

République Algérienne Démocratique et Populaire Ministère de l'Enseignement
Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohamed BOUDIAF-M'sila



جامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - M'sila

Faculté de Technologie
Département de Génie Electrique

Cours

Spécialité : Master

Maintenance des équipements industriels

Intitulé :

Vibrations des Machines Tournantes

Préparé par :

Dr. Brahim LADGHEM CHIKOUCHE

M'sila 2024

Chapitre IV : Modélisation du rotor et équations du mouvement

- **Modèle analytique**
 - **Modèle Éléments Finis**
-

Connue depuis les années 1950, la méthode des éléments finis a vu son apparition pour le calcul de contraintes et n'a cessé de se développer. Aujourd'hui, son champ d'application dépasse le cadre du génie mécanique. Désormais, elle est utilisée pour résoudre des problèmes d'écoulement de fluides ou de transferts de chaleur, d'électromagnétisme ou d'hydrologie.

Elle est considérée comme une généralisation et amélioration de la méthode de Rayleigh Ritz qui permet de traiter facilement des systèmes d'équation complexes ou de hauts degrés causés par une complexité des formes géométrique et de la condition aux limites. Son principe est le même dans tous les cas de figures : dans un premier temps la structure étudiée est maillée c'est à dire divisée en petits éléments de géométries simples, puis dans un second temps un ou plusieurs champs (déplacement, contrainte, température, pression, ou autre) sont approchés localement, sur chaque élément du maillage, par des fonctions de forme (ou fonctions d'interpolation).

En dynamique des structures, l'utilisation des éléments finis permet de transformer les équations aux dérivées partielles modélisent le mouvement en des équations différentielles temporelles (on passe du cas continu au cas discret pour les variables spatiales).

La mise en équations d'un système de solides, reliés par des éléments flexibles (de raideurs connues) et des amortisseurs (de constantes données) fournit une modélisation exacte du système. La modélisation en système continu (masse et rigidité réparties sur tout l'élément) fournit des résultats analytiques en s'appuyant sur la mécanique des milieux continus. Ses formulations ont à des cas élémentaires. Les vibrations d'une structure plus complexe, admettant un nombre élevé de degrés de liberté (ddl), nécessitent une méthode générale, modulable et programmable.

La méthode des éléments finis (MEF) décompose une structure en éléments simples élémentaires, de type poutre, plaque, rotor... Le comportement vibratoire de l'élément est ramené à celui des nœuds. Ensuite on connecte les différents éléments (maillage) en respectant les conditions de continuité.

On peut alors extraire les matrices de masse et de raideur de la structure complète et déduire les pulsations propres du système non amorti et ses modes normaux. Cet outil de simulation de systèmes mécaniques permet de mieux comprendre le comportement d'un rotor.

L'effet gyroscopique doit être pris en compte et des méthodes de résolution spécifiques peuvent être avantageusement employées.

Partie théorique

La méthode principale est dérivée du livre « *Rotordynamics Prediction in Engineering* » de Lalanne et Ferraris dont les étapes sont les suivantes :

- La structure est discrétisée en éléments de dimensions finies appelés éléments finis qui sont réunis en des points situés sur leur contour appelés points nodaux ou nœuds,
- A partir d'hypothèses raisonnables sur le vecteur déplacement d'un point de l'élément i , on calcule l'énergie cinétique T_i , l'énergie de déformation U_i et la fonction de dissipation de l'élément en fonction des déplacements des points nodaux.
- Si la structure est composée de N éléments alors, l'énergie totale est la somme des énergies élémentaires des N éléments

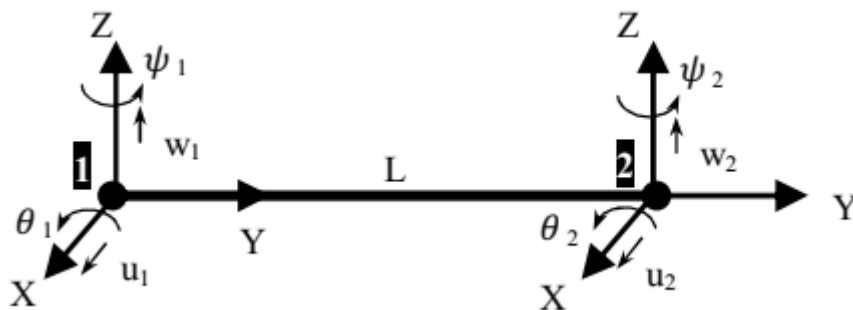


Figure 4.1. Modèle de poutre en flexion

L'élément sur la figure 4.1 représente un élément fini en flexion à deux nœuds et 4 ddl par nœud. Les deux flexions principales dans les deux plans perpendiculaires (y, x) et (y, z) et définies par les deux flèches u et w et les deux pentes θ et ψ respectivement.

