

Chapitre Deux

Comportement des fondations sous machines vibrantes

❑ *Modélisation des fondations sous vibration*

- ❖ *Modèles physique et rhéologique*
- ❖ *Problème de l'oscillateur simple*

❑ *Calcul des fondations sous vibration*

- ❖ *Modes de vibration des fondations*
- ❖ *Vibration verticale (pompage)*
- ❖ *Vibration horizontale (tamis)*
- ❖ *Vibration de balancement (roulis ou tangage)*
- ❖ *Vibration de torsion (lacet)*
- ❖ *Prise en compte de l'ancrage des fondations*

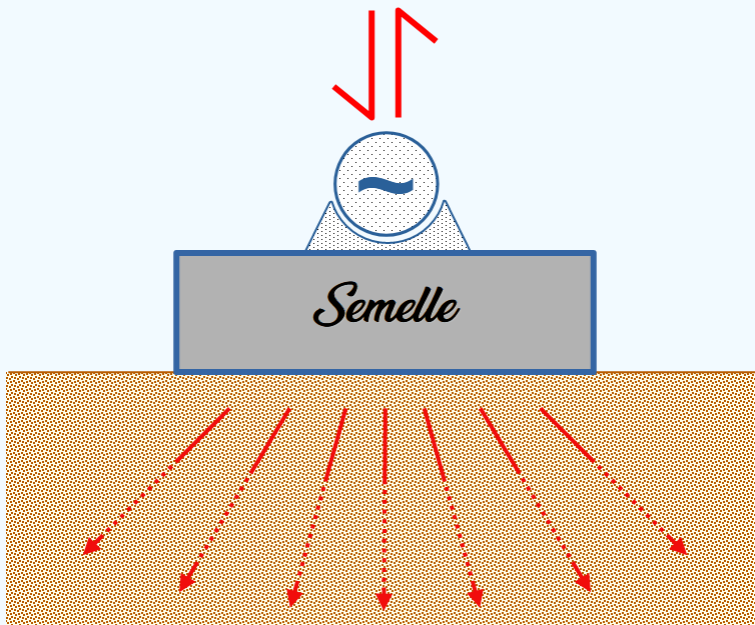
❑ *Exercices*



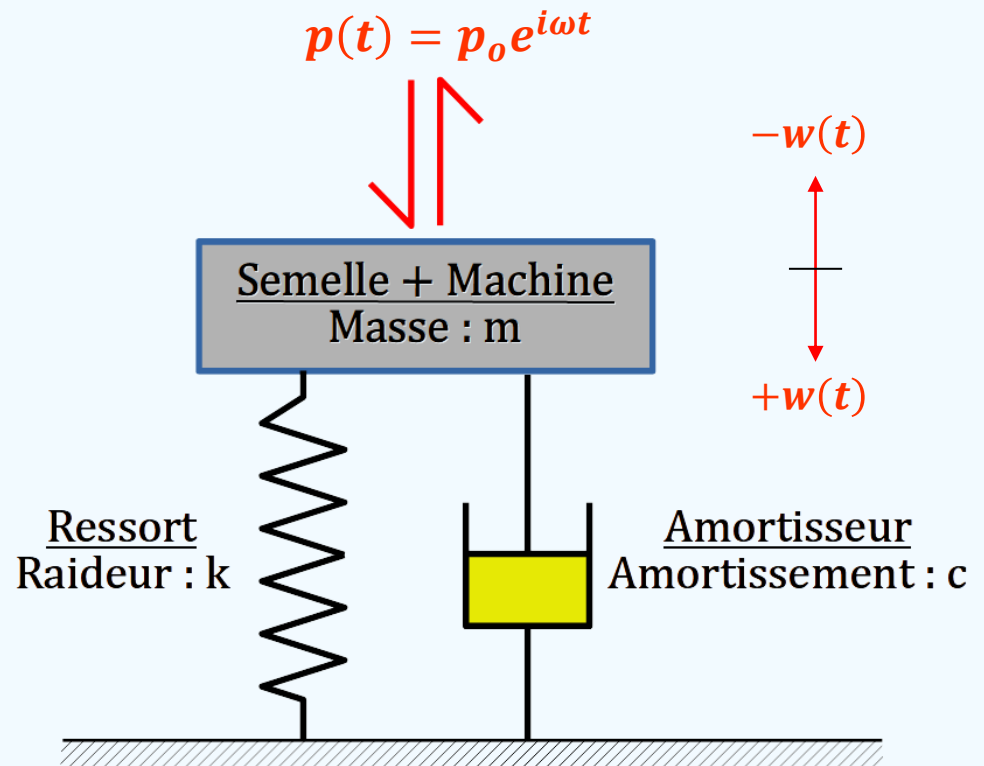
MODÉLISATION DES FONDATIONS SOUS VIBRATION

□ Modélisation des fondations sous vibration

- **Modèles physique et rhéologique**



a/ Modèle physique



b/ Modèle rhéologique : Kelvin-Voigt

❑ Modélisation des fondations sous vibration

- **Problème de l'oscillateur simple (Rappels du cours : Ondes et Vibrations)**

Modèle physique : Console

$$\Rightarrow p(t) = p_o e^{i\omega t}$$

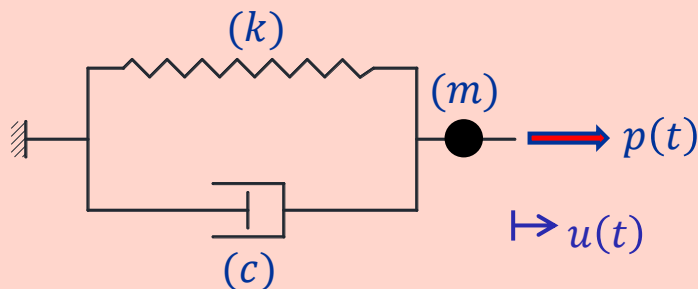
Masse : m

Raideur : k

Viscosité : c



Modèle rhéologique : Kelvin-Voigt



Bilan des forces

Block diagram of a mass-spring-damper system. Three input forces, $F_1 = ku(t)$, $F_i = m\ddot{u}(t)$, and $F_2 = c\dot{u}(t)$, are summed to produce the output $p(t)$.

Equation du mouvement: $\sum \vec{F} = \vec{0}$

$$\Rightarrow -F_1 - F_2 - F_i + p(t) = 0$$

$$\Rightarrow F_1 + F_2 + F_i = p(t)$$

