23}^2) = s_1s_2 + s_1s_3 + s_2s_3$$

$$J_3 = \det(s_{ij}) = s_1s_2s_3$$

1.5. Etat plan de contraintes et cercles de Mohr

1.5.1. Expression analytique

On a un état plan de contraintes quand, en un point, le vecteur contrainte est toujours situé dans un même plan quel que soit la facette considérée.

Si (x_1, x_2) ce plan, on a

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{zx} = \tau_{yz} = \tau_{zy} = 0$$

Le tenseur des contraintes devient :

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ou simplement

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{pmatrix}$$

La résolution de l'équation caractéristique (de 2^{ème} degré) donne deux solutions :

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Dans le cas plan, si σ_j désigne une contrainte principale, l'orientation α_j à la facette principale est donnée par :

$$\operatorname{tg} \alpha_j = \frac{\sigma_j - \sigma_x}{\tau_{xy}} = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_j - \sigma_y}$$

Ou

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

Les directions principales étant normales, alors

$$\operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2 = -1$$

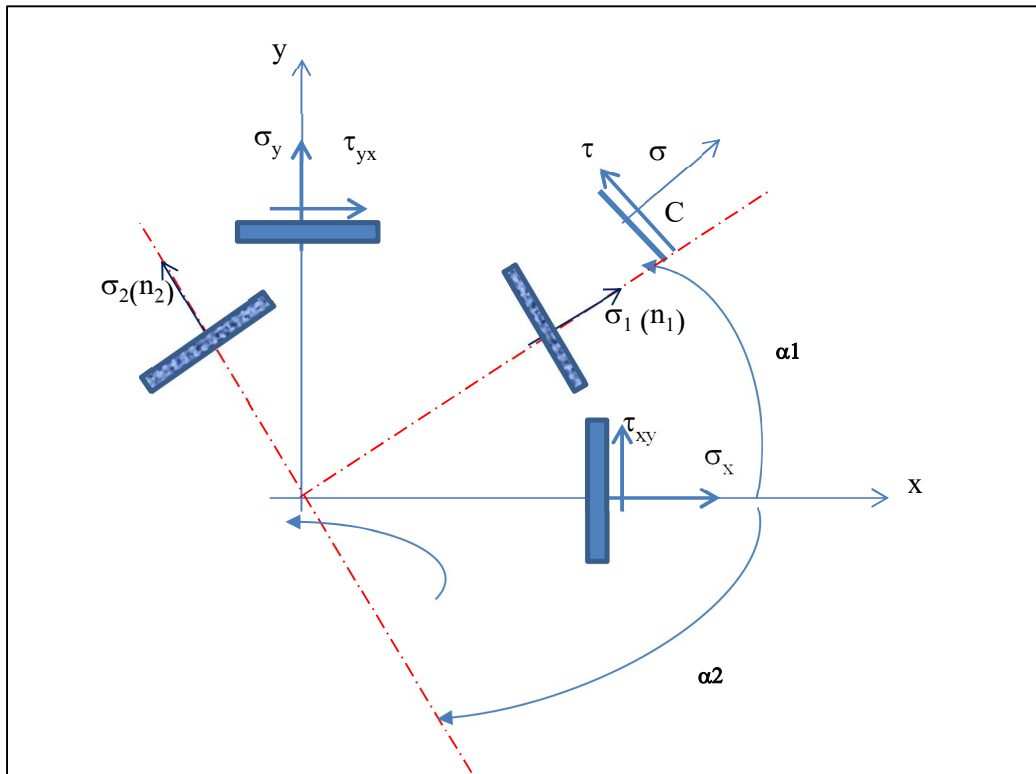


Figure 7. Contraintes et directions principales dans le cas plan

1.5.2. Expression graphique

A- Cercle de Mohr à partir des contraintes principales

Supposons connues les facettes et les contraintes principales d'un état de contraintes. On désire trouver les composantes σ et τ du vecteur contraintes agissant sur une facette quelconque (composantes perpendiculaire et tangentielle à la facette).

Prenons les axes principaux (x_1, x_2) comme référence, la facette est repérée par l'angle α de sa normale avec x_1 .

Soit ensuite les axes x', y' attachés à la facette et obtenue par une rotation d'angle α à partir de l'axe x_1 .

σ et τ sont les projections du vecteur contraintes sur les axes x' et y' .

