

République Algérienne Démocratique et Populaire Ministère de l'Enseignement
Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohamed BOUDIAF-M'sila



جامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - M'sila

Faculté de Technologie
Département de Génie Electrique

Cours

Spécialité : Master

Maintenance des équipements industriels

Intitulé :

Vibrations des Machines Tournantes

Préparé par :

Dr. Brahim LADGHEM CHIKOUCHE

M'sila 2024

Chapitre V : Vitesses critiques- Diagrammes de Campbell

Pour la détermination du diagramme de Campbell qui représente l'évolution des fréquences propres en fonction de la vitesse de rotation, le rotor doit tout d'abord être étudiée en mouvement libre.

$$m\ddot{q}_1 - a\Omega\dot{q}_2 + c_1\dot{q}_1 + k_1q_1 = 0 \quad (5.1)$$

$$m\ddot{q}_2 + a\Omega\dot{q}_1 + c_2\dot{q}_2 + k_2q_2 = 0 \quad (5.2)$$

Les solutions sont cherchées sous la forme :

$$q_1(t) = Q_1 e^{rt} \quad ; \quad q_2(t) = Q_2 e^{rt} \quad (5.3)$$

En rapportant (5.3) dans (5.1) et dans (5.2), on obtient :

$$\begin{bmatrix} mr^2 + c_1r + k_1 & -a\Omega r \\ a\Omega r & mr^2 + c_2r + k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.4)$$

Pour une solution non propre de (5.4), le déterminant doit être nul, d'où le polynôme caractéristique d'ordre 4 suivant :

$$m^2r^4 + m(c_1 + c_2)r^3 + (k_1m + k_2m + c_1c_2 + a^2\Omega^2)r^2 + (k_2c_1 + k_1c_2)r + k_1k_2 = 0 \quad (5.5)$$

En général, les valeurs des coefficients d'amortissements c_1 et c_2 sont telles que les racines de (5.5) sont des paires de quantités complexes conjuguées qui se mettent sous la forme :

$$r(\Omega) = \sigma(\Omega) + j\omega(\Omega) \quad (5.6)$$

Avec $r(\Omega)$ et la fréquence complexe, $\omega(\Omega)$ est la fréquence propre du mouvement libre du système, $\sigma(\Omega)$ est le taux de décroissance (c'est-à-dire, le taux à lequel l'amplitude diminue dans le temps) qui change de signe : une valeur négative de σ_i caractérise un mouvement qui

diminue dans le temps (mouvement stable), tandis qu'une valeur positive caractérise une croissance exponentielle du mouvement dans le temps (mouvement instable).

La figure 5.1 représente l'évolution des fréquences propres du rotor en fonction de la vitesse de rotation $N = 30\Omega/\pi$ pour différentes valeurs du facteur d'amortissement ξ . Sur cette figure, on remarque que pour $\xi = 0.0002$, deux vitesses critiques 2759 tr/min et 3431 tr/min (points A et B). Pour $\xi = 0.015$, on remarque que l'évolution est différente et les vitesses critiques diminuent.