$$\Rightarrow m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = p(t)$$

Soit $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ la pulsation naturelle
(pulsation propre du système)

$$\Rightarrow \ddot{u}(t) + \frac{c}{m} \dot{u}(t) + \omega_n^2 u(t) = \frac{1}{m} p(t)$$

□ Modélisation des fondations sous vibration

• **Problème de l'oscillateur simple (Rappels du cours : Ondes et Vibrations)**

De façon équivalente, on introduit les paramètres suivants :

✓ La fréquence propre :

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (\text{Hertz})$$

✓ La période propre :

$$T_n = \frac{1}{f_n} = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (\text{sec})$$

✓ Le rapport d'amortissement critique :

$$D = \frac{c}{2\sqrt{km}} = \frac{c}{2m\omega_n} = \frac{c}{c_c}$$

où $c_c = 2m\omega_n$ désigne le coefficient d'amortissement critique, tel que :

$$D = \frac{c}{c_c} \begin{cases} < 1 & \text{Système sous - amorti} \\ = 1 & \text{Système à amortissement critique} \\ > 1 & \text{Système suramorti} \end{cases}$$

D'où l'équation générale du mouvement :

$$\ddot{u}(t) + 2D\omega_n\dot{u}(t) + \omega_n^2 u(t) = \frac{1}{m} p(t)$$

La solution générale de l'équation est donnée par l'intégrale de Duhamel :

$$u(t) = \frac{1}{m\omega_D} \int_0^t p(\tau) e^{-D\omega(t-\tau)} \sin[\omega_D(t-\tau)] d\tau$$

où $\omega_D = \omega_n \sqrt{1 - D^2}$ est la pulsation propre amortie (pseudo-pulsation propre).