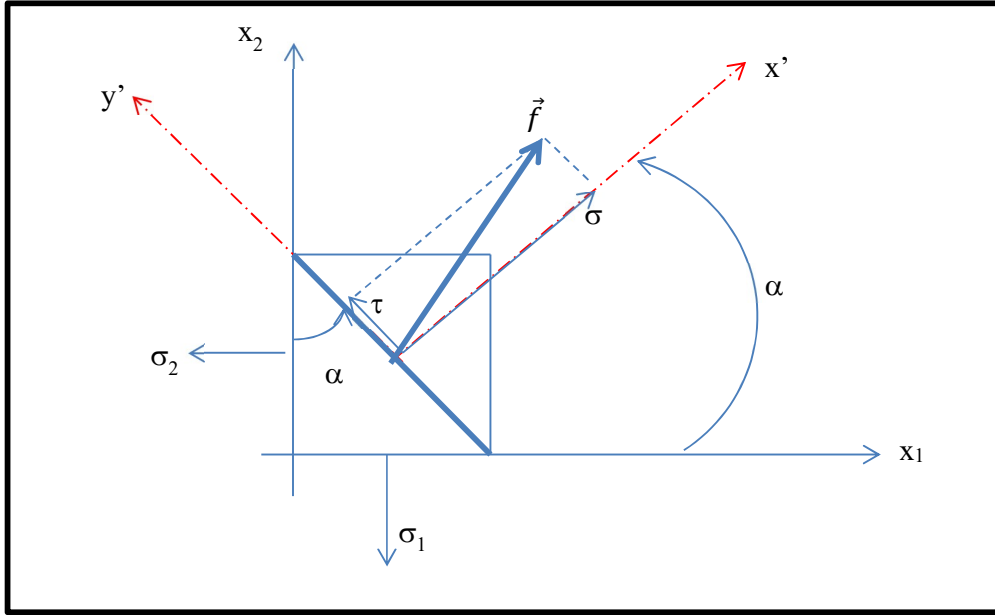


Figure 8. Recherche de σ et τ (contraintes principales connues)

Les composantes du tenseur contraintes dans le nouveau système d'axes (x' et y') sont définies par la relation de transformation établie précédemment en premier chapitre

$$T' = P^T \cdot T \cdot P$$

Avec :

$$P = \begin{bmatrix} \cos(x', x_1) & \cos(x', x_2) \\ \cos(y', x_1) & \cos(y', x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

$$\sigma' = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

Les composantes normale et tangentielle du vecteur contraintes sont :

$$\sigma = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha$$

$$\tau = (\sigma_2 - \sigma_1) \cos \alpha \sin \alpha$$

Ou :

$$\sigma = \frac{(\sigma_1 + \sigma_2)}{2} + \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)}{2} \cos 2\alpha$$

$$\tau = -\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)}{2} \sin 2\alpha$$

Posons :

$$\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)}{2} = r \quad \text{et} \quad \frac{(\sigma_1 + \sigma_2)}{2} = a$$

$$\sigma - a = r \cos 2\alpha$$

$$-\tau = r \sin 2\alpha$$

La somme des carrées de ces équations représente une équation d'un cercle de rayon r et centrée dans l'axe des σ à l'abscisse $a = \frac{(\sigma_1 + \sigma_2)}{2}$

Ce cercle permet une représentation graphique expressive de l'état de contraintes est dit cercle de Mohr.

