

Examen fin de semestre

Exercice 01 : (3 pts)

Soit un système asservis régité par l'équation aux différences suivantes :

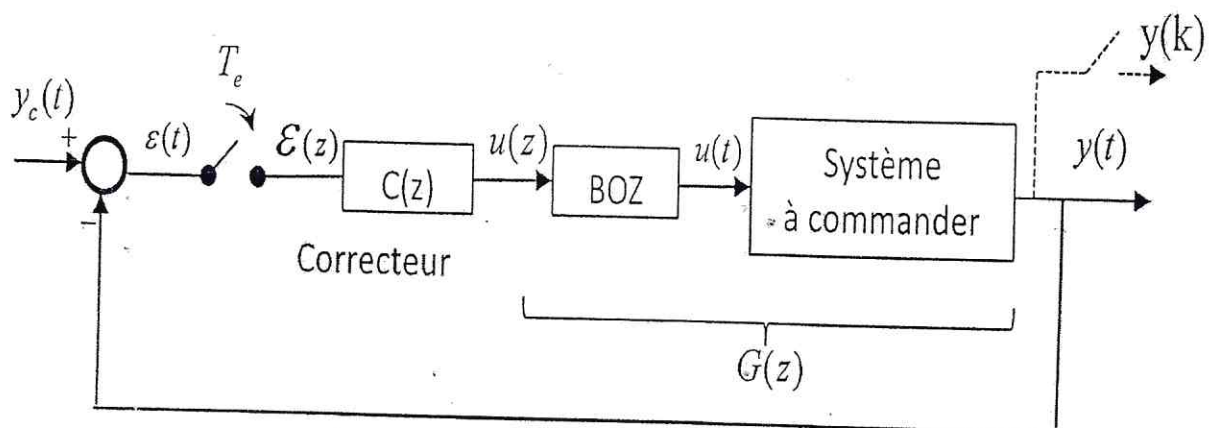
$$y(k+2) + 5y(k+1) + 3y(k) = 10u(k)$$

1- Déterminer la fonction de transfert du système

2- Le système est-il stable ?

Exercice 2 (8 pts)

Soit le système suivant :



1. Montrer que $G(z) = \frac{0.44z+0.36}{z^2-1.6z+0.6}$ sachant que le système à commander a une fonction de transfert

$$G(p) = \frac{1}{p(p+0.5)} \text{ et } T_e = 1 \text{ s.}$$

2. Si $C(z) = K_c$, Trouver la fonction de transfert en boucle fermée en fonction de K_c

3. Ecrire l'équation caractéristique $D(z)$

4. Pour quelle valeurs de K_c le système sera stable ? (Utiliser le critère de Jury).

5. Que vaut l'erreur de position.

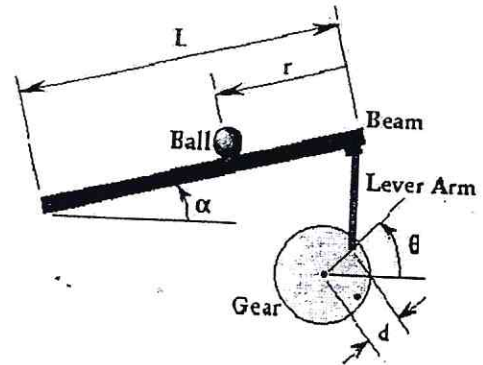
N.B : pour les applications numériques, prendre deux chiffres après la virgule.

Exercice 3 (9 pts)

Une balle est posée sur une planche d'un angle α . Elle peut rouler sans frottement le long de cette dernière.

L'inclinaison de la table est contrôlée par un levier attaché à un disque tournant (voir la figure). La balle peut se mouvoir le long de la table sous l'effet de la pesanteur. Notre objectif est de contrôler la position « r » de la balle sur la table.

m masse de la balle	0.11 Kg
R rayon de la balle	0.015 m
d offset bras du levier	0.03 m
G accélération gravitationnelle	9.8 m/s²
L longueur de la planche	1.0 m
J moment d'inertie de la balle	$9.99 \times 10^{-6} \text{ Kg m}^2$



L'équation du mouvement est donnée par : $\left(\frac{J}{R^2} + m\right) \ddot{r} = \frac{d}{L} mg \theta$

- 1- Donner la fonction de transfert $\frac{R(p)}{\Theta(p)}$ (conditions initiales nulles).
- 2- En vue de commander le système numériquement, dessiner le schéma bloc si le système est précédé d'un échantillonneur et d'un bloqueur d'ordre zéro, avec $T_e = 0.02 \text{ s}$, déterminer la fonction de transfert du système en **boucle ouverte** échantillonné. Le système est-il stable ? justifier votre réponse.

