

République Algérienne Démocratique et Populaire Ministère de l'Enseignement  
Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université Mohamed BOUDIAF-M'sila



جامعة محمد بوضياف - المسيلة  
Université Mohamed Boudiaf - M'sila

Faculté de Technologie  
Département de Génie Electrique

## Cours

Spécialité : Master

Maintenance des équipements industriels

Intitulé :

# Vibrations des Machines Tournantes

Préparé par :

Dr. Brahim LADGHEM CHIKOUCHE

M'sila 2024

## Chapitre III : Formulation énergétique

- Energie cinétique du disque.
  - Energie cinétique du rotor.
  - Energie de déformation du disque.
  - Energie de déformation du rotor.
  - Travail des forces extérieures, du balourd, des paliers.
- 

### III.1. Energie cinétique du disque

L'énergie cinétique du disque est la somme de l'énergie cinétique de translation et l'énergie cinétique de rotation du centre de masse  $C$  :

$$T_D = \frac{1}{2} M_D \left( \vec{V}(C/R_0) \right)^2 + \frac{1}{2} \{ \omega \}_R^T [I_C(D)] \{ \omega \}_R \quad (3.1)$$

Avec  $\vec{V}(C/R_0)$  est le vecteur vitesse absolue de  $C$ , exprimé dans  $R_0$ , obtenu en dérivant par rapport au temps le vecteur position  $\overrightarrow{OC}$  avec  $\phi = \Omega$  constante :

$$\vec{V}(C/R_0) = \left[ \frac{d\overrightarrow{OC}}{dt} \right]_{R_0} = \frac{d}{dt} (u \vec{x}_0 + L_1 \vec{y}_0 + w \vec{z}_0) = \dot{u} \vec{x}_0 + \dot{w} \vec{z}_0 \quad (3.2)$$

L'expression de l'énergie cinétique du disque peut être déduite :

$$T_D = \frac{1}{2} M_D (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} (I_{Dx} \omega_x^2 + I_{Dy} \omega_y^2 + I_{Dz} \omega_z^2) \quad (3.3)$$

L'expression (3.3) peut être simplifiée car le disque est symétrique, les angles et sont petits (vibration linéaire) et la vitesse angulaire est constante. L'expression (3.3) devient alors :

$$T_D = \frac{1}{2} M_D (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} (I_{Dx} \omega_x^2 + I_{Dy} \omega_y^2 + I_{Dz} \omega_z^2) \quad (3.4)$$

L'expression (3.4) peut être simplifiée car le disque est symétrique, les angles et sont petits (vibration linéaire) et la vitesse angulaire est constante. L'expression (3.4) devient alors

$$T_D = \frac{1}{2} M_D (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} I_{Dx} (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2) + \frac{1}{2} I_{Dy} (\Omega^2 + 2\Omega\dot{\psi}\theta) \quad (3.5)$$

Le terme  $I_{Dy} \Omega \dot{\psi} \theta$  représente l'effet gyroscopique.

### III.2. Energie cinétique de l'arbre

L'arbre est représenté par une poutre continue de section circulaire constante, caractérisé par une énergie cinétique et une énergie de déformation. La formulation générale de l'énergie cinétique de l'arbre est une extension de celle du disque en intégrant sur la longueur de l'arbre. Sur la figure 3.1, on présente un élément d'arbre considéré comme un disque élémentaire. L'énergie cinétique de l'arbre s'écrit alors :

$$\begin{aligned} T_a &= \int_0^L \left( \frac{1}{2} m_a (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} I_{ax} (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2) + \frac{1}{2} I_{ay} (\Omega^2 + 2\Omega\dot{\psi}\theta) \right) dy \\ &= \frac{1}{2} \rho S \int_0^L (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dy + \frac{1}{2} \rho I \int_0^L (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2) dy + \rho I L \Omega^2 + 2\rho I \Omega \int_0^L \dot{\psi} \theta dy \end{aligned} \quad (3.6)$$