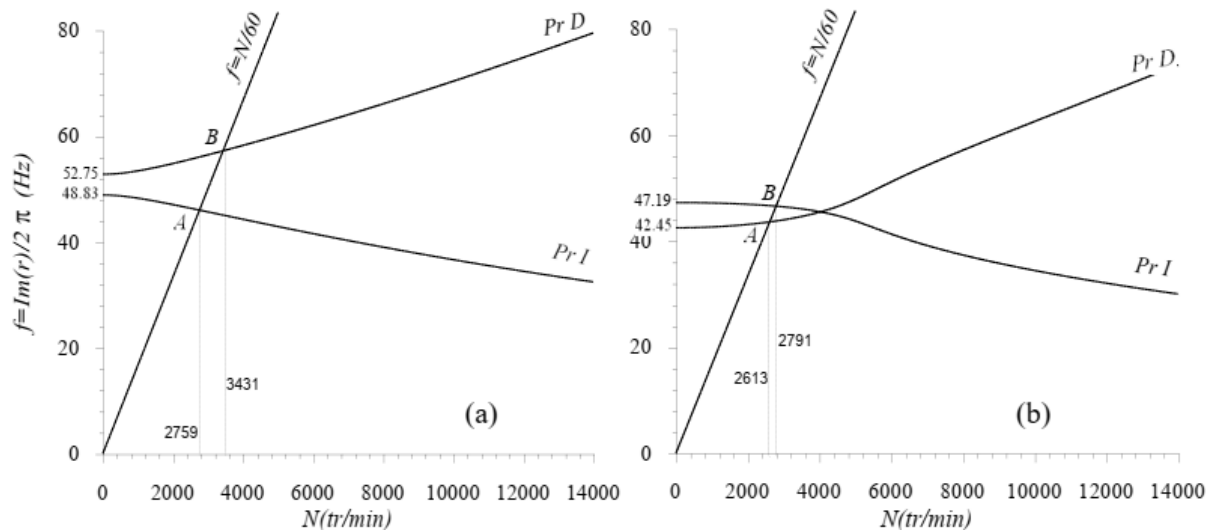


Figure 5.1. Diagramme de Campbell du modèle étudié, (a) : $\xi = 0.0002$, (b) : $\xi = 0.015$

La figure 5.2 représente la variation du taux de décroissance σ en fonction de la vitesse de rotation N pour différentes valeurs du facteur d'amortissement ξ . On remarque une distinction de la variation du taux de décroissance avec l'augmentation du facteur d'amortissement ξ et que toutes les valeurs du taux de décroissances sont négatives. Ces valeurs négatives de σ caractérisent un mouvement qui diminue dans le temps, alors le rotor est stable.

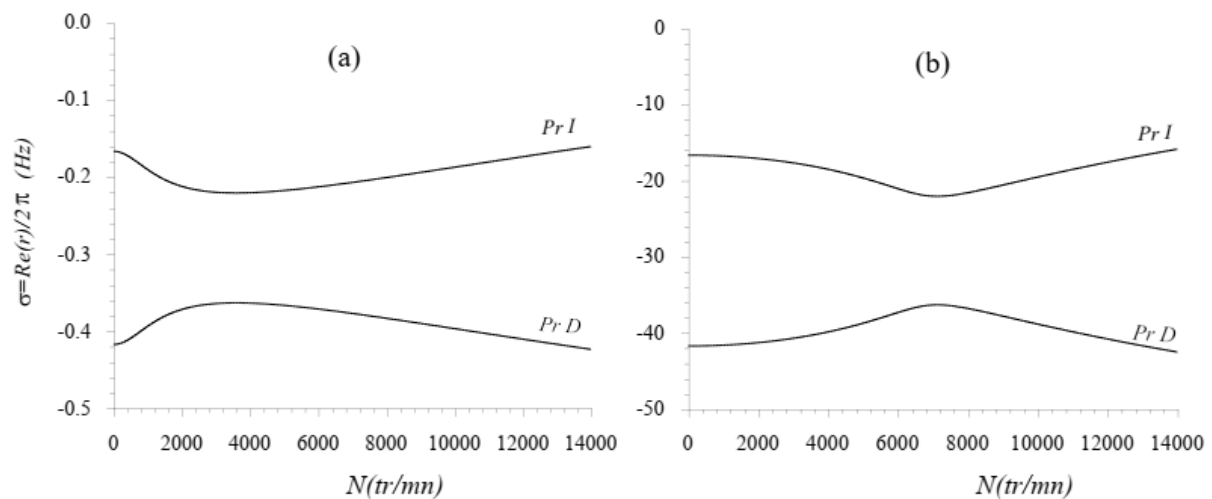


Figure 5.2. Taux de décroissance du modèle étudié, (a) : $\xi = 0.0002$, (b) : $\xi = 0.015$

La figure 5.3 représente la variation du sens de précession du centre géométrique du disque en fonction de la vitesse de rotation. Précession peut être définie comme un changement de direction de l'axe de rotation. Il existe deux types de précession : précession directe et inverse. Pour la précession directe le centre géométrique de rotor tourne dans le même sens de rotation et vice versa pour la précession inverse. On observe en particulier dans cette figure que les changements de sens de précession ne se produisent pas au passage des vitesses critiques.

