

Sommaire

Chapitre 1	1
.....	1
Généralités	1
1. Rappelles Mathématiques	1
1.1. Définition du tenseur.....	1
1.1.1. Tenseur d'ordre 0 (scalaires)	1
1.1.2. Tenseur d'ordre 1	1
1.1.3. Tenseur d'ordre 2	2
1.2. Notation indicielle	3
1.2.1. Introduction.....	3
1.2.2. Règles :.....	4
1.3. Transformation de coordonnées.....	5
1.4. Champ tensoriel	7
1.4.1. Gradient d'un scalaire	7
1.4.2. Divergence et rotationnel d'un vecteur	7
1.4.3. Laplacien d'un scalaire	7
1.4.4. Gradient d'un vecteur et divergence d'une matrice	7
1.5. Exercices	7

Chapitre 1

Généralités

Objectif du chapitre

Ce chapitre a pour but d'introduire le formalisme mathématique nécessaire à la théorie de l'élasticité. Il ne s'agit pas de faire des mathématiques abstraites, mais de disposer d'outils permettant de décrire les contraintes, les déformations et leurs variations dans l'espace.

1. Rappelles Mathématiques

En génie civil, les contraintes et les déformations varient d'un point à un autre d'une structure ou d'un massif de sol. Leur description nécessite des outils mathématiques capables de prendre en compte à la fois l'intensité, la direction et l'orientation dans l'espace. La théorie de l'élasticité est formulée en fonctions de plusieurs variables : scalaires, vecteurs et tenseurs. Ces notions font appel à l'utilisation de la notation indicielle, l'algèbre tensoriel et à faire des calculs.

1.1. Définition du tenseur

1.1.1. Tenseur d'ordre 0 (scalaires)

Un scalaire est défini par un seul nombre et indépendant des axes de référence (indépendant de toute notion d'orientation)

Exemple : masse, densité, température, volume.

1.1.2. Tenseur d'ordre 1

Par opposition aux scalaires, il existe des grandeurs physiques très différentes, les vecteurs, qui sont inséparables de la notion de direction.

Exemple : le cas d'une force $\vec{F}$, le déplacement et l'accélération

Le symbole F représente l'intensité du vecteur dans un système d'axes ($OX_1X_2X_3$). Les projections du vecteur sur les axes du système définies les composantes du vecteur ;

$$\vec{F} \begin{cases} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$$

$$F = F_1 \vec{e}_1 + F_2 \vec{e}_2 + F_3 \vec{e}_3$$

avec :

e_i : vecteurs unitaires supportés par les axes du système.

Un vecteur $\vec{F}$ est caractérisé par sa grandeur F et sa direction $\vec{n}$

$$\vec{F} = F \vec{n}$$

La projection du vecteur $\vec{F}$ dans une direction $\mu \neq n$ est représentée par

$$\vec{F}(\mu) = F_1 \cdot \cos(\mu, x_1) + F_2 \cdot \cos(\mu, x_2) + F_3 \cdot \cos(\mu, x_3)$$

1.1.3. Tenseur d'ordre 2

Les tenseurs sont la généralisation des scalaires, des vecteurs et des matrices. Un tenseur d'ordre 2 possède neuf composantes :

$$a_{ij} \quad (i = 1, 2, 3 ; j = 1, 2, 3)$$

Ordre	Identification	Dimension	composantes	symbole
0	scalaire	2D	$2^0=1$	a
		3D	$3^0=1$	
1	vecteur	2D	$2^1=2$	a_i
		3D	$3^1=3$	
2	matrice	2D	$2^2=4$	a_{ij}

3D

 $3^2=9$

En élasticité, les contraintes et les déformations sont décrites par des tenseurs d'ordre 2, car elles dépendent à la fois de la direction de la normale au plan considéré et de la direction de l'effort ou de la déformation.

1.2. Notation indicielle

1.2.1. Introduction

Le calcul indicial permet de compacter les expressions mathématiques. Grâce à la notation indicielle, on peut représenter une série de nombres (éléments ou composantes) par un seul symbole avec des indices.