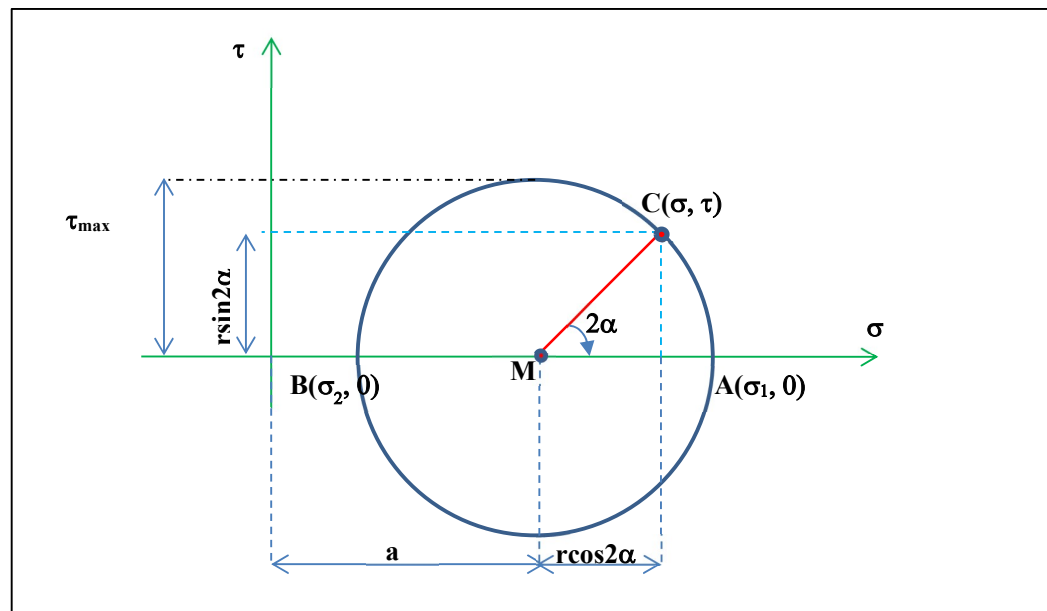


Figure 9. Cercle de Mohr (contraintes principales connues)

Remarques :

- Les coordonnées d'un point quelconque C du cercle sont la contrainte normale et tangentielle agissant sur la facette dont l'orientation est fixée par 2α du rayon MC.
- Deux facettes perpendiculaires sont données par deux points diamétralement opposés.
- Le cercle coupe l'axe des abscisses aux points A et B donnant les contraintes principales ($\tau=0$).
- La contrainte tangentielle est donnée par le rayon $\tau_{max} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$

B- Cercle de Mohr à partir des σ_x , σ_y et τ_{xy}

Supposant connu l'état de contraintes en un point O d'un solide, donné par les composantes σ_x , σ_y et τ_{xy} agissant sur deux facettes orthogonales. On désire trouver les contraintes et les facettes principales ainsi que les contraintes σ et τ agissant une facette quelconque repérée par l'angle α .

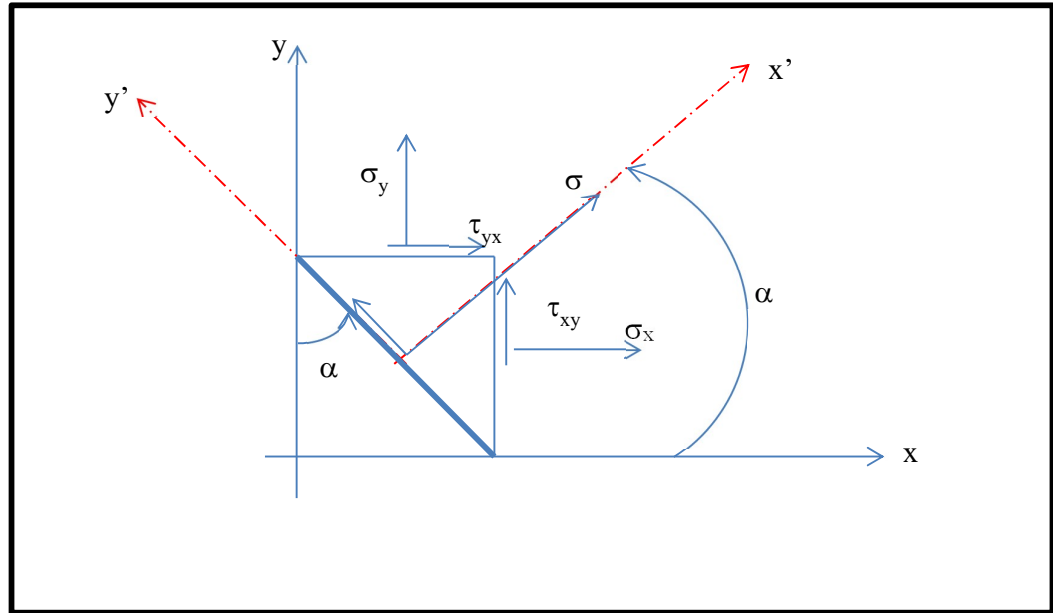


Figure 10.

Analytiquement, les contraintes principales et les directions correspondantes sont déterminées par les équations suivantes :

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\tan \alpha_j = \frac{\sigma_j - \sigma_x}{\tau_{xy}} = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_j - \sigma_y}$$

Les composantes normales et tangentielle du vecteur contrainte sont déterminés par le produit triple

$$\sigma' = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

Ou la premier ligne de σ' donne

$$\sigma = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + 2\tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\tau = (\sigma_y - \sigma_x) \cos \alpha \sin \alpha + \tau_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)$$

Graphiquement, on retrouve tous ces résultats sur le cercle de Mohr.

