

Chapitre 2 :

Transformée en Z et Analyse des Systèmes
Echantillonnés

Chapitre 02 = Transformée en z et analyse des systèmes échantillonnés

Discretisation d'équation différentiel:

transformer eq diff ordinaire $\leadsto$ "Eq diff discrète"
"Eq aux différences"

Exemple = $\dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t)$

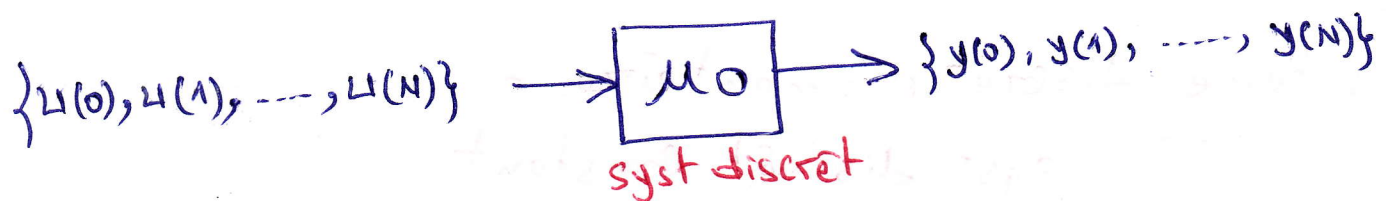
Soit $t_k = kT$ T : période d'échantillonnage

approximation $\dot{y}(t) \approx \frac{y[(k+1)T] - y[kT]}{T}$

remplacer l'approximation dans l'eq diff $\Rightarrow$

$y(k+1) + (Ta_0 - 1)y(k) = b_0 T u(k)$ eq aux différences

si $u(k)$ séquence de valeurs $\Rightarrow y(k)$ séquence de valeurs



La dynamique de système est en fonction de la période d'échantillonnage
le système est dit système échantillonné (discret) du 1^{er} ordre

La forme générale d'un système discret du système de 1^{er} ordre est:

$y(k+1) + a_0 y(k) = b_0 u(k)$

système discret du 2nd ordre:

$\ddot{y}(t) + a_1 \dot{y}(t) + a_2 y(t) = b_0 u(t)$

(11) $\dot{y}(t) \approx \frac{y(k+1) - y(k)}{T}, \ddot{y}(t) \approx \frac{\dot{y}(k+1) - \dot{y}(k)}{T}$

$$\approx \frac{\frac{y(k+2) - y(k+1)}{T} - \frac{y(k+1) - y(k)}{T}}{T}$$

$$\ddot{y}(t) \approx \frac{y(k+2) - 2y(k+1) + y(k)}{T^2}$$

Remplacer l'approximation dans l'eq diff $\Rightarrow$

$$\frac{y(k+2) - 2y(k+1)}{T^2} + a_1 \frac{y(k+1) - y(k)}{T} + a_2 y(k) = b_0 u(k)$$

$$y(k+2) + \underbrace{(a_1 T - 2)}_{a_1} y(k+1) + \underbrace{(a_0 T^2 - a_1 T + 1)}_{a_2} y(k) = b_0 T u(k)$$

