

# DYNAMIQUE DES OUVRAGES GEOTECHNIQUES

## Chapitre 2

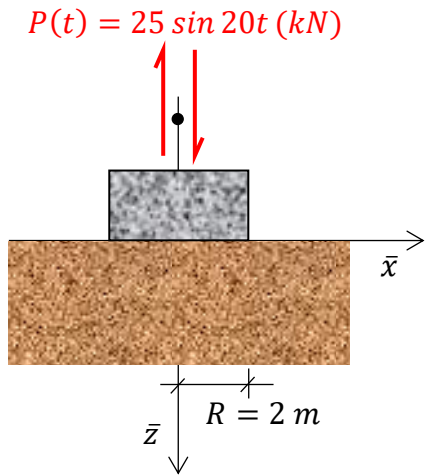
### Comportement des fondations sous machines vibrantes

#### Exercices

**Prof. Mohamed KHEMISSA**

*Département de Génie Civil, Faculté de Technologie,  
Université Mohamed Boudiaf – M'sila*

**Ex. 1** Calculer la fréquence de vibration à la résonance d'une semelle circulaire de rayon  $R = 2 \text{ m}$  reposant sur un sol homogène en profondeur et soumise à un mouvement de pompage comme l'indique la figure ci-après, puis commenter le résultat trouvé. Calculer ensuite l'amplitude de vibration de la semelle à la résonance et à la fréquence appliquée, puis commenter les résultats trouvés.



Données

- Poids total (semelle+machine) :  $W = 700 \text{ kN}$
- Poinçonnement/Soulèvement admissible :  $\Delta h_{adm} = \pm 1 \text{ mm}$
- Poids volumique du sol :  $\gamma = 17 \text{ kN/m}^3$
- Module de Young du sol :  $E = 55 \text{ MPa}$
- Coefficient de Poisson du sol :  $\nu = 0.33$
- Accélération de la pesanteur :  $g = 10 \text{ m/s}^2$

**Rép. 1**

- ✓ Module de cisaillement du sol ( $G$ ) :

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{55}{2 \times (1+0.33)} = 20.7 \text{ MPa} = 20.7 \times 10^3 \text{ kPa}$$

- ✓ Rapport des masses modifié ( $B_z$ ) :

$$B_z = \frac{1-\nu}{4} \frac{m}{\rho R^3} = \frac{1-\nu}{4} \frac{W}{\rho g R^3} = \frac{1-\nu}{4} \frac{W}{\gamma R^3} = \frac{1-0.33}{4} \times \frac{700}{17 \times 2^3} = 0.862$$

- ✓ Rapport d'amortissement critique ( $D_z$ ) :

$$D_z = \frac{0.425}{\sqrt{B_z}} = \frac{0.425}{\sqrt{0.862}} = 0.458$$

- ✓ Fréquence naturelle de la semelle ( $f_{n-z}$ ) :

$$f_{n-z} = \frac{1}{2\pi R} \sqrt{\frac{G}{\rho B_z}} = \frac{1}{2 \times \pi \times 2} \sqrt{\frac{20.7 \times 10^3}{1.7 \times 0.862}} = 9.46 \text{ Hz}$$

- ✓ Fréquence de résonance de la semelle ( $f_{res-z}$ ) :

$$f_{res-z} = \frac{1}{2\pi R B_z} \sqrt{\frac{G(B_z - 0.361)}{\rho}} = \frac{1}{2 \times \pi \times 2 \times 0.862} \sqrt{\frac{20.7 \times 10^3 \times (0.862 - 0.361)}{1.7}} = 7.21 \text{ Hz}$$

Commentaire :

$$f_o = \frac{\omega_o}{2\pi} = \frac{20}{2 \times \pi} = 3.18 \text{ Hz} < f_{res-z} = 7.21 \text{ Hz}$$

⇒ Ok. Il n'y a pas de risque de résonance de la semelle.

Autre approche :

Soit :  $\omega_o$  – la pulsation appliquée

$\omega_n$  – la pulsation naturelle de la semelle

$$\Rightarrow \text{Il n'y aura pas de résonance si } \frac{\omega_o}{\omega_n} < 0.5 \text{ ou } \frac{\omega_o}{\omega_n} > 2.$$

Ainsi :  $\omega_o = 20 \text{ rad}$

$$\omega_n = 2\pi f_n = 2 \times \pi \times 9.46 = 59.44 \text{ rad}$$

$$\Rightarrow \frac{\omega_o}{\omega_n} = \frac{20}{59.44} = 0.34 < 0.5$$

$\Rightarrow$  Ok. Il n'y a pas de risque de résonance de la semelle.

✓ Amplitude de vibration de la semelle à la résonance ( $A_{res-z}$ ) :

$$A_{res-z} = \frac{P_o(1-\nu)B_z}{3.4GR\sqrt{B_z-0.181}} = \frac{25 \times (1-0.33) \times 0.862}{3.4 \times 20.7 \times 10^3 \times 2 \sqrt{0.862-0.181}} = 0.124 \times 10^{-3} \text{ m}$$

✓ Amplitude de vibration de la semelle à la fréquence appliquée ( $A_z$ ) :

$$A_z = \frac{P_o(1-\nu)}{4GR \sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + 4D_z^2 \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \quad | \quad \omega = \omega_o$$

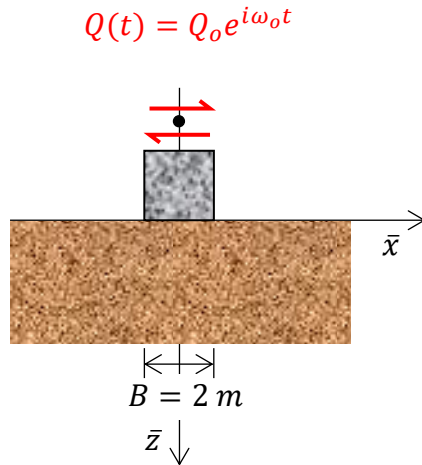
$$\Rightarrow A_z = \frac{25 \times (1-0.33)}{4 \times 20.7 \times 10^3 \times 2 \sqrt{\left[1 - \left(\frac{20}{59.44}\right)^2\right]^2 + 4 \times 0.458^2 \times \left(\frac{20}{59.44}\right)^2}} = 0.108 \times 10^{-3} \text{ m}$$

Commentaire :

$$A_z = 0.108 \text{ mm} < A_{res-z} = 0.124 \text{ mm} < |\Delta h_{adm}| = 1 \text{ mm}$$

$\Rightarrow$  Ok. Il n'y a pas de risque de poinçonnement du sol de fondation et la semelle est stable vis-à-vis du soulèvement.