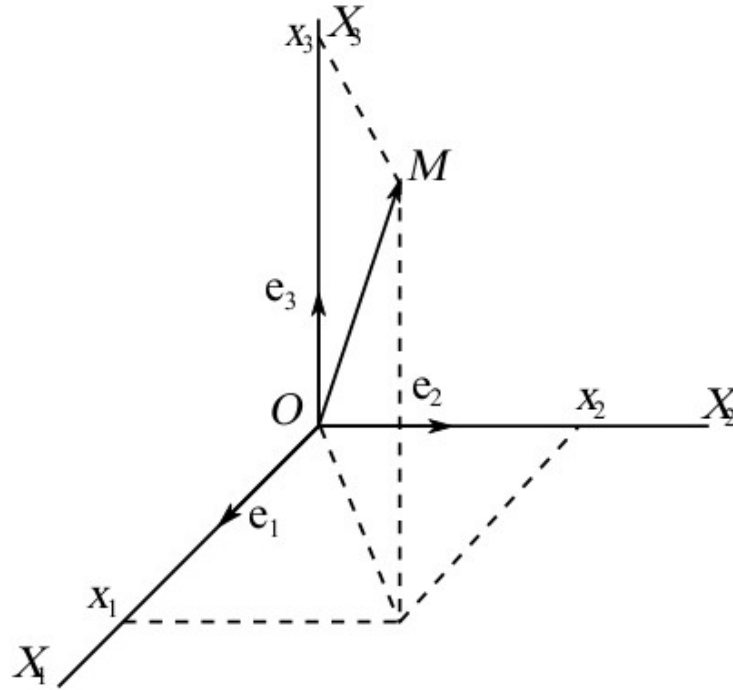
Exemple :

Les trois nombres a_1, a_2, a_3 sont notés par a_i où l'indice i prend les valeurs 1, 2 et 3.

D'une façon similaire, a_{ij} représente les neuf composantes : $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}$

En calcul indicial, x, y, z sont remplacés par 1, 2 et 3. Le système d'axes est (x_1, x_2, x_3) . Les composantes d'un vecteur $\vec{a}$ sont a_1, a_2, a_3

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3 = \sum_{i=1}^3 a_i \vec{e}_i$$



1.2.2. Règles :

Règle 1 : Convention de sommation (Einstein)

Chaque fois qu'un indice apparaît deux fois dans un même monôme, ce monôme représente le somme de trois termes obtenue en donnant aux indices les valeurs 1, 2 et 3 successivement

Exemple :

$$a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$a_{kn} b_n = a_{k1} b_1 + a_{k2} b_2 + a_{k3} b_3$$

$$c_{mm} = c_{11} + c_{22} + c_{33}$$

L'indice répété s'appelle indice muet ou indice de sommation. Cet indice n'apparaît que deux fois dans un même monôme

Règle 2 :

Un indice qui n'apparaît qu'une seule fois dans un même monôme, doit aussi apparaître une fois dans les monômes d'une expression. Cet indice s'appelle indice d'identification ou indice libre.

Exemple :

$x_j = a_{ij}b_i + d_j$ est correcte et représente l'équation j, alors que

$x_j = a_{ij}b_i + d_k$ n'a pas de sens.

1.1.1. Symbole de Kronecker :

Le symbole de Kronecker est une grandeur à deux indices notée δ_{ij}

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Les propriétés du symbole de Kroneker sont :

$$\delta_{ij} = \delta_{ji}$$

$$\delta_{kl} = a_{ki}a_{lj}\delta_{ij} = \delta_{ij}$$

$$\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3$$

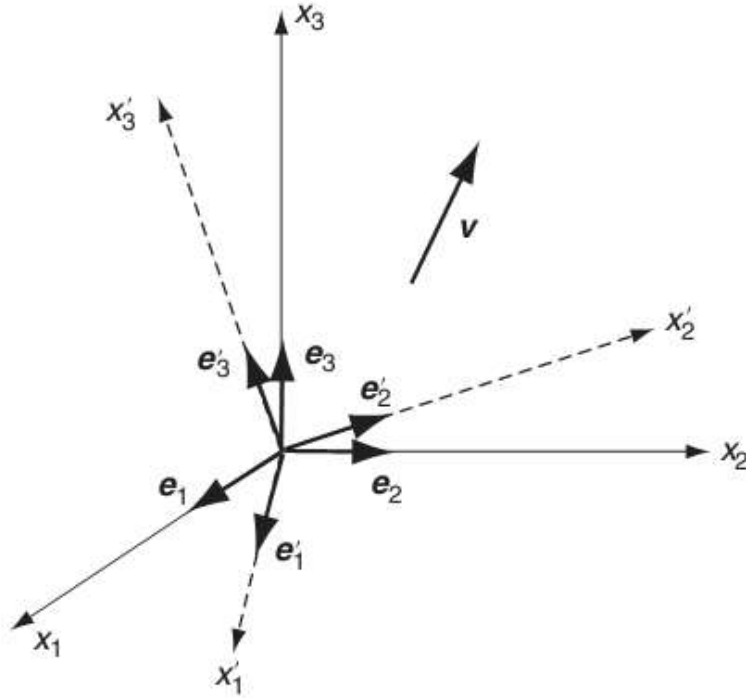
$$\delta_{ij}V_j = V_i$$

$$\delta_{ij}A_{ij} = A_{ii}$$

$$e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$$

1.3. Transformation de coordonnées

Considérons un changement d'axes (passage d'un système d'axes x_1, x_2, x_3 à un autre x'_1, x'_2, x'_3).



