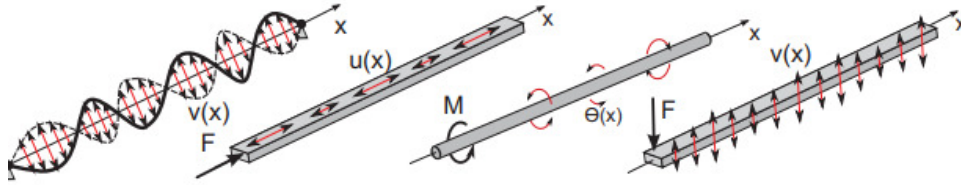


## Chapitre 3 : Vibration des structures à une dimension

### 3.1 Généralité



- Vibrations transverses des cordes
- Vibrations longitudinales des poutres
- Vibrations de torsion des arbres
- Vibrations de flexion des poutres

Les systèmes simples sont étudiés pour les raisons suivantes :

- Ils modélisent simplement le comportement de nombreuses structures
- Ils permettent de comprendre les structures plus complexes
- Ils sont les constituants élémentaires des structures en éléments finis

### 3.2 Équations du mouvement

#### Limites de l'étude

Géométrie :

- Poutre rectilignes,
- Longueur finie  $L$
- Section constante  $S \ll L$

Matériau :

- Homogène,
- Linéaire isotrope
- Non dissipatif

#### Deux types d'équation différentielle du mouvement

- Vibrations longitudinales
- Vibrations de Torsion
- Vibrations des Cordes

**1 même équation d'ordre 2 :**

*l'Équation de d'Alembert*

$$\frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c_L^2} \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial t^2} = g(x, t)$$

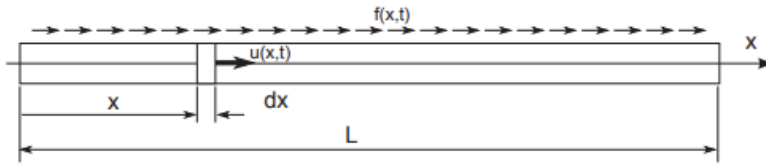
- Vibrations de flexion

*Équation d'ordre 4*

$$\frac{\partial^4 f(x, t)}{\partial x^4} - \frac{1}{c_F^2} \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial t^2} = g(x, t)$$

### 3.3 Vibrations longitudinales

#### Dimensions – Paramètres - Hypothèses



#### Hypothèses

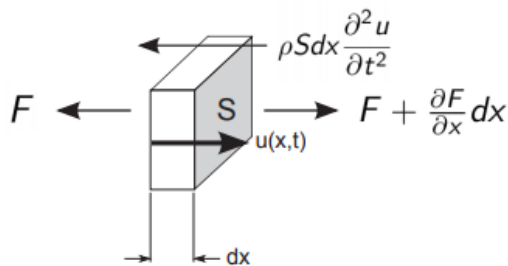
- Poutre droite : Longueur  $L (\gg e, I)$ , Section constante  $S$
- Matériau isotrope :  $\rho, E, \nu$ , non dissipatif
- Distribution de forces  $f(x, t)$
- → Petites perturbations (gravité non prise en compte)
- Grandeur étudiée : déplacement longitudinal local  $u(x, t)$

#### Méthodes pour écrire et résoudre les équations du mouvement :

- **Méthode locale** avec le Principe fondamental de la dynamique (PFD) : adaptée aux structures simples.
- Méthode énergétique ou variationnelle :  
Théorème de Hamilton + variations énergétiques  
Inclue les conditions aux limites  
Adaptée aux structures complexes.

#### Équation du mouvement – Équilibre local

On écrit l'équilibre dynamique d'une section de longueur  $dx$  :



On a donc

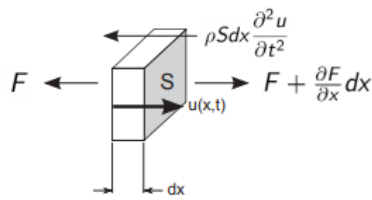
$$\rho S dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -F + F + \frac{\partial F}{\partial x} dx + f(x, t) dx$$

$$\rho S dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \cancel{-F + F} + \frac{\partial F}{\partial x} dx + f(x, t) dx$$

$$\Leftrightarrow \rho S \cancel{dx} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial F}{\partial x} \cancel{dx} + f(x, t) \cancel{dx}$$

$$\Leftrightarrow \rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial F}{\partial x} + f(x, t)$$

- Masse :  $\rho S dx$
- Déplacement :  $u(x, t)$
- Accélération :  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$
- Force à gauche :  $-F$
- Force à droite :  $F + \frac{\partial F}{\partial x} dx$
- Force extérieure  $f(x, t)$



$$\rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial F}{\partial x} + f(x, t)$$