**Ex. 2** Calculer la fréquence de vibration à la résonance d'une semelle carrée de côté  $B = 2 \text{ m}$  reposant sur un sol homogène en profondeur et soumise à un mouvement de tamis comme l'indique la figure ci-après, puis commenter le résultat trouvé. Calculer ensuite l'amplitude de vibration de la semelle à la résonance et à la fréquence appliquée, puis commenter les résultats trouvés.



#### Données

- Poids total (semelle+machine) :  $W = 20 \text{ t}$
- Amplitude de la force excitatrice :  $Q_0 = 1 \text{ t}$
- Fréquence de vibration appliquée :  $f_0 = 2.50 \text{ Hz}$
- Glissement admissible :  $\Delta l_{adm} = \pm 1 \text{ mm}$
- Densité du sol :  $\rho = 1.9$
- Module de cisaillement du sol :  $G = 4 \text{ MPa}$
- Coefficient de Poisson du sol :  $\nu = 0.3$
- Accélération de la pesanteur :  $g = 10 \text{ m/s}^2$

#### Rép. 2

- ✓ Rayon équivalent ( $R_e$ ) :

$$R_e = \sqrt{\frac{B \times L}{\pi}} = \sqrt{\frac{B \times B}{\pi}} = \frac{B}{\sqrt{\pi}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} = 1.13 \text{ m}$$

- ✓ Rapport des masses modifié ( $B_x$ ) :

$$B_x = \frac{7-8\nu}{32(1-\nu)} \frac{m}{\rho R^3} = \frac{7-8\nu}{32(1-\nu)} \frac{W}{\rho g R^3} = \frac{7-8 \times 0.3}{32 \times (1-0.3)} \times \frac{200}{1.9 \times 10 \times 1.13^3} = 1.498$$

- ✓ Rapport d'amortissement critique ( $D_x$ ) :

$$D_x = \frac{0.2875}{\sqrt{B_x}} = \frac{0.2875}{\sqrt{1.498}} = 0.235$$

- ✓ Fréquence naturelle de la semelle ( $f_{n-x}$ ) :

$$f_{n-x} = \frac{1}{2\pi R} \sqrt{\frac{G}{\rho B_x}} = \frac{1}{2 \times \pi \times 1.13} \sqrt{\frac{4 \times 10^3}{1.9 \times 1.498}} = 5.28 \text{ Hz}$$

- ✓ Fréquence de résonance de la semelle ( $f_{res-x}$ ) :

$$f_{res-x} = \frac{1}{2\pi R B_x} \sqrt{\frac{G(B_x - 0.165)}{\rho}} = \frac{1}{2 \times \pi \times 1.13 \times 1.498} \sqrt{\frac{4 \times 10^3 \times (1.498 - 0.165)}{1.9}} = 4.98 \text{ Hz}$$

#### Commentaire :

$$f_0 = 2.50 \text{ Hz} < f_{res-x} = 4.98 \text{ Hz}$$

⇒ Ok. Il n'y a pas de risque de résonance de la semelle.

#### Autre approche (voir Ex.1) :

$$\frac{\omega_0}{\omega_n} = \frac{2\pi f_0}{2\pi f_{n-x}} = \frac{f_0}{f_{n-x}} = \frac{2.50}{5.28} = 0.47 < 0.5$$

⇒ Ok. Il n'y a pas de risque de résonance de la semelle.

- ✓ Amplitude de vibration de la semelle à la résonance ( $A_{res-x}$ ) :

$$A_{res-x} = \frac{Q_0(7-8\nu)B_x}{18.4(1-\nu)GR\sqrt{B_x-0.083}} = \frac{10 \times (7-8 \times 0.3) \times 1.498}{18.4 \times (1-0.3) \times 4 \times 10^3 \times 1.13 \sqrt{1.498-0.083}} = 0.995 \times 10^{-3} \text{ m}$$

Autre formule :

$$A_{res-x} = \frac{Q_o(7-8\nu)}{64(1-\nu)GRD_x\sqrt{1-D_x^2}} = \frac{10 \times (7-8 \times 0.3)}{64 \times (1-0.3) \times 4 \times 10^3 \times 0.235 \sqrt{1-0.325^2}} = 0.995 \times 10^{-3} \text{ m}$$

✓ Amplitude de vibration de la semelle à la fréquence appliquée ( $A_x$ ) :

$$A_x = \frac{Q_o}{k_x} \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + 4D_x^2 \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \quad | \quad k_x = \frac{32(1-\nu)GR}{(7-8\nu)}$$

$$\Rightarrow A_x = \frac{(7-8\nu)Q_o}{32(1-\nu)GR \sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + 4D_x^2 \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \quad | \quad \omega = \omega_o$$

Sachant que :  $\frac{\omega}{\omega_n} = \frac{\omega_o}{\omega_n} = \frac{f_o}{f_n}$

$$\Rightarrow A_x = \frac{(7-8\nu)Q_o}{32(1-\nu)GR \sqrt{\left[1 - \left(\frac{f_o}{f_n}\right)^2\right]^2 + 4D_x^2 \left(\frac{f_o}{f_n}\right)^2}}$$

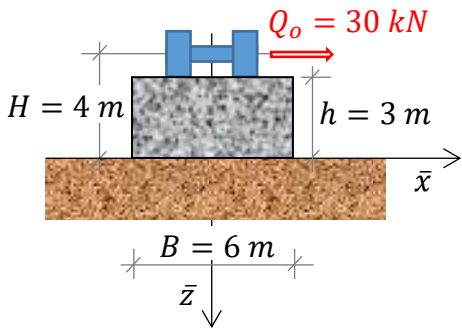
$$\Rightarrow A_x = \frac{(7-8 \times 0.3) \times 10}{32 \times (1-0.3) \times 4 \times 10^3 \times 1.13 \sqrt{\left[1 - \left(\frac{2.5}{5.28}\right)^2\right]^2 + 4 \times 0.235^2 \times \left(\frac{2.5}{5.28}\right)^2}} = 0.551 \times 10^{-3} \text{ m}$$

Commentaire :

$$A_x = 0.551 \text{ mm} < A_{res-x} = 0.995 \text{ mm} < |\Delta l_{adm}| = 1 \text{ mm}$$

⇒ Ok. La semelle est stable vis-à-vis du glissement.

**Ex. 3** Calculer la fréquence de vibration à la résonance et l'amplitude de vibration à la résonance d'une semelle rectangulaire de largeur  $B = 6 \text{ m}$  et de longueur  $L = 8 \text{ m}$  en béton armé reposant sur un sol homogène en profondeur et soumise à un mouvement de roulis dû à un compresseur comme l'indique la figure ci-après.



