

Chapitre 1 :

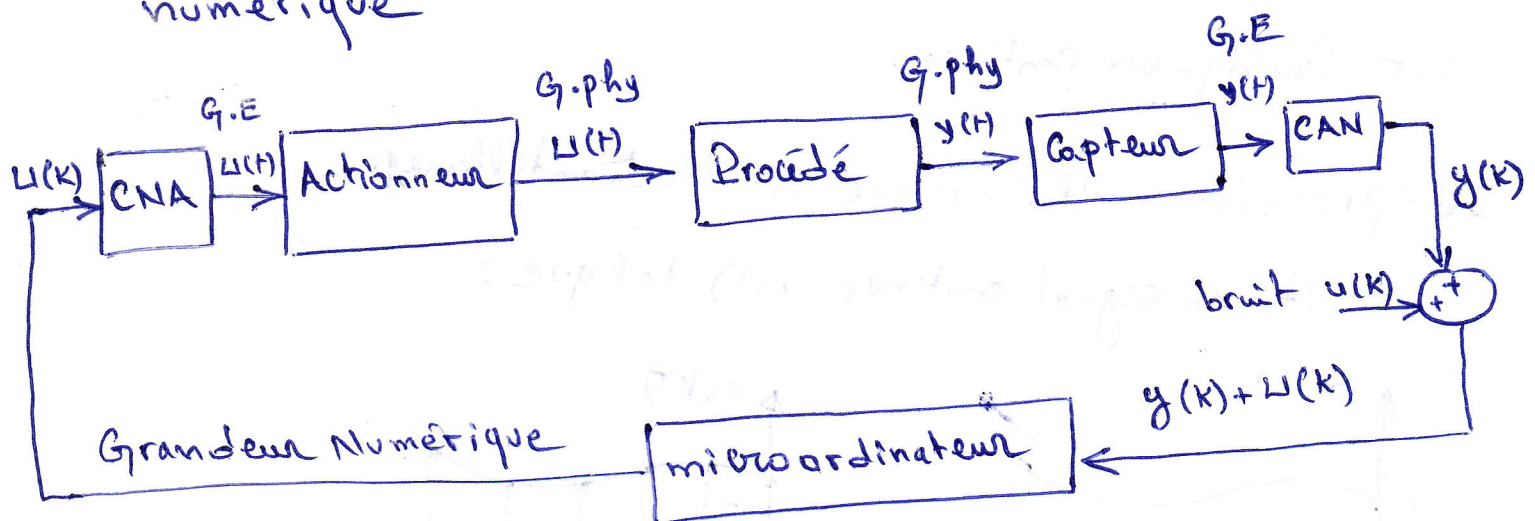
Structure d'un Système de Commande
Numérique et Echantillonnage des Signaux

Chapitre 01: structure d'un syst de cde Num et échantillonnage des signaux

La génération de l'utilisation des calculateurs a permis leur exploitation comme structure de commande numérique pour les système dynamiques asservis et ceci par le biais de l'implantation d'algorithmes gérés par le calculateur remplaçant ainsi avantageusement les régulateurs analogiques de commande.