**Traction/Compression pure :**

$$F = \sigma S = E \epsilon S = ES \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( ES \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(x, t)$$

Comme  $E$  et  $S$  constants

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{S} f(x, t)$$

On note  $c^2 = \frac{E}{\rho} \Leftrightarrow c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$

Finalement :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{\rho S} f(x, t)$$

### Célérité des ondes longitudinales

- $[c] = m/s$
- $c$  = célérité du son ou vitesse des ondes longitudinales.
- Ordres de grandeur :

$$c_{acier} = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \sqrt{\frac{2.10^{11}}{8.10^3}} = 0.5.10^4 = 5000m/s$$

Autres valeurs

| Matériau  | c (m/s) | Matériau                | c (m/s)   |
|-----------|---------|-------------------------|-----------|
| PVC mou   | 80      | Glace                   | 3200      |
| Sable sec | 10-300  | Hêtre                   | 3300      |
| Béton     | 3100    | Aluminium               | 5035      |
| Plomb     | 1200    | Verre                   | 5300      |
| PVC dur   | 1700    | Acier                   | 5600-5900 |
| Granit    | 6200    | Péridotite <sup>1</sup> | 7700      |

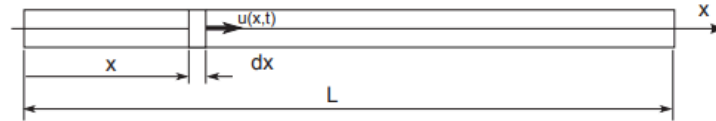
*Rappel : vitesse du son*

*dans l'air : 343m/s, dans l'eau : 1480m/s*

### 3.4 Vibrations longitudinales libre

#### Solution libre

Solution de l'équation libre lorsque  $f(t,x) = 0$  (aucune distribution de force avec système hors équilibre)



Équation du mouvement libre :

alors

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (1) \quad (1) \Leftrightarrow \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} X - c^2 \phi \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = 0$$

∃ 2 types de solutions :

$$\Leftrightarrow \ddot{\phi}(t)X(x) - c^2 \phi(t)X''(x) = 0$$

- propagatives

- stationnaires

Solution stationnaire →

$$\Leftrightarrow \frac{\ddot{\phi}}{\phi}(t) = c^2 \frac{X''}{X}(x) = \text{cte} = \alpha \quad (2)$$

**Hypothèse de variables séparées :**

Deux équations à résoudre :

$$u(x, t) = \phi(t)X(x)$$

- l'une sur  $t$ ,
- l'autre sur  $x$ .

#### Solution stationnaire générale en modes libres

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

- Solution stationnaire pour (3)

$$\rightarrow \alpha = -\omega^2 (< 0)$$

avec  $u(x, t) = \phi(t)X(x)$

La solution s'écrit :

$$\Leftrightarrow \frac{\ddot{\phi}}{\phi}(t) = c^2 \frac{X''}{X}(x) = \alpha$$

$$\boxed{\phi(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t}$$

d'où une *équation sur le temps* :

$$\ddot{\phi}(t) - \alpha \phi(t) = 0 \quad (3)$$

- Dans (4) on note  $\gamma = \frac{\omega}{c}$

et une *équation de déformation* :

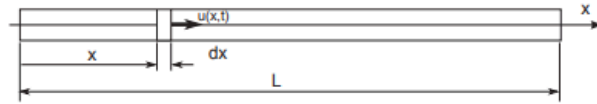
$$X''(x) + \gamma^2 X(x) = 0$$

La solution s'écrit :

$$X''(x) - \frac{\alpha}{c^2} X(x) = 0 \quad (4)$$

$$\boxed{X(x) = C \cos \gamma x + D \sin \gamma x}$$

#### Forme générale de la solution stationnaire en modes libres



$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

Mouvement vibratoire longitudinal libre :

$$u(x, t) = (A \cos \omega t + B \sin \omega t)(C \cos \gamma x + D \sin \gamma x)$$

- Mouvement harmonique de pulsation  $\omega$
- **Conditions initiales** (C.I.) du mouvement  $\rightarrow (A, B)$
- L'amplitude du mouvement des sections dépend de la position dans la poutre, mais Il faut identifier les pulsations  $\omega$  possibles
- **Conditions aux limites** (C.L.) du système  $\rightarrow \omega$  et  $\gamma$ .