$$y(k+2) + a_1 y(k+1) + a_2 y(k) = b_0 u(k)$$

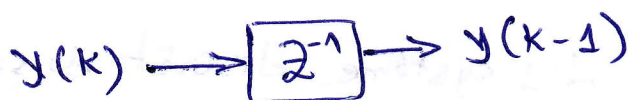
Eq aux différences
du
2^e ordre

Système discret élémentaire =

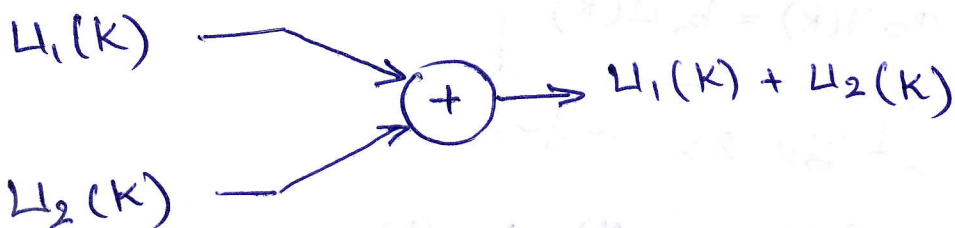
(1) - syst discret constant



(2) - Retard



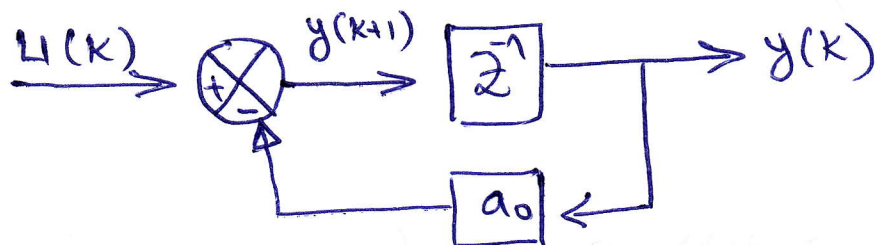
(3) - Somateur



Simulation d'un syst discret:

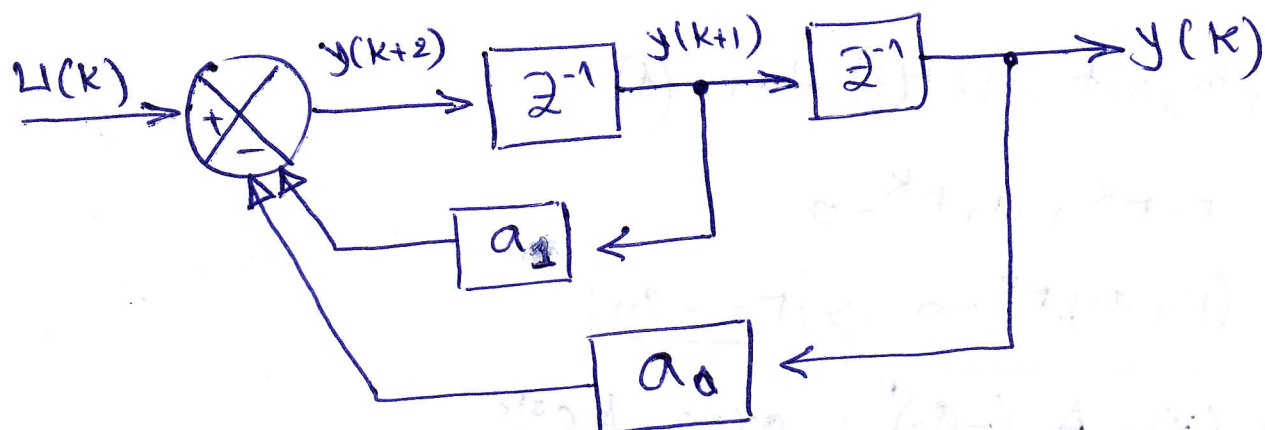
① - syst 1^{er} ordre =

$$y(k+1) + a_0 y(k) = u(k)$$



② - syst 2^e ordre =

$$y(k+2) + a_1 y(k+1) + a_0 y(k) = u(k)$$



Représentation générale d'un syst discret d'ordre n:

- 1^{er} ordre = $y(k+1) + a_0 y(k) = b_0 u(k) + b_1 u(k+1)$

- 2^e ordre = $y(k+2) + a_0 y(k+1) + a_1 y(k) = b_0 u(k) + b_1 u(k+1) + b_2 u(k+2)$