- Sur l'axe des σ , on porte d'abord les points U ($\sigma_x, 0$) et V ($\sigma_y, 0$) et on obtient le centre M du cercle au milieu UV.
- Puis on porte τ_{xy} au droit de ce U ce qui donne le point X (σ_x, τ_{xy}) et le rayon MX du cercle.
- Le point X est représentatif de la facette origine x, de sorte que le rayon MX sert d'origine pour mesurer les angles 2α .

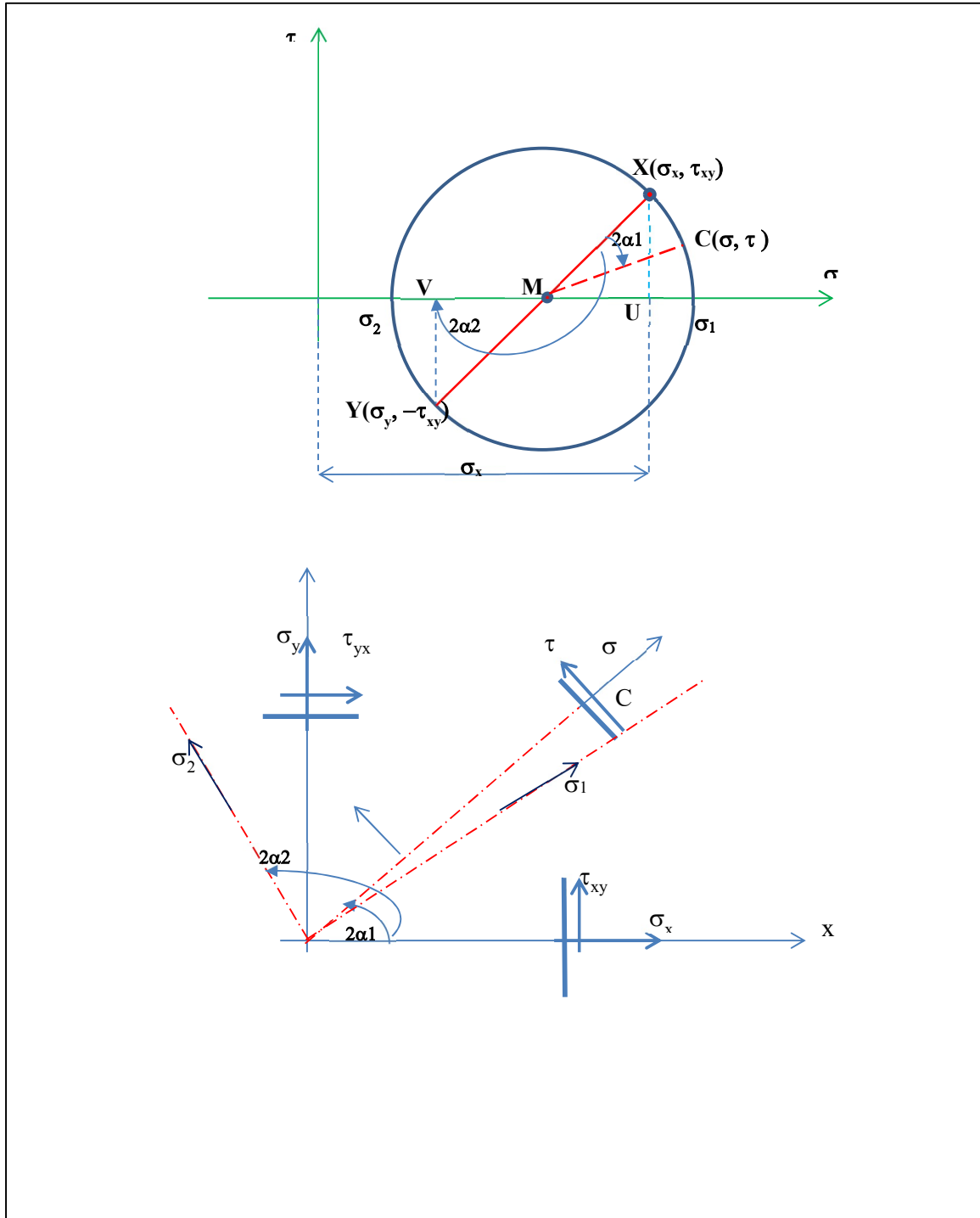


Figure 11. Cercle de Mohr (cas général)

1.6. Tricerle de Mohr

Dans un état de contraintes tridimensionnel, en un point O d'un solide, prenons les axes principaux comme axes de coordonnées. Les facettes des plans des coordonnées sont soumises aux contraintes principales σ_1 , σ_2 et σ_3 .

