

République Algérienne Démocratique et Populaire Ministère de l'Enseignement
Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohamed BOUDIAF-M'sila



Faculté de Technologie
Département de Génie Electrique

Cours

Spécialité : Master

Maintenance des équipements industriels

Intitulé :

Vibrations des Machines Tournantes

Préparé par :

Dr. Brahim LADGHEM CHIKOUCHE

M'sila 2024

Chapitre II : Principe de Hamilton

II.1. Introduction

Dans le principe de Hamilton pour un système mécanique, les variations possibles sont l'ensemble des déplacements virtuels qui ont été considérés dans le quatrième chapitre. Les positions des points matériels du système à tout moment peuvent être considérées comme déplacées de petites quantités arbitraires δr_i ($i = 1, 2, \dots, n$) à partir des positions r_i ($i = 1, 2, \dots, n$) qu'elles occuperaient réellement dans le mouvement. Ces déplacements virtuels sont considérés réalisés sans variation de temps, mais ils peuvent eux-mêmes varier avec le temps.

Il convient d'exiger que les déplacements virtuels δr_i soient des fonctions continues et différentiables du temps. C'est alors, il est possible de considérer la variation des positions $r_i + \delta r_i$ comme une variable du système, de la même manière que les vecteurs de position r_i en fonction du temps qui détermine le mouvement réel du système. En utilisant cette approche, la vitesse des particules dans le mouvement varié à tout moment peut être donné par les expressions $\dot{r}_i + \delta \dot{r}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), où :

$$\delta \dot{r}_i = \frac{d}{dt} \delta r_i \quad (2.1)$$

Il est donc possible de considérer l'énergie cinétique δT du système pour une variation de la position. C'est une variation entre la nouvelle énergie cinétique et celle actuelle dans le même instant t comme suit :

$$\delta T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i [(\dot{r}_i + \delta \dot{r}_i)^2 - \dot{r}_i^2] = \sum_{i=1}^n m_i \dot{r}_i \delta \dot{r}_i \quad (2.2)$$

II.2. Principe d'Hamilton

L'intégrale de cette énergie cinétique durant tout le mouvement à partir de l'instant initial $t = t_0$ à l'instant final t est obtenue par la technique d'intégration par partie comme suit :

$$\delta T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i [(\dot{r}_i + \delta \dot{r}_i)^2 - \dot{r}_i^2] = \sum_{i=1}^n m_i \dot{r}_i \delta \dot{r}_i \quad (2.3)$$

$$\int_{t_0}^t \delta T dt = [\sum_{i=1}^n m_i \dot{r}_i \delta r_i]_{t_0}^t - \int_{t_0}^t \sum_{i=1}^n m_i \ddot{r}_i \delta r_i dt \quad (2.4)$$

En introduisant l'hypothèse que les déplacements virtuels sont égaux à zéro aux positions initiale et finale :

$$t = t_0 \text{ et } t = t_1 \Rightarrow \delta r_i = 0, i = 1, 2, \dots, n$$

Ceci implique que la variation de la position du système est entre les mêmes configurations initiale et finale au même temps que dans l'actuel mouvement. Donc le premier terme de l'équation ci-dessus est égal à zéro. Le terme qui reste peut-être simplifié par l'introduction de l'équation de mouvement pour chaque point matériel :

$$m_i \ddot{r}_i = F_i \text{ avec } i = 1, 2, \dots, n$$

Tel que F_i est la résultante des forces. On peut donc réécrire l'équation précédente comme :

$$\int_{t_0}^t (\delta T + \sum_{i=1}^n m_i \ddot{r}_i \delta r_i) dt = 0 \quad (2.5)$$

C'est le principe d'Hamilton pour un système dynamique. On remarque bien que seules les forces qui travaillent dans un déplacement virtuel doivent être incluses dans l'équation ci-dessus. Si ces forces sont en outre conservatrices, ou du moins dérivées d'une fonction potentielle, il est alors possible d'introduire une fonction potentielle U telle que :

$$\delta U = - \sum_{i=1}^n F_i \cdot \delta r_i \quad (2.6)$$

Dans ce cas, et pour les systèmes holonomes soumis aux forces actives $\vec{F}_i$ dérivées d'un potentiel $U(\vec{r}_i, t)$ on peut donc introduire la fonction de Lagrange (Lagrangien) en fonction des coordonnées et des vitesses généralisées et du temps sous la forme suivante :

$$L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = T(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) - U(\vec{q}, t) \quad (2.7)$$