#### Données

- Force horizontale engendrée par le compresseur :  $Q_o = 30 \text{ kN}$
- Moment d'inertie massique du compresseur :  $J_m = 1600 \text{ kNm}^2$
- Densité du sol :  $\rho = 1.8$
- Module de cisaillement du sol :  $G = 18 \text{ MPa}$
- Coefficient de Poisson du sol :  $\nu = 0.35$
- Accélération de la pesanteur :  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$
- Poids volumique du béton :  $\gamma_b = 24 \text{ kN/m}^3$

#### Rép. 3

- ✓ Rayon équivalent ( $R_e$ ) :

$$R_e = \sqrt[4]{\frac{LB^3}{3\pi}} = \sqrt[4]{\frac{8 \times 6^3}{3 \times \pi}} = 3.68 \text{ m}$$

- ✓ Moment de balancement de la semelle ( $M_{yo}$ ) :

$$M_{yo} = Q_o H = 30 \times 4 = 120 \text{ kNm}$$

- ✓ Moment d'inertie massique ( $J_y$ ) :

$$J_y = J_{y\text{-Fondation}} + J_{y\text{-Machine}}$$

$$J_y = m \left( \frac{R_e^2}{4} + \frac{h^2}{3} \right) + J_m \quad | \quad m = \frac{W}{g} = \frac{\gamma_b \pi R_e^2 h}{g}$$

$$J_y = \frac{\gamma_b \pi R_e^2 h}{g} \left( \frac{R_e^2}{4} + \frac{h^2}{3} \right) + J_m = \frac{24 \times \pi \times 3.680^2 \times 3}{9.81} \times \left( \frac{3.680^2}{4} + \frac{3^2}{3} \right) + 1600$$

$$J_y = 3593.934 \text{ kNm}^2$$

- ✓ Rapport des masses modifié ( $B_\theta$ ) :

$$B_\theta = \frac{3(1-\nu)}{8} \frac{J_y}{\rho R_e^5} = \frac{3 \times (1-0.35)}{8} \frac{3593.934}{1.8 \times 3.680^5} = 0.721$$

- ✓ Rapport d'amortissement critique ( $D_\theta$ ) :

$$D_\theta = \frac{0.15}{(1+B_\theta)\sqrt{B_\theta}} = \frac{0.15}{(1+0.721)\sqrt{0.721}} = 0.103$$

- ✓ Fréquence naturelle de la semelle ( $f_{n-\theta}$ ) :

$$f_{n-\theta} = \frac{1}{2\pi R_e} \sqrt{\frac{G}{\rho B_\theta}} = \frac{1}{2 \times \pi \times 3.68} \sqrt{\frac{18 \times 10^3}{1.8 \times 0.721}} = 5.09 \text{ Hz}$$

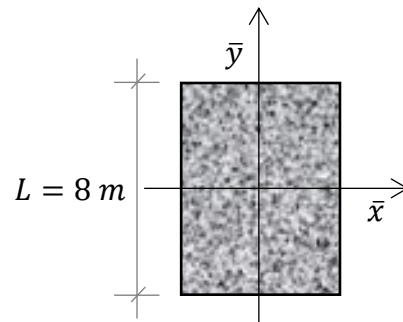
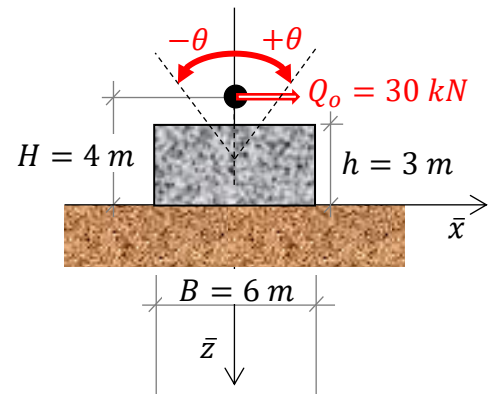
- ✓ Fréquence de résonance de la semelle ( $f_{res-\theta}$ ) :

$$f_{res-\theta} = \frac{f_{n-\theta}}{\sqrt{1-2D_\theta^2}} = \frac{5.09}{\sqrt{1-2 \times 0.103^2}} = 5.14 \text{ Hz}$$

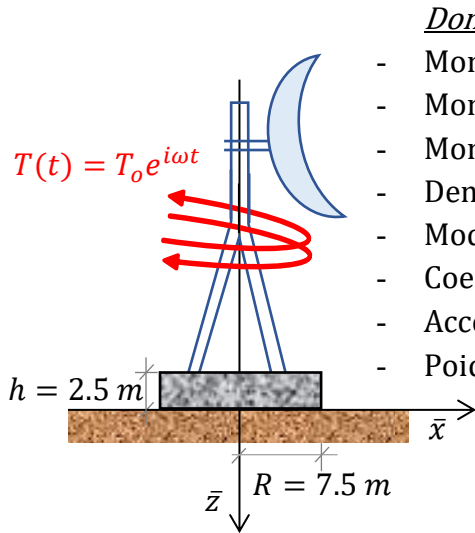
- ✓ Amplitude de vibration de la semelle à la résonance ( $\theta_{res}$ ) :

$$\theta_{res} = \frac{3(1-\nu)M_{yo}}{16GR_e^3 D_\theta \sqrt{1-D_\theta^2}} = \frac{3 \times (1-0.35) \times 120}{16 \times 18 \times 10^3 \times 3.680^3 \times 0.103 \sqrt{1-0.103^2}} = 15.913 \times 10^{-5} \text{ rad}$$

$$M_y(t) = M_{yo} e^{i\omega_o t} = Q_o H e^{i\omega_o t}$$



**Ex. 4** Soit un radar fondé sur une semelle circulaire de rayon  $R = 7.5 \text{ m}$  en béton armé soumise à un mouvement de lacet dû au vent comme l'indique la figure ci-après. On demande de calculer la fréquence de résonance et la déflexion angulaire de cette semelle.