□ Modélisation des fondations sous vibration

• **Problème de l'oscillateur simple**

❖ *Equation générale du mouvement*

$$m\ddot{w}(t) + c\dot{w}(t) + kw(t) = p(t) = p_0 e^{i\omega t}$$

La solution de cette équation est donnée sous la forme $w(t) = w_0 e^{i\omega t}$, d'où la réponse de l'oscillateur :

$$w(t) = \frac{p_0 e^{i\omega t}}{k - m\omega^2 + ic\omega}$$

❖ *Impédance mécanique*

$$Z = \frac{p(t)}{w(t)} = k - m\omega^2 + ic\omega$$

Nota :

$$\omega = 0 \text{ (Pulsation nulle)}$$

$$\Rightarrow Z = k \text{ (Raideur statique)}$$

Démonstration

$$w(t) = w_0 e^{i\omega t}$$

⇓

$$\dot{w}(t) = i\omega w(t)$$

⇓

$$\ddot{w}(t) = -\omega^2 w(t)$$

⇓

$$-m\omega^2 + ic\omega + k = \frac{p(t)}{w(t)} = \frac{P_0}{w_0}$$

⇓

$$w_0 = \frac{p_0}{k - m\omega^2 + ic\omega}$$

⇓

$$w(t) = \frac{p_0 e^{i\omega t}}{k - m\omega^2 + ic\omega}$$

□ Modélisation des fondations sous vibration

• **Problème de l'oscillateur simple**

❖ *Fréquence propre (Fréquence naturelle)*

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} \quad | \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \Rightarrow \quad f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

❖ *Rapport d'amortissement critique*

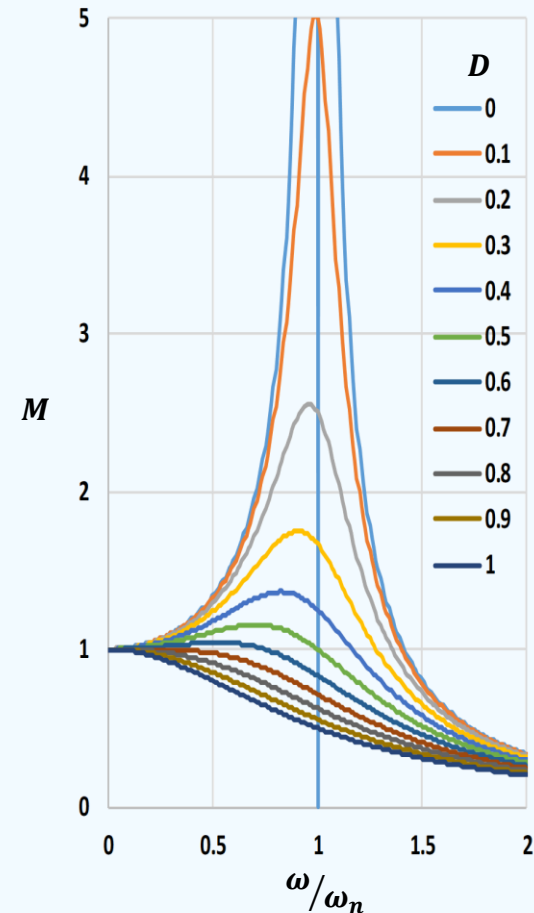
$$D = \frac{c}{c_c} \quad | \quad c_c = 2\sqrt{km} \quad \Rightarrow \quad D = \frac{c}{2\sqrt{km}}$$