Lorsque le rotor tourne à des vitesses très grandes, la trajectoire du centre du tourillon devient circulaire.

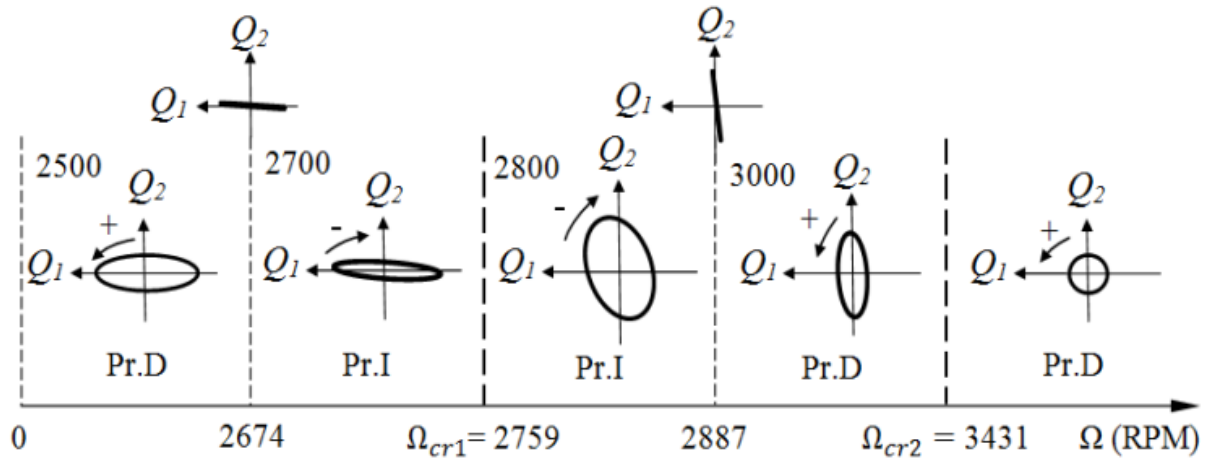


Figure 5.3. Variation du sens de la précession en fonction de la vitesse de rotation

Réponse due au balourd

Dans le cas de la présence d'une force d'excitation due au balourd, l'étude de la solution particulière se fait en considérant le système (5.7) et (5.8) avec second membre.

$$m\ddot{q}_1 - a\Omega\dot{q}_2 + c_1\dot{q}_1 + k_1q_1 = m_b d\phi(l_1) \Omega^2 \sin\Omega t \quad (5.7)$$

$$m\ddot{q}_2 + a\Omega\dot{q}_1 + c_2\dot{q}_2 + k_2q_2 = m_b \phi(l_1) d \Omega^2 \cos\Omega t \quad (5.8)$$

Comme le système est amorti, la réponse n'est en générale pas en phase avec la force du balourd, les solutions sont cherchées sous la forme :

$$q_1(t) = A_1 \sin\Omega t + B_1 \cos\Omega t, \quad q_2(t) = A_2 \sin\Omega t + B_2 \cos\Omega t \quad (5.9)$$

Ces expressions (5.9) sont reportées dans les équations du mouvement (5.7) et (5.8) et chaque équation conduit à deux équations traduisant l'égalité des facteurs de $\sin(\Omega t)$ et $\cos(\Omega t)$. Cela donne un ensemble d'équations algébrique linéaire qui peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} k_1 - m\Omega^2 & -c_1\Omega & 0 & a\Omega^2 \\ c_1\Omega & k_1 - m\Omega^2 & -a\Omega^2 & 0 \\ 0 & -a\Omega^2 & k_2 - m\Omega^2 & -c_2\Omega \\ a\Omega^2 & 0 & c_2\Omega & k_2 - m\Omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ A_2 \\ B_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m^* d\Omega^2 \\ 0 \\ 0 \\ m^* d\Omega^2 \end{Bmatrix} \quad (5.10)$$