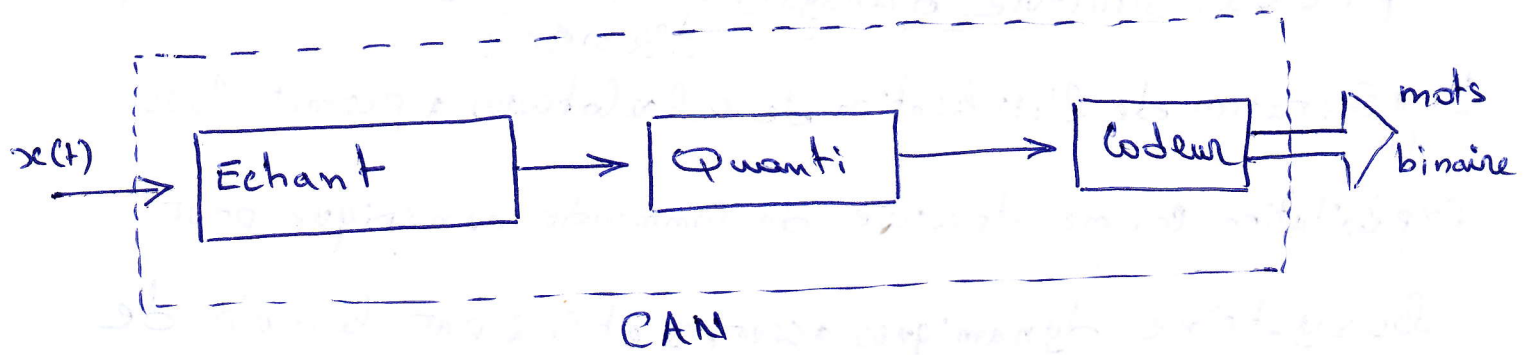
l'exploitation des calculateurs pour la commande des processus est plus flexible et permet d'obtenir des performances meilleures que celles obtenues par des commandes analogique.

(*) La figure suivante représente la structure de la commande numérique



- le CAN est constitué de 3 étapes :

- 1- Échantillonneur
- 2- Quantificateur
- 3- Codeur



* Echantillonnage:

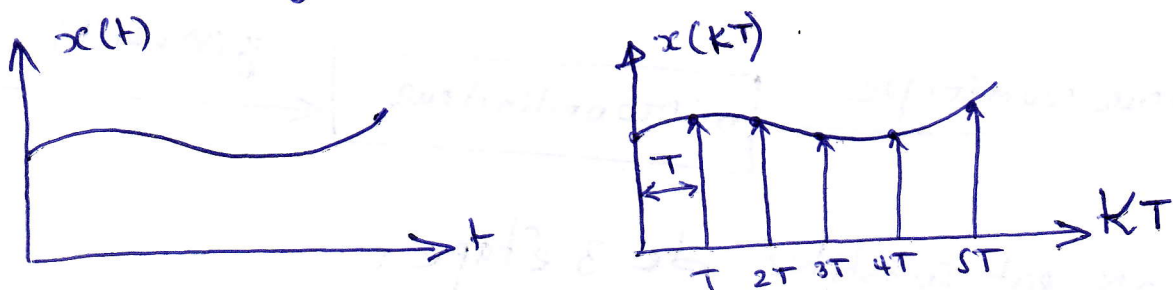
Echantillonner un signal analogique signifie le remplacer par une suite de ses valeurs prises à des instants bien définis,

l'échantillonnage joue un rôle central en réglage numérique de fait que l'ordinateur traite des nombres plutôt de grandeurs analogiques.

On dit alors qu'on échantillonne à une fréquence $f_e = \frac{1}{T}$ est donc indispensable de considérer l'effet de l'échantillonnage sur les signaux continus.

* Expression mathématique de l'échantillonnage:

Soit un signal continu $x(t)$ tel que :



↑
après échantillonnage

l'échantillonnage est réalisé par une suite d'impulsion
 infiniment brève appelée fonction peigne de dirac
 tel que $\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$

$\delta_T(t)$ est périodique $\Rightarrow$ elle admet un développement
 en série de fourier de la forme suivante:

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega_0 t}$$

avec $\left\{ \begin{array}{l} \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f_e \\ C_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta_T(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \end{array} \right.$

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta_T(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} e^{-jn\omega_0(0)} = \frac{1}{T}$$

$$C_n = \frac{1}{T}, \quad \boxed{\delta_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{jn\omega_0 t}}$$

Un signal échantillonné $\hat{x}(t)$ est représenté par:

$$\hat{x}(t) = x(t) \cdot \delta_T(t) = x(t) \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$$

$$\boxed{\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT) \cdot \delta(t - kT)}$$

T : période de l'échantillonnage, $f_e = \frac{1}{T}$: fréquence de l'éch (3)

* Spectre d'un signal échantillonné :

