

Chapitre 1 :

1.1 Introduction :

Un phénomène d'origine dynamique se caractérise par une sollicitation variant à la fois dans le temps et dans l'espace, dans lequel les forces d'inertie, produit de la masse par l'accélération, jouent un rôle significatif dans la réponse. Par abus de langage, le terme "chargement dynamique" est souvent et improprement attribué à des phénomènes dont la seule caractéristique est d'être variable dans le temps; si la vitesse de chargement est lentement variable, l'accélération est faible et les forces d'inertie ne représentent plus une part significative de la réponse. De tels phénomènes sont qualifiés de cycliques, si la charge est alternée, ou de quasi-statique monotone. A titre d'exemple, on citera :

- phénomène quasi-statique monotone: mise en charge lente d'une structure par une force $P(t)$ croissante (figure 1.1a) dans lequel $P(t)$ varie "lentement"; les seules forces appliquées à la poutre sont, outre la force $P(t)$, les réactions $R(t)$ aux points d'appuis, elles aussi variables dans le temps;
- phénomène dynamique : impact de la structure résultant par exemple d'une chute de missile, produisant une force $P(t)$; les forces appliquées sont alors la force $P(t)$, les réactions $R'(t)$ aux points d'appuis et les forces d'inertie $f_i(t)$ dépendant de la répartition des masses et des accélérations dans la structure (figure 1.1b);
- chargement cyclique : sollicitation de la structure de la figure 1.1a par une force lentement croissante, puis décroissante; c'est le cas de l'action de la houle sur une plate-forme offshore;
- chargement dynamique alterné : la force $P(t)$ varie rapidement de façon croissante, puis décroissante comme dans le cas d'une machine vibrante posée sur la structure de la figure 1.1a. Ce type de chargement est également celui induit par une sollicitation sismique imposée à la structure.

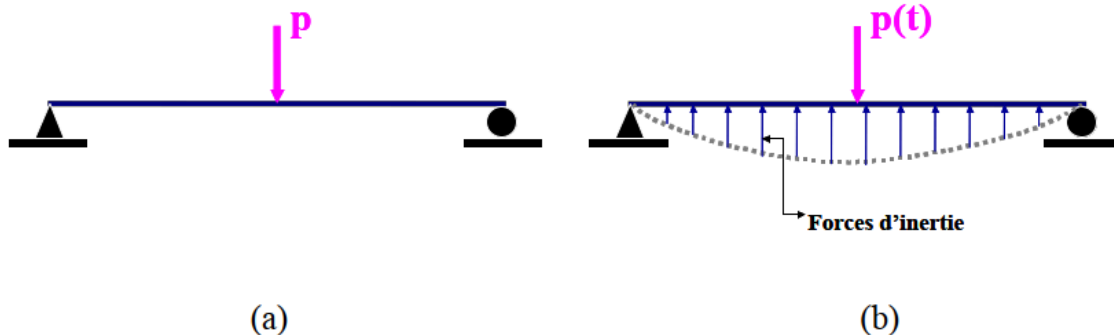


Figure 1.1 : Chargement d'une poutre

1.2 Caractéristique des actions

Les actions agissant sur les structures peuvent être classées en sollicitations déterministes et aléatoires, suivant le degré de connaissance de celles-ci, et pour les sollicitations déterministes en actions périodiques, impulsives ou entretenues suivant leur forme de variation dans le temps. À chaque type d'action correspond un mode de caractérisation et une méthode de résolution la mieux appropriée.

1.2.1 Chargement déterministe

Si le chargement appliqué est parfaitement défini par sa variation temporelle et spatiale, le chargement est qualifié de déterministe. Un tel chargement peut être :

- i) Périodique (périodique) si le diagramme de chargement se reproduit à l'identique au bout d'une durée T , appelée période de la sollicitation. Parmi les chargements périodiques, on distinguera les chargements harmoniques et les chargements anharmoniques.