Pour obtenir les coordonnées d'un point dans le nouveau système, on utilise les relations suivantes :

$$X'_1 = X_1 \cdot \cos(x'_1, x_1) + X_2 \cdot \cos(x'_1, x_2) + X_3 \cdot \cos(x'_1, x_3)$$

$$X'_2 = X_1 \cdot \cos(x'_2, x_1) + X_2 \cdot \cos(x'_2, x_2) + X_3 \cdot \cos(x'_2, x_3)$$

$$X'_3 = X_1 \cdot \cos(x'_3, x_1) + X_2 \cdot \cos(x'_3, x_2) + X_3 \cdot \cos(x'_3, x_3)$$

Les relations angulaires liant les axes sont données par le tableau des cosinus directeurs

Anciens axes

Nouveaux Axes		X_1	X_2	X_3
	X'_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}
	X'_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}
	X'_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}

avec :

$a_{ij} = \cos(X'_i, X_j)$, l'indice i désigne les nouveaux axes, tandis que l'indice j les anciens.

En notation indicielle, les composantes d'un vecteur quelconque V_j , dans le nouveau système est donnée comme suit :

$$V'_i = a_{ij}V_j$$

Maintenant, supposant un tenseur T_{ij} dans l'ancien système, ses composantes deviennent T'_{kl} dans le nouveau système

Telle que :

$$T'_{kl} = a_{ki}a_{lj}T_{ij} \quad \text{ou} \quad T' = P^T \cdot T \cdot P$$

(p : matrice de passage)

1.4. Champ tensoriel

- 1.4.1. Gradient d'un scalaire
- 1.4.2. Divergence et rotationnel d'un vecteur
- 1.4.3. Laplacien d'un scalaire
- 1.4.4. Gradient d'un vecteur et divergence d'une matrice

1.5. Exercices

Exercice 01 : Soit $T_{ij} = \sum a_{ik} a_{jl} T'_{kl}$

-Calculer T_{32}

Exercice 02 : Pour le tenseur et le vecteur donnés :

$$a_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} ; b_i = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

-Calculer les quantités suivantes :

$$a_{ii} ; a_{ij}a_{ij} ; a_{ij}a_{jk} ; a_{ij}b_j ; a_{ij}b_ib_j ; b_ib_j ; b_ib_i$$

-Pour chaque quantité montrer le type du résultat obtenu : scalaire, vecteur ou matrice.

(Noter que $a_{ij}b_j$ est le produit matriciel : $[a] \cdot \{b\}$, alors que $a_{ij}a_{jk}$ est le produit : $[a] \cdot [a]$)

Exercice 03 : -Vérifier que la matrice a_{ij} de l'exercice 02 peut être écrite sous forme d'une somme de deux matrices symétrique et antisymétrique, en utilisant l'expression suivante :

$$a_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji}) + \frac{1}{2}(a_{ij} - a_{ji})$$

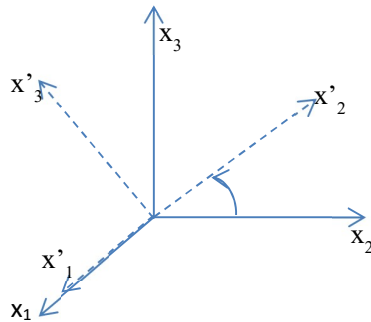
Exercice 04 : Vérifier explicitement les propriétés du delta de Kronecker :

$$\delta_{ij}a_j = a_i$$

$$\delta_{ij}a_{jk} = a_{ik}$$

Exercice 05 :

Déterminer les composantes du vecteur b_i et de la matrice a_{ij} (de l'exercice 02), dans un nouveau système de coordonnées résultant d'une rotation de 45° ($\frac{\pi}{4}$ radians) autour de l'axe x_1 .



Références

1. **F. Frey.** Analyse des Structures et Milieux Continus, Mécanique des Solides. Volume3. Ecole Nationale Polytechnique de Lausanne.
2. **J.-P. Henry, F. Parsy.** Cours d'élasticité. Dunod Université. 1982.
3. **G. Caignaert, J.-P Henry.** Exercices d'élasticité. Dunod Université. 1988.
4. **M. H. Sadd.** Elasticity. Theory, Applications and Numerics. 2009. Elsevier
5. **J. Salençon.** Mécanique des Milieux Continus. Tomme 1. Concepts Généraux.
6. **Y. Debard** Elasticité. Institut Universitaire de Technologie du Mans. Département Génie Mécanique et Productique.
7. **F. Sidoroff.** Mécanique des milieux continus. Engineering school Ecole Centrale de Lyon, 1980, pp.166.<cel-00530377>