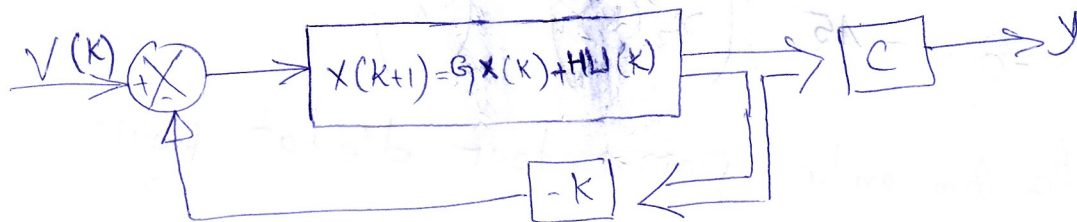


## **Chapitre 4 :**

### Synthèse d'un Contrôleur

# Chapitre 04 = Synthèse d'un contrôleur

## 1- Placement des pôles par retour d'état =



La loi de commande est une simple combinaison linéaire de forme

$$u(k) = v(k) - Kx(k) = v(k) - \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{pmatrix}$$

$K$  représente un vecteur constant qu'on l'appelle vecteur de gain régulateur

$x(k+1) = Gx(k) + Hw(k)$ , le syst à réguler (moyens pôles)

Si on remplace la loi de commande  $u(k) = v(k) - Kx(k)$

le système devient

$$x(k+1) = Gx(k) + H(v(k) - Kx(k))$$

$$x(k+1) = [G - HK]x(k) + Hv(k)$$

Now remarquons que la matrice  $G$  s'est transformée en

$G-HK$  on peut choisir nous même les nouveaux pôles de  $G-HK$

$$\det(zI - (G-HK)) = (z-p_1)(z-p_2) \dots (z-p_n)$$

$p_1, p_2, \dots, p_n$  sont les pôles désirés

Exemple =

$$\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -8 & -15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(k)$$

Déterminer la commande par retour d'état pour que les pôles sont  $(-0,25, -0,125)$

$$G-HK = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -8 & -15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (k_1 \quad k_2)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -8 & -15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix}$$

$$G-HK = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -8-k_1 & -15-k_2 \end{pmatrix}$$

$$\det (zI - (G - HK)) = ?$$

$$\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -8 - K_1 & -15 - K_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & -1 \\ 8 + K_1 & z + 15 + K_2 \end{pmatrix}$$

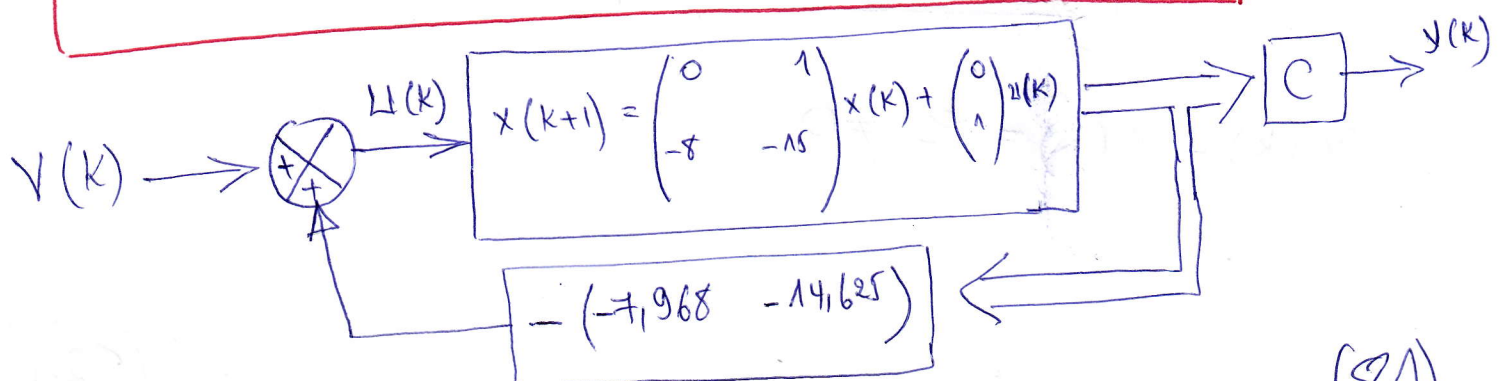
$$\begin{aligned} \det (zI - (G - HK)) &= z(z + 15 + K_2) + 8 + K_1 \\ &= z^2 + 15z + 2K_2 + 8 + K_1 \\ &= z^2 + z(15 + K_2) + 8 + K_1 \end{aligned}$$

$$(z + 0,25)(z + 0,125) = z^2 + 0,375z + 0,03125$$

$$\begin{cases} 15 + K_2 = 0,375 \\ 8 + K_1 = 0,03125 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K_2 = -14,625 \\ K_1 = -7,968 \end{cases}$$

$$L(K) = V(K) - \begin{pmatrix} -7,968 & -14,625 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(K) \\ x_2(K) \end{pmatrix}$$

$$L(K) = V(K) + 7,968 x_1(K) + 14,625 x_2(K)$$



(81)