*Les C.L. déterminent les modes propres (ou naturels) de la poutre*

-----

### Solutions stationnaires particulières

- Conditions aux limites

2 cas simples de conditions aux limites peuvent être considérés :

#### • Bord libre :

- aucun effort à l'extrémité

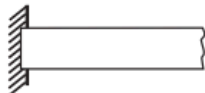


$$F = 0 \Leftrightarrow ES \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

- mouvement indéterminé ( $u = ?$ )

**Bord Libre**  $\Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \forall t$

#### • Encastrement :



- Section extrême bloquée :  $u = 0$
- Effort indéterminé ( $F = ?$ )

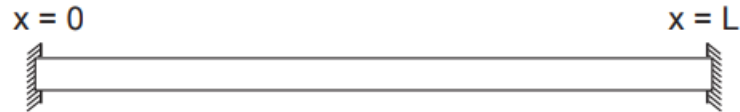
**Encastrement**  $\Leftrightarrow u = 0, \forall t$

-----

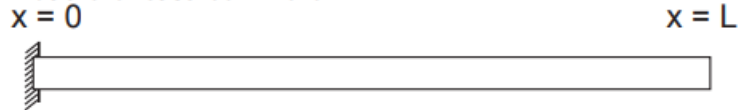
## Modes propres

3 combinaisons possibles des conditions aux limites :

- Poutre encastrée - encastrée



- Poutre encastrée - libre



- Poutre libre - libre



## Cas de la poutre Encastrée – libre



$$u(x, t) = (A \cos \omega t + B \sin \omega t)(C \cos \gamma x + D \sin \gamma x) = \phi(t)X(x)$$

- Encastrement en  $x = 0$

$$u(0, t) = 0, \forall t \Leftrightarrow X(0) = 0$$

$$\Leftrightarrow C = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{X(x) = D \sin \gamma x}$$

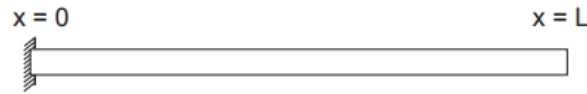
- Libre en  $x = L$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0, \forall t \Leftrightarrow X'(L) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos \gamma L = 0 \Leftrightarrow \gamma L = (2n + 1) \frac{\pi}{2}$$

Valeurs possibles de  $\gamma$  :

$$\boxed{\gamma_n = (2n + 1) \frac{\pi}{2L}}$$



- Déformées possibles :

$$X_n(x) = \sin \gamma_n x$$

Ce sont les **modes propres**

$$X_n(x) = \sin \left( (2n+1) \frac{\pi x}{2L} \right)$$

avec nécessairement :

$$\gamma = \frac{\omega}{c} \Leftrightarrow \omega_n = c \gamma_n$$

- $\Rightarrow$  **Pulsations propres**  $\omega_n$  :

$$\omega_n = (2n+1) \frac{\pi c}{2L}$$

$$\Leftrightarrow \omega_n = (2n+1) \frac{\pi}{2L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

**Fréquences propres** (Hz) :

$$f_n = \frac{2n+1}{4L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

- Expression du **mode de vibration longitudinale** à  $\omega_n$  :

$$u_n(x, t) = (A'_n \cos \omega_n t + B'_n \sin \omega_n t) \sin \left( (2n+1) \frac{\pi x}{2L} \right)$$

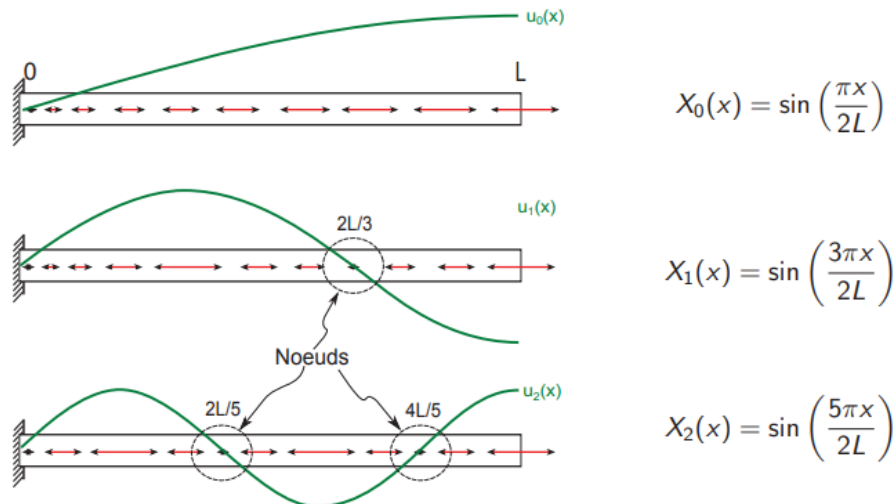
$$\Leftrightarrow u_n(x, t) = U_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) \sin \left( (2n+1) \frac{\pi x}{2L} \right)$$

- Réponse libre complète = Combi. lin. des solutions possibles :

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) \sin \left( (2n+1) \frac{\pi x}{2L} \right)$$