Considérons d'abord les facettes contenant l'axe x_3 . Elles sont l'influence des contraintes principales σ_1 , σ_2 uniquement, donc en état plan caractérisé par le cercle de diamètre AB. De même, toute facette contenant l'axe x_2 (ou x_1) est représentée par le cercle de diamètre AC ou (BC).

L'ensemble de trois ces cercles s'appelle le tricerle de Mohr.

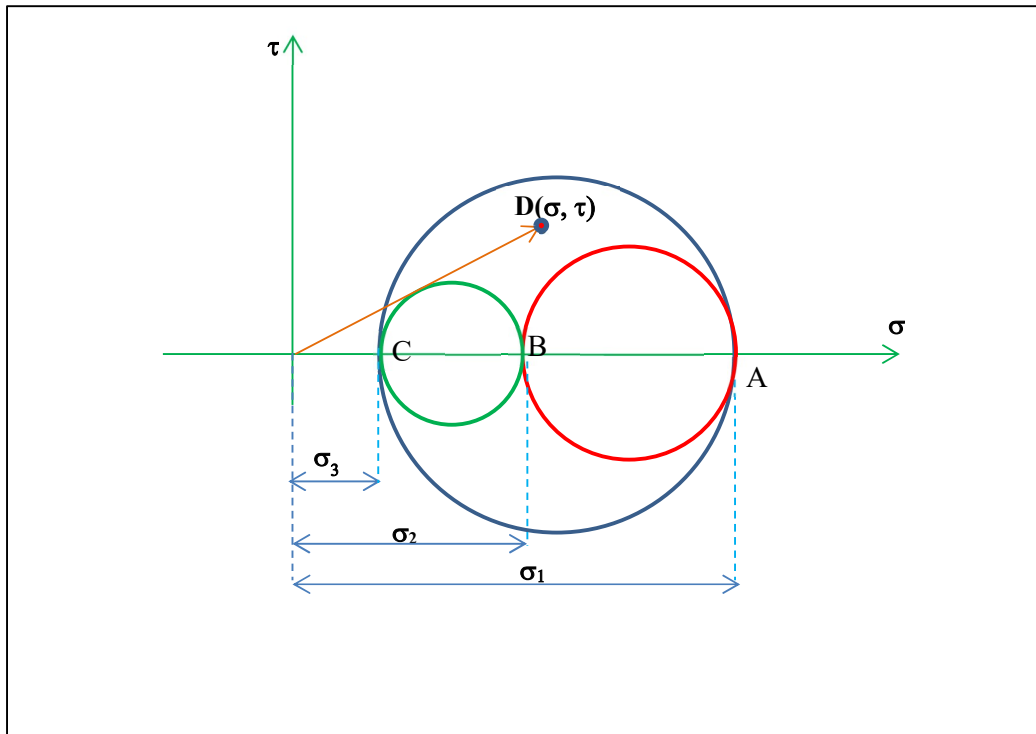


Figure 12. Tricerle de Mohr

On en déduit que la contrainte tangentielle maximale est représentée par le rayon le plus grand des trois cercles, soit

$$\tau_{max} = \pm \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{2}$$

1.7. Etats de contraintes particuliers

1.7.1. Etat de contrainte uniaxiale

L'état de contrainte en un point M est uniaxial s'il existe un repère dans lequel le tenseur des contraintes se réduit à:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

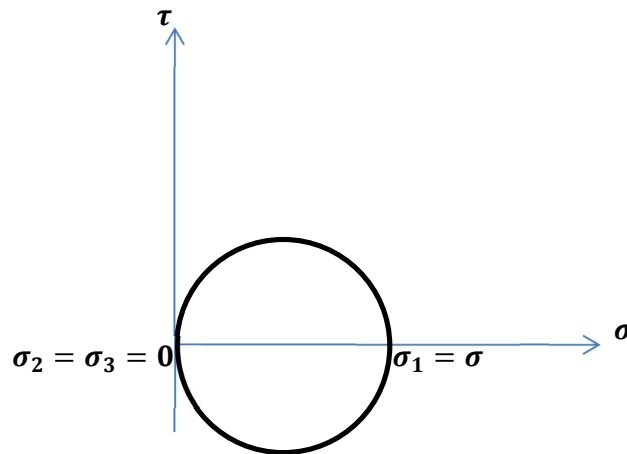


Figure 13. Etat de contrainte uniaxial

Cet état de contraintes est appelé état de traction simple si σ_1 est positif et état de compression simple si σ_1 est négatif.