## Observateur d'état =

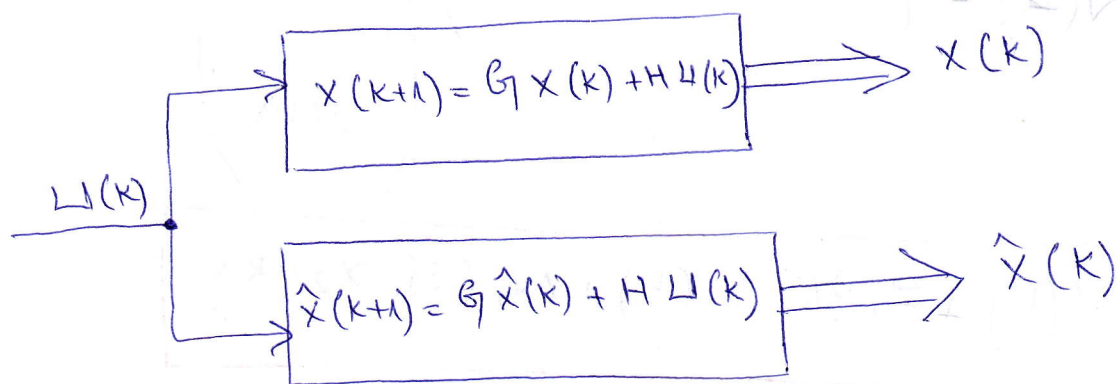
La loi de commande  $U(k) = V(k) - K X(k)$ , suppose la connaissance de  $X(k)$  ce qui est inévitable, il est physiquement impossible de mesurer tout les états comme par exemple dans un réacteur nucléaire il est impossible d'accéder à toutes les grandeurs donc pour résoudre ce problème nous devons construire un estimateur ou observateur qui va estimer le vecteur d'état  $X(k)$  à partir de l'entrée et de la sortie du système. L'estimateur de  $X$  sera noté par  $\hat{X}(k)$ ,  $U(k) = V(k) - K X(k)$