- Conditions initiales  $(u(x, 0), \dot{u}(x, 0)) \rightarrow (U_n, \varphi_n)$  ou  $(A'_n, B'_n)$

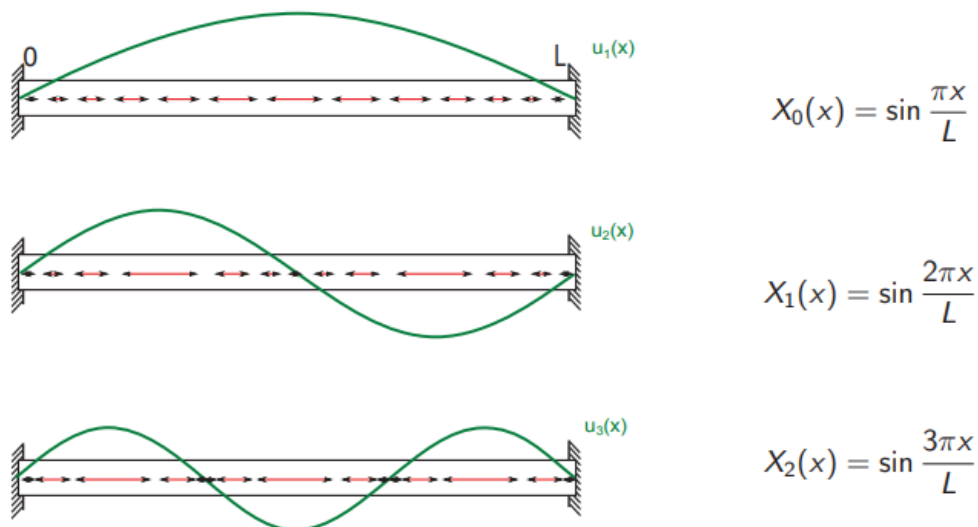
**Modes longitudinaux de la poutre encastée - libre**



Résultat pour les 3 combinaisons de C.L.

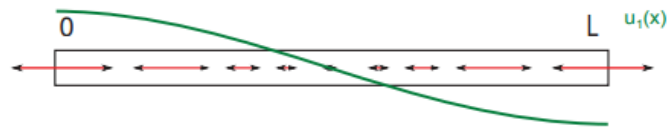
| C.L.                | Poutre L-L                             | Poutre E-L                                   | Poutre E-E                             |
|---------------------|----------------------------------------|----------------------------------------------|----------------------------------------|
| Modes propres       | $\cos n \frac{\pi x}{L}$               | $\sin(2n+1) \frac{\pi x}{2L}$                | $\sin n \frac{\pi x}{L}$               |
| Pulsations propres  | $\frac{n\pi}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ | $\frac{(2n+1)\pi}{2L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ | $\frac{n\pi}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ |
| $f_{acier}(L = 1m)$ | $f_1 = 2500Hz$                         | $f_0 = 1250Hz$                               | $f_1 = 2500Hz$                         |

Cas de la poutre encastree aux deux bouts

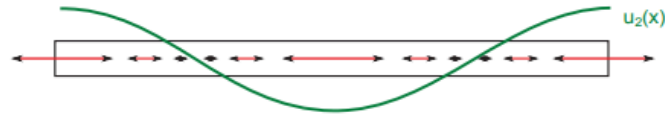


Modes longitudinaux de la poutre libre-libre

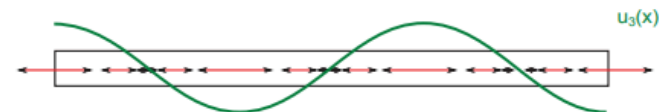




$$X_1(x) = \cos \frac{\pi x}{L}$$



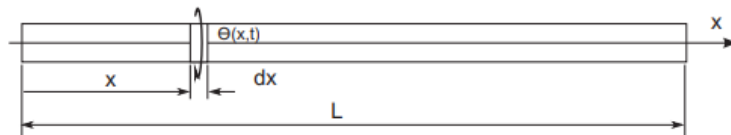
$$X_2(x) = \cos \frac{2\pi x}{L}$$



$$X_3(x) = \cos \frac{3\pi x}{L}$$

### 3.5 Vibrations de torsion dans les arbres

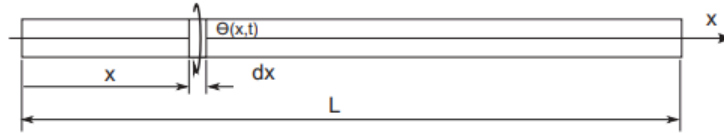
Équation du mouvement – Paramètres



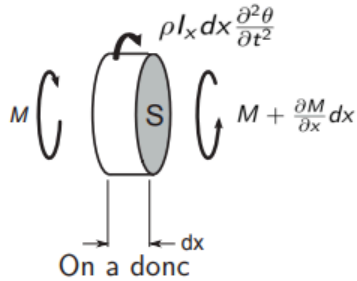
#### Hypothèses

- Poutre droite : Longueur  $L (\gg e, I)$ , Section constante  $S$
- Matériau isotrope :  $\rho, E, \nu, G$  (module de torsion), non dissipatif
- → Petites perturbations + gravité non prise en compte
- Grandeur étudiée : déplacement angulaire local  $\theta(x, t)$