Un chargement harmonique est typiquement celui engendré par une machine tournante (figure 1.2). La sollicitation est définie par son amplitude A , et sa pulsation ω . Elle est décrite par une fonction sinusoïdale :

$$y(t) = A \sin(\omega t) \quad (1.1)$$

Il est souvent pratique de définir les sollicitations harmoniques sous la forme d'une fonction complexe

$$y(t) = \rho e^{i\omega t} \quad (1.2)$$

Où ρ est un nombre complexe

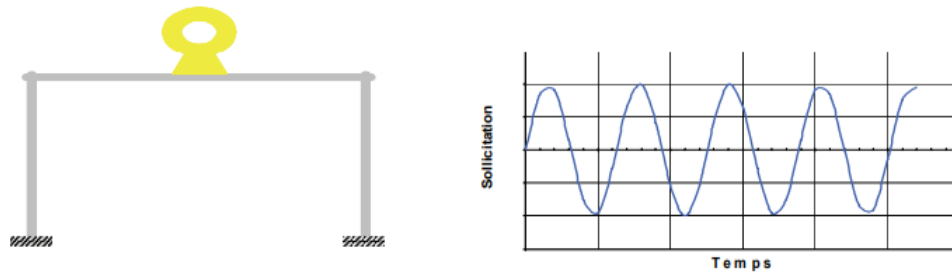


Figure 1.2 : Chargement harmonique

Le chargement peut être également périodique, sans être harmonique; on le qualifiera d'anharmonique. Ce type de chargement est celui engendré, par exemple, par un propulseur de navire (figure 1.3). L'analyse de Fourier nous indique que le chargement peut être exprimé comme une somme de chargements harmoniques caractérisés chacun par une amplitude A_j et une pulsation ω_j . Reprenant la formulation de l'équation (1.2) un tel chargement s'écrit sous la forme d'une somme d'harmoniques :

$$y(t) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} A_j e^{i(j\omega_0 t)} \quad (1.3)$$

Où ω_0 est la pulsation de l'harmonique fondamentale.

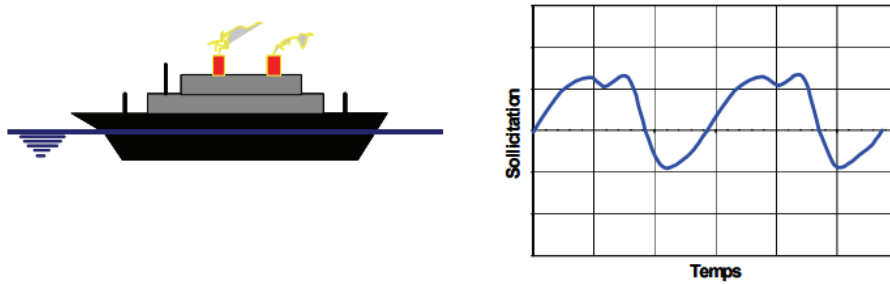


Figure 1.3 : Chargement périodique anharmonique

ii) non périodique, de type impulsif ou entretenu; le chargement ne se reproduit pas à l'identique après un intervalle de temps T . Le chargement impulsif est caractérisé par une sollicitation de faible durée totale, telle celle induite par le front d'une onde de choc heurtant la structure (figure 1.4). Par faible durée, il faut entendre une sollicitation dont la durée est petite en regard de la période de vibration de la structure.

Un tel chargement est défini par sa variation temporelle

$$y(t) = f(t) \quad (1.4)$$

Si l'on ne s'intéresse qu'à la réponse maximale de la structure sous l'effet de cette impulsion, on verra qu'il est possible de caractériser ce chargement à l'aide d'une quantité simplifiée, appelée spectre de choc. Le spectre de choc définit le déplacement maximal d'une structure simplifiée (oscillateur à 1 degré de liberté) soumis au chargement (1.4).

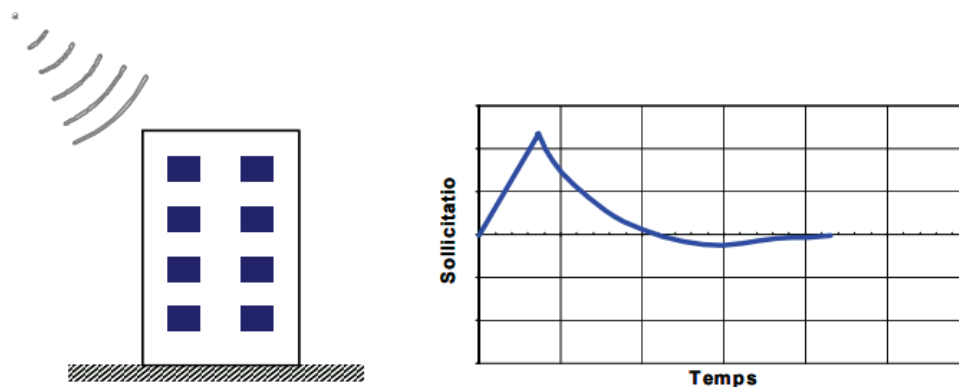


Figure 1.4: Chargement impulsif

Le chargement entretenu peut être défini comme le chargement résultant d'une succession d'impulsions. C'est typiquement le cas d'une sollicitation sismique si l'accélération du sol est connue de façon déterministe (figure 1.5).