On a :

$$\hat{x}(t) = x(t) \cdot \delta_T(t)$$

$$\begin{aligned} \hat{x}(f) &= \int \{ x(t) \cdot \delta_T(t) \} \\ &= x(f) * \int \left\{ \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{+jn\omega_0 t} \right\} \\ &= x(f) * \frac{1}{T} \int \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{jn\omega_0 t} \cdot e^{-j\omega t} \right) dt \\ &= \frac{1}{T} x(f) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int e^{-jt(\omega - n\omega_0)} dt \\ &= \frac{1}{T} x(f) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - n f_e) \end{aligned}$$

$$\hat{x}(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(f) * \delta(f - n f_e)$$

$$\boxed{\hat{x}(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(f - n f_e)} \quad \text{avec } \frac{1}{T} = f_e$$

$$\hat{x}(f) = \frac{1}{T} [\dots x(f + f_e) + x(f) + x(f - f_e) \dots]$$

* Critère d'échantillonnage (Théorème de Shannon)

Soit $x(t)$ un signal à spectre limité :

$x(f) = 0$ pour $|f| > f_{\max}$ alors $x(t)$ est

complètement déterminé de ces échantillons $n = 0, \pm 1, \dots$

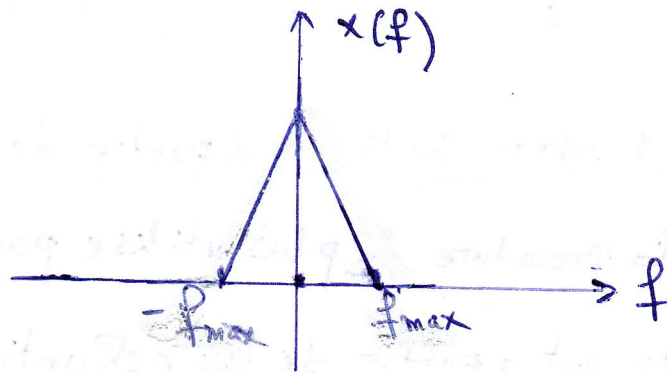
(4)

* Si $f_e \geq 2f_{\max}$ avec $f_e = \frac{1}{T}$ fréquence d'échantillonnage
 Un repliement du spectre se produit si la fréquence
 d'éch $f_e < 2f_{\max}$

