

Systèmes d'amortissement sous-critique

L'amortissement est considéré sous critique quand : C (l'amortissement) $< C_c = 2m\omega$. Tel que m est la masse et ω est la pulsation.

- Le taux d'amortissement est donc donné comme : $\xi = \frac{C}{C_c} = \frac{C}{2m\omega}$

La pulsation du système amorti libre est donnée par la formule : $\omega_D = \sqrt{1 - \xi^2}$

L'équation du mouvement amorti s'écrit comme suit :

$$v(t) = A_0 \cos(\omega_D t + \theta) \exp(-\xi \omega t)$$

Dans le cas de la plupart des structures, la valeur du taux d'amortissement ξ est inférieure à 20%

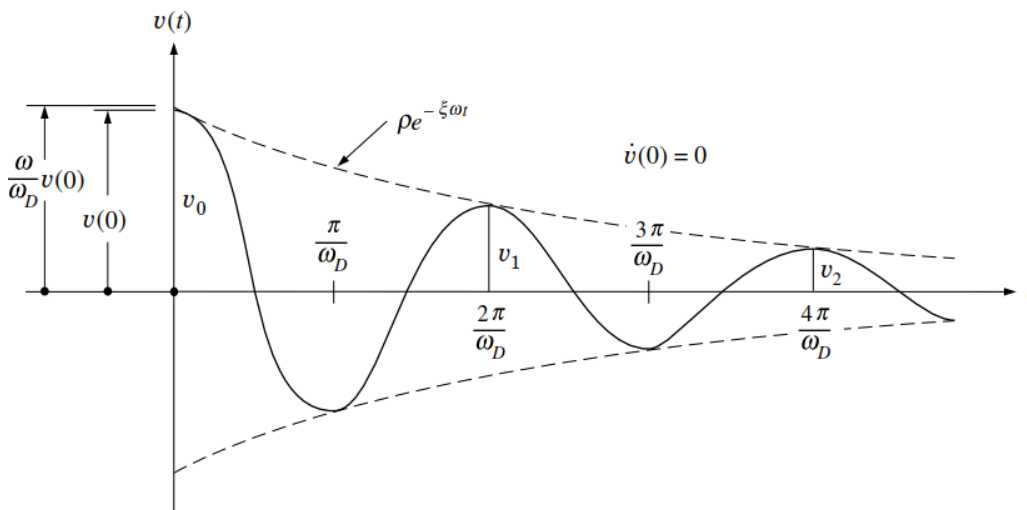


Figure 1 : Réponse en régime libre sous-critique de l'oscillateur élémentaire

Si on considère deux sommets positifs successifs v_n et v_{n+1} qui se produisent aux temps $n \left(\frac{2\pi}{\omega_D} \right)$ et $(n+1) \left(\frac{2\pi}{\omega_D} \right)$ respectivement. Le rapport entre ces deux sommets est donné comme suit :

$$\ln \frac{v_n}{v_{n+1}} = \exp\left(\frac{2\pi\xi\omega}{\omega_D}\right)$$

On peut déduire de ceci le décrément logarithmique de l'amortissement δ .

$$\delta = \ln \frac{v_n}{v_{n+1}} = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}$$

Pour les petites valeurs d'amortissement on peut écrire : $\delta = 2\pi\xi$

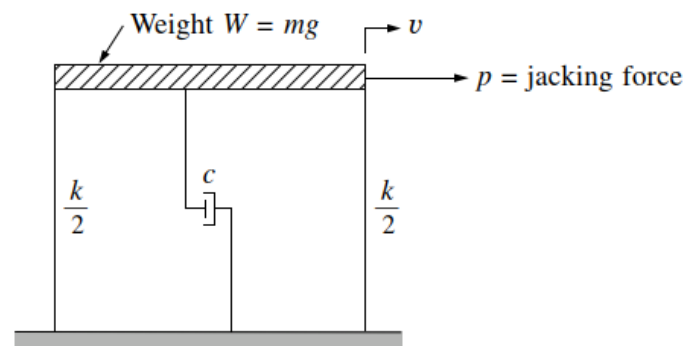
En utilisant la série de Taylor On peut écrire : $\xi = \frac{v_n - v_{n+1}}{2\pi v_{n+1}}$

Pour les systèmes légèrement amortis qui ont m cycles on a $\ln \frac{v_n}{v_{n+m}} = \frac{2\pi m \xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$

Le taux d'amortissement est donc donné pour les petits amortissements comme suit : $\xi = \frac{v_n - v_{n+m}}{2\pi m v_{n+m}}$

Exercice :

Une structure d'un étage est donné tel que montré ci-après. Afin d'évaluer les propriétés dynamique de cette structure, un essai de vibration libre est réalisé. La dalle qui représente un système rigide est déplacée latéralement Δ de 0.508 cm par un vérin hydraulique puis relâché. Pour réaliser ce déplacement, il fallait appliquer une force F égale à 9072 kg. Après le relâchement du vérin suite au déplacement initial, le déplacement maximal suivant était de 0.406 cm et la période de déplacement était $T = 1.4$ sec.



Questions : trouver

- 1- le poids W de la dalle;
- 2- la fréquence f et la pulsation ω ;
- 3- les propriétés d'amortissement : le décrément logarithmique δ , le taux d'amortissement ξ , le coefficient d'amortissement C et la pulsation amortie ; et
- 4- l'amplitude après 6 cycles

Solutions :

1- Calcul de la masse m : $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{W}{gk}} = 1.40 \text{ sec}$

Par conséquent on a : $W = \left(\frac{1.40}{2\pi}\right)^2 gk$

$k = F/\Delta = 9072\text{kg}/0.508\text{cm} = 17858.3 \text{ kg/cm};$

on a également $g = 9.81 \times 100 \text{ cm/sec}^2$

$$\Rightarrow W = (1.4/2\pi)^2 \times 9.81 \times 100 \times 17858.3 \quad \Rightarrow W = 871 \text{ kN}$$

2- calcul de la fréquence f et la pulsation ω

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{1.40} = 0.714 \text{ Hz}$$

$$\omega = 2\pi f = 4.48 \text{ rad/sec}$$

3- calcul des propriétés d'amortissement

a- décrétement logarithmique

$$\delta = \ln \frac{0.508}{0.406} = 0.223$$

b- taux d'amortissement $\xi = \frac{\delta}{2\pi} = 3.55\%$

c- coefficient d'amortissement $C = \xi C_c = \xi 2m\omega = 0.0355 * 2 * \frac{871000}{9.81} * 4.48$

$$C = 28241 \text{ kg.sec/m} = 282.41 \text{ kg.sec/cm}$$

d- Pulsation d'amortissement : $\omega_D = \omega \sqrt{1 - \xi^2} = \omega (0.999)^{1/2} = \omega = 4.48 \text{ rad/sec}$

e- amplitude après 6 cycles : $v_6 = \left(\frac{v_1}{v_0}\right)^6 v_0 = \left(\frac{0.406}{0.508}\right)^6 * 0.508 = 0.132 \text{ cm}$