❖ *Facteur d'amplification dynamique*

$$\text{Si l'on pose : } w_o = \frac{p_o}{k} \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + 4D^2 \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}},$$

on définit le facteur d'amplification dynamique :

$$M = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + 4D^2 \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$



□ Modélisation des fondations sous vibration

• **Problème de l'oscillateur simple**

❖ *Solution de l'équation générale du mouvement*

$$w(t) = \frac{p_0 e^{i\omega t}}{k} \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + 2iD\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}$$

$$\Rightarrow Z = k(k_1 + ic_1)$$

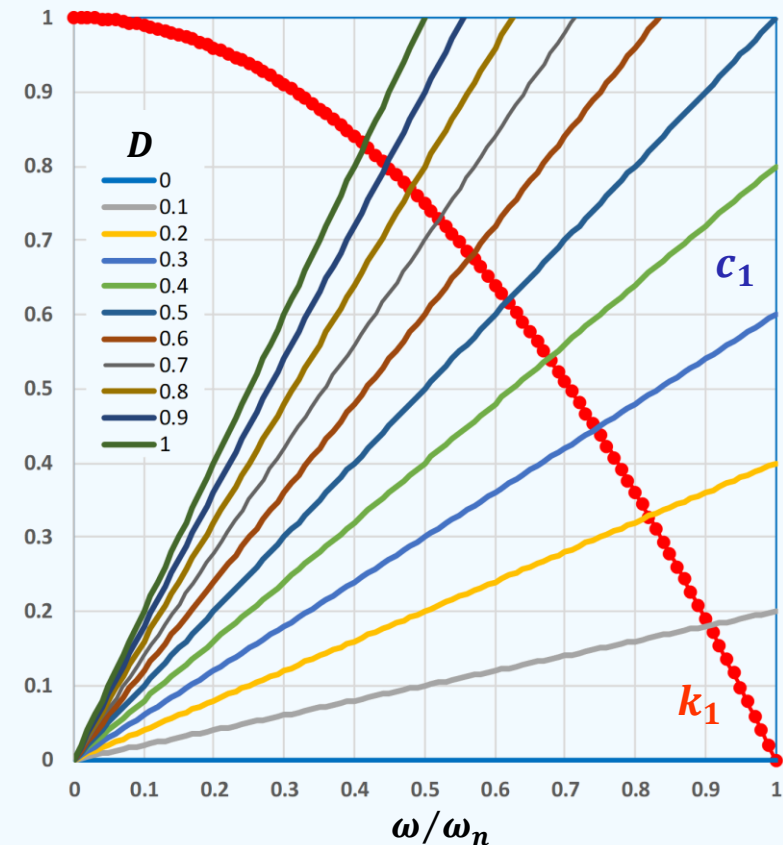
$$\text{tels que } k_1 = 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 \text{ et } c_1 = 2D\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)$$

❖ *Solution de Reissner (1936)*

$$w(t) = \frac{p_0 e^{i\omega t}}{k} (f_1 + if_2)$$

$$\text{tels que } k_1 = \frac{f_1}{f_1^2 + f_2^2} \text{ et } c_1 = \frac{-f_2}{f_1^2 + f_2^2}$$

f_1 et f_2 - Fonctions de déplacement.