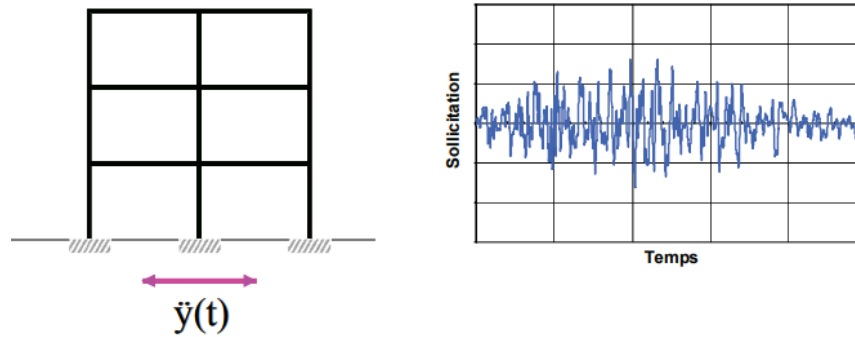


Figure 1.5 : Sollicitation entretenue

Par opposition au chargement impulsif, la durée totale de la sollicitation est grande vis-à-vis de la période propre de la structure. Typiquement une sollicitation non périodique entretenue peut être définie à l'aide d'une équation du type (1.4). On verra cependant que des méthodes de résolution avantageuses des équations du mouvement font appel à l'analyse fréquentielle pour laquelle la sollicitation est définie par son spectre de Fourier, qui n'est autre que l'analogue de l'équation (1.3) pour une fonction non périodique.

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (1.5)$$

De façon similaire à la sollicitation impulsive, si l'on ne s'intéresse qu'à la réponse maximale de la structure, la sollicitation pourra être définie par son spectre de réponse qui caractérise le déplacement maximal d'une structure à 1 degré de liberté soumise à la sollicitation (1.4) représentée sur la figure 1.5.

1.2.2 Chargement Aléatoire

Beaucoup des chargements sollicitant les structures et les éléments ne peuvent être définis de façon déterministe par une équation du type (1.4). Ils ne sont généralement connus que par leur valeur moyenne. Il s'agit typiquement des mouvements vibratoires engendrés par le trafic ferroviaire ou routier (figure 1.6), le vent.... La sollicitation est dite aléatoire et est représentée par sa densité spectrale de puissance.

$$DSP(\omega) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\left| \int_{-s/2}^{+s/2} y(t) e^{-i\omega t} dt \right|^2}{2\pi s} \quad (1.6)$$

La réponse de la structure à des chargements aléatoires, fait l'objet de la dynamique stochastique.

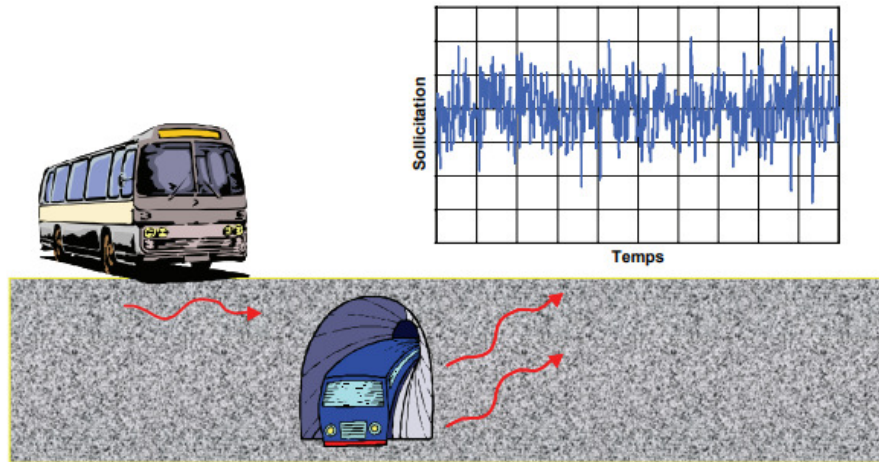


Figure 1.6 : Chargement aléatoire

Chapitre 2

Oscillateur linéaire a un degré de liberté

2.1 Définition

L'oscillateur à 1 degré de liberté est constitué d'un bloc rigide, de masse M connecté à un support.