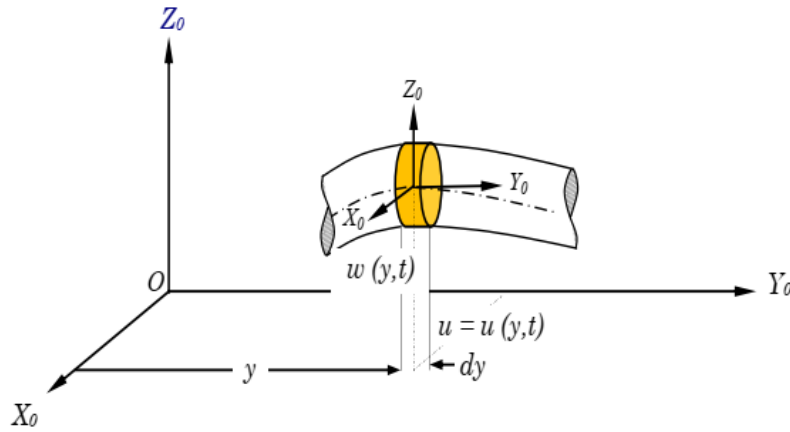


Figure 3.1. Élément d'arbre en flexion

Où  $\rho$  est la masse volumique de l'arbre,  $m_a$  est la masse par unité de longueur de l'arbre,  $S$  est l'aire de la section droite de l'arbre et  $I = \pi R_1^4/4$  est le moment d'inertie diamétral,  $R_1$  est le rayon de l'arbre.

- La première intégrale de (3.6) est l'expression classique de l'énergie cinétique d'une poutre en flexion.
- La seconde intégrale de (3.6) correspond à l'effet secondaire de l'inertie de rotation.
- Le terme  $\rho I L \Omega^2$  est constant et a une contribution nulle dans les équations du mouvement.
- La dernière intégrale de (3.6) représente l'effet gyroscopique.

### III.3. Energie de déformation de l'arbre

Le point  $O_1$  de la figure 3.2 est le centre géométrique d'une section de la poutre à l'état déformée,  $B(x,z)$  est un point de cette section droite,  $\dot{u}$  et  $\dot{w}$  sont les déplacements du centre  $O_1$  par rapport aux axes  $(O, X)$  et  $(O, Z)$ . La déformation longitudinale du point  $B$  s'écrit :

$$\varepsilon_{yy} = -x \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} - z \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \quad (3.7)$$

L'énergie de déformation de l'arbre a comme expression

$$U_a = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{yy} \varepsilon_{yy} dV \quad (3.8)$$

Avec  $V$  est le volume de la poutre,  $\sigma_{yy}$  est la contrainte longitudinale. La relation entre la contrainte et la déformation est :

$$\sigma_{yy} = E \varepsilon_{yy} \quad (3.9)$$

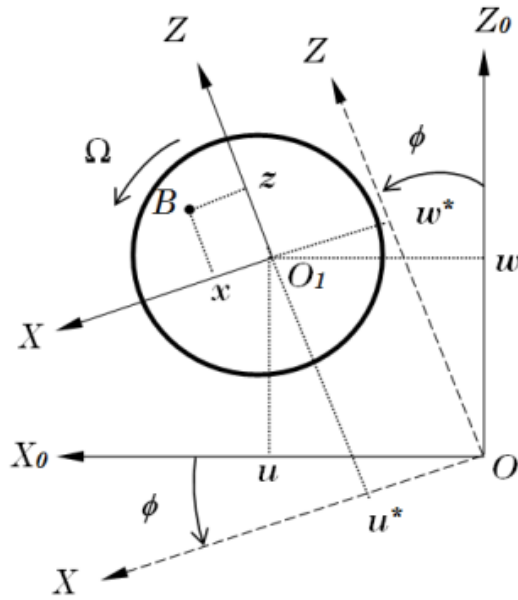


Figure 3.2. Section droite de l'arbre, mouvement dans le plan  $(O, X_0, Z_0)$

Compte tenu de (3.9), l'expression (3.8) devient :

$$U_a = \frac{1}{2} E \int_V \varepsilon_{yy}^2 dV \quad (3.10)$$

En tenant compte de l'expression (3.7), l'énergie de déformation s'écrit :

$$\begin{aligned} U_a &= \frac{E}{2} \int_0^L \int_{s_a} \left( -x \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} - z \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 ds dy \\ &= \frac{E}{2} \int_0^L \int_{s_a} \left[ x^2 \left( \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 + z^2 \left( \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 + 2xz \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right] ds dy \end{aligned} \quad (3.11)$$