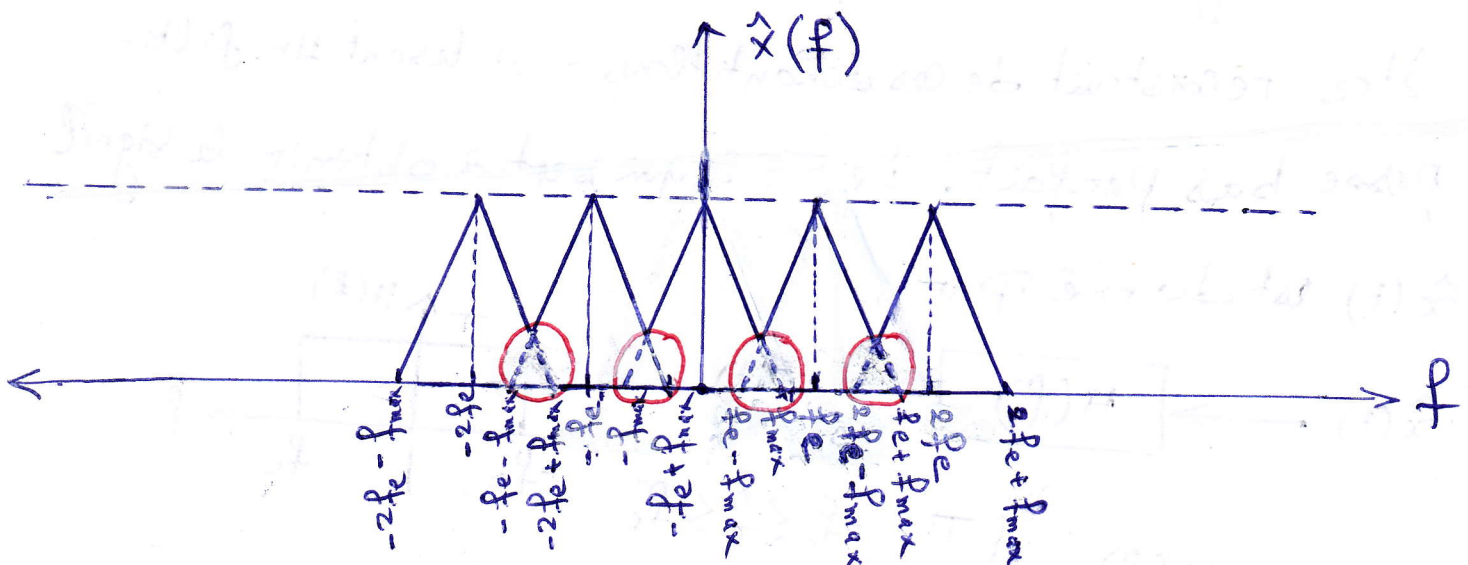
Exemple

Soit un signal $x(t)$ de spectre $x(f)$ tel que :

$$x(f) = 0 \text{ Pour } |f| > f_{\max}$$

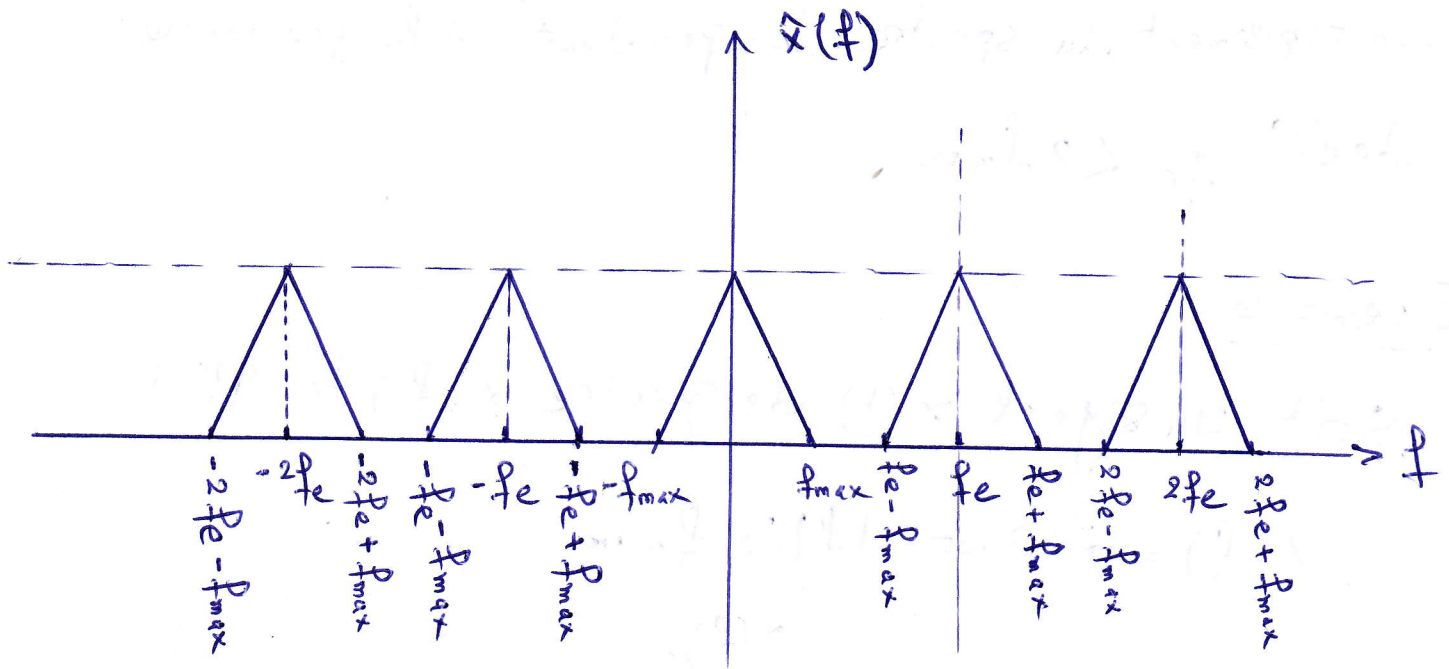


Si $f_e < 2f_{\max}$ ($f_e = 1.5 f_{\max}$)