La figure 2.1 présente un tel oscillateur, sollicité par une force $p(t)$ variable dans le temps. Le seul mouvement autorisé pour l'oscillateur est le déplacement horizontal, $u(t)$, de la masse. L'oscillateur est connecté à son support par un élément qui développe une force $F(u, \dot{u})$, fonction du déplacement et de la vitesse de la masse M . La relation $F(u, \dot{u})$ caractérise le comportement de l'oscillateur; la force $p(t)$ caractérise la sollicitation.

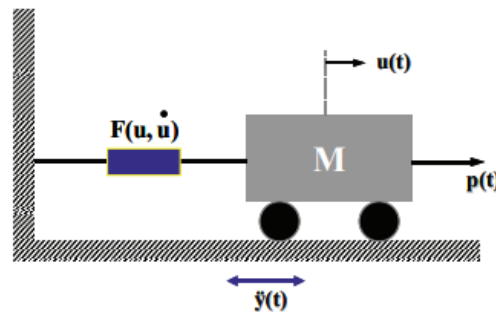


Figure 2.1 : Oscillateur à 1 degré de liberté

2.2 Loi de comportement de l'oscillateur

Cette loi de comportement dépend dans le cas le plus général du déplacement $u(t)$ de la masse et de sa vitesse $\dot{u}(t)$ par rapport au support. La force de rappel F peut ne dépendre que du déplacement $u(t)$ (figure 2.2). Si à tout instant il y a proportionnalité entre la force et le déplacement (figure 2.2a), l'oscillateur est élastique linéaire. Ce cas est typiquement celui d'un ressort.

La relation entre la force développée dans la liaison et le déplacement relatif u des deux extrémités de cette liaison s'écrit simplement :

$$F = k.u \quad (2.1)$$

La dépendance de la force sur le déplacement peut cependant être non linéaire (figure 2.2b); initialement il y a proportionnalité entre force et déplacement (oscillateur élastique linéaire) puis, au-delà d'un certain seuil de déplacement, la relation cesse d'être linéaire; par ailleurs la décharge peut s'effectuer suivant un trajet distinct de la charge. C'est le cas par exemple d'une liaison masse-support constituée d'un assemblage en série d'éléments de ressorts linéaires et de frotteurs de Coulomb (éléments rigides en-deçà d'un certain seuil d'effort puis développant un effort constant au-delà du seuil). Notons que pour certaines liaisons, il est possible que la décharge s'effectue le long de la même courbe que la charge; l'oscillateur est alors élastique non linéaire. Dans tous les cas, l'oscillateur est dit non linéaire et la relation force-déplacement s'écrit de façon symbolique :

$$F = f(U) \quad (2.2)$$

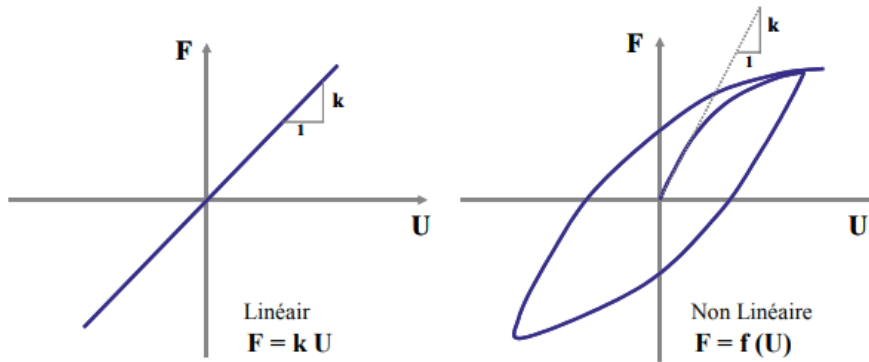


Figure 2.2 : Relation force-déplacement

Dans le présent chapitre on se restreindra au cas de l'oscillateur linéaire caractérisé par une loi de comportement donnée par l'équation (2.1).

Dans les expressions **F** de la figure 2.2, le temps n'intervient pas. La relation est la même que le chargement de l'oscillateur soit effectué très lentement ou très rapidement. Si en particulier on considère une liaison constituée d'un seul ressort linéaire et que l'on impose à la masse **M** un déplacement initial u_0 avant de la relâcher, celle-ci oscillera indéfiniment avec une amplitude maximale u_0 .