CALCUL DES FONDATIONS SOUS VIBRATION

❑ Calcul des fondations sous vibration

• **Exemples de machines vibrantes**

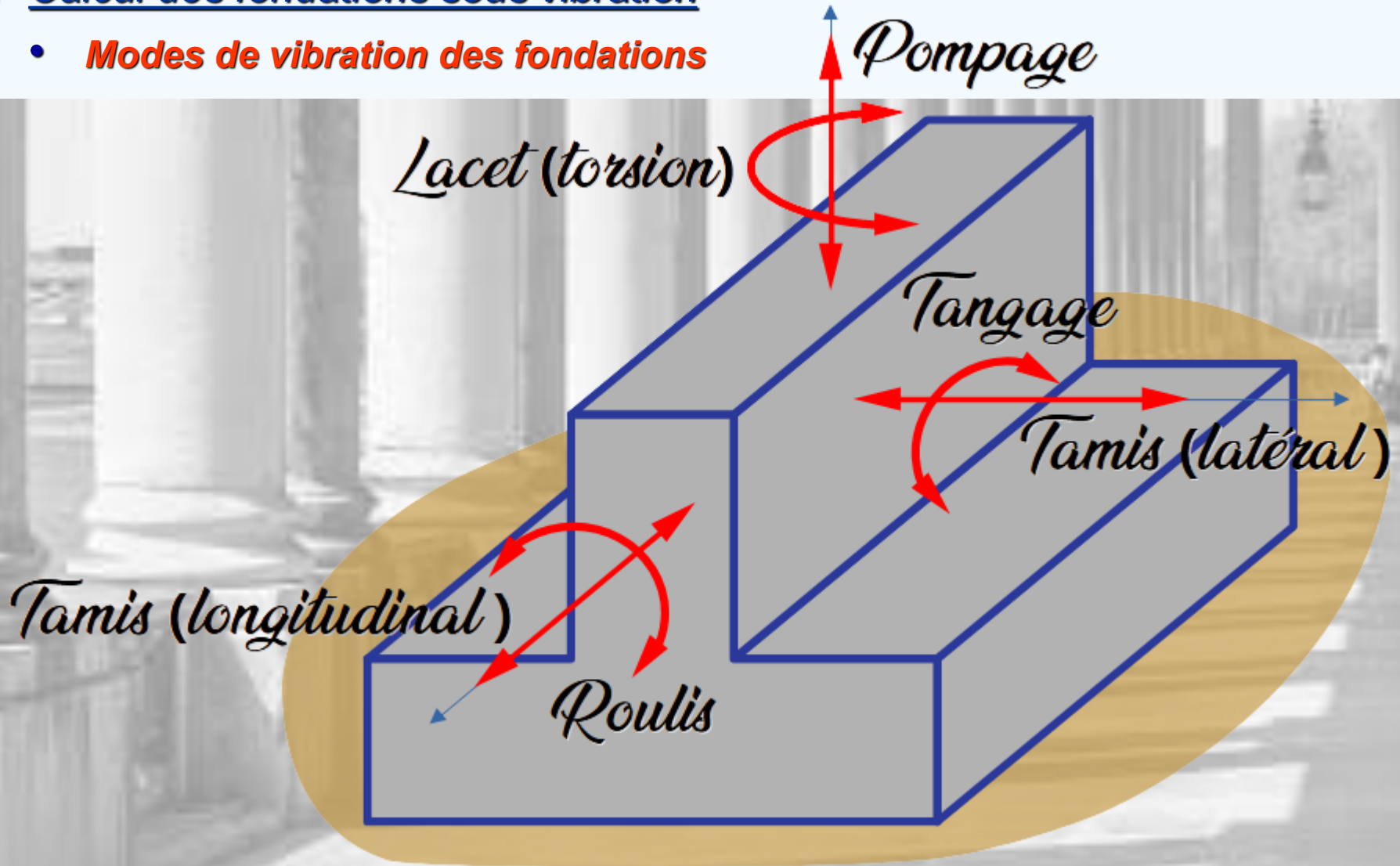
Les exemples de machines vibrantes sont nombreux et variés. On y retient, à titre d'illustration, ce qui suit :

- les moteurs thermiques,
- les turbines,
- les générateurs,
- les compresseurs et plus généralement les machines tournantes.