Par suite de la symétrie de la section de l'arbre, l'intégrale correspondant au troisième terme de (3.11) est nulle. En introduisant les inerties diamétrales de la section droite par rapport à  $(0, X)$  et à  $(0, Z)$  on a :

$$I_x = \int_s z^2 ds \quad (3.12)$$

$$I_z = \int_s x^2 ds \quad (3.13)$$

et l'énergie de déformation de l'arbre a donc comme expression :

$$U_a = \frac{E}{2} \int_0^l \left[ I_z \left( \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 + I_x \left( \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy \quad (3.14)$$

De préférable exprimer  $U_a$  en fonction des déplacements  $u$  et  $w$ . Le passage de  $u, w$  à  $\dot{u}, \dot{w}$  s'écrit (voir Figure 3.2) :

$$u^* = u \cos \Omega t - w \sin \Omega t \quad (3.15)$$

$$w^* = u \sin \Omega t + w \cos \Omega t \quad (3.16)$$

En tenant en compte de (3.15) et (3.16), l'expression (3.14) devient alors :

$$U_a = \frac{E}{2} \int_0^l \left[ I_z \left( \cos \Omega t \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \sin \Omega t \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + I_x \left( \sin \Omega t \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \cos \Omega t \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy \quad (3.17)$$

Finalement, pour le cas le plus courant d'un arbre symétrique ( $I_x = I_z = I$ ) l'énergie de déformation se simplifie à :

$$U_a = \frac{EI}{2} \int_0^l \left[ \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy \quad (3.18)$$

### III.4. Energie cinétique du balourd

Le balourd (figure 3.3) est dû à une masse  $m_b$  située à la distance  $d$  du centre géométrique  $C$  du disque et son énergie cinétique doit être calculée. La masse reste dans un plan perpendiculaire à l'axe ( $O, Y$ ) et sa coordonnée selon cet axe est constante. Dans le repère  $R_0$ , les coordonnées de la masse  $m_b$  sont :

$$O\vec{D} = O\vec{C} + C\vec{D} = \begin{Bmatrix} u + d \sin \Omega t \\ cte \\ w + d \cos \Omega t \end{Bmatrix}_{R_0} \quad (3.19)$$

D'où la vitesse absolue :

$$\vec{V}(D/R_0) = \left[ \frac{d\vec{OD}}{dt} \right]_{R_0} = \begin{Bmatrix} \dot{u} + d\Omega \cos \Omega t \\ 0 \\ \dot{w} - d\Omega \sin \Omega t \end{Bmatrix}_{R_0} \quad (3.20)$$

et l'énergie cinétique sera :

$$T_b = \frac{1}{2} m_b \left[ \vec{V}(D/R_0) \right]^2 = \frac{1}{2} m_b \left( \dot{u}^2 + \dot{w}^2 + \Omega^2 d^2 + 2\Omega d(\dot{u} \cos \Omega t - \dot{w} \sin \Omega t) \right) \quad (3.21)$$

Le terme  $m_b \Omega^2 d^2 / 2$  est constant et donc sans influence sur les équations du mouvement. La masse  $m_b$  est négligée devant celle du disque, alors l'énergie cinétique du balourd peut se mettre sous la forme :

$$T_b \simeq m_b \Omega d (\dot{u} \cos \Omega t - \dot{w} \sin \Omega t) \quad (3.22)$$