- Ordre n: $\sum_{i=0}^n a_i y(k+i) = \sum_{i=0}^m b_i u(k+i)$

$$\begin{cases} m \leq n \\ a_n = 1 \end{cases}$$

Analyse des équations aux différences

① Eq de 1^{er} ordre

$$y(k+1) + a_0 y(k) = u(k)$$

Résolution :

$$\text{Eq homogène : } y(k+1) + a_0 y(k) = 0 \dots (1)$$

choisissant la solution de la forme

$$y(k) = \Gamma^k \rightsquigarrow e^k \dots (2)$$

$$y(k+1) = \Gamma^{k+1} = \Gamma \cdot \Gamma^k \dots (3)$$

remplaçant (2) et (3) dans (1)

$$\Gamma \cdot \Gamma^k + a_0 \Gamma^k = 0$$

$$(\Gamma + a_0) \Gamma^k = 0 \Rightarrow \boxed{\Gamma = -a_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{y_h(k) = A (-a_0)^k} \text{ avec } A \text{ cste}$$

② Eq de 2^e ordre

$$y(k+2) + a_1 y(k+1) + a_0 y(k) = u(k)$$

$$y(k) = \Gamma^k ; y(k+1) = \Gamma \cdot \Gamma^k ; y(k+2) = \Gamma^2 \Gamma^k$$

$$\Gamma^2 \Gamma^k + a_1 \Gamma \Gamma^k + a_0 \Gamma^k = 0$$

$$(\Gamma^2 + a_1 \Gamma + a_0) \Gamma^k = 0 \Rightarrow \Gamma^2 + a_1 \Gamma + a_0 = 0$$

14

Eq du 2^e ordre

Soient Γ_1 et Γ_2 des solutions

$$y_H(k) = A_1(\Gamma_1)^k + A_2(\Gamma_2)^k \quad \text{avec } |\Gamma_i| < 1$$

et A_1, A_2 des $\mathbb{C}^{\text{ste}}$

Si $\Gamma_1 = \Gamma_2$ poles double

$$y_H(k) = (A_1 + A_2 k) \Gamma_1^k \quad A_1 \text{ et } A_2 \in \mathbb{C}^{\text{ste}}$$

③ Eq d'ordre n :

$$y(k+n) + a_{n-1} y(k+n-1) + \dots + a_1 y(k+1) + a_0 y(k) = z(k)$$

Solution de l'eq homogène $y(k) = \Gamma^k$

$$\Gamma^n + a_{n-1} \Gamma^{n-1} + a_1 \Gamma + a_0 = 0$$

$$y_H(k) = \sum_{i=1}^n A_i (\Gamma_i)^k$$

Si $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3, \Gamma_4 = \Gamma_5 = \dots = \Gamma_n$

$$y_H(k) = (A_1 + A_2 k + A_3 k^2) \Gamma_1^k + \sum_{i=4}^n A_i (\Gamma_i)^k$$

Stabilité des systèmes discrets:

Pour qu'un syst discrets soit stable, il faut que les solutions de l'eq aux differences verifient les conditions suivantes:

$|\Gamma_i| < 1$: stable

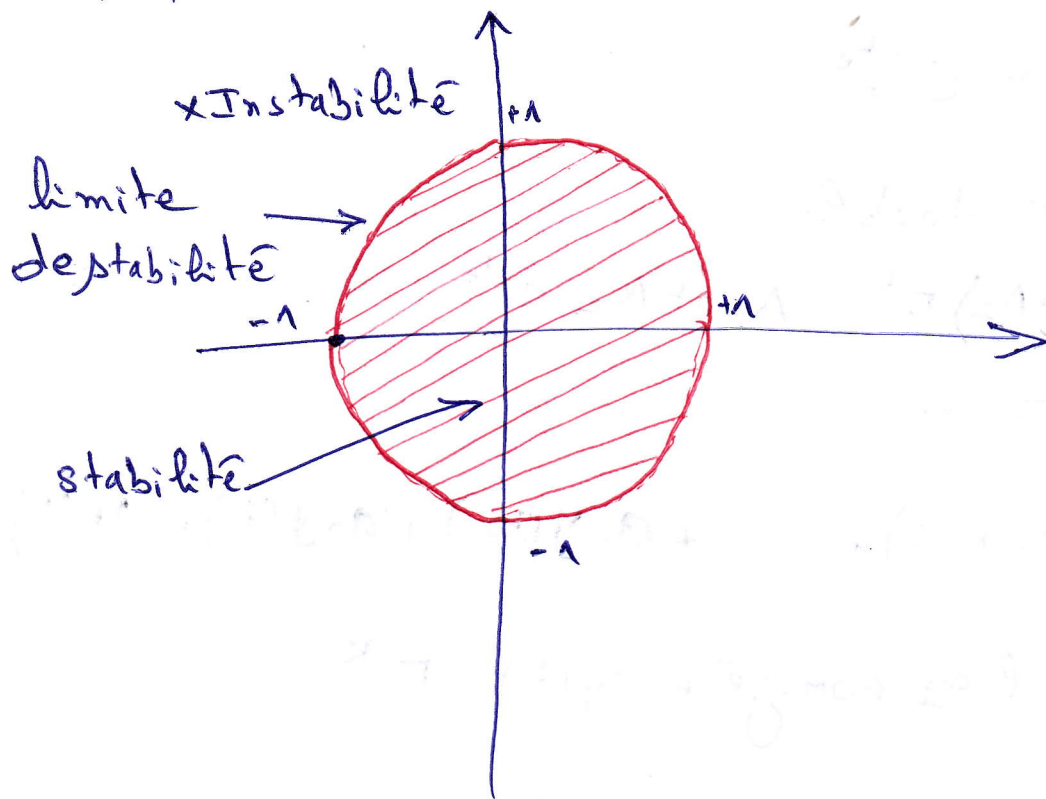
$|\Gamma_i| = 1$: limite de stabilité

$|\Gamma_i| > 1$: Instabilité

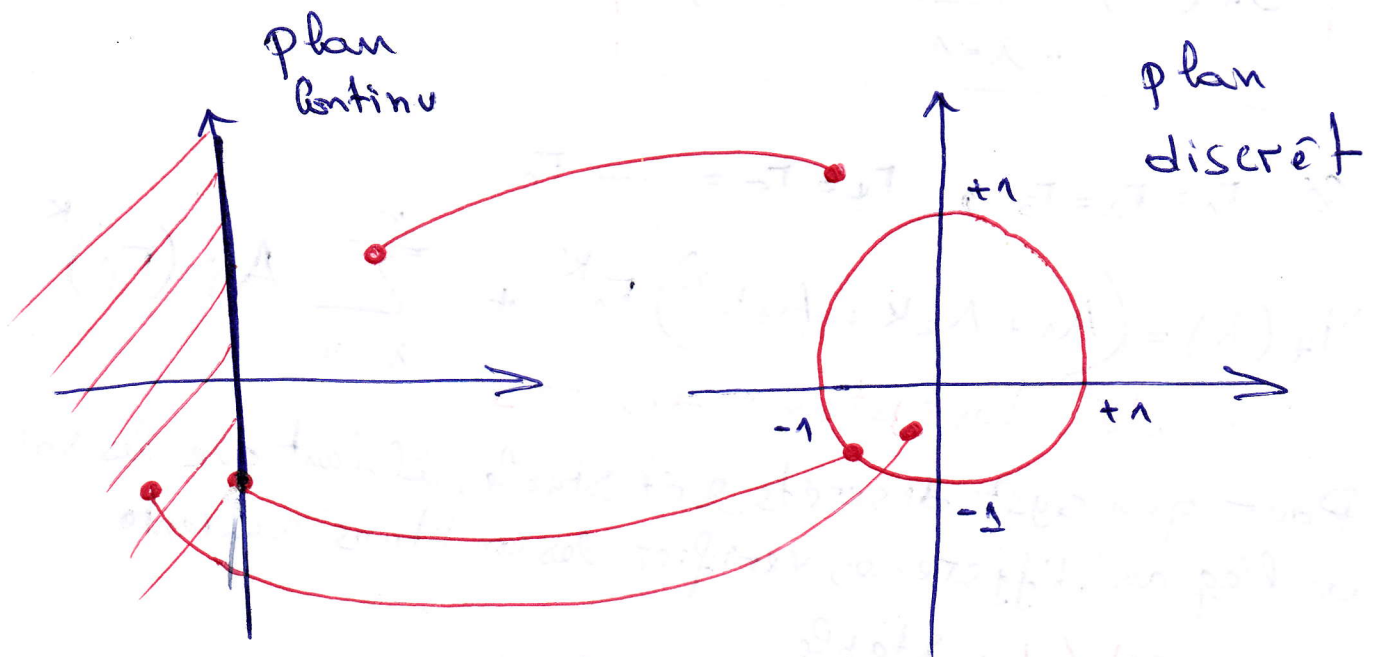
Si $\exists \Gamma_i$ tq $|\Gamma_i| > 1$ Instabilité