❑ Calcul des fondations sous vibration

- **Modes de vibration des fondations**



❑ Calcul des fondations sous vibration

- **Modes de vibration des fondations**

Pompage

Lacet (torsion)

Le problème consiste essentiellement à (Hubert et al, 2019) :

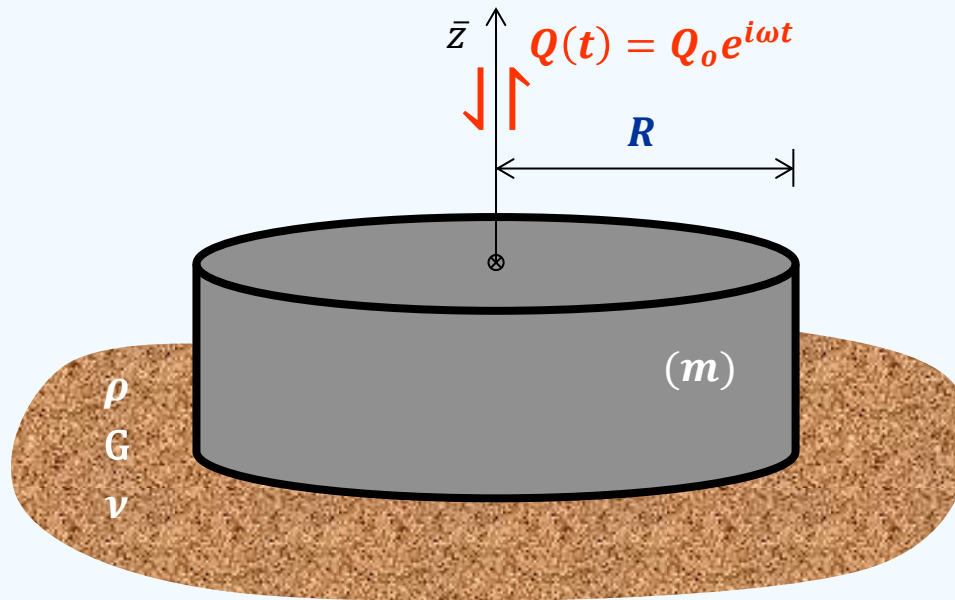
- définir les fréquences propres du système et les amplitudes maximales des déformations (déplacements et rotations) de la machine ;
- s'assurer que les vibrations transmises par le massif au sol ne risquent pas d'entraîner des tassements inacceptables, voire la liquéfaction du sol de fondation à plus ou moins long terme ;
- s'assurer que les vibrations restent admissibles pour le fonctionnement et l'utilisation de la machine.

□ Calcul des fondations sous vibration

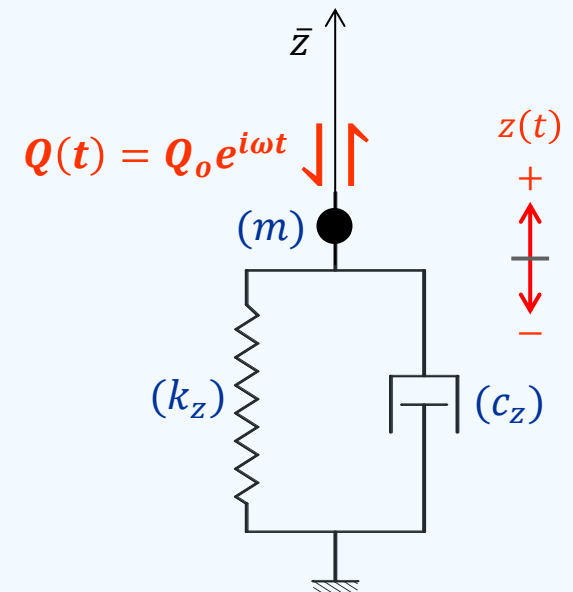
• **Vibration verticale (Pompage)**

❖ *Problème*

Semelle circulaire de rayon R et de masse m reposant sur un massif de sol de densité ρ , de module de cisaillement G et de coefficient de Poisson ν soumis à une vibration verticale de type harmonique.