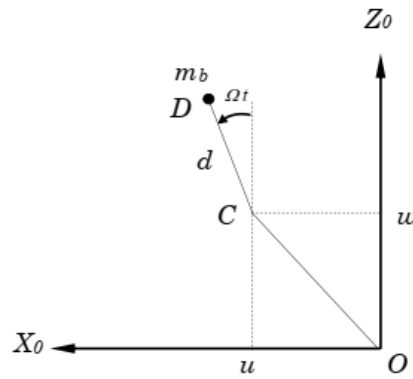


Figure 3.3. Paramétrage du balourd élémentaire

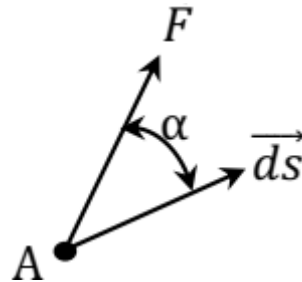
### III.5. Travail des forces extérieures, du balourd, des paliers

Considérons un point matériel en A décrit une trajectoire curviligne sous l'action une force  $F$  variable en module et en direction. Le déplacement réalisé par A et  $\vec{ds}$  formant un angle  $\alpha$  avec la force  $\vec{F}$ . Tel que :

$$\vec{ds} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k} \quad (3.23)$$

Le travail mécanique élémentaire  $\delta A$  réalisé par cette force est le produit **scalaire** du vecteur force  $\vec{F}$  par le vecteur déplacement  $\vec{ds}$ , on écrit alors :

$$\delta A = (\vec{F}, \vec{ds}) = F \cdot ds \cdot \cos(\vec{F}, \vec{ds}) = F \cdot ds \cdot \cos \alpha = F_x dx + F_y dy + F_z dz \quad (3.24)$$



Pour le  $i^{ème}$  point matériel de masse  $m_i$  d'un système mécanique, la résultante de toutes les forces est la somme de la résultante des forces extérieures  $\vec{F}_i^{ext}$ , et celle des forces intérieures,  $\vec{F}_i^{int}$ , écrite comme suit :

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{Ext} + \vec{F}_i^{Int} \quad (3.25)$$

En vertu de la loi de la dynamique, on a :

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{Ext} + \vec{F}_i^{Int} = m_i \vec{a}_i \quad (3.26)$$

tel que  $a_i$  est son accélération. Ainsi donc et en vertu de la troisième loi de Newton, les forces intérieures agissant dans une même solide se font mutuellement équilibre. Alors on aura  $\vec{F}_i^{int} = 0$ . L'équation (4.8) se ramène à :

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{Ext} = m_i \vec{a}_i \Rightarrow \vec{F}_i^{Ext} - m_i \vec{a}_i = 0 \quad (3.27)$$

(Principe de D'Alembert)

Or on peut déviser la résultante des forces extérieures en force actives connues,  $\vec{F}_i^A$  et la résultante des réactions de liaisons (forces réactives ou passives),  $\vec{R}_i$ , tel que :

$$\vec{F}_i^{Ext} = \vec{F}_i^A + \vec{R}_i = m_i \vec{a}_i \quad (3.28)$$

On peut encore écrire :

$$\vec{F}_i^A + \vec{R}_i - m_i \vec{a}_i = 0 \quad (3.29)$$

Si on multiplie cette dernière équation par le vecteur de déplacement virtuel,  $\delta \vec{r}_i$  ou par le vecteur de vitesse virtuelle,  $\dot{\delta \vec{r}_i}$  et pour tous les points matériels du système on obtient :  
Le principe des travaux virtuels

$$\sum_{i=1}^n (\vec{F}_i^A + \vec{R}_i - m_i \vec{a}_i) \delta \vec{r}_i = 0 \quad (3.30)$$

Le principe des puissances virtuelles :

$$\sum_{i=1}^n (\vec{F}_i^A + \vec{R}_i - m_i \vec{a}_i) \dot{\delta \vec{r}_i} = 0 \quad (3.31)$$

Si les liaisons sont considérées parfaites, donc : Les travaux virtuels des réactions des liaisons

$$\delta A_R = \sum_{i=1}^n \vec{R}_i \delta \vec{r}_i = 0 \quad (3.32)$$

Les puissances virtuelles des réactions des liaisons

$$\delta P_i = \sum_{i=1}^n \vec{R}_i \dot{\delta \vec{r}_i} = 0 \quad (3.33)$$

Ce qui ramène à :

$$\sum_{i=1}^n (\vec{F}_i^A - m_i \vec{a}_i) \delta \vec{r}_i = 0 \text{ et } \sum_{i=1}^n (\vec{F}_i^A - m_i \vec{a}_i) \dot{\delta \vec{r}_i} = 0 \quad (3.34)$$