On remarque qu'il y'a un chevauchement de partie de $\hat{x}(f)$ alors on ne peut ~~on ne peut pas~~ extraire le signal $x(t)$ de ces échantillon parceque le spectre du signal échantillonné est replié sur lui même. (5)

si $f_e \geq 2 f_{\max}$ ($f_e = 3 f_{\max}$)

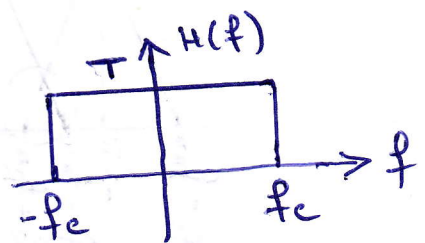
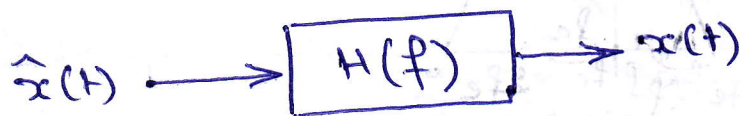


* reconstruction d'un signal continue à partir de ces échantillons:

L'interpolation est la procédure la plus utilisée pour reconstruire une fonction exactement à partir de ces échantillons.

Pour un signal à bande limitée, le signal continu peut être reconstruit de ces échantillons en utilisant un filtre passe bas parfait. Le "FPB" qui sert à obtenir le signal

$\hat{x}(t)$ est donné par :



avec $H(f) = \begin{cases} T & -f_c \leq f \leq f_c \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$

$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(f) e^{j\omega t} df$, $x(t) = \hat{x}(t) * h(t)$

(6) $h(t) = \int_{-f_c}^{f_c} T e^{2\pi j f t} df$, $h(t) = 2T f_c \text{sinc}(2f_c t)$

$$x(t) = \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT) \delta(t - kT) \right] * h(t)$$

$$x(t) = 2f_c T \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT) [\delta(t - kT) * \text{sinc}(2\pi f_c t)]$$

$$x(t) = 2f_c T \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT) \text{sinc}(2\pi f_c (t - kT))$$

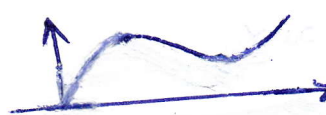
Remarque = en générale un filtre passe bas idéal

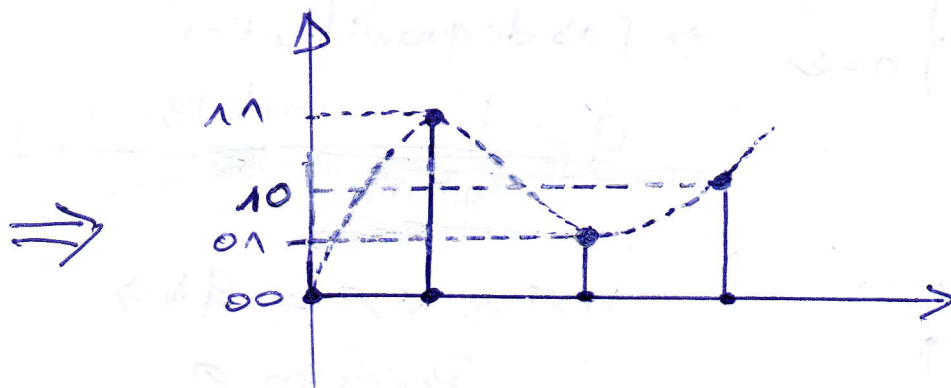
il n'est pas facile à obtenir physiquement alors on peut utiliser

un Bloqueur

Quantification = Détermine des valeurs définies sur les
combinaisons numériques.