Modèle physique



Modèle rhéologique

□ Calcul des fondations sous vibration

• **Vibration verticale (Pompage)**

❖ *Problème*

Semelle circulaire de rayon R et de masse m reposant sur un massif de sol de densité ρ , de module de cisaillement G et de coefficient de Poisson ν soumis à une vibration verticale de type harmonique.

❖ *Equation générale du mouvement*

$$m\ddot{z}(t) + c_z\dot{z}(t) + k_z z(t) = Q_o e^{i\omega t}$$

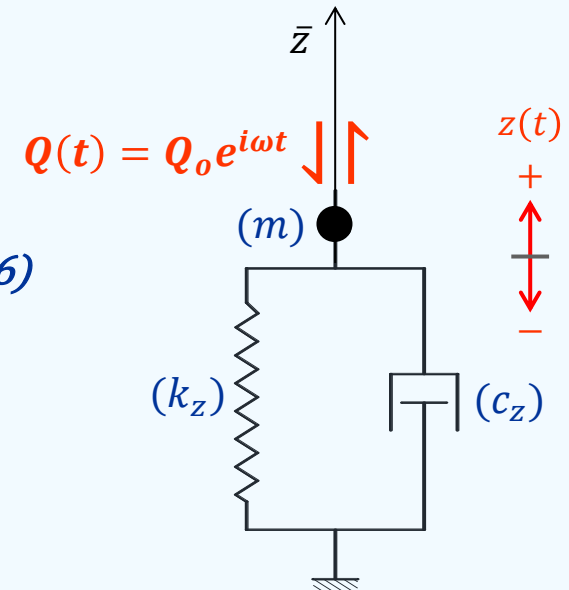
avec : $k_z = \frac{4GR}{1-\nu}$

$$c_z = \frac{3.4R^2\sqrt{\rho G}}{1-\nu}$$

(Lysmer et Richart, 1966)

❖ *Rapport des masses*

$$b = \frac{m}{\rho R^3}$$



□ Calcul des fondations sous vibration

• **Vibration verticale (Pompage)**

❖ *Rapport des masses modifié*

$$B_z = \frac{1-\nu}{4} b = \frac{1-\nu}{4} \frac{m}{\rho R^3} \Rightarrow m = \frac{4\rho R^3 B_z}{1-\nu}$$

❖ *Rapport d'amortissement critique*

$$D_z = \frac{c_z}{c_{cz}}$$

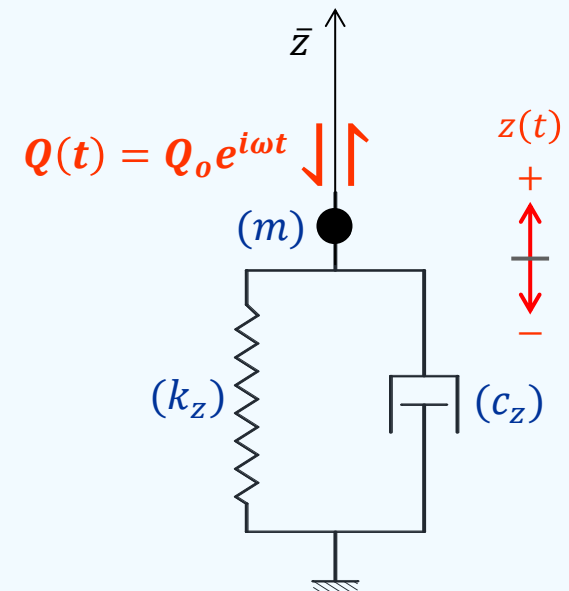
$$\text{avec : } c_z = \frac{3.4R^2 \sqrt{\rho G}}{1-\nu}$$

$$c_{cz} = 2\sqrt{k_z m} = 2\sqrt{\left(\frac{4GR}{1-\nu}\right) \left(\frac{4\rho R^3 B_z}{1-\nu}\right)} = \frac{8R^2 \sqrt{\rho G B_z}}{1-\nu}$$

$$\Rightarrow D_z = \frac{0.425}{\sqrt{B_z}}$$

❖ *Fréquence naturelle*

$$f_{n-z} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_z}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{4GR}{(1-\nu)m}} \Rightarrow f_{n-z} = \frac{1}{2\pi R} \sqrt{\frac{G}{\rho B_z}}$$