On réalise une boucle unitaire sur le système échantillonné en introduisant un gain « k » dans la chaîne directe.

- 3- Dessiner le schéma bloc du système asservi.
- 4- En utilisant le critère de jury, Est-ce que le gain « k » permet de stabiliser le système.

N.B : pour les applications numériques, prendre deux chiffres après la virgule.

- Corrigé type -Exercice 1:

① Fonction de transfert

$$\{z^2 + 5z + 3\} Y(z) = 10 U(z)$$

$$\boxed{\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{10}{z^2 + 5z + 3}} \quad \text{--- (1)}$$

② stabilité:

Les pôles: $z_1 = -4,30$; $z_2 = -0,69$

$|z_1| > 1$; alors le système est instable.

Exercice 2:

① $G(z) = \frac{z-1}{z} \cdot Tz \left\{ \frac{1}{p^2(p+0,5)} \right\}$ --- (1)

$$= \frac{z-1}{z} \cdot 2 Tz \left\{ \frac{0,5}{p^2(p+0,5)} \right\}$$

$$= \frac{(z-1) \cdot 2}{z} \left[\frac{Tz}{(z-1)^2} - \frac{z(1-e^{-0,5Tz})}{0,5(z-1)(z-e^{-0,5Tz})} \right]$$

$$= 2 \left[\frac{1}{z-1} - \frac{1-e^{-0,5}}{0,5(z-e^{-0,5})} \right] = \frac{2}{z-1} - \frac{1,56}{z-0,6}$$

$$\boxed{G(z) = \frac{0,44z + 0,36}{z^2 - 1,6z + 0,6}} \quad \text{--- (1)}$$

② $C(z) = K_c$

$$FTBF(z) = \frac{\frac{(0,44z + 0,36) K_c}{z^2 - 1,6z + 0,6}}{1 + \frac{(0,44z + 0,36) K_c}{z^2 - 1,6z + 0,6}} \quad \text{--- (1)}$$

$$FTBF(z) = \frac{(0,44z + 0,36) K_c}{z^2 + z(0,44K_c - 1,6) + (0,6 + 0,36K_c)} \quad \text{--- (1)}$$

③: Eq caract: $D(z) = z^2 + z(0,44K_c - 1,6) + (0,6 + 0,36K_c) \quad \text{--- (1)}$

④: Critère de Jury

$$D(1) = 1 + 0,44K_c - 1,6 + 0,6 + 0,36K_c > 0$$

$$\Rightarrow 0,8K_c > 0 \Rightarrow K_c > 0 \quad \text{--- (0,5)}$$

$$D(-1) = 1 - 0,44K_c + 1,6 + 0,6 + 0,36K_c > 0$$

$$3,2 - 0,08K_c > 0 \Rightarrow K_c < 40 \quad \text{--- (0,5)}$$

$$1 > 0,6 + 0,36K_c \Rightarrow K_c < 1,11 \quad \text{--- (0,5)}$$

Le système est stable si ssi: $0 < K_c < 1,11 \quad \text{--- (0,5)}$

⑤ L'erreur de position:

$$\varepsilon(z) = (1 - FTBF(z)) \cdot E(z) \quad \text{avec } E(z) = \frac{z}{z-1} \quad \text{--- (0,5)}$$

$$\varepsilon_p(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) (1 - FTBF(z)) \cdot \frac{z}{z-1} = \lim_{z \rightarrow 1} \left(1 - \frac{(0,44z + 0,36) K_c}{z^2 + z(0,44K_c - 1,6) + (0,6 + 0,36K_c)} \right)$$

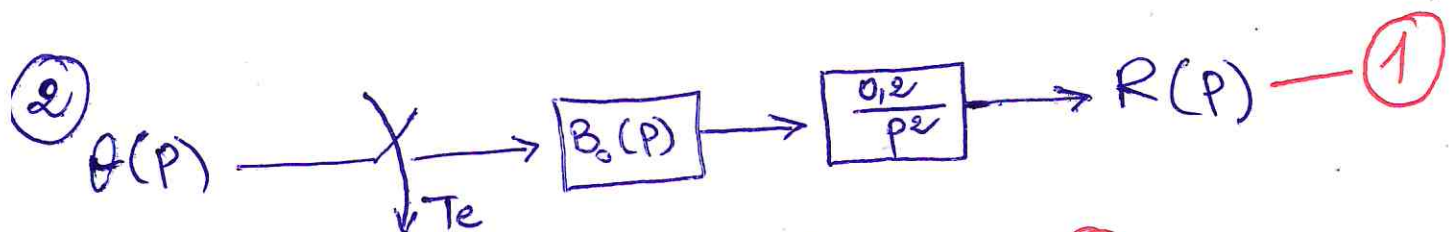
$$\Rightarrow \varepsilon_p(\infty) = 1 - 1 = 0 \quad \text{--- (0,5)}$$