Équation du mouvement – Équilibre local



On écrit l'équilibre dynamique d'une section d'épaisseur  $dx$  :



- Moment d'inertie :  $\rho I_x dx$
- Déplacement :  $\theta(x, t)$
- Accélération :  $\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}$
- Moment à gauche :  $-M$
- Moment à droite :  $M + \frac{\partial M}{\partial x} dx$

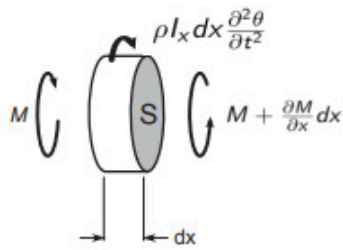
$$\rho I_x dx \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = -M + M + \frac{\partial M}{\partial x} dx$$

$$\rho I_x dx \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \cancel{-M} + \cancel{M} + \frac{\partial M}{\partial x} dx$$

$$\Leftrightarrow \rho I_x \cancel{dx} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \frac{\partial M}{\partial x} \cancel{dx}$$

$$\Leftrightarrow \rho I_x \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \frac{\partial M}{\partial x}$$

Équation du mouvement – Équation des ondes de torsion



$$\rho I_x \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \frac{\partial M}{\partial x}$$

**Torsion pure :**

$$M = G I_x \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

**Ordre de grandeur :**

$$c_{acier} = \sqrt{\frac{G}{\rho}} = \sqrt{\frac{E}{2(1+\nu)\rho}} = \sqrt{\frac{2.10^{11}}{2 \times (1+0.3) \times 8.10^3}} = 2000 \text{ m/s}$$

$$\rho I_x \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( G I_x \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)$$

Comme  $G$  et  $I_x$  constants :

$$\rho \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = G \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$$

On note  $c^2 = \frac{G}{\rho} \Leftrightarrow c = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$

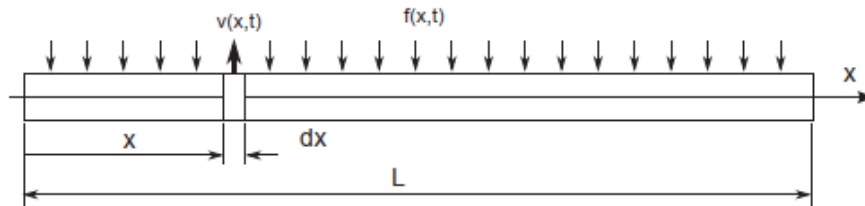
Finalement :

$$\boxed{\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = 0}$$

### 3.6 Vibration en flexion

#### Équation locale du mouvement pour une poutre

##### a) Paramètres



##### Poutre droite :

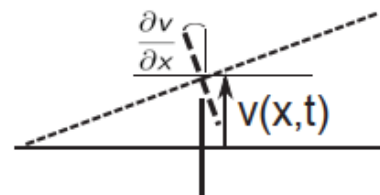
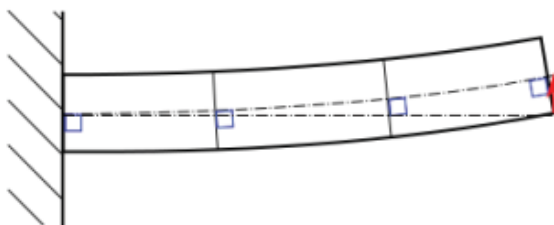
- Section constante  $S = \text{largeur} \times \text{hauteur} = l \times e$ ,
- Longueur  $L (\gg e, l)$ ,
- Moment quadratique de section  $I_{\perp} = \frac{le^3}{12}$
- Matériau isotrope :  $\rho, E, \nu$ , non dissipatif

##### Variables :

- Distribution de forces transverses  $f(x, t)$
- Petites perturbations + gravité non prise en compte
- Grandeur étudiée : déplacement transverse local (flèche)  $v(x, t)$

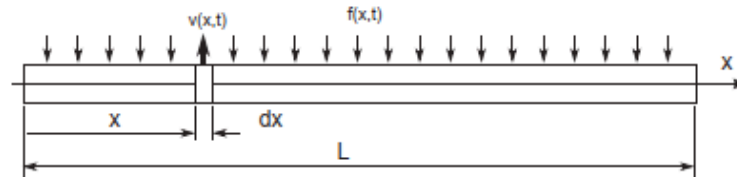
##### b) Hypothèses

- *Hypothèse d'Euler-Bernoulli* : L'inertie de rotation des section est négligée.
- *Conséquence* : les sections droites restent  $\perp$  à la ligne neutre.