Pour une valeur de Ω , la résolution de (5.10) donne $Q_1(\Omega)$ et $Q_2(\Omega)$ à partir de :

$$Q_1(\Omega) = \sqrt{A_1^2 + B_1^2} \quad ; \quad Q_2(\Omega) = \sqrt{A_2^2 + B_2^2} \quad (5.11)$$

La résolution du système algébrique linéaire (5.10) s'effectue par la méthode directe de **Gauss-Jordan**. La figure 5.3 représente l'évolution de l'amplitude de la réponse au balourd en fonction de la vitesse de rotation du rotor $N = 30\Omega/\pi$ pour deux valeurs du facteur d'amortissement ξ . Sur cette figure, on remarque que pour $\xi = 0.0002$, deux pics correspondants aux vitesses critiques 2759 tr/min et 3431 tr/min. Ce sont les mêmes vitesses critiques obtenues par le diagramme de Campbell (Figure 5.3.a, points *A* et *B*). Pour l'autre réponse ($\xi = 0.015$), on remarque la diminution des amplitudes des pics correspondants aux vitesses critiques 2613 tr/min et 2791 tr/min (Figure 5.7.b, points *A* et *B*).

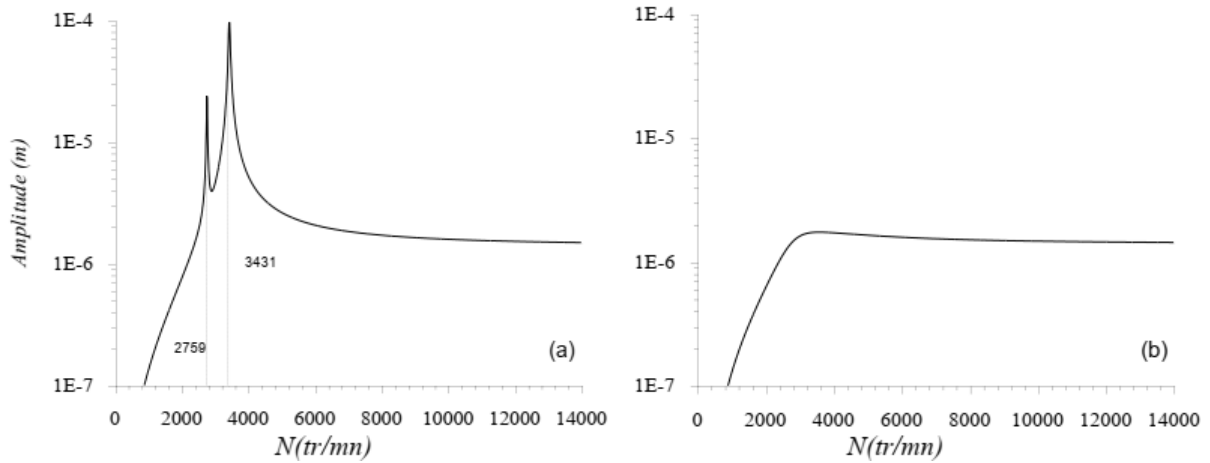


Figure 5.3. Amplitude de la réponse au balourd du modèle étudié, (a) : $\xi = 0.0002$, (b) : $\xi = 0.015$

Influence de la rigidité et l'amortissement sur la stabilité du rotor

Supposons que les caractéristiques de rigidité et d'amortissement sont les suivantes :

$$k_{xx} = 2 \times 10^5 \text{ N/m}, k_{zz} = 5 \times 10^5 \text{ N/m}, k_{xz} = -k_{zx} = 4 \times 10^5 \text{ N/m},$$

$$c_{xx} = c_{zz} = 10^2, c_{xz} = c_{zx} = 0$$

Les équations de mouvement libre (5.1) et (5.2) deviennent :