### III.7. Principe des travaux virtuels

Soit un système mécanique de  $n$  points matériels soumis à des liaisons stationnaires, bilatérales et parfaites. Considérant un point de ce système soumis à l'action de plusieurs forces  $F_1, F_2 \dots F_n$ . On suppose un déplacement virtuel (hypothétique),  $\delta s$ , qui représente un déplacement infiniment petit du premier ordre différent au déplacement réel,  $ds$ . Le travail de chacun des forces  $F_1, F_2 \dots F_n$  réalisé le long des déplacements virtuels  $\delta s$ , est appelé travail virtuel donné comme suit:

$$\begin{aligned}\delta A &= F_1 \cos \alpha_1 \delta s + F_2 \cos \alpha_2 \delta s + \dots + F_n \cos \alpha_n \delta s \\ &= (F_1 \cos \alpha_1 + F_2 \cos \alpha_2 + \dots + F_n \cos \alpha_n) \delta s\end{aligned}\quad (3.35)$$

Ce point se trouve en équilibre, si seulement si, les travaux virtuels des forces appliquées s'annulent pour tout déplacement virtuel de ce point. Dans le cas des corps rigides est en équilibre, la somme des travaux virtuels des forces extérieures appliquées au corps rigide (ou un système de  $n$  points matériels) est nulle pour tout déplacement virtuel à partir de la position d'équilibre considérée. Et on écrit :

$$\begin{aligned}\delta A &= \sum_{i=1}^n \delta A_i = \sum_{i=1}^n (\vec{F}_i, \vec{\delta r}_i) \\ &= \sum_{i=1}^n (F_x \delta x + F_y \delta y + F_z \delta z) = 0\end{aligned}\quad (3.36)$$

En utilisant les relations de transformation entre coordonnées cartésiennes et coordonnées généralisées suivantes : Soit un système de  $n$  points matériels ( $i=1, n$ ) de  $k$  degrés de liberté. On a donc  $k$  coordonnées généralisées,  $q_j$  ( $j=1, k$ ). Les relations de transformation sont comme suit

$$\delta x_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial x_i}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \delta q_k = \sum_{j=1}^k \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \delta q_j \quad (3.37)$$

$$\delta y_i = \frac{\partial y_i}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial y_i}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial y_i}{\partial q_k} \delta q_k = \sum_{j=1}^k \frac{\partial y_i}{\partial q_j} \delta q_j \quad (3.38)$$

$$\delta z_i = \frac{\partial z_i}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial z_i}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \delta q_k = \sum_{j=1}^k \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \delta q_j \quad (3.39)$$

Les travaux virtuels de toutes les forces actives dans le système sont :

$$\begin{aligned}\delta A &= \sum_{i=1}^n \delta A_i = \sum_{i=1}^n (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \left( X_i \sum_{j=1}^k \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \delta q_j + Y_i \sum_{j=1}^k \frac{\partial y_i}{\partial q_j} \delta q_j + Z_i \sum_{j=1}^k \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \delta q_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k \left( X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j\end{aligned}\quad (3.40)$$



Mathématiquement on peut permuter entre les deux sommes par rapport à  $i$  et par rapport à  $j$ , on découle alors à :

$$\delta A = \sum_{i=1}^n \delta A_i = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n \left( X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j = \sum_{j=1}^k Q_{ij} \delta q_j \quad (3.41)$$

Où  $Q_{ij}$  est appelée force généralisée correspondante à la coordonnée généralisée  $q_j$ , elle est exprimée :

$$Q_{ij} = \sum_{i=1}^n \left( X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right) \quad (3.42)$$

On a donc pour un point matériel quelconque :

$$\delta A = \sum_{j=1}^k Q_j \delta q_j = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_k \delta q_k \quad (3.41)$$