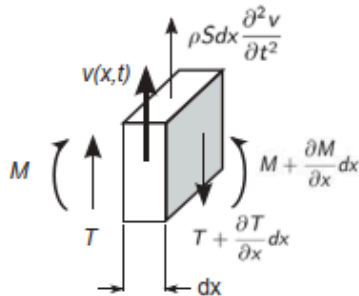


Rotation des sections :  $\theta(x) = \frac{\partial v}{\partial x}$

### c) Équilibre local



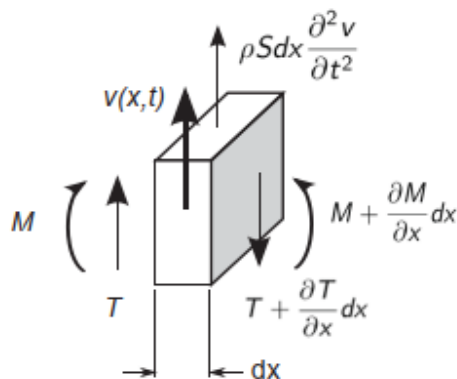
On écrit l'équilibre dynamique d'une section d'épaisseur  $dx$  :



- Masse :  $\rho S dx$
- Déplacement (Flèche) :  $v(x, t)$

- Accélération :  $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$
- Effort tranchant à gauche :  $T$
- Effort tranchant à droite :  $-(T + \frac{\partial T}{\partial x} dx)$
- Mt fléchissant à gauche :  $-M$
- Mt fléchissant à droite :  $M + \frac{\partial M}{\partial x} dx$
- Force extérieure  $f(x,t)$

#### Bilans des moments



$$0 = -M + M + \frac{\partial M}{\partial x} dx - T dx$$

$$\Leftrightarrow 0 = \frac{\partial M}{\partial x} - T$$

d'après la théorie des poutres :

$$M = EI \frac{\partial \theta}{\partial x} = EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

#### Bilans des résultantes

d'où

$$\rho S dx \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = T - T - \frac{\partial T}{\partial x} dx + f(x, t) dx$$

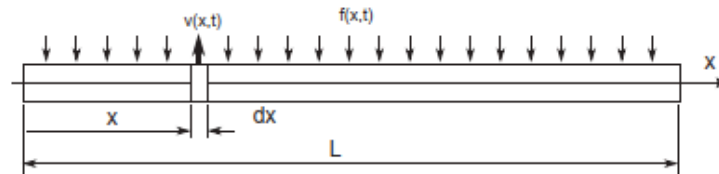
$$T = \frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)$$

et  $EI$  étant constant :

$$\Leftrightarrow \rho S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = - \frac{\partial T}{\partial x} + f(x, t)$$

$$\rho S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = f(x, t)$$

### Équation des ondes transverses dans une poutre



$$\rho S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = f(x, t) \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{1}{EI} f(x, t)}$$

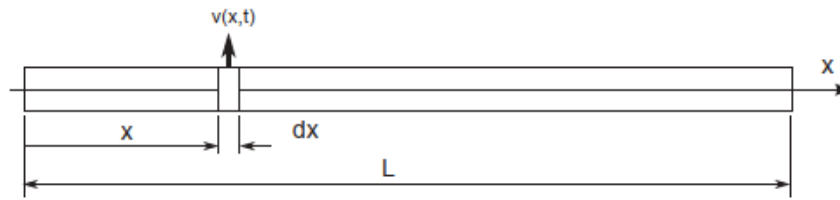
On note :

$c$  n'est pas une vitesse !

$$\boxed{c = \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}}$$

$$[c] = \frac{m^3}{s^2}$$

**Vibrations libres d'une poutre lorsque  $f(x, t) = 0$**



$$\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (1) \quad \text{Équation en temps}$$