□ Calcul des fondations sous vibration

• **Vibration verticale (Pompage)**

❖ *Fréquence de résonance*

$$f_{res-z} = f_{n-z} \sqrt{1 - 2D_z^2} = \frac{1}{2\pi R B_z} \sqrt{\frac{G(B_z - 0.361)}{\rho}}$$

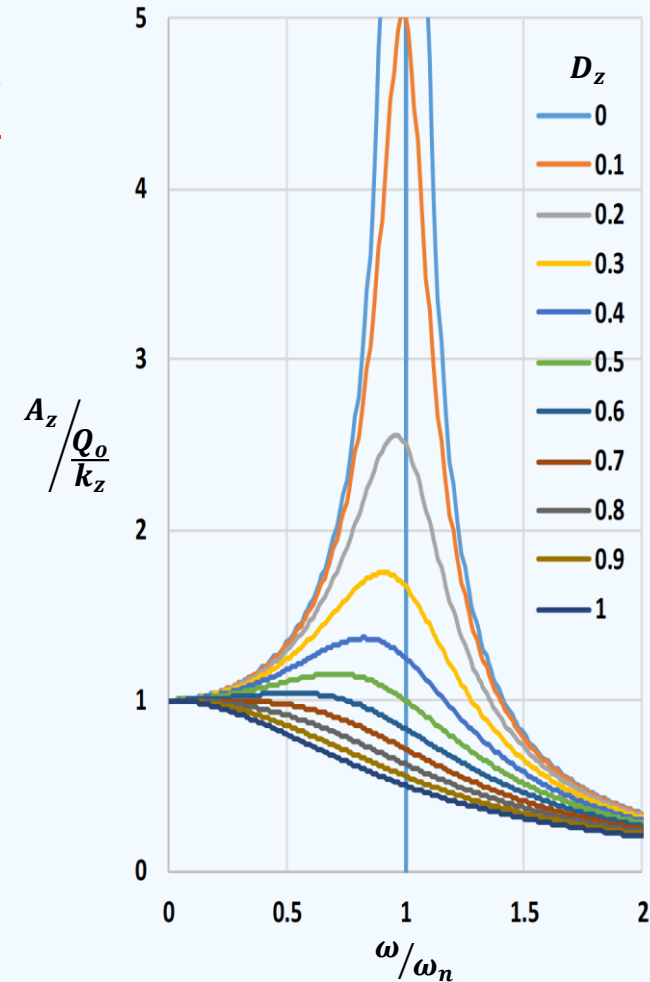
❖ *Amplitude de vibration à la résonance*

$$A_{res-z} = \frac{(1-\nu)Q_o}{8GRD_z\sqrt{1-D_z^2}} = \frac{(1-\nu)Q_o B_z}{3.4GR\sqrt{B_z-0.181}}$$

❖ *Amplitude de vibration quelconque*

$$A_z = \frac{Q_o}{k_z} \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + 4D_z^2 \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \quad | \quad k_z = \frac{4GR}{1-\nu}$$

$$\Rightarrow A_z = \frac{(1-\nu)Q_o}{4GR} \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + 4D_z^2 \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

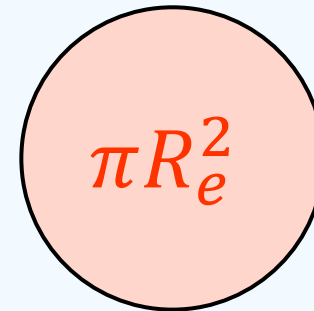