Dans la pratique, on constate que l'amplitude décroît au cours du temps et que la masse retrouve au bout d'un certain temps une position d'équilibre (figure 2.3).

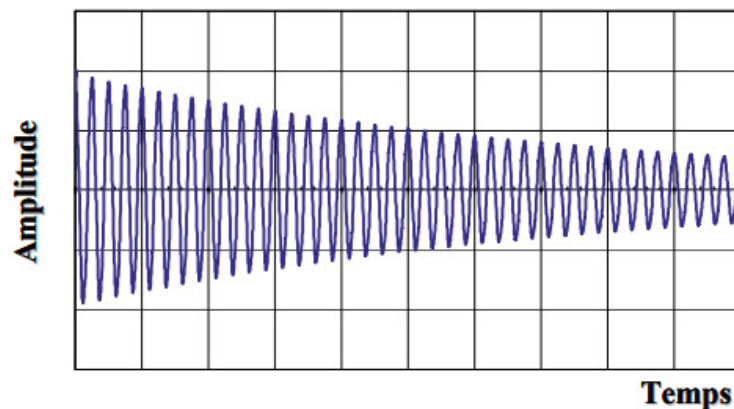


Figure 2.3 : Oscillation libre avec amortissement

Une partie de l'énergie élastique emmagasinée dans le ressort est dissipée au cours du temps; ce phénomène est dénommé de façon générique amortissement.

En fait, l'amortissement peut résulter de différents mécanismes. Il peut s'agir d'un amortisseur physique (par exemple un amortisseur hydraulique) auquel on peut avoir recours dans les problèmes d'isolation vibratoire. La dissipation d'énergie peut également provenir d'effets thermiques liés au chargement répété du matériau, de frottements internes dans le matériau (glissements entre grains dans un assemblage de particules par exemple), de déformations d'origine plastique....

En règle générale, et sauf cas exceptionnel, l'amortissement ne peut être calculé à partir des propriétés physiques du système. Par exemple dans le cas d'un bâtiment soumis à une sollicitation sismique significative, les sources de dissipation d'énergie sont multiples : fissuration du béton, plastification des aciers, glissements relatifs entre la structure porteuse et les éléments secondaires (cloisons, baies vitrées...). Dans la pratique, les phénomènes de dissipation d'énergie sont donc caractérisés de façon très simplifiée en considérant qu'ils proviennent d'un amortisseur visqueux linéaire.

Un amortisseur visqueux linéaire est caractérisé par une relation linéaire entre la force développée dans l'amortisseur et la vitesse relative des deux extrémités de celui-ci :

$$F = c\dot{u} \quad (2.3)$$

La constante de proportionnalité c , caractéristique de l'amortisseur, a pour unités une masse par unité de temps. La description des phénomènes de dissipation d'énergie à l'aide d'un amortisseur équivalent est obtenue en écrivant que l'énergie dissipée dans un cycle de vibration du système est égale à l'énergie dissipée dans un amortisseur linéaire pour un cycle de même amplitude de déplacement.

En se référant à la figure 2.4, considérons un système soumis à un cycle caractérisé par une amplitude maximale du déplacement égale à $u_{\max}$. Si au cours de ce cycle on mesure la force nécessaire pour déformer la structure, le diagramme force-déplacement peut être représenté par la courbe limitant l'aire hachurée de la figure 2.4.

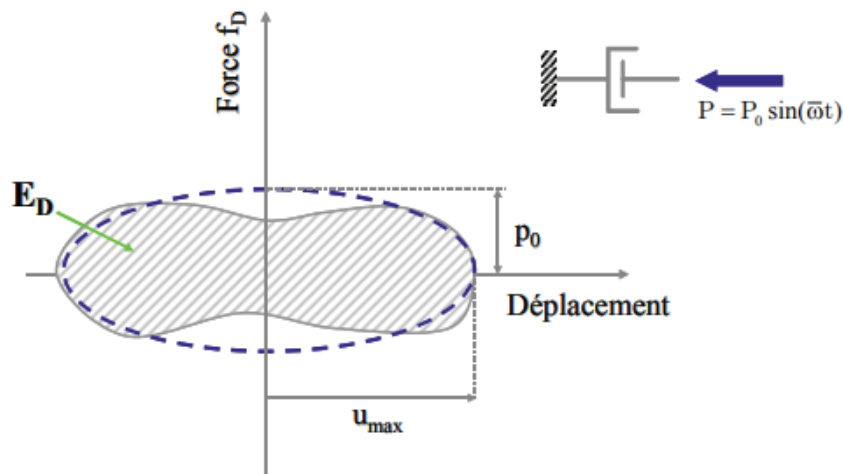


Figure 2.4 : Amortissement équivalent

L'aire de la boucle représente l'énergie E_D dissipée par la structure au cours d'un cycle de sollicitation.