1.7.2. Cisaillement simple dans deux directions orthogonales

L'état de contraintes en M est un état de cisaillement simple par rapport aux deux directions x et y, si le tenseur des contraintes se réduit à

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

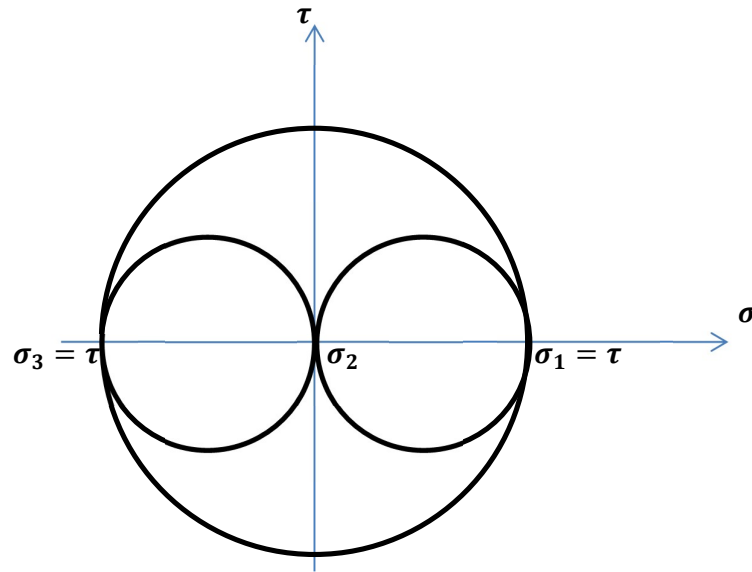


Figure 14. Représentation de Mohr (cisaillement pur)

Les contraintes principales et les directions principales sont :

$$\sigma_1 = -\sigma_2 = \sigma_{12} ; \sigma_3 = 0$$

1.7.1. Etat de contraintes isotrope

Les trois contraintes principales sont alors égales à σ et le tenseur des contraintes a pour expression (quel que soit le repère) :