#### Données

- Moment de torsion dû à l'inertie :  $(T_o)_{inertie} = 250 \text{ kNm}$
- Moment de torsion dû au vent :  $(T_o)_{vent} = 100 \text{ kNm}$
- Moment d'inertie massique de la tour /  $\bar{z}$  :  $J_{z-Tour} = 10^4 \text{ kN/m}^2$
- Densité du sol :  $\rho = 1.76$
- Module de cisaillement du sol :  $G = 135 \text{ MPa}$
- Coefficient de Poisson du sol :  $\nu = 0.25$
- Accélération de la pesanteur :  $g = 10 \text{ m/s}^2$
- Poids volumique du béton :  $\gamma_b = 24 \text{ kN/m}^3$

#### Rép. 4

- ✓ Moment d'inertie massique ( $J_z$ ) :

$$J_z = J_{z-Fondation} + J_{z-Tour}$$

$$J_z = \frac{mR^2}{2} + J_{z-Tour} \quad | \quad m = \frac{W}{g} = \frac{\gamma_b \pi R^2 h}{g}$$

$$J_z = \frac{\gamma_b \pi R^4 h}{2g} + J_{z-Tour} = \frac{24 \times \pi \times 7.5^4 \times 2.5}{2 \times 10} + 10^4 = 3.982 \times 10^4 \text{ kNm}^2$$

- ✓ Rapport des masses modifié ( $B_\alpha$ ) :

$$B_\alpha = \frac{J_z}{\rho R^5} = \frac{3.982 \times 10^4}{1.76 \times 7.5^5} = 0.953$$

- ✓ Rapport d'amortissement critique ( $D_\alpha$ ) :

$$D_\alpha = \frac{0.5}{1 + 2B_\alpha} = \frac{0.5}{1 + 2 \times 0.953} = 0.172$$

- ✓ Fréquence naturelle de la semelle ( $f_{n-\alpha}$ ) :

$$f_{n-\alpha} = \frac{1}{2\pi R} \sqrt{\frac{16G}{3\rho B_\alpha}} = \frac{1}{2 \times \pi \times 7.5} \sqrt{\frac{16 \times 135 \times 10^3}{3 \times 1.76 \times 0.953}} = 13.90 \text{ Hz}$$

- ✓ Fréquence de résonance de la semelle ( $f_{res-\alpha}$ ) :

$$f_{res-\alpha} = f_{n-\alpha} \sqrt{1 - 2D_\alpha^2} = 13.90 \sqrt{1 - 2 \times 0.172^2} = 13.48 \text{ Hz}$$

- ✓ Amplitude de vibration de la semelle à la résonance ( $\alpha_{res}$ ) :

$$\alpha_{res} = \alpha_{inertie} + \alpha_{stat-vent}$$

$$\alpha_{res} = \frac{T_{o-inertie}}{2k_\alpha D_\alpha \sqrt{1 - D_\alpha^2}} + \frac{T_{o-vent}}{k_\alpha} \quad | \quad k_\alpha = \frac{16GR^3}{3}$$

$$\alpha_{res} = \frac{3T_{o-inertie}}{32GR^3 D_\alpha \sqrt{1 - D_\alpha^2}} + \frac{3T_{o-vent}}{16GR^3}$$

$$\alpha_{res} = \frac{3 \times 250}{32 \times 135 \times 10^3 \times 7.5^3 \times 0.172 \sqrt{1 - 0.172^2}} + \frac{3 \times 100}{16 \times 135 \times 10^3 \times 7.5^3} = 0.276 \times 10^{-5} \text{ rad}$$

**Ex. 5** Reprenons les données de l'exercice Ex.1 avec cette fois-ci la semelle est ancrée à  $D_f = 2 \text{ m}$  dans le sol. On demande de calculer la fréquence de résonance et l'amplitude de vibration à la résonance de la semelle, puis de commenter les résultats trouvés.

**Rép. 5**

✓ Rapport des masses modifié ( $\bar{B}_z$ ) :

- $\eta_z = 1 + 0.6(1 - \nu) \frac{D_f}{R} = 1 + 0.6(1 - 0.33) \frac{2}{2} = 1.402$

- Sachant que :

$$B_z = \frac{1 - \nu}{4} \frac{m}{\rho R^3}$$

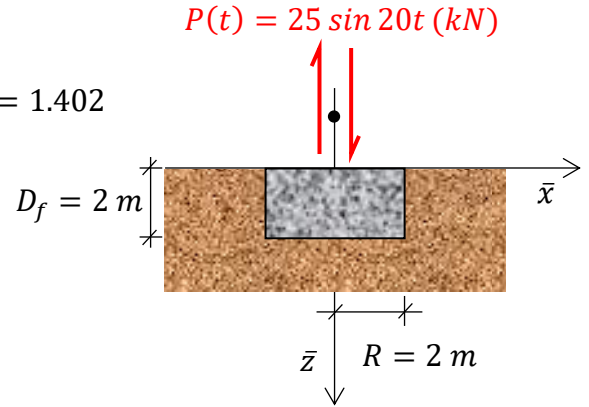
$$k_z = \frac{4GR}{1 - \nu}$$

$$\bar{k}_z = \eta_z k_z$$

$$\Rightarrow B_z = \frac{mG}{\rho R^2 k_z} \Rightarrow \bar{B}_z = \frac{mG}{\rho R^2 \bar{k}_z}$$

$$\Rightarrow \bar{B}_z = \left( \frac{mG}{\rho R^2 k_z} \right) \frac{1}{\eta_z} = \left( \frac{1 - \nu}{4} \frac{W}{\gamma R^3} \right) \frac{1}{\eta_z} \Rightarrow \bar{B}_z = \frac{B_z}{\eta_z}$$

$$\Rightarrow \bar{B}_z = \frac{1 - 0.33}{4} \times \frac{700}{17 \times 2^3} \times \frac{1}{1.402} = \frac{0.862}{1.402} = 0.615$$



✓ Rapport d'amortissement critique ( $\bar{D}_z$ ) :

- Sachant que :

$$D_z = \frac{0.425}{\sqrt{B_z}} \Rightarrow \bar{D}_z = \frac{0.425}{\sqrt{\bar{B}_z}} = D_z \sqrt{\eta_z}$$

$$\Rightarrow \bar{D}_z = \frac{0.425}{\sqrt{0.615}} = 0.458 \sqrt{1.402} = 0.542$$

✓ Fréquence naturelle de la semelle ( $\bar{f}_{n-z}$ ) :

- Sachant que :

$$f_{n-z} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_z}{m}} \Rightarrow \bar{f}_{n-z} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\bar{k}_z}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\eta_z k_z}{m}}$$

$$\Rightarrow \bar{f}_{n-z} = f_{n-z} \sqrt{\eta_z}$$

$$\Rightarrow \bar{f}_{n-z} = 9.46 \sqrt{1.402} = 11.20 \text{ Hz}$$

Autre approche :

$$f_{n-z} = \frac{1}{2\pi R} \sqrt{\frac{G}{\rho B_z}} \Rightarrow \bar{f}_{n-z} = \frac{1}{2\pi R} \sqrt{\frac{G}{\rho \bar{B}_z}}$$

$$\Rightarrow \bar{f}_{n-z} = \frac{1}{2 \times \pi \times 2} \sqrt{\frac{20.7 \times 10^3}{1.7 \times 0.615}} = 11.20 \text{ Hz}$$

✓ Fréquence de résonance de la semelle ( $\bar{f}_{res-z}$ ) :

$$f_{res-z} = f_{n-z} \sqrt{1 - 2D_z^2} \Rightarrow \bar{f}_{res-z} = \bar{f}_{n-z} \sqrt{1 - 2\bar{D}_z^2}$$

$$\Rightarrow \bar{f}_{res-z} = 11.20 \sqrt{1 - 2 \times 0.542^2} = 7.20 \text{ Hz}$$