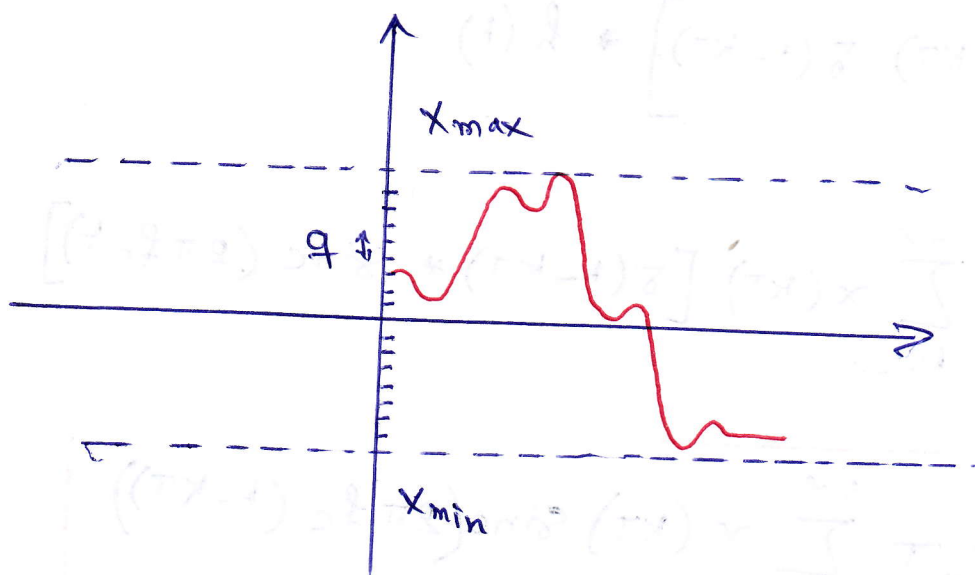
Exemple:

 $\Rightarrow 2 \text{ bits} \Rightarrow 2^2 \text{ combinaisons}$



Quantification $\Rightarrow$ Erreur va être introduite

(7)



$[x_{\min}, x_{\max}]$ Correspond à un nombre infini de niveaux

Si n est la longueur du mot binaire (bits) et si N est le nombre de combinaison binaire $N = 2^n$

Cas réel $N = \infty$ physiquement irréalisable (mémoire) $\Rightarrow$

La solution de ce problème est de prendre seulement quelques valeurs de $[x_{\min}, x_{\max}] \Rightarrow$ Quantifier l'axe des amplitudes.

Donc l'axe des amplitudes est divisé en 2^n niveaux

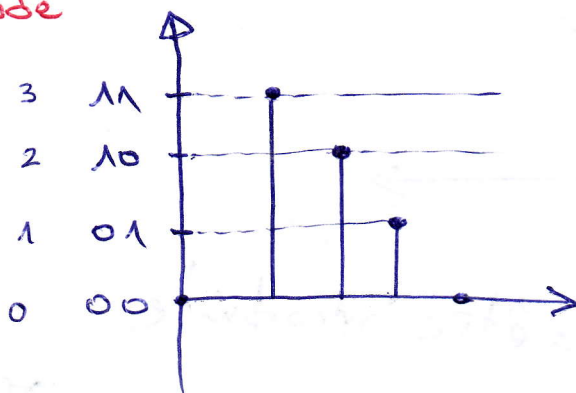
Exemple: Quantifier $x(t)$ sur 4 niveaux

longueur du mot codé $2^n = 4 \Rightarrow \begin{cases} N = 4 \\ n = 2 \end{cases}$