$$y(k) = A \cdot |\Gamma_i|^k \quad \lim_{k \rightarrow \infty} y(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} A |\Gamma_i|^k = \begin{cases} 0 & \text{si } |\Gamma_i| < 1 \text{ stable} \\ \infty & \text{si } |\Gamma_i| > 1 \text{ instabilité} \end{cases}$$

Pour qu'un système discret soit stable il faut que ses racines soient à l'intérieure du cercle (disc) unitaire
 $|r_i| < 1$



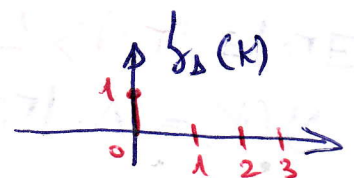
Donc en comparant les système continus avec les système discret, nous obtenons:



(*) Signaux Discrets

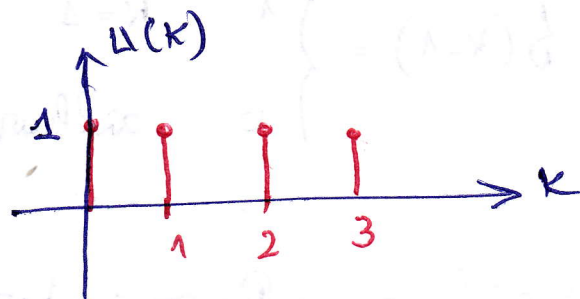
(i) Impulsion de Kronecker

$$\delta_{\Delta}(k) = \begin{cases} 1 & k=0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$



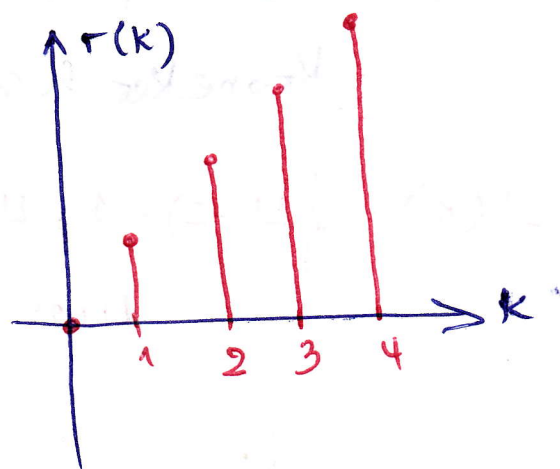
② Echelon unitaire

$$u(k) = \begin{cases} 1 & k=0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$