Autre approche :

$$f_{res-z} = \frac{1}{2\pi R B_z} \sqrt{\frac{G(B_z - 0.361)}{\rho}} \Rightarrow \bar{f}_{res-z} = \frac{1}{2\pi R \bar{B}_z} \sqrt{\frac{G(\bar{B}_z - 0.361)}{\rho}}$$

$$\Rightarrow \bar{f}_{res-z} = \frac{1}{2 \times \pi \times 2 \times 0.615} \sqrt{\frac{20.7 \times 10^3 (0.615 - 0.361)}{1.7}} = 7.20 \text{ Hz}$$

Commentaire :

- $f_o = 3.18 \text{ Hz} < \bar{f}_{res-z} = 7.21 \text{ Hz}$   
 $\Rightarrow$  Ok. Il n'y a pas de risque de résonance de la semelle.
- $\bar{f}_{res-z} = 7.21 \text{ Hz} \cong f_{res-z} = 7.20 \text{ Hz}$   
 $\Rightarrow$  L'ancrage de la semelle n'a pas d'influence sur sa mise en résonance.

✓ Amplitude de vibration de la semelle à la résonance ( $\bar{A}_{res-z}$ ) :

$$A_{res-z} = \frac{P_o(1-\nu)}{8GRD_z \sqrt{1-D_z^2}} \Rightarrow \bar{A}_{res-z} = \frac{P_o(1-\nu)}{8GR\bar{D}_z \sqrt{1-\bar{D}_z^2}}$$

$$\Rightarrow \bar{A}_{res-z} = \frac{25 \times (1-0.33)}{8 \times 20.7 \times 10^3 \times 2 \times 0.542 \times \sqrt{1-0.542^2}} = 0.111 \times 10^{-3} \text{ m}$$

Autre approche :

$$A_{res-z} = \frac{P_o(1-\nu)B_z}{3.4GR\sqrt{B_z-0.181}} \Rightarrow \bar{A}_{res-z} = \frac{P_o(1-\nu)\bar{B}_z}{3.4GR\sqrt{\bar{B}_z-0.181}}$$

$$\Rightarrow \bar{A}_{res-z} = \frac{25 \times (1-0.33) \times 0.615}{3.4 \times 20.7 \times 10^3 \times 2 \times \sqrt{0.615-0.181}} = 0.111 \times 10^{-3} \text{ m}$$

Commentaire :

- $\bar{A}_{res-z} = 0.111 \text{ mm} < |\Delta h_{adm}| = 1 \text{ mm}$   
 $\Rightarrow$  Ok. Il n'y a pas de risque de poinçonnement de la semelle.
- $\bar{A}_{res-z} = 0.111 \text{ mm} < A_{res-z} = 0.124 \text{ mm}$   
 $\Rightarrow$  L'ancrage de la semelle a pour effet de réduire l'amplitude de sa vibration.

**Ex. 6** Reprenons les données de l'exercice Ex.2 avec cette fois-ci la semelle ancrée à  $D_f = 2 \text{ m}$  dans le sol. On demande de calculer la fréquence de résonance et l'amplitude de vibration à la résonance de la semelle, puis de commenter les résultats trouvés.

### Rép. 6

✓ Rapport des masses modifié ( $\bar{B}_x$ ) :

- $\eta_x = 1 + 0.55(2 - \nu) \frac{D_f}{R} = 1 + 0.55(2 - 0.3) \frac{2}{1.13} = 2.665$

- Sachant que :

$$B_x = \frac{7-8\nu}{32(1-\nu)} \frac{m}{\rho R^3}$$

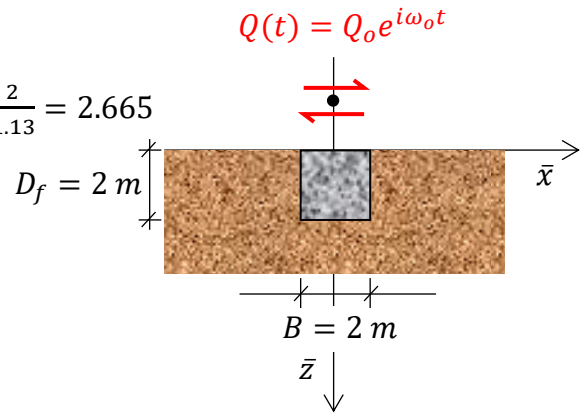
$$k_x = \frac{32(1-\nu)GR}{7-8\nu}$$

$$\bar{k}_x = \eta_x k_x$$

$$\Rightarrow B_x = \frac{mG}{\rho R^2 k_x} \Rightarrow \bar{B}_x = \frac{mG}{\rho R^2 \bar{k}_x}$$

$$\Rightarrow \bar{B}_x = \left( \frac{7-8\nu}{32(1-\nu)} \frac{m}{\rho R^3} \right) \frac{1}{\eta_x} = \left( \frac{7-8\nu}{32(1-\nu)} \frac{W}{\rho g R^3} \right) \frac{1}{\eta_x} \Rightarrow \bar{B}_x = \frac{B_x}{\eta_x}$$

$$\Rightarrow \bar{B}_x = \frac{7-8 \times 0.3}{32 \times (1-0.3)} \times \frac{200}{1.9 \times 10 \times 1.13^3} \times \frac{1}{2.665} = \frac{1.498}{2.665} = 0.562$$



✓ Rapport d'amortissement critique ( $\bar{D}_x$ ) :

- Sachant que :

$$D_x = \frac{0.2875}{\sqrt{B_x}} \Rightarrow \bar{D}_x = \frac{0.2875}{\sqrt{\bar{B}_x}} = D_x \sqrt{\eta_x}$$

$$\Rightarrow \bar{D}_x = \frac{0.2875}{\sqrt{0.562}} = 0.235 \sqrt{2.665} = 0.384$$

✓ Fréquence naturelle de la semelle ( $\bar{f}_{n-x}$ ) :

- Sachant que :

$$f_{n-x} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_x}{m}} \Rightarrow \bar{f}_{n-x} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\bar{k}_x}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\eta_x k_x}{m}}$$

$$\Rightarrow \bar{f}_{n-x} = f_{n-x} \sqrt{\eta_x}$$

$$\Rightarrow \bar{f}_{n-x} = 5.28 \sqrt{2.665} = 8.62 \text{ Hz}$$

Autre approche :

$$f_{n-x} = \frac{1}{2\pi R} \sqrt{\frac{G}{\rho B_x}} \Rightarrow \bar{f}_{n-x} = \frac{1}{2\pi R} \sqrt{\frac{G}{\rho \bar{B}_x}}$$

$$\Rightarrow \bar{f}_{n-x} = \frac{1}{2 \times \pi \times 1.13} \sqrt{\frac{4 \times 10^3}{1.9 \times 0.562}} = 8.62 \text{ Hz}$$