Le vecteur des déplacements nodaux est :

$$\delta = [u_1, w_1, \theta_1, \psi_1, u_2, w_2, \theta_2, \psi_2]^T \quad (4.1)$$

Avec

$$\theta = \frac{\partial w}{\partial y} \quad \text{et} \quad \psi = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

Les mouvements le long et autour des axes X et Z sont respectivement :

$$\delta u = [u_1, \psi_1, u_2, \psi_2]^T \quad (4.2)$$

$$\delta w = [w_1, \theta_1, w_2, \theta_2]^T \quad (4.3)$$

L'élément fini est construit à partir de :

$$u = N_1(y)\delta u \quad (4.4)$$

$$w = N_2(y)\delta w \quad (4.5)$$

Où N_1 et N_2 sont des fonctions de forme d'une poutre en flexion, avec :

$$N_1 = \left[1 - 3\left(\frac{y}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{y}{L}\right)^3 ; -y + 2\left(\frac{y^2}{L}\right) - \left(\frac{y^3}{L^2}\right) ; 3\left(\frac{y}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{y}{L}\right)^3 ; \left(\frac{y^2}{L}\right) - \left(\frac{y^3}{L^2}\right) \right] \quad (4.6)$$

$$N_2 = \left[1 - 3\left(\frac{y}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{y}{L}\right)^3 ; y - 2\left(\frac{y^2}{L}\right) + \left(\frac{y^3}{L^2}\right) ; 3\left(\frac{y}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{y}{L}\right)^3 ; -\left(\frac{y^2}{L}\right) + \left(\frac{y^3}{L^2}\right) \right] \quad (4.7)$$

IV.1. L'énergie cinétique

Le rotor tourne à une vitesse Ω . Son énergie cinétique est donnée en fonction de ses caractéristiques physiques par :

$$\begin{aligned} T = & \frac{\rho S}{2} \int_0^L [\delta \dot{u}^T N_1^T N_1 \delta \dot{u} + \delta \dot{w}^T N_2^T N_2 \delta \dot{w}] dy \\ & + \frac{\rho S}{2} \int_0^L \left[\delta \dot{u}^T \frac{dN_1^T}{dy} \frac{dN_1}{dy} \delta \dot{u} + \delta \dot{w}^T \frac{dN_2^T}{dy} \frac{dN_2}{dy} \delta \dot{w} \right] dy \\ & - 2\rho l \Omega \int_0^L \delta \dot{u}^T \frac{dN_1^T}{dy} \frac{dN_2}{dy} \delta w dy + \rho l L \Omega^2 \end{aligned} \quad (4.8)$$

IV.2. L'énergie de déformation

L'énergie de déformation prenant en compte l'effet du cisaillement dû aux forces axiales, est donnée par :

$$\begin{aligned} U = & \frac{EI}{2} \int_0^L \left[\delta u^T \frac{d^2 N_1^T}{dy^2} \frac{d^2 N_1}{dy^2} \delta u + \delta w^T \frac{d^2 N_2^T}{dy^2} \frac{d^2 N_2}{dy^2} \delta w \right] dy \\ & + \frac{F_0}{2} \int_0^L \left[\delta u^T \frac{dN_1^T}{dy} \frac{dN_1}{dy} \delta u + \delta w^T \frac{dN_2^T}{dy} \frac{dN_2}{dy} \delta w \right] dy \end{aligned} \quad (4.9)$$

IV.3. Effets des paliers

Les paliers jouent le rôle de forces extérieures agissant sur le rotor. Ils sont caractérisés par leurs raideurs et amortissements.