Soit le système

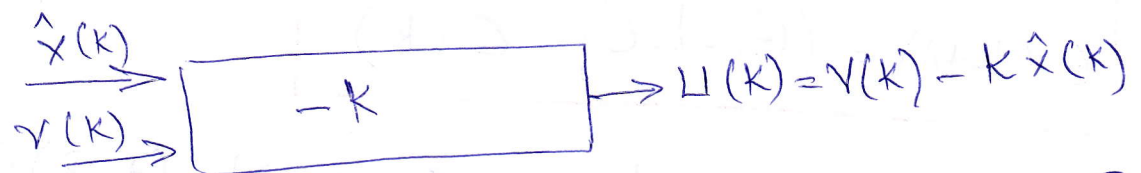
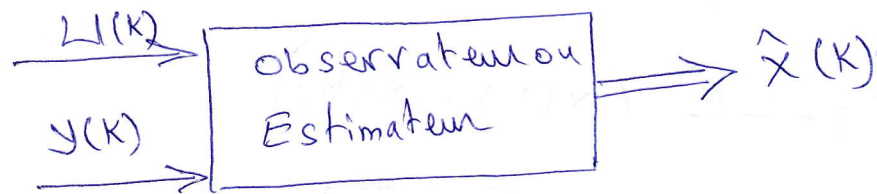
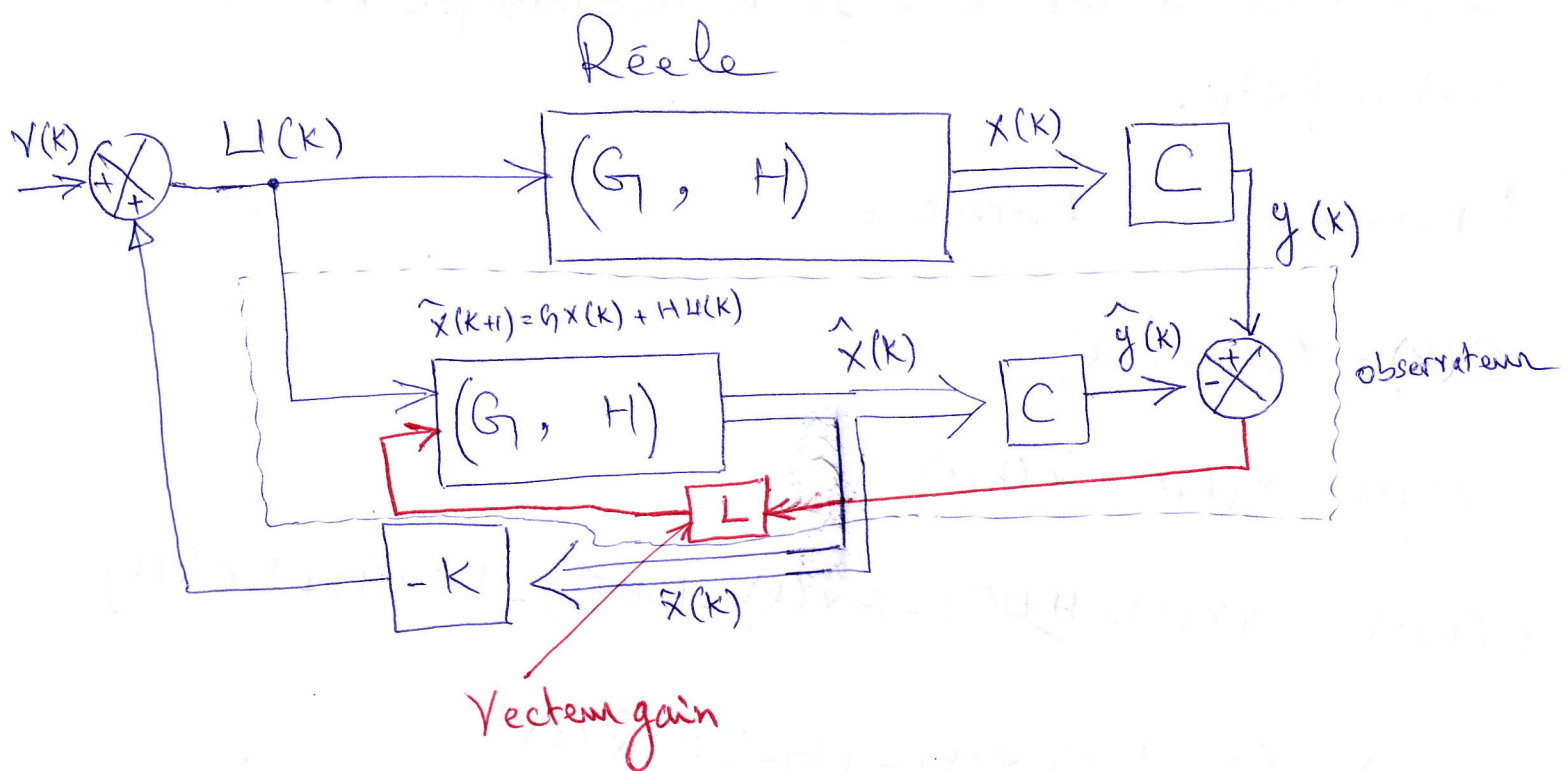
$$X(k+1) = G X(k) + H U(k)$$

$X(k)$  non accessible (non mesurable)  $\leadsto \hat{X}(k)$

$$\hat{X}(k+1) = G \hat{X}(k) + H U(k)$$



$$\hat{X}(k) - X(k) = e \neq 0$$



Considérons le retour de la différence entre la sortie mesurée  $y(k)$  et l'estimer  $\hat{y}(k)$  avec ce retour nous allons corriger continuellement le modèle avec ce signal d'erreur.

Calculer le vecteur gain  $L =$

$$\begin{aligned}\hat{x}(k+1) &= G\hat{x}(k) + H u(k) + L(y(k) - \hat{y}(k)) \\ &= G\hat{x}(k) + H u(k) + L(y(k) - C\hat{x}(k))\end{aligned}$$

avec  $L = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix} = \text{vecteur gain}$

$y(k) - \hat{y}(k)$  : Erreur d'estimation.

$L$  sera choisit de telle sorte la dynamique de l'erreur sera satisfait.

Dynamique de l'erreur =

$$e(k) = x(k) - \hat{x}(k)$$

$$e(k+1) = x(k+1) - \hat{x}(k+1)$$

$$e(k+1) = Gx(k) + \cancel{Hw(k)} - G\hat{x}(k) - \cancel{Hw(k)} - Lcx(k) + Lc\hat{x}(k)$$

$$e(k+1) = (G - Lc)x(k) - (G - Lc)\hat{x}(k)$$

$$e(k+1) = (G - Lc)(x(k) - \hat{x}(k))$$

$$e(k+1) = (G - Lc)e(k)$$

il faut que  $\det \{zI - (G - Lc)\} = (z - p_1)(z - p_2) \dots (z - p_n)$

avec  $p_1, p_2, \dots, p_n$  Pole désiré (Imposé)

si  $L$  peut être choisie comme nous voulons de tel sorte que  $(G - Lc)$  peut avoir des valeurs propres stable ce qui implique que l'erreur tend vers "0" cela veut dire que

$\hat{x}(k)$  va converger vers  $x(k)$