✓ Fréquence de résonance de la semelle ( $\bar{f}_{res-x}$ ) :

$$f_{res-x} = f_{n-x} \sqrt{1 - 2D_x^2} \Rightarrow \bar{f}_{res-x} = \bar{f}_{n-x} \sqrt{1 - 2\bar{D}_x^2}$$

$$\Rightarrow \bar{f}_{res-x} = 8.62 \sqrt{1 - 2 \times 0.384^2} = 7.24 \text{ Hz}$$

Autre approche :

$$f_{res-x} = \frac{1}{2\pi R B_x} \sqrt{\frac{G(B_x - 0.165)}{\rho}} \Rightarrow \bar{f}_{res-x} = \frac{1}{2\pi R \bar{B}_x} \sqrt{\frac{G(\bar{B}_x - 0.165)}{\rho}}$$

$$\Rightarrow \bar{f}_{res-x} = \frac{1}{2 \times \pi \times 1.13 \times 0.562} \sqrt{\frac{4 \times 10^3 (0.562 - 0.165)}{1.9}} = 7.24 \text{ Hz}$$

Commentaire :

- $f_o = 2.50 \text{ Hz} < \bar{f}_{res-x} = 7.24 \text{ Hz}$   
 $\Rightarrow$  Ok. Il n'y a pas de risque de résonance de la semelle.
- $\bar{f}_{res-x} = 7.24 \text{ Hz} > f_{res-x} = 4.98 \text{ Hz}$   
 $\Rightarrow$  L'ancrage de la semelle a pour effet de réduire le risque de sa mise en résonance.

✓ Amplitude de vibration de la semelle à la résonance ( $\bar{A}_{res-x}$ ) :

$$A_{res-x} = \frac{Q_o(7-8\nu)}{64(1-\nu)GRD_x \sqrt{1-D_x^2}} \Rightarrow \bar{A}_{res-x} = \frac{Q_o(7-8\nu)}{64(1-\nu)GR\bar{D}_x \sqrt{1-\bar{D}_x^2}}$$

$$\Rightarrow \bar{A}_{res-z} = \frac{10 \times (7-8 \times 0.3)}{64 \times (1-0.3) \times 4 \times 10^3 \times 1.13 \times 0.384 \sqrt{1-0.384^2}} = 0.640 \times 10^{-3} \text{ m}$$

Autre approche :

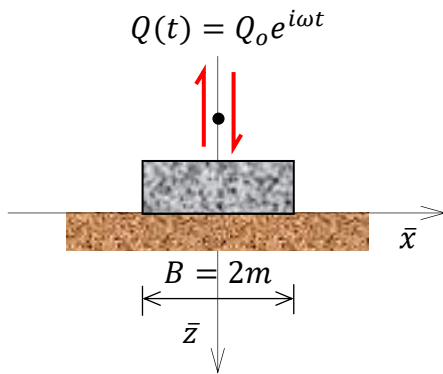
$$A_{res-x} = \frac{Q_o(7-8\nu)B_x}{18.4(1-\nu)GR\sqrt{\bar{B}_x-0.083}} \Rightarrow \bar{A}_{res-x} = \frac{Q_o(7-8\nu)\bar{B}_x}{18.4(1-\nu)GR\sqrt{\bar{B}_x-0.083}}$$

$$\Rightarrow \bar{A}_{res-z} = \frac{10 \times (7-8 \times 0.3) \times 0.562}{18.4 \times (1-0.3) \times 4 \times 10^3 \times 1.13 \sqrt{0.562-0.083}} = 0.640 \times 10^{-3} \text{ m}$$

Commentaire :

- $\bar{A}_{res-x} = 0.640 \text{ mm} < |\Delta l_{adm}| = 1 \text{ mm}$   
 $\Rightarrow$  Ok. La semelle est stable vis-à-vis du glissement.
- $\bar{A}_{res-x} = 0.640 \text{ mm} < A_{res-x} = 0.995 \text{ mm}$   
 $\Rightarrow$  L'ancrage de la semelle a pour effet de réduire l'amplitude de sa vibration.

**Ex. 7 (Interro. du 12/12/2022)** Calculer la fréquence et l'amplitude de vibration à la résonance d'une semelle carrée de côté  $B = 2 \text{ m}$  reposant sur un sol homogène en profondeur et soumise à un mouvement de pompage comme l'indique la figure ci-après. Commenter avec justification les résultats trouvés.



Données :

- Poids total (semelle+machine) :  $W = 100 \text{ t}$
- Amplitude de la force excitatrice :  $Q_o = 1 \text{ t}$
- Fréquence de vibration de la machine :  $f_o = 1 \text{ Hz}$
- Amplitude de vibration admissible :  $\Delta h_{adm} = \pm 1 \text{ mm}$
- Poids volumique du sol :  $\gamma = 20 \text{ kN/m}^3$
- Module de cisaillement du sol :  $G = 4 \text{ MPa}$
- Coefficient de Poisson du sol :  $\nu = 0.3$
- Accélération de la pesanteur :  $g = 10 \text{ m/s}^2$

Rép. 7

- Rayon équivalent de la semelle ( $R_e$ )

$$R_e = \frac{B}{\sqrt{\pi}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} = 1.128 \text{ m}$$

- Rapport des masses modifié ( $B_z$ )

$$B_z = \frac{1-\nu}{4} \frac{m}{\rho R^3} = \frac{1-\nu}{4} \frac{W}{\rho g R^3} = \frac{1-\nu}{4} \frac{W}{\gamma R^3} = \frac{1-0.3}{4} \times \frac{100 \times 10}{20 \times 1.128^3} = 6.090$$

- Rapport d'amortissement critique ( $D_z$ )

$$D_z = \frac{0.425}{\sqrt{B_z}} = \frac{0.425}{\sqrt{6.090}} = 0.172$$

- Fréquence naturelle ( $f_{n-z}$ )

$$f_{n-z} = \frac{1}{2\pi R} \sqrt{\frac{G}{\rho B_z}} = \frac{1}{2 \times \pi \times 1.128} \times \sqrt{\frac{4 \times 10^3}{\frac{20}{10} \times 6.090}} = 2.56 \text{ Hz}$$

- Fréquence de résonance ( $f_{res-z}$ )

$$f_{res-z} = \frac{1}{2\pi R B_z} \sqrt{\frac{G(B_z - 0.361)}{\rho}} = \frac{1}{2 \times \pi \times 1.128 \times 6.090} \times \sqrt{\frac{4 \times 10^3 \times (6.090 - 0.361)}{\frac{20}{10}}} = 2.48 \text{ Hz}$$

ou bien

$$f_{res-z} = f_{n-z} \sqrt{1 - 2D_z^2} = 2.56 \sqrt{1 - 2 \times 0.172^2} = 2.48 \text{ Hz}$$