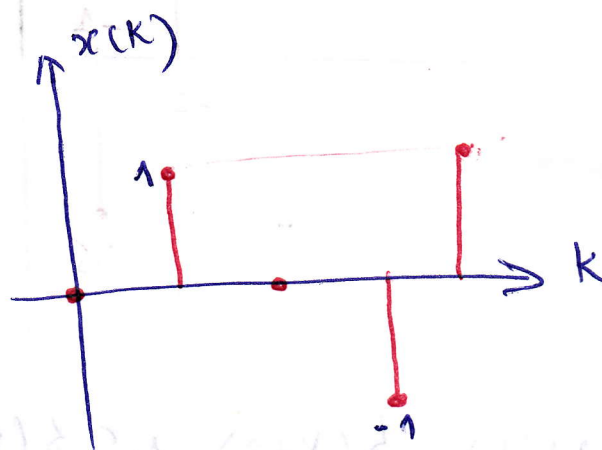
③ Rampe unitaire

$$r(k) = \begin{cases} k & k=0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$



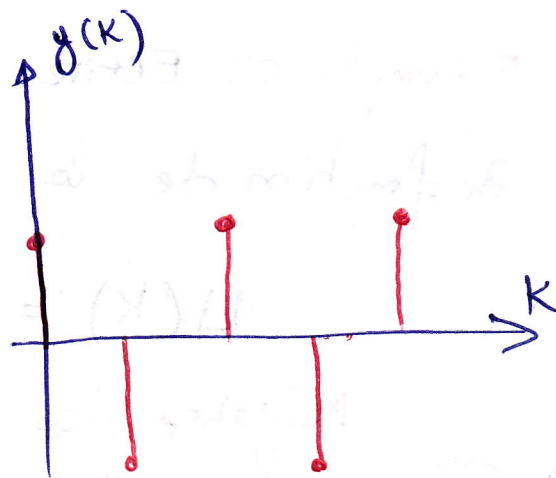
④ Suite sinusoidale

$$x(k) = \begin{cases} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right), & k=0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$



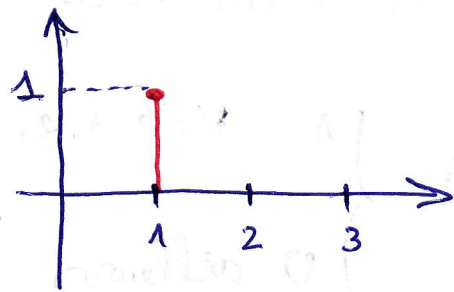
⑤ Suite alternée

$$y(k) = \begin{cases} (-1)^k & k=0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$