Solution stationnaire :

$$(2) \Leftrightarrow \ddot{\phi}(t) + \omega^2 \phi(t) = 0 \quad (3)$$

$$v(x, t) = \phi(t)X(x)$$

**Équation sur la déformation**

$$(2) \Leftrightarrow X''''(x) - \gamma^4 X(x) = 0 \quad (4)$$

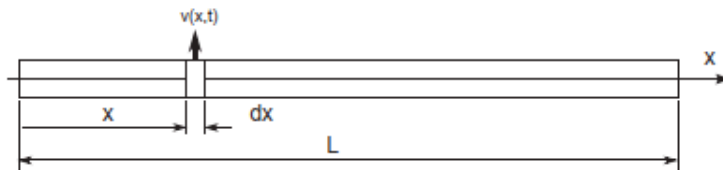
$$(1) \Leftrightarrow c^2 \phi X'''' + \ddot{\phi} X = 0$$

avec

$$\Leftrightarrow c^2 \frac{X''''}{X}(x) = -\frac{\ddot{\phi}}{\phi}(t) = -\omega^2 \quad (2)$$

$$\gamma^4 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

**Expression générale des vibrations libres d'une poutre**



$$v(x, t) = \phi(t)X(x)$$

- Sur le temps :  $\ddot{\phi}(t) + \omega^2 \phi(t) = 0 \Leftrightarrow \boxed{\phi(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t}$

- Sur l'espace :  $X''''(x) - \gamma^4 X(x) = 0 \Leftrightarrow X(x) = X_0 e^{rt}$

- Équation caractéristique :  $r^4 - \gamma^4 = 0 \Leftrightarrow r^2 = \pm \gamma^2$
- 4 racines possibles :  $r = -\gamma, +\gamma, -i\gamma, +i\gamma$
- La solution générale est C.L. des solutions possibles

$$X(x) = Ce^{\gamma x} + De^{-\gamma x} + Ge^{i\gamma x} + He^{-i\gamma x}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{X(x) = C_1 \cos \gamma x + C_2 \sin \gamma x + C_3 \cosh \gamma x + C_4 \sinh \gamma x}$$

On peut aussi écrire :

$$\Leftrightarrow X(x) = D_1(\cos \gamma x + \cosh \gamma x) + D_2(\cos \gamma x - \cosh \gamma x) \\ + D_3(\sin \gamma x + \sinh \gamma x) + D_4(\sin \gamma x - \sinh \gamma x)$$

- *Dépendance temporelle :*

$$\phi(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

- *Dépendance spatiale*

$$X(x) = C_1 \cos \gamma x + C_2 \sin \gamma x + C_3 \cosh \gamma x + C_4 \sinh \gamma x$$

Comment identifier les constantes inconnues ?

- Conditions aux limites  $\rightarrow (C_1, C_2, C_3, C_4)$  et  $(X_n, \omega_n)$
- Conditions initiales  $\rightarrow (A, B)$

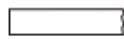
Finalement le mouvement libre peut s'écrire comme une combinaison linéaire des modes propres. ((Dé)composition modale).

$$v(x, t) = \sum_n X_n (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t)$$

#### Conditions aux limites pour une poutre

Pour déterminer les constantes de la fonction de forme du mode propre, on peut considérer 3 cas simples avec chacun 2 paramètres connus :

- **Bord libre :**



Effort tranchant nul au bord

$$T = 0 \Leftrightarrow EI \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = 0$$

Moment de flexion nul au bord

$$M = 0 \Leftrightarrow EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$$

Déplacements indéterminés

$$v = ? \text{ et } \frac{\partial v}{\partial x} = ?$$

$$\text{Bord Libre} \Leftrightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \text{ et } \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = 0, \forall t$$

- **Appui simple :**



Flèche nulle au bord

$$v = 0$$

Moment de flexion nul au bord

$$M = 0 \Leftrightarrow EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$$

Indéterminés :  $\theta$  et  $T$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = ? \text{ et } \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = ?$$

$$\text{Appui simple} \Leftrightarrow v = 0 \text{ et } \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \forall t$$



• **Encastrement :**

Flèche nulle au bord

$$v = 0$$

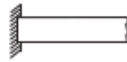
Rotation nulle au bord

$$\theta = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

Efforts indéterminés

$$T = ? \text{ et } M = ?$$

$$\text{Encastrement} \Leftrightarrow v = 0 \text{ et } \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \forall t$$