$$\begin{aligned} m\ddot{q}_1 - a\Omega\dot{q}_2 + c\dot{q}_1 + k_1q_1 + k_{12}q_2 &= 0 \\ m\ddot{q}_2 + a\Omega\dot{q}_1 + c\dot{q}_2 + k_2q_2 + k_{21}q_1 &= 0 \end{aligned} \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned}
k_1 &= k + k_{xx}\phi^2(l_2) = 1.34 \times 10^6 \text{ N/m} \\
k_2 &= k + k_{zz}\phi^2(l_2) = 1.57 \times 10^6 \text{ N/m} \\
k_{12} &= k_{xz}\phi^2(l_2) = 3 \times 10^4 \text{ N/m} \\
k_{21} &= k_{zx}\phi^2(l_2) = -3 \times 10^4 \text{ N/m} \\
c &= c_{xx}\phi^2(l_2) = c_{zz}\phi^2(l_2) = 75 \text{ Ns/m}
\end{aligned} \tag{5.13}$$

Les solutions des équations en mouvement libre (5.12) ont la même forme (5.9) ; en rapportant (5.9) dans (5.12), on obtient :

$$\begin{bmatrix} mr^2 + cr + k_1 & -a\Omega r + k_{12} \\ a\Omega r + k_{21} & mr^2 + cr + k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{5.14}$$

D'où le polynôme caractéristique suivant :

$$r^4 + \frac{2c}{m}r^3 + \left(\frac{k_1}{m} + \frac{k_2}{m} + \frac{c^2}{m^2} + \frac{a^2\Omega^2}{m^2} \right) r^2 + \left(\frac{ck_1}{m^2} + \frac{ck_2}{m^2} + \frac{a}{m^2}(k_{21} - k_{12})\Omega \right) r + \frac{k_1k_2 - k_{12}k_{21}}{m^2} = 0 \tag{5.15}$$

Pour voir l'influence de la rigidité du palier sur la stabilité du rotor, la figure 5.4 représente le diagramme de Campbell et le taux de décroissance en fonction de la vitesse de rotation N . On remarque que ce système devient instable pour $N > 1395$ tr/min, cette vitesse ; dite vitesse seuil d'instabilité ; correspond au changement de signe du taux de décroissance d'une valeur négative à une valeur positive. Le rotor est instable à partir de cette vitesse.

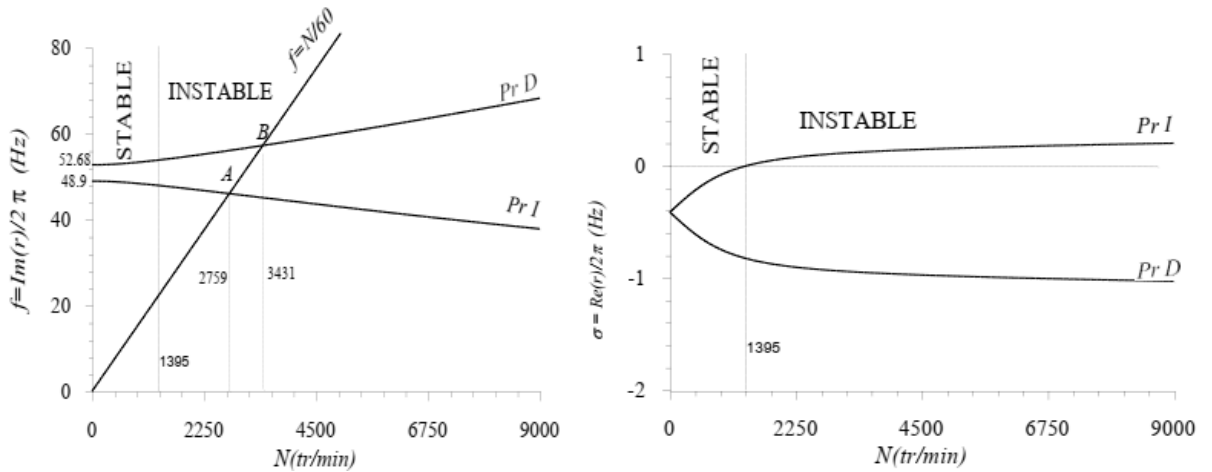


Figure 5.4. Influence de la rigidité du palier hydrodynamique sur la stabilité du rotor