- Amplitude de vibration à la résonance ( $A_{res-z}$ )

$$A_{res-z} = \frac{Q_o(1-\nu)}{8GRD_z \sqrt{1-D_z^2}} = \frac{10 \times (1-0.3)}{8 \times 4 \times 10^3 \times 1.128 \times 0.172 \times \sqrt{1-0.172^2}} = 1.143 \times 10^{-3} \text{ m}$$

ou bien

$$A_{res-z} = \frac{Q_o(1-\nu)B_z}{3.4GR \sqrt{B_z - 0.181}} = \frac{10 \times (1-0.3) \times 6.090}{3.4 \times 4 \times 10^3 \times 1.128 \times \sqrt{6.090 - 0.181}} = 1.143 \times 10^{-3} \text{ m}$$

- **Commentaires justifiés**

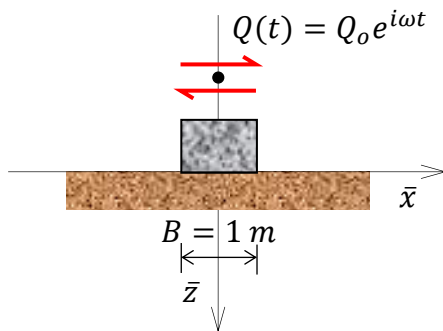
- ✓  $f_{res-z} = 2.48 \text{ Hz} > f_o = 1 \text{ Hz}$

- ⇒ Ok. Pas de risque de résonance de la semelle.

- ✓  $A_{res-z} = 1.143 \text{ mm} > |\Delta h_{adm}| = 1 \text{ mm}$

- ⇒ Non ! Il y a risque de poinçonnement du sol de fondation,  
la semelle n'est donc pas stable vis-à-vis du tassement/soulèvement.

**Ex. 8 (EFS du 14/01/2023)** Calculer la fréquence de vibration à la résonance d'une semelle rectangulaire de largeur  $B = 1 \text{ m}$  et de longueur  $L = 2 \text{ m}$  reposant sur un sol homogène en profondeur et soumise à un mouvement de tamis comme l'indique la figure ci-après, puis commenter le résultat trouvé. Calculer ensuite l'amplitude de vibration de la semelle à la résonance et à la fréquence appliquée, puis commenter les résultats trouvés.



Données :

- Poids total (semelle+machine) :  $W = 10 \text{ t}$
- Amplitude de la force excitatrice :  $Q_o = 1 \text{ t}$
- Fréquence de vibration de la machine :  $f_o = 2 \text{ Hz}$
- Amplitude de vibration admissible :  $\Delta l_{adm} = \pm 2 \text{ mm}$
- Poids volumique du sol :  $\gamma = 20 \text{ kN/m}^3$
- Module de cisaillement du sol :  $G = 5 \text{ MPa}$
- Coefficient de Poisson du sol :  $\nu = 0.3$
- Accélération de la pesanteur :  $g = 10 \text{ m/s}^2$

**Rép. 8**

- Rayon équivalent de la semelle ( $R_e$ )

$$R_e = \sqrt{\frac{B \times L}{\pi}} = \sqrt{\frac{1 \times 2}{\pi}} = 0.80 \text{ m}$$

- Rapport des masses modifié ( $B_x$ )

$$B_x = \frac{7-8\nu}{32(1-\nu)} \frac{m}{\rho R_e^3} = \frac{7-8\nu}{32(1-\nu)} \frac{W}{\rho g R_e^3} = \frac{7-8 \times 0.3}{32 \times (1-0.3)} \times \frac{100}{2 \times 10 \times 0.80^3} = 2.005$$

- Rapport d'amortissement critique ( $D_x$ )

$$D_x = \frac{0.2875}{\sqrt{B_x}} = \frac{0.2875}{\sqrt{2.005}} = 0.203$$

- Fréquence naturelle ( $f_{n-x}$ )

$$f_{n-x} = \frac{1}{2\pi R_e} \sqrt{\frac{G}{\rho B_x}} = \frac{1}{2 \times \pi \times 0.80} \sqrt{\frac{5 \times 10^3}{2 \times 2.005}} = 7.02 \text{ Hz}$$

- Fréquence de résonance ( $f_{res-x}$ )

$$f_{res-x} = \frac{1}{2\pi R_e B_x} \sqrt{\frac{G(B_x - 0.165)}{\rho}} = \frac{1}{2 \times \pi \times 0.80 \times 2.005} \sqrt{\frac{5 \times 10^3 \times (2.005 - 0.165)}{2}} = 6.73 \text{ Hz}$$

ou bien

$$f_{res-x} = f_{n-x} \sqrt{1 - 2D_x^2} = 7.02 \sqrt{1 - 2 \times 0.203^2} = 6.73 \text{ Hz}$$

Commentaire :  $f_o = 2 \text{ Hz} < f_{res-x} = 6.73 \text{ Hz}$

$\Rightarrow$  Ok. Il n'y a pas de risque de résonance de la semelle.

- Amplitude de vibration à la résonance ( $A_{res-x}$ )

$$A_{res-x} = \frac{Q_o(7-8\nu)B_x}{18.4(1-\nu)GR_e\sqrt{B_x-0.083}} = \frac{10 \times (7-8 \times 0.3) \times 2.005}{18.4 \times (1-0.3) \times 5 \times 10^3 \times 0.80 \sqrt{2.005-0.083}} = 1.291 \times 10^{-3} \text{ m}$$

ou bien

$$A_{res-x} = \frac{Q_o(1-\nu)}{64GR_eD_x\sqrt{1-D_x^2}} = \frac{10 \times (1-0.3)}{64 \times 5 \times 10^3 \times 0.80 \times 0.203 \times \sqrt{1-0.203^2}} = 1.291 \times 10^{-3} \text{ m}$$

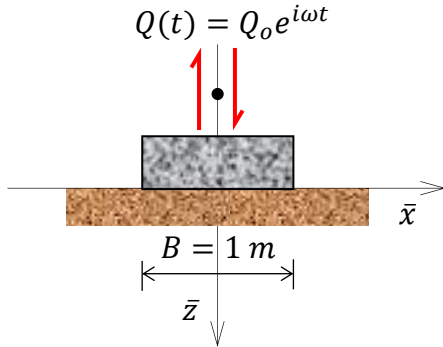
• **Amplitude de vibration à la fréquence appliquée ( $A_x$ )**

$$A_x = \frac{(7-8\nu)Q_o}{32(1-\nu)GR_e\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega_o}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + 4D_x^2\left(\frac{\omega_o}{\omega_n}\right)^2}} \quad \left| \quad \frac{\omega_o}{\omega_n} = \frac{f_o}{f_n}\right.$$

$$\Rightarrow A_x = \frac{(7-8 \times 0.3) \times 10}{32 \times (1-0.3) \times 5 \times 10^3 \times 0.80 \sqrt{\left[1-\left(\frac{2}{7.02}\right)^2\right]^2 + 4 \times 0.205^2 \times \left(\frac{2}{7.02}\right)^2}} = 0.551 \times 10^{-3} \text{ m}$$

Commentaire :  $A_x = 0.551 \text{ mm} < A_{res-x} = 1.291 \text{ mm} < |\Delta l_{adm}| = 2 \text{ mm}$   
 $\Rightarrow$  Ok. La semelle est stable vis-à-vis du glissement.