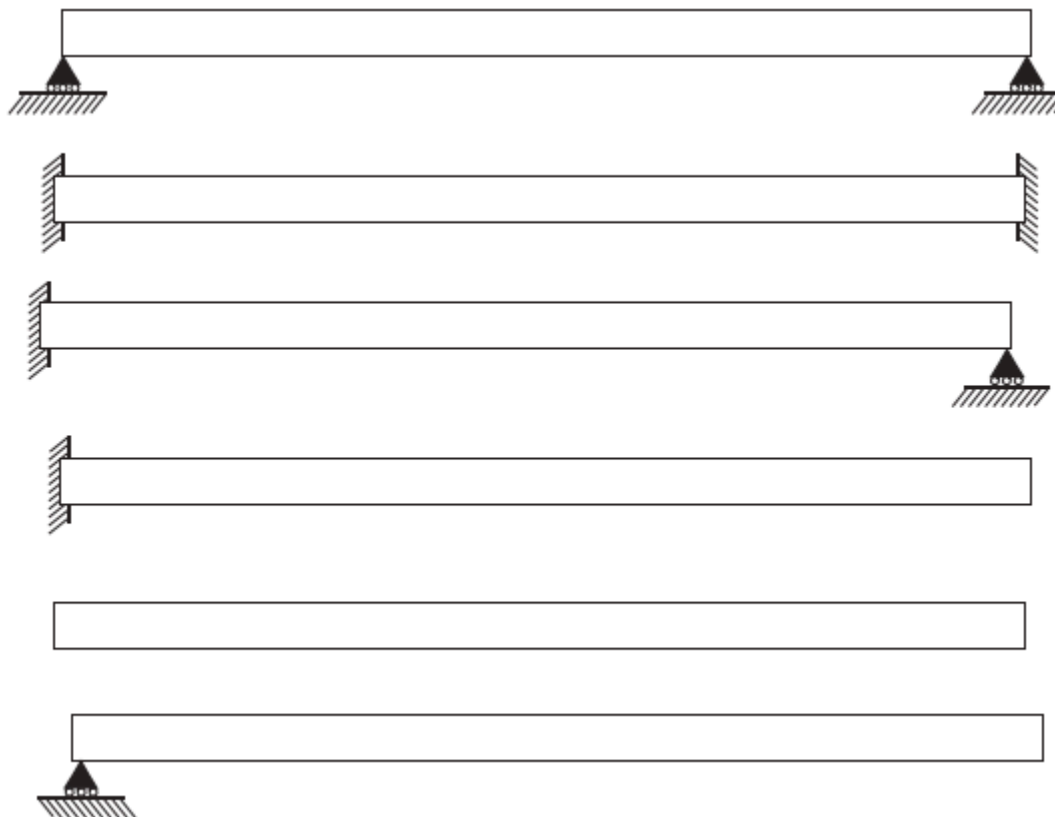


**Récapitulatif**

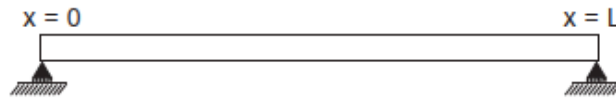
| C.L.                    | Bord Libre | Appui simple | Encastrement |
|-------------------------|------------|--------------|--------------|
|                         |            |              |              |
| $v \rightarrow X$       | ?          | 0            | 0            |
| $\theta \rightarrow X'$ | ?          | ?            | 0            |
| $M \rightarrow X''$     | 0          | 0            | ?            |
| $T \rightarrow X'''$    | 0          | ?            | ?            |

**Exercice**

Donner les différentes combinaisons possibles des conditions aux limites pour une poutre



### Modes propres de la poutre simplement appuyée



Déplacement  $X(x)$  et moment fléchissant  $X''(x)$  nuls en  $x = 0$  et  $x = L$

$$X(x) = D_1(\cos \gamma x + \cosh \gamma x) + D_2(\cos \gamma x - \cosh \gamma x) \\ + D_3(\sin \gamma x + \sinh \gamma x) + D_4(\sin \gamma x - \sinh \gamma x)$$

$$X''(x) = \gamma^2(D_1(-\cos \gamma x + \cosh \gamma x) + D_2(-\cos \gamma x - \cosh \gamma x) \\ + D_3(-\sin \gamma x + \sinh \gamma x) + D_4(-\sin \gamma x - \sinh \gamma x))$$

$$X(0) = 0 \Rightarrow D_1 = 0$$

$$X(L) = 0 \quad \text{et} \quad X''(L) = 0$$

$$X''(0) = 0 \Rightarrow D_2 = 0$$

$$\Rightarrow D_3 = D_4 \quad \text{et} \quad \boxed{\sin \gamma L = 0}$$

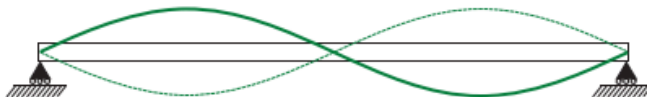
d'où les valeurs possibles de  $\gamma$  et des modes et pulsations propres :

$$\gamma_n = \frac{n\pi}{L} \Leftrightarrow \boxed{X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L}} \quad \omega_n = \gamma_n^2 c \Leftrightarrow \boxed{\omega_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}}$$

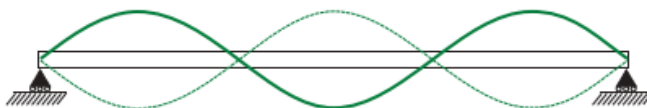
$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L} \quad \omega_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}$$



$$X_1(x) = \sin \frac{\pi x}{L}$$



$$X_2(x) = \sin \frac{2\pi x}{L}$$



$$X_3(x) = \sin \frac{3\pi x}{L}$$