$$F_u = -k_{xx}u - k_{xz}w - c_{xx}\dot{u} - c_{xz}\dot{w} \quad (4.10)$$

$$F_w = -k_{zz}w - k_{zx}u - c_{zz}\dot{w} - c_{zx}\dot{u} \quad (4.11)$$

Qui sous forme matricielle s'écrivent

$$[F] = -[K]\delta - [C]\dot{\delta} \quad (4.12)$$

avec

$$\text{Raideur palier } [K] = \begin{bmatrix} k_{xx} & 0 & k_{xz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{zx} & 0 & k_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

$$\text{Amortissement palier } [C] = \begin{bmatrix} c_{xx} & 0 & c_{xz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{zx} & 0 & c_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

IV.4. Equations du mouvement du rotor

IV.4.a. Pour l'arbre

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\delta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \delta} = (M + M_s) \ddot{\delta} + C \dot{\delta} \quad (4.15)$$

Avec les matrices masse et effet gyroscopique sont détaillées ci-dessous. La matrice masse est symétrique. La matrice C est antisymétrique.

- Matrice masse de l'arbre est $[M] + [M_s]$ avec :

$$[M] = \frac{\rho S l}{420} \begin{bmatrix} 156 & 0 & 0 & -22L & 54 & 0 & 0 & 13L \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 0 & 54 & -13L & 0 \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 0 & 13L & -3L^2 & 0 \\ -22L & 0 & 0 & 4L^2 & -13L & 0 & 0 & -3L^2 \\ 54 & 0 & 0 & -13L & 156 & 0 & 0 & 22L \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 0 & 156 & -22L & 0 \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & 0 & -22L & 4L^2 & 0 \\ 13L & 0 & 0 & -3L^2 & 22L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

$$[M_s] = \frac{\rho I}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & -3L & 0 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & 4L^2 & 3L & 0 & 0 & -L^2 \\ -36 & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & -3L \\ 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & 3L & 0 \\ 0 & -3L & -L^2 & 0 & 0 & 3L & 4L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & -L^2 & -3L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

Matrice masse de chaque disque

$$[M_d] = \begin{bmatrix} M_d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{Dxd} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{Dzd} \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

Matrice de raideur

$$[K] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & -6L & -12 & 0 & 0 & -6L \\ 0 & 12 & 6L & 0 & 0 & -12 & -6L & 0 \\ 0 & 6L & 4L^2 & 0 & 0 & -6L & -2L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & 4L^2 & 12L & 0 & 0 & 2L^2 \\ -12 & 0 & 0 & 6L & 12 & 0 & 0 & 6L \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 0 & 12 & -6L & 0 \\ 0 & 6L & 2L^2 & 0 & 0 & -6L & 4L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & 2L^2 & 6L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

$$[G] = \frac{\rho I_y \Omega}{15L} \begin{bmatrix} 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 3L & 0 & 0 & -4L^2 & -3L & 0 & 0 & L^2 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ -36 & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 3L & 0 & 0 & L^2 & -3L & 0 & 0 & -4L^2 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

$$[C]_p = \begin{bmatrix} C_{xx}^i & 0 & C_{xz}^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{zx}^i & 0 & C_{zz}^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

$$[K]_p = \begin{bmatrix} K_{xx}^i & 0 & K_{xz}^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{zx}^i & 0 & K_{zz}^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

- Effet du balourd :

L'énergie cinétique du balourd i qui participe à la construction du vecteur force d'excitation étant

$$T_B = m_i r_i \dot{\phi} [\dot{u} \cos(\phi + \alpha_i) - \dot{w} \sin(\phi + \alpha_i)] \quad (4.23)$$

L'application des équations de Lagrange permet de déterminer les efforts dus au balourd i :

$$\begin{cases} F_u = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_B}{\partial \dot{u}} \right) = m_i r_i \dot{\phi}^2 \sin(\phi + \alpha_i) \\ F_w = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_B}{\partial \dot{w}} \right) = m_i r_i \dot{\phi}^2 \cos(\phi + \alpha_i) \end{cases} \quad (4.24)$$

$$\begin{cases} F_u = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_B}{\partial \dot{u}} \right) = m_i r_i \dot{\phi}^2 \sin(\phi + \alpha_i) \\ F_w = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_B}{\partial \dot{w}} \right) = m_i r_i \dot{\phi}^2 \cos(\phi + \alpha_i) \end{cases} \quad (4.25)$$