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix}$$

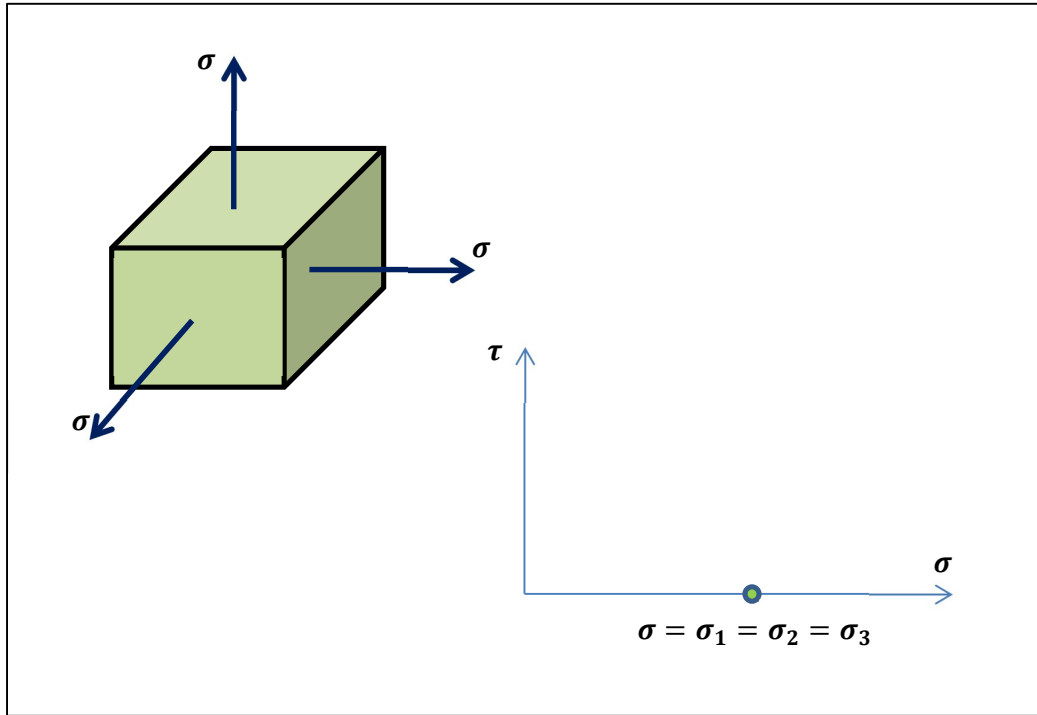


Figure 15. État de contrainte hydrostatique

Les trois cercles de Mohr des contraintes se réduisent à un point

1.7.2. Contraintes octaédriques

1.8. Transformation de contraintes

La transformation de tenseur de contraintes doit répondre aux règles de transformation des tenseurs de 2^{ème} ordre établies précédemment en premier chapitre.

Appliquant cette règle est transformé comme suit

$$\sigma'_{ij} = a_{ik}a_{jl}T_{kl}$$

Ou $a_{ij} = \cos(X'_i, X'_j)$ est la matrice de rotation. En effet connaissant les composantes d'un tenseur des contraintes dans un système de coordonnées, on peut déterminer les composantes de ce tenseur dans un second système obtenu par rotation du premier. Dans le cas général (tridimensionnel), les composantes du tenseur contraintes dans le nouveau repère sont

$$\sigma'_x = \sigma_x l_1^2 + \sigma_y m_1^2 + \sigma_z n_1^2 + 2(\tau_{xy} l_1 m_1 + \tau_{yz} m_1 n_1 + \tau_{xz} l_1 n_1)$$

$$\sigma'_y = \sigma_x l_2^2 + \sigma_y m_2^2 + \sigma_z n_2^2 + 2(\tau_{xy} l_2 m_2 + \tau_{yz} m_2 n_2 + \tau_{xz} l_2 n_2)$$

$$\sigma'_z = \sigma_x l_3^2 + \sigma_y m_3^2 + \sigma_z n_3^2 + 2(\tau_{xy} l_3 m_3 + \tau_{yz} m_3 n_3 + \tau_{xz} l_3 n_3)$$

$$\tau'_{xy} = \sigma_x l_1 l_2 + \sigma_y m_1 m_2 + \sigma_z n_1 n_2 + \tau_{xy}(l_1 m_2 + l_2 m_1) + \tau_{yz}(m_1 n_2 + m_2 n_1) + \tau_{xz}(l_1 n_2 + l_2 n_1)$$

$$\tau'_{yz} = \sigma_x l_2 l_3 + \sigma_y m_2 m_3 + \sigma_z n_2 n_3 + \tau_{xy}(l_2 m_3 + l_3 m_2) + \tau_{yz}(m_2 n_3 + m_3 n_2) + \tau_{xz}(l_2 n_3 + l_3 n_2)$$

$$\tau'_{xz} = \sigma_x l_1 l_3 + \sigma_y m_1 m_3 + \sigma_z n_1 n_3 + \tau_{xy}(l_1 m_3 + l_3 m_1) + \tau_{yz}(m_1 n_3 + m_3 n_1) + \tau_{xz}(l_1 n_3 + l_3 n_1)$$

Pour le cas bidimensionnel, ces relations deviennent

$$\begin{cases} \sigma'_x = \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta \\ \sigma'_y = \sigma_x \sin^2 \theta + \sigma_y \cos^2 \theta - 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta \\ \tau'_{xy} = (\sigma_y - \sigma_x) \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{cases}$$

En passant à l'arc double les relations précédentes deviennent

$$\begin{cases} \sigma'_x = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \\ \sigma'_y = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta \\ \tau'_{xy} = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \end{cases}$$

1.9.Exercices

Exercice 01 : Le tenseur contrainte dans un point M est donné par :

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

-Déterminer le vecteur des contraintes agissant en P sur le plan de normale

$$\vec{n} = \frac{2}{3}\vec{e}_1 - \frac{2}{3}\vec{e}_2 + \frac{1}{3}\vec{e}_3$$

-Déterminer les composantes normale et tangentielle du vecteur des contraintes.

Exercice 2 : Même question que l'exercice 01 pour le tenseur et le vecteur suivants

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}, \quad \vec{n} = \frac{1}{3}\vec{e}_1 + \frac{1}{3}\vec{e}_2 + \frac{1}{3}\vec{e}_3$$

Exercice 03 : Déterminer les invariants, les contraintes principales et les directions

correspondantes pour le tenseur des contraintes suivant : $\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

-Prouver que le tenseur de contraintes principales peut déterminer à partir de la relation de transformation d'axes.