Le principe d'Hamilton pour un tel système est donné sous la forme :

$$\int_{t_0}^t \delta L dt = 0 \quad (2.8)$$

De plus, si le système est également holonome, de sorte que seuls les mouvements géométriquement possibles doivent être considérés, il est alors possible de réécrire l'équation ci-dessus :

$$\delta \int_{t_0}^t L dt = 0 \quad (2.9)$$

Dans la dérivation du résultat ci-dessus, il a été seulement montré que l'intégrale du lagrangien a une valeur stationnaire par rapport avec les mouvements voisins. Dans la plupart des applications, cependant, il est habituellement trouvé que cette valeur stationnaire est un minimum, bien que des exceptions se produisent. Il est donc important de souligner que le principe d'Hamilton n'est pas toujours un principe strict minimum. On peut également voir à partir de la dérivation ci-dessus que le principe d'Hamilton est essentiellement une forme intégrée de l'équation fondamentale. Une caractéristique importante du principe d'Hamilton,

est qu'il est indiqué sans référence à un système particulier de coordonnées. Enfin, il faut souligner que, bien que le principe de Hamilton soit d'un intérêt théorique considérable, il a peu de valeur pratique applications.

Les paramètres $\vec{q}$, $\dot{\vec{q}}$, t sont appelés coordonnées Lagrangiennes. Ils déterminent l'état de mouvement instantané du système, tandis que le mouvement dans le temps est déterminé par l'équation de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \vec{q}} = 0 \quad (2.10)$$

qui constitue un système d'équations différentielles de second ordre de nombre égal au nombre de degré de liberté k . Hamilton a transformé ces équations pour avoir un système d'équations différentielles de premier ordre, mais cette fois de nombre doublé ($2k$). Pour déterminer l'état de mouvement du système, à la place de la vitesse généralisée $\dot{\vec{q}}$, Hamilton a proposé l'utilisation de la notion de la quantité de mouvement généralisée (moment conjugué ou encore impulsion généralisée), tel que :

$$\vec{P} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\vec{q}}} \quad (2.11)$$

II.3. Fonction de Hamilton (le Hamiltonien)

Les « équations canoniques » de Hamilton constituent une autre façon d'exprimer les équations dynamiques du mouvement d'un système ayant k degrés de liberté, il existe $2k$ équations hamiltoniennes du premier ordre comparé à k équations lagrangiennes du second ordre.

Pour traiter la plupart des problèmes, la méthode hamiltonienne est moins pratique que le lagrangien. Cependant, dans certains domaines les équations de Hamilton et le point de vue hamiltonien sont d'une grande importance. Pour déterminer le mouvement d'un point matériel dans l'espace réel, Hamilton introduit une fonction spéciale dite fonction de Hamilton (ou simplement le Hamiltonien) sous la forme suivante :

$$H(\vec{q}, \vec{p}, t) = \vec{p}^T \dot{\vec{q}} - L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) \quad (2.12)$$

Qu'on peut aussi l'écrire comme :

$$H(q_j, p_j, t) = \sum_{j=1}^k p_j \dot{q}_j - L(q_j, \dot{q}_j, t) \quad (2.13)$$

Avec :

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$$

est la quantité de mouvement généralisée (**moment conjugué**) correspondante à la coordonnée q_j tel que :

- Si q_j est une longueur $\Rightarrow p_j$ est une quantité de mouvement linéaire,
- Si q_j est un angle $\Rightarrow p_j$ est un moment cinétique (moment angulaire).

En vertu de l'expression de l'énergie cinétique est de :

$$T = \frac{1}{2} \dot{\vec{q}}^T \cdot m \cdot \dot{\vec{q}}$$

$$L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = \vec{p}^T \dot{\vec{q}} - H(\vec{q}, \vec{p}, t) \quad (2.14)$$

Et si on remplace dans l'équation de mouvement de Lagrange on obtient :

$$\dot{\vec{p}} + \frac{\partial H}{\partial \vec{q}} = 0 \text{ et } \frac{\partial L}{\partial \vec{p}} = \dot{\vec{q}} - \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} = 0$$

d'où on tire les équations canoniques de Hamilton suivantes :

$$\vec{F}_q - \dot{\vec{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{q}} \quad \text{et} \quad \dot{\vec{q}} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} \quad (2.15)$$

$$F_{q_j} - \dot{p}_j = \frac{\partial H(q_j, p_j, t)}{\partial q_j} \quad \text{et} \quad \dot{q}_j = \frac{\partial H(q_j, p_j, t)}{\partial p_j} \quad (2.16)$$

Qui déterminent $2k$ équations différentielles de premier ordre.