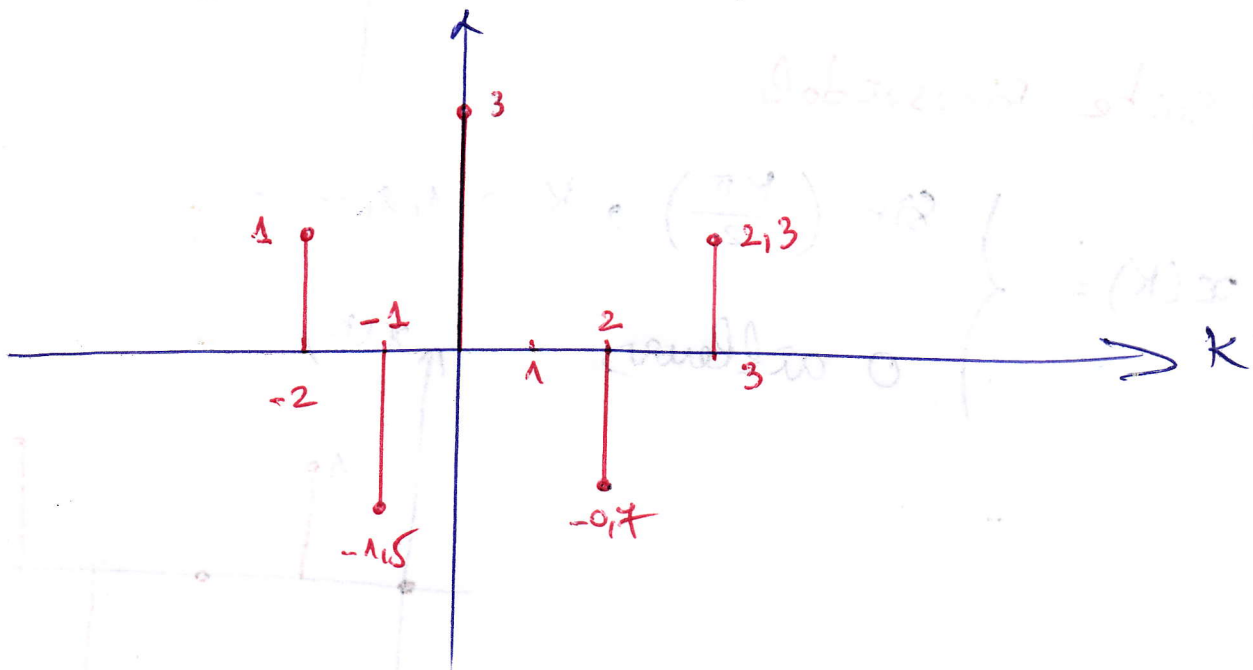
Exemple 01

$$\delta(k-1) = \begin{cases} 1 & k=1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$



Exemple 02 : Représenter au moyen de la suite de Kroneker le signal discret suivant

$$u(k) = \{ u(-2) = 1, u(-1) = -1,5, u(0) = 3, \\ u(2) = -0,7, u(3) = 2,3 \}$$



$$u(k) = \delta(k+2) - 1,5 \delta(k+1) + 3 \delta(k) - 0,7 \delta(k-2) + 2,3 \delta(k-3)$$

Exemple 03 Ecrire l'expression de l'échelon unitaire en fonction de la suite de Kroneker

$$u(k) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(k-n)$$

Algebre des signaux discrets :

* Somme/différence

$$\{u(k)\} = \{u_1(k)\} \pm \{u_2(k)\}$$

avec les éléments $U(K) = U_1(K) \pm U_2(K)$

* Multiplication par un réel :

$$\{U(K)\} = \alpha \{U_1(K)\} \Rightarrow U(K) = \alpha U_1(K) \quad \alpha = C^{st}$$

Exemple : Trouver $U_1(K) + U_2(K)$

$U_1(K)$ Echelon unitaire

$U_2(K)$ Suite alternée

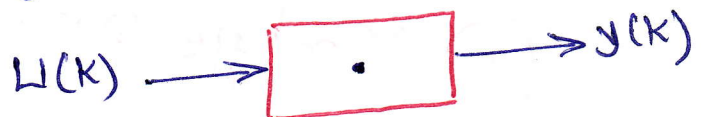
$$U(K) = U_1(K) + U_2(K) = \begin{cases} 2 & K: \text{paire} \\ 0 & K: \text{impaire} \end{cases}$$

Représentation des syst discret au moyen de la convolution

Exemple = soit le syst discret suivant

$$y(K) + a_1 y(K-1) = U(K)$$

$$y(-1) = 0, \quad K = 0, 1, 2, \dots$$



$$y(K) = -a_1 y(K-1) + U(K)$$

$$K=0 : y(0) = -a_1 y(-1) + U(0) = U(0)$$

$$K=1 : y(1) = -a_1 y(0) + U(1) = U(1) - a_1 U(0)$$

$$K=2 : y(2) = -a_1 y(1) + U(2) = -a_1 (-a_1 U(0) + U(1)) + U(2) \\ = -a_1^2 U(0) - a_1 U(1) + U(2)$$

$$K=3 : y(3) = -a_1^3 U(0) - a_1^2 U(1) - a_1 U(2) + U(3)$$

$$K=K : y(K) = (-a_1)^K U(0) + \dots + a_1^2 U(K-2) - a_1 U(K-1) + U(K)$$

$$y(K) = U(K) + \sum_{i=1}^K (-a_1)^i U(K-i)$$

 (19)