Exercice 04 : Calculer les invariants, le tenseur sphérique et le déviateur associé au

tenseur des contraintes suivant : $\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}$

Exercice 05: Soit en un point M d'un matériau, le tenseur des contraintes suivant :

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 100 & -20 \\ -20 & 60 \end{bmatrix} \text{ kPa}$$

Déterminer les contraintes principales et leurs directions correspondantes, analytiquement puis graphiquement.

Exercice 06 : Soit l'état de contraintes schématisé ci-contre sur le cube élémentaire d'arrêtes parallèles aux axes choisis (les contraintes sont exprimées en KPa)

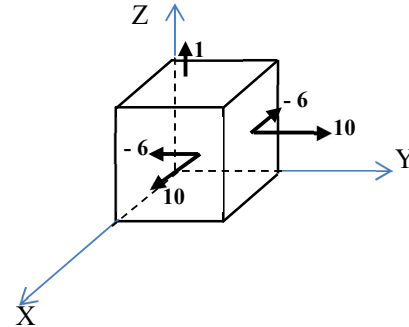
1/Ecrivez le tenseur de contraintes correspondant

2/Décomposez ce tenseur en sa somme d'une partie hydrostatique $\sigma_{ij}^{(s)}$ et d'une partie déviatorique $\sigma_{ij}^{(d)}$.

3/Calculez les contraintes principales et leurs directions correspondantes, schématisez ainsi les directions principales de cet état de contraintes sur le cube.

4/Calculez les composantes normale et tangentielle du vecteur contraintes agissant sur le plan de normale $\vec{n} (0, 1, 0)$

5/Déterminer le tenseur des contraintes dans un second système obtenu par une rotation d'un angle $\frac{\pi}{6}$ autour de l'axe Z.



Exercice 07 : Soit un cube élémentaire d'un matériau élastique déformable soumis, en un point M, à ses faces aux contraintes schématisées dans la figure ci-contre. Les valeurs des contraintes sont exprimées en kPa, α est un paramètre de charge.

- 1/ Définir les composantes du tenseur contraintes σ_{ij} .
- 2/ quel est l'état de contrainte pour $\alpha=0$ et quel type de sollicitation subit le cube.
- 3/ Déterminer en fonction de α les contraintes principales. Que peut en conclure lorsque α varie ?
- 4/ Supposant maintenant que $\alpha = 1$, trouver les contraintes principales et les directions correspondantes
- 5/Retrouver graphiquement les contraintes principales et les directions correspondantes

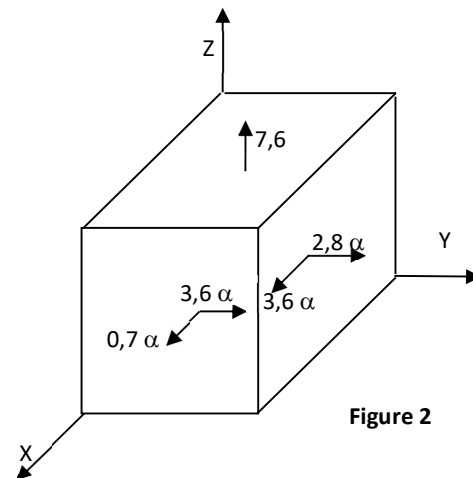


Figure 2

- 6/ pour $\alpha = 1$, déterminer les composantes normale et tangentielle du vecteur contrainte sur les facettes de normales $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ et $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.
- 4/ Dans le repère principal, déterminer la valeur de α en M pour que l'état contrainte soit ;
- cylindrique, (2) hydrostatique superposé à un cisaillement pur.

Références

1. **F. Frey.** Analyse des Structures et Milieux Continus, Mécanique des Solides. Volume3. Ecole Nationale Polytechnique de Lausanne.
2. **J.-P. Henry, F. Parsy.** Cours d'élasticité. Dunod Université. 1982.
3. **G. Caignaert, J.-P Henry.** Exercices d'élasticité. Dunod Université. 1988.
4. **M. H. Sadd.** Elasticity. Theory, Applications and Numerics. 2009. Elsevier
5. **J. Salençon.** Mécanique des Milieux Continus. Tomme 1. Concepts Généraux.
6. **Y. Debard** Elasticité. Institut Universitaire de Technologie du Mans. Département Génie Mécanique et Productique.
7. **F. Sidoroff.** Mécanique des milieux continus. Engineering school Ecole Centrale de Lyon, 1980, pp.166.<cel-00530377>