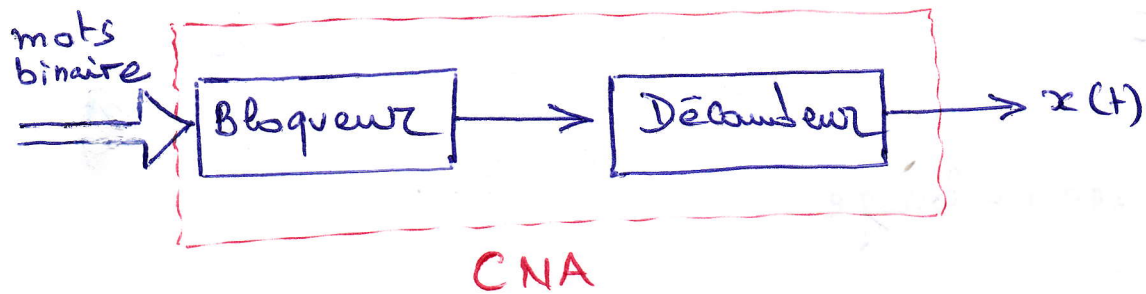
$\Rightarrow$ pas de quantification

$$q = \frac{|x_{\max} - x_{\min}|}{2^n - 1} = \frac{|3 - 0|}{4 - 1} = 1$$

$n \uparrow \Rightarrow N \uparrow \Rightarrow q \downarrow \Rightarrow$
Précision $\uparrow$



Le CNA est représenté par le schéma suivant



Bloqueur = L'opération de Blocage consiste à reconstruire un signal analogique à partir d'un signal échantillonné

Reconstruction $\neq$ Échantillonnage

→ il existe plusieurs types de bloqueur

- Bloqueur d'ordre 0

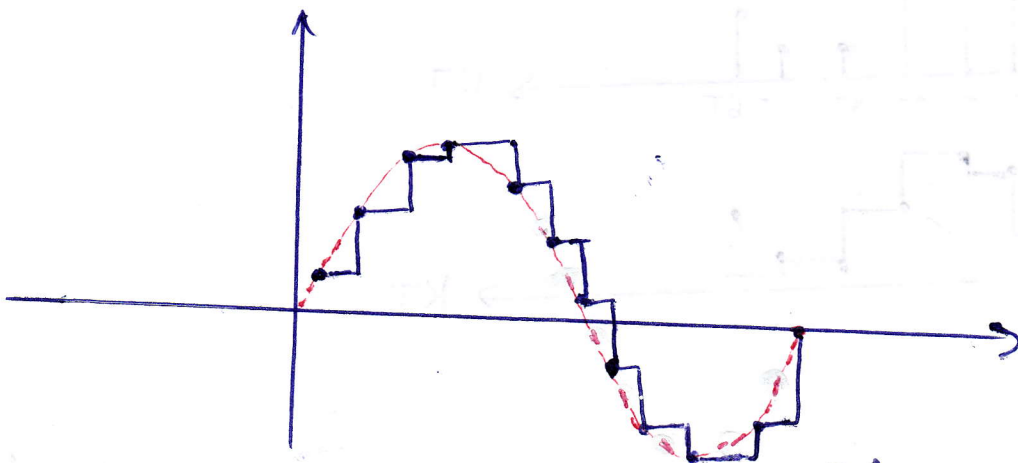
- = 1

- = 2

- l'avantage d'un bloqueur d'ordre 0 est sa simplicité de réalisation

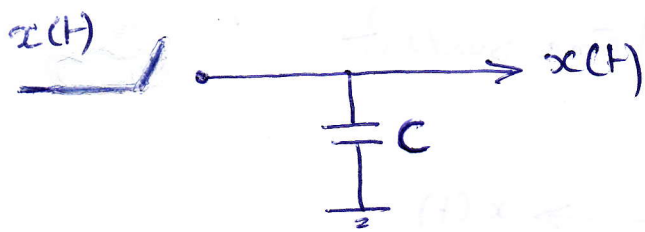
- l'inconvénient n'est pas précis

si l'ordre $\nearrow \Rightarrow$ la précision $\nearrow$ mais la complexité $\nearrow$



(9)

Bloqueur d'ordre "0"



