

Séries de Fourier

3.1 Objectif du TP

La décomposition en série de Fourier (ou décomposition en une somme de sinusoides) permet d'obtenir le spectre du signal, formé par l'ensemble des composantes sinusoidales, et représenté par des raies discrètes situées à des fréquences multiples de la fondamentale, appelées harmoniques. La connaissance de ce spectre permet d'analyser les systèmes de modulation et de transmission de données : évaluer la bande passante nécessaire au système lorsqu'il s'agit de transmettre le signal sans déformation.

L'objectif de ce TP est donc d'étudier les fonctions périodiques par les séries de Fourier. Cette étude comprend deux volets :

- **L'analyse**, qui consiste en la détermination de la suite de coefficients de Fourier et l'énergie totale du signal $x(t)$;
- **La synthèse**, qui permet de retrouver, en un certain sens, le signal $x(t)$ à l'aide de la suite de ses coefficients.

3.2 Rappels

3.2.1 Principe et définition

La décomposition en Série de Fourier (DSF) consiste à exprimer un signal $x(t)$ de période T comme une combinaison linéaire de fonctions sinusoidales de fréquences multiples de $F = 1/T$ dite fréquence fondamentale.

Soit un signal $x(t)$ périodique de période T , alors ce signal s'exprime sous certaines conditions comme :

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n \frac{2\pi}{T} t) + b_n \sin(n \frac{2\pi}{T} t))$$

$\Rightarrow$ Somme de sinus et de cosinus : **facile à interpréter**

3.2.2 Coefficients de Fourier

Soit un signal $x(t)$ défini sur un intervalle de longueur $T = \frac{2\pi}{\omega}$ de la forme $[\alpha, \alpha + T[$ Alors, les coefficients a_n et b_n s'expriment en fonction du signal $x(t)$ de la manière suivante :

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} x(t) dt$$

et pour $n \geq 1$:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} x(t) \cos(n\omega t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} x(t) \sin(n\omega t) dt$$

Réciproquement, les formules précédentes constituent ce qu'on appelle les coefficients de Fourier du signal $x(t)$ et la série trigonométrique correspondante est dite la série de Fourier de $x(t)$.

3.2.3 Propriétés des séries de Fourier

— Si le signal $x(t)$ est une *fonction paire* alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n = 0$ et

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} x(t) dt$$

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} x(t) \cos(n\omega t) dt$$

— Si le signal $x(t)$ est une *fonction impaire* alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = 0$ et

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} x(t) \sin(n\omega t) dt$$

Théorème de Dirichlet

Si le signal périodique $x(t)$ est dérivable par morceaux, alors sa série de Fourier converge partout et on a :

$$a_o + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n \frac{2\pi}{T} t) + b_n \sin(n \frac{2\pi}{T} t)) = \begin{cases} x(t) & \text{Si } x(t) \text{ est continu en } t \\ \frac{1}{2} [x(t_+) + x(t_-)] & \text{Sinon} \end{cases}$$

Où $x(t_+)$ et $x(t_-)$ désignent respectivement les limites à droite et à gauche de du signal $x(t)$ au point t .

3.2.4 Energie et formule de Parseval d'un signal

Energie

L'énergie d'un signal $x(t)$ de période T sur l'intervalle $[\alpha, \alpha + T[$, est la quantité :

$$E(x) = \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} |x(t)|^2 dt$$

L'énergie d'une harmonique de rang $p \geq 1$ sur un intervalle de longueur T , se définit de la manière suivante :

$$E_p = \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} |a_p \cos(p\omega t) + b_p \sin(p\omega t)|^2 dt = \frac{a_p^2 + b_p^2}{2}$$

Formule de Parseval

La somme de toutes les énergies des harmoniques de la série de Fourier d'un signal $x(t)$ périodique et convergente donne une formule dite de Parseval définie comme suit :

$$\frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} |x(t)|^2 dt = a_0^2 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{a_p^2 + b_p^2}{2}$$

3.2.5 Coefficients complexes de Fourier

L'expression complexe des séries de Fourier sont obtenir grâce à l'utilisation des formules d'Euler. On retiendra donc que l'écriture complexe de la série de Fourier du signal $x(t)$ comme suit :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (c_n \exp(in \frac{2\pi}{T} t))$$

Où : c_n , $n \in \mathbb{Z}$ sont appelés les coefficients de Fourier du signal $x(t)$:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \exp(-in \frac{2\pi}{T} t) dt$$

Ces coefficients forment la représentation fréquentielle de $x(t)$.

On dira qu'elle est convergente si et seulement si la série $\sum_{n \geq 0} (c_n \exp(in \frac{2\pi}{T}t) + c_{-n} \exp(-in \frac{2\pi}{T}t))$ est convergente.

3.2.6 Propriétés des coefficients complexes de Fourier

- Si le signal $x(t)$ est réel, $c_{-n} = c_n^*$: les coefficients sont nécessairement complexes conjugués pour restituer x réel car est complexe
- Si le signal $x(t)$ est réel et pair, $c_{-n} = c_n \Rightarrow b_n = 0$
- Si le signal $x(t)$ est réel et impair, $c_{-n} = -c_n \Rightarrow a_n = 0$
- *Théorème de Parseval* : la puissance du signal périodique est : $p = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$
- Les coefficients c_n sont complexes en général : $c_n = |c_n| \exp(i \arg(c_n))$

3.3 Manipulation

3.3.1 Série de Fourier et l'énergie totale d'un signal créneau

Soit $x(t)$ un signal créneau pair, périodique de période 1 défini comme suit :

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{Si } 0 \leq t \leq 1/4 \\ 0 & \text{Si } 1/4 \leq t \leq 1/2 \end{cases}$$

1. Ecrire une fonction **MatLab** qui permet de générer et représenter graphiquement le signal $x(t)$ sur l'intervalle $[-3/2 \ 3/2]$.
2. Justifier que le signal $x(t)$ satisfait aux conditions de Dirichlet.
3. Ecrire un script **MatLab** qui permet de calculer l'énergie totale du signal $x(t)$.
4. Ecrire un script **MatLab** qui permet de calculer la série de Fourier de $x(t)$.
5. Calculer et représenter la somme partielle des huit premières harmoniques du signal $x(t)$. Qu'observez-vous ?
6. Calculer l'énergie de cette somme partielle, et comparer avec l'énergie totale. Que concluez-vous ?

3.3.2 Série de Fourier d'un signal complexe

Soit le signal $x(t)$ périodique défini comme suit : $x(t) = e^{-t}$

1. Ecrire un script **MatLab** qui permet de générer et visualiser le signal $x(t)$ sur l'intervalle $[-1, 3[$. Vous pouvez utiliser la périodicité pour k entier et $t \in [k, k+1[$, $x(t) = x(t-k) = e^{-(t-k)}$.
2. Calculer les coefficients de Fourier complexes c_n . Vérifier le résultat obtenu avec **MatLab**?
3. Donner la série de Fourier du signal $x(t)$.
4. Ecrire un script **MatLab** qui permet de calculer et visualiser sur une deuxième figure les trois premières harmoniques du signal $x(t)$.
5. Calculer et représenter sur le même graphe de la figure 2 la somme partielle de ces trois harmoniques $S_3(t)$.
6. Les graphes du signal $x(t)$ et de $S_3(t)$ illustrent le résultat de Dirichlet? Que concluez-vous?