**Ex. 9 (EFS du 21/01/2025)** Considérons une semelle rectangulaire de largeur  $B = 1 \text{ m}$  et de longueur  $L = 2 \text{ m}$  reposant sur un sol homogène en profondeur et soumise à un mouvement de pompage comme l'indique la figure ci-après. On demande de calculer la fréquence naturelle de cette semelle, sa fréquence de vibration à la résonance, son amplitude de vibration à la résonance et son amplitude de vibration à la fréquence appliquée. Commenter ensuite avec justification les résultats trouvés.



Données :

- Poids total (semelle+machine) :  $W = 10 \text{ t}$
- Amplitude de la force excitatrice :  $Q_0 = 1 \text{ t}$
- Fréquence de vibration de la machine :  $f_0 = 2 \text{ Hz}$
- Amplitude de vibration admissible :  $\Delta h_{adm} = \pm 1 \text{ mm}$
- Poids volumique du sol :  $\gamma = 20 \text{ kN/m}^3$
- Module de cisaillement du sol :  $G = 5 \text{ MPa}$
- Coefficient de Poisson du sol :  $\nu = 0.3$
- Accélération de la pesanteur :  $g = 10 \text{ m/s}^2$

Rép. 9

- Rayon équivalent de la semelle rectangulaire ( $R_e$ ) :

$$R = R_e = \sqrt{\frac{BL}{\pi}} = \sqrt{\frac{1 \times 2}{\pi}} = 0.80 \text{ m}$$

- Rapport des masses modifié ( $B_z$ ) :

$$B_z = \frac{1-\nu}{4} \frac{m}{\rho R^3} = \frac{1-\nu}{4} \frac{W}{\gamma R^3} = \frac{1-0.3}{4} \times \frac{10 \times 10}{20 \times 0.8^3} = 1.71$$

- Rapport d'amortissement critique ( $D_z$ ) :  $D_z = \frac{0.425}{\sqrt{B_z}} = \frac{0.425}{\sqrt{1.71}} = 0.325$

- Raideur ( $k_z$ ) :  $k_z = \frac{4GR}{1-\nu} = \frac{4 \times 5 \times 10^3 \times 0.8}{1-0.3} = 22857.14 \text{ kN/m}$

- Fréquence naturelle ( $f_{n-z}$ ) :

$$f_{n-z} = \frac{1}{2\pi R} \sqrt{\frac{G}{\rho B_z}} = \frac{1}{2 \times \pi \times 0.8} \times \sqrt{\frac{5 \times 10^3}{\frac{20}{10} \times 1.71}} = 7.61 \text{ Hz}$$

ou bien :

$$f_{n-z} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_z}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_z}{\frac{W}{g}}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{22857.14}{\frac{10 \times 10}{10}}} = 7.61 \text{ Hz}$$

- Fréquence de résonance ( $f_{res-z}$ ) :

$$f_{res-z} = \frac{1}{2\pi R B_z} \sqrt{\frac{G(B_z - 0.361)}{\rho}} = \frac{1}{2 \times \pi \times 0.8 \times 1.71} \times \sqrt{\frac{5 \times 10^3 \times (1.71 - 0.361)}{\frac{20}{10}}} = 6.76 \text{ Hz}$$

ou bien :

$$f_{res-z} = f_{n-z} \sqrt{1 - 2D_z^2} = 7.61 \sqrt{1 - 2 \times 0.325^2} = 6.76 \text{ Hz}$$

- Amplitude de vibration à la résonance ( $A_{res-z}$ ) :

$$A_{res-z} = \frac{Q_o(1-\nu)B_z}{3.4GR\sqrt{B_z-0.181}} = \frac{10 \times (1-0.3) \times 1.71}{3.4 \times 5 \times 10^3 \times 0.8 \times \sqrt{1.71-0.181}} = 0.71 \times 10^{-3} \text{ m}$$

ou bien :

$$A_{res-z} = \frac{Q_o(1-\nu)}{8GRD_z\sqrt{1-D_z^2}} = \frac{10 \times (1-0.3)}{8 \times 5 \times 10^3 \times 0.8 \times 0.325 \times \sqrt{1-0.325^2}} = 0.71 \times 10^{-3} \text{ m}$$

- Amplitude de vibration à la fréquence appliquée ( $A_z$ ) :

$$A_z = \frac{Q_o}{k_z} \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + 4D_z^2 \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} = \frac{Q_o(1-\nu)}{4GR \sqrt{\left[1 - \left(\frac{f_o}{f_n}\right)^2\right]^2 + 4D_z^2 \left(\frac{f_o}{f_n}\right)^2}} \quad | \quad k_z = \frac{4GR}{1-\nu} \quad \& \quad \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{\omega_o}{\omega_n} = \frac{f_o}{f_n}$$

$$\Rightarrow A_z = \frac{10 \times (1-0.3)}{4 \times 5 \times 10^3 \times 0.8 \sqrt{\left[1 - \left(\frac{2}{7.61}\right)^2\right]^2 + 4 \times 0.325^2 \times \left(\frac{2}{7.61}\right)^2}} = 0.46 \times 10^{-3} \text{ m}$$

- Commentaires justifiés :

$$\checkmark f_o = 2 \text{ Hz} < f_{res-z} = 6.76 \text{ Hz} \quad (\text{Idem. } \frac{\omega_o}{\omega_n} = \frac{f_o}{f_n} = \frac{f_o}{f_{n-z}} = \frac{2}{7.61} = 0.26 < 0.5)$$

$\Rightarrow$  Ok. Pas de risque de résonance de la semelle.

$$\checkmark A_z = 0.46 \text{ mm} < A_{res-z} = 0.71 \text{ mm} < |\Delta h_{adm}| = 1 \text{ mm}$$

$\Rightarrow$  Ok. Pas de risque de poinçonnement du sol de fondation et la semelle est stable vis-à-vis du soulèvement.