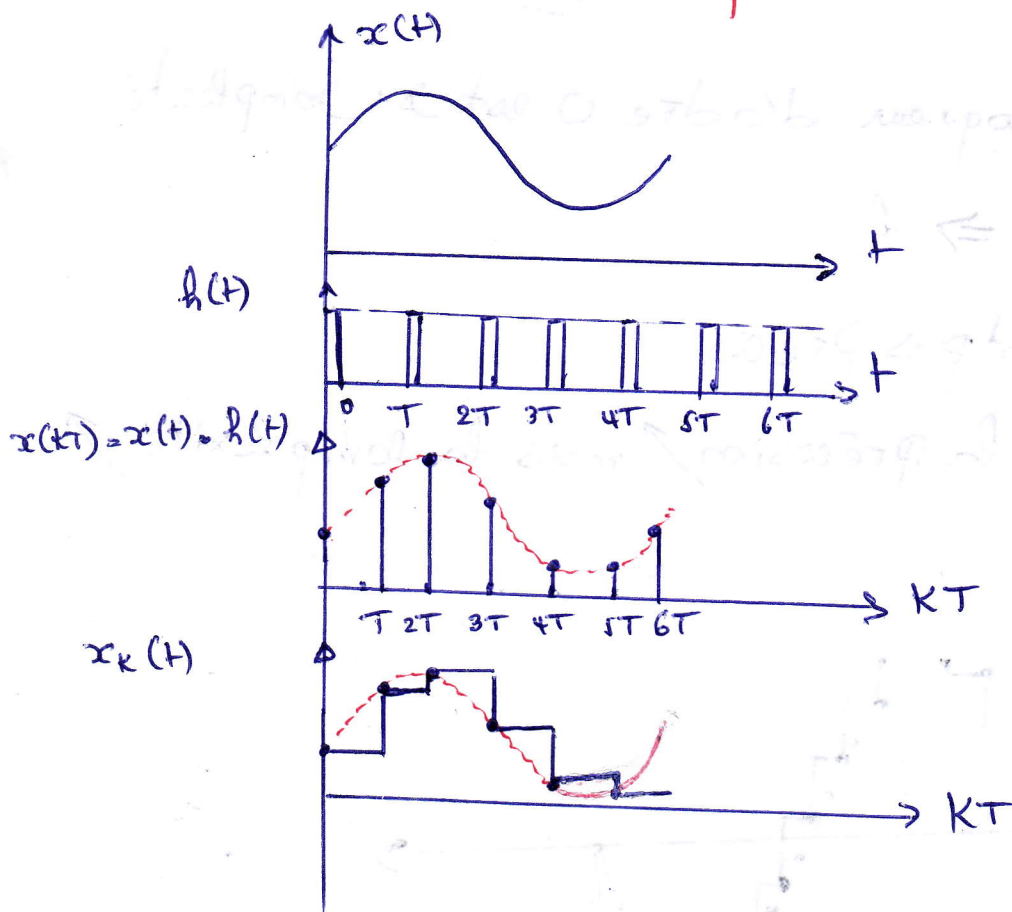
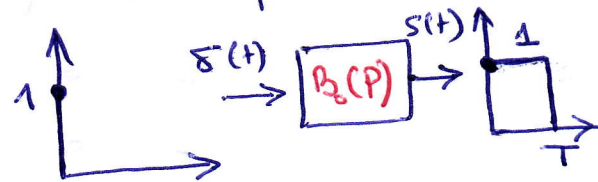
Echantillonnage + bloage

Récapitulatif : L'échantillonnage consiste à multiplier un signal échantillonner à un signal horloge (suite d'impulsions). La période d'échantillonnage (période horloge) est calculée selon le théorème de Shannon $f_e \gg 2 f_{max}$.

Remarque :

- Le bloqueur d'ordre "0" a une fonction de transfert déterminée

par : $B_0(p) = \frac{1 - e^{-Tp}}{p}$ $\Rightarrow$



$$s(t) = u(t) - u(t-T)$$

$$S(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p} e^{-Tp}$$

$$S(p) = \frac{1 - e^{-Tp}}{p}$$