II.4. Règle et procédure pour écrire la fonction et les équations d'Hamilton

- Ecrire la fonction lagrangienne $L = T - U$. Déterminer T et U ,
- Faire les dérivées $p_j = \partial q L_j$,
- Résoudre ces équations simultanément pour chaque q_j en fonction de q_j, p_j, t et éliminer les vitesses généralisées $\dot{q}_j$ de la fonction hamiltonienne, H , pour avoir H seulement en fonction de q_j, p_j, t ,
- Pour avoir les équations d'Hamilton faire les dérivées :

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H(q_j, p_j, t)}{\partial p_j} \quad (2.17)$$

et dans chaque fois on obtient q_j . De même, effectuez la différenciation

$$F_{q_j} - \dot{p}_j = \frac{\partial H(q_j, p_j, t)}{\partial q_j} \quad (2.18)$$

Nous avons donc $2k$ équations du premier ordre ne sont que les forces généralisées connues, trouvées de la manière habituelle sauf que les forces conservatrices non incluses.

II.5. Cas spéciaux de la fonction H

- **Cas (a)** : si toutes les forces sont conservatives avec celles fonctions de potentiel dans le temps, $F_{qj} = 0$ et par conséquent :

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H(q_j, p_j, t)}{\partial p_j} \text{ et } \dot{p}_j = -\frac{\partial H(q_j, p_j, t)}{\partial q_j} \quad (2.19)$$

- **Cas (b)** : si dans le système il n'y a pas de coordonnées de mouvement ou bien liaisons (le temps t n'intervient pas dans les équations de transformation).
- **Cas (c)** : si le système est conservatif :

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

et si toutes les forces dérivent d'un potentiel :

$$F_{qj} = 0$$

$$H = T + U = E_T \quad (2.20)$$

- **Cas (d)** : si le système est conservatif :

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

et autres forces que les forces potentielles sont appliquées

$$F_{qj} \neq 0$$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{d(T + U)}{dt} = \sum_{j=1}^k F_{qj} \dot{q}_j \quad (2.21)$$

Donc, on dit que la variation dans le temps de l'énergie totale

$$(T + U = E_T)$$

est égale à la puissance fournie par les forces nonpotentielles.

II.6. Principe vibrationnel d'Hamilton

Soit un système holonome à k degrés de liberté dans un champ de forces de potentiel. Dans l'intervalle de temps $t_1 \leq t \leq t_2$ et par l'intermédiaire de l'intégrale :

$$S = \int_{t_2}^{t_1} L dt \quad (2.22)$$

Où L est le Lagrangien du système mécanique considéré et S est appelée action Lagrangienne entre les instants t_1 et t_2 . Sachant que

$$L = L(q_j, \dot{q}_j, t) \text{ et } q_j = q_j(t)$$

donc l'action S est une fonction qui dépend des fonctions $q_j(t)$ dont elle dépend du mouvement du système.

Ces mouvements $q_j(t)$ peuvent être représentés dans une configuration à $(k+1)$ dimensions de coordonnées $(q_1, q_2, \dots, q_k, t)$. Quelle est, donc, parmi les trajectoires possibles, qu'est réelle ? La réponse est obtenue par le champ de forces actives agissant sur le système.

D'où le principe de Hamilton :

La trajectoire réelle du système mécanique considéré correspond à un extrémum (minimum) de l'action Lagrangienne S par rapport à toutes les trajectoires voisines et possibles qui partent de P_1 vers P_2 . En d'autres termes, parmi toutes les trajectoires possibles, le système pourrait suivre de P_1 (à t_1) vers P_2 (à t_2) une trajectoire pour laquelle l'intégrale (8.17) est extrémale (maximale ou minimal). Ce principe permet d'écrire :

$$\delta S = \int_{t_2}^{t_1} \delta L dt = 0 \quad (2.23)$$

Soit :

$$\delta S = \int_{t_2}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right] dt = 0 \quad (2.24)$$

Qu'est le principe vibrationnel :

Sachant que :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{d}{dt} \delta q_j = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j \Rightarrow \quad (2.25)$$

On porte cette expression dans l'équation (2.24) et sachant que $\delta q_j = 0$ à t_1 et $t_2 \Rightarrow$

$$\delta S = \int_{t_2}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \right] \delta q_j dt = 0 \quad (2.26)$$

Si on choisit un déplacement quelconque

$$\delta q_d \neq 0 \text{ si } d = j \text{ et } \delta q_j = 0 \text{ si } d \neq j$$

On obtient les équations de Lagrange comme suit

$$\frac{\partial L}{\partial q_d} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_d} \right) = 0 \quad (2.27)$$