$$\begin{Bmatrix} F_u \\ F_w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m_i r_i \cos \alpha_i \\ -m_i r_i \sin \alpha_i \end{Bmatrix} \dot{\phi}^2 \sin \phi + \begin{Bmatrix} m_i r_i \sin \alpha_i \\ m_i r_i \cos \alpha_i \end{Bmatrix} \dot{\phi}^2 \cos \phi \quad (4.26)$$

$$\begin{Bmatrix} F_u \\ F_w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m_i r_i \cos \alpha_i \\ -m_i r_i \sin \alpha_i \end{Bmatrix} \Omega^2 \sin \phi + \begin{Bmatrix} m_i r_i \sin \alpha_i \\ m_i r_i \cos \alpha_i \end{Bmatrix} \Omega^2 \cos \phi \quad (4.27)$$

Or

$$\begin{Bmatrix} F_u \\ F_w \\ F_\psi \\ F_\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m_i r_i \Omega^2 \sin(\Omega t + \alpha_i) \\ m_i r_i \Omega^2 \cos(\Omega t + \alpha_i) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.28)$$

- Effet de la fondation sur le rotor

L'introduction de ce système dans l'ensemble des équations se fait comme suit :

$$M_p \ddot{u}_p = -K_{xx}^s u_p - K_{xx}(u_p - u) - K_{xz}^s w_p - K_{xz}(w_p - w) - C_{xx}^s \dot{u}_p - C_{xx}(\dot{u}_p - \dot{u}) - C_{xz}^s \dot{w}_p - C_{xz}(\dot{w}_p - \dot{w}) \quad (4.29)$$

$$M_p \ddot{w}_p = -K_{zz}^s w_p - K_{zz}(w_p - w) - K_{zx}^s u_p - K_{zx}(u_p - u) - C_{zz}^s \dot{w}_p - C_{zz}(\dot{w}_p - \dot{w}) - C_{zx}^s \dot{u}_p - C_{zx}(\dot{u}_p - \dot{u}) \quad (4.30)$$

D'où :

$$M_p \ddot{u}_p - K_{xx} u + (K_{xx}^s + K_{xx}) u_p - K_{xz} w + (K_{xz}^s + K_{xz}) w_p - C_{xx} \dot{u} + (C_{xx}^s + C_{xx}) \dot{u}_p - C_{xz} \dot{w} + (C_{xz}^s + C_{xz}) \dot{w}_p = 0 \quad (4.31)$$

$$M_p \ddot{w}_p - K_{zz} w + (K_{zz}^s + K_{zz}) w_p - K_{zx} u + (K_{zx}^s + K_{zx}) u_p - C_{zz} \dot{w} + (C_{zz}^s + C_{zz}) \dot{w}_p - C_{zx} \dot{u} + (C_{zx}^s + C_{zx}) \dot{u}_p = 0 \quad (4.32)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \delta} = (K_C + K_F) \delta \quad (4.33)$$

K_C prend en compte l'effet de cisaillement, K_F est due aux forces axiales.

IV.4.b. Pour le disque

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\delta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \delta} = M_d \ddot{\delta} + C_d \dot{\delta} \quad (4.34)$$

$$M_d = \begin{bmatrix} M_D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{Dx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{Dz} \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

$$C_d = \Omega \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{Dy} \\ 0 & 0 & I_{Dy} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

A partir des équations de l'arbre, du disque et des paliers l'équation du mouvement du rotor s'écrit sous la forme :

$$M \ddot{\delta} + C(\Omega) \dot{\delta} + K \delta = 0 \quad (4.37)$$

La matrice masse contient la masse du rotor et des disques. La matrice raideur contient la raideur de l'arbre et des paliers. C contient l'effet gyroscopique de l'arbre et des disques et la matrice amortissement des paliers.

L'assemblage des vecteurs déplacements de tous les nœuds du rotor en éléments finis donne le vecteur déplacement global $\{X\}$ et les matrices globales. Dans ce cas l'équation du mouvement du rotor devient :

$$[M]\{\ddot{X}\} + (\Omega[C_g] + [C_p])\{\dot{X}\} + ([K_r] + [K_p])\{X\} = 0 \quad (4.38)$$