Exercice 3

① La fonction de transfert $\frac{R(p)}{\theta(p)}$

$$\left(\frac{J}{R^2} + m\right) \ddot{\theta} = \frac{d}{L} mg \theta \xrightarrow{T.L} \left(\frac{J}{R^2} + m\right) p^2 R(p) = mg \frac{d}{L} \theta(p)$$

$$\frac{R(p)}{\theta(p)} = \frac{mg d}{L \left(\frac{J}{R^2} + m\right) p^2} \Rightarrow \text{AN: } \boxed{\frac{R(p)}{\theta(p)} = \frac{0,2}{p^2}} \quad \text{--- 0,5 ---}$$



$$G_{B_0}(z) = \frac{z-1}{z} Tz \left\{ \frac{0,2}{p^2} \right\} \quad \text{--- 1 ---}$$

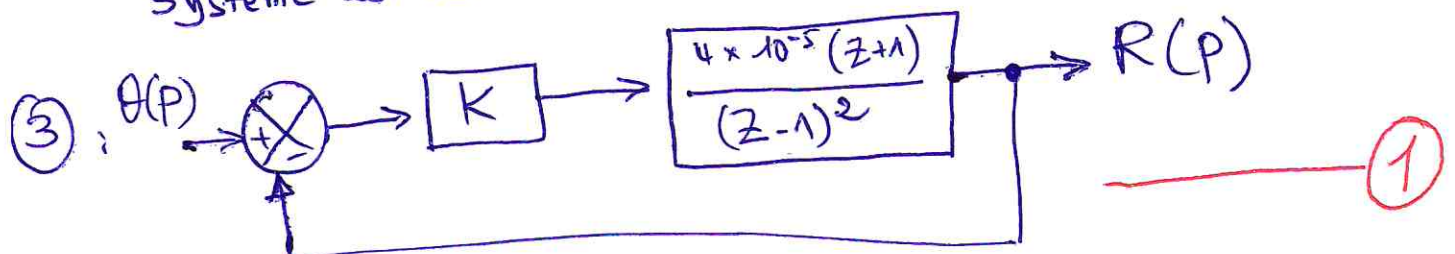
$$G_{B_0}(z) = \frac{z-1}{z} \cdot 0,2 \left[\frac{T_e^2 (z+1) z}{2(z-1)^2 (z-1)} \right]$$

$$G_{B_0}(z) = \frac{0,2}{2} (0,02)^2 \frac{z+1}{(z-1)^2}$$

$$\boxed{G_{B_0}(z) = \frac{4 \times 10^{-5} (z+1)}{(z-1)^2}} \quad \text{--- 1 ---}$$

Stabilité :

On a deux pôles multiples $z_1 = z_2 = 1 \rightarrow |z_1| = |z_2| = 1 \rightarrow$ le système est à la limite de stabilité. --- 0,5 ---



$$\textcircled{4} \quad FTBF(z) = \frac{4 \times 10^{-5} (z+1) K}{(z-1)^2} \quad - \textcircled{0,5}$$

$$1 + \frac{4 \times 10^{-5} (z+1) K}{(z-1)^2}$$

$$FTBF(z) = \frac{4 \times 10^{-5} (z+1) K}{(z-1)^2 + 4 \times 10^{-5} (z+1) K} = \frac{4 \times 10^{-5} (z+1) K}{z^2 + z(-2 + 4 \times 10^{-5} K) + (1 + 4 \times 10^{-5} K)} \quad - \textcircled{0,5}$$

Critère de Jury: $D(z) = z^2 + z(-2 + 4 \times 10^{-5} K) + (1 + 4 \times 10^{-5} K)$ - $\textcircled{0,25}$

$$D(1) = 1 - 2 + 4 \times 10^{-5} K + 1 + 4 \times 10^{-5} K > 0$$

$$8 \times 10^{-5} K > 0 \Rightarrow \boxed{K > 0} \quad - \textcircled{0,5}$$

$$D(-1) = 1 + 2 - 4 \times 10^{-5} K + 1 + 4 \times 10^{-5} K > 0$$

$$\Rightarrow \boxed{4 > 0} \quad - \textcircled{0,5}$$

$$1 > 1 + 4 \times 10^{-5} K \Rightarrow (4 \times 10^{-5}) K < 0 \Rightarrow \boxed{K < 0} \quad - \textcircled{0,5}$$

On a une contradiction $K > 0$; $K < 0 \rightarrow$ alors le système est instable $\forall$ les valeurs de K . - $\textcircled{0,25}$