Considérons maintenant l'amortisseur linéaire de la figure 2.4 soumis à une force harmonique de pulsation $\bar{\omega}$

$$(2.4) \quad P = P_0 \sin(\bar{\omega}t)$$

Pour ce système, la constante de l'amortisseur c est donnée par :

$$(2.5) \quad c = \frac{f_{D \max}}{\dot{u}_{\max}} = \frac{P_0}{\bar{\omega} u_{\max}}$$

La courbe effort-déplacement décrite par ce système est représentée par une ellipse, figurée en trait pointillé sur la figure 2.4.

L'énergie dissipée au cours d'un cycle par l'amortisseur linéaire est donnée par :

$$(2.6) \quad E_C = \oint f_D du = \int_0^{2\pi} \bar{\omega} (cu) \dot{u} dt = \pi c \bar{\omega} u_{\max}^2$$

Ecrivant que cette énergie est égale à l'énergie E_D dissipée par le système, la constante d'amortisseur est donnée par :

$$(2.7) \quad c_{eq} = \frac{E_D}{\pi \bar{\omega} u_{\max}^2}$$

On notera que l'amortisseur équivalent est inversement proportionnel à la pulsation de la sollicitation. On verra au paragraphe 3.5 une autre façon de caractériser l'équivalence de dissipation d'énergie entre le système et le modèle qui ne fait pas intervenir explicitement la pulsation $\bar{\omega}$. La modélisation de l'énergie dissipée dans un système par un amortisseur équivalent se révèle très utile dans la pratique. Tant que les cycles de sollicitations sont d'amplitudes faibles à modérées, l'approximation se révèle satisfaisante. Lorsque l'amplitude de la déformation croît, cette modélisation se révèle inappropriée car les mécanismes de dissipation mis en jeu ont pour origine les déformations plastiques du système et sont très éloignés d'une dissipation visqueuse. La seule représentation fiable de la dissipation d'énergie s'obtient alors à partir de la description de la courbe effort-déplacement décrite lors des cycles de chargement.

2.3 Équations de l'équilibre dynamique

Suivant les principes exposés au chapitre 1, l'équation d'équilibre dynamique peut être obtenue à partir de trois méthodes : méthode directe, méthode énergétique et principe des puissances virtuelles. Ces trois méthodes sont illustrées ci-après :

2.3.1 Méthode directe

Les forces s'exerçant sur l'oscillateur de la figure 2.5 sont :

- la force extérieure appliquée $p(t)$,
- la force de liaison f_s , reliée au déplacement u de la masse; dans le cas d'un système linéaire, cette force est donnée par l'équation (2.1),
- la force de liaison f_D reliée à la vitesse $\dot{u}$ de la masse; dans le cas d'un amortisseur visqueux linéaire, cette force est donnée par l'équation (2.3),
- les forces d'inertie f_I s'exerçant sur la masse M égales au produit de celle-ci par l'accélération $\ddot{u}$ de la masse.

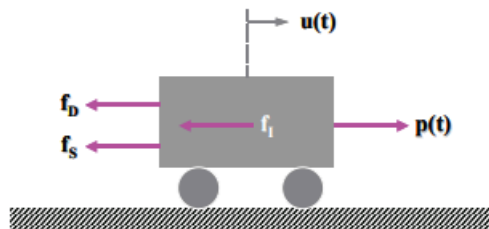


Figure 2.5 : Forces appliquées à l'oscillateur

En écrivant que la résultante de toutes ces forces est nulle :

$$(2.8) \quad f_s + f_D = p(t) - f_I$$

Dans l'équation précédente, on reconnaît le principe d'Alembert; les forces extérieures sont égales aux forces directement appliquées à la masse, $p(t)$, diminuées des forces d'inertie f_I . Ces forces extérieures sont égales aux forces "intérieures", $f_s + f_D$, se développant dans la liaison.

Pour un système visco-élastique linéaire, l'équation (2.8) devient en tenant compte de (2.1) et (2.3):

$$(2.9) \quad M\ddot{u} + C\dot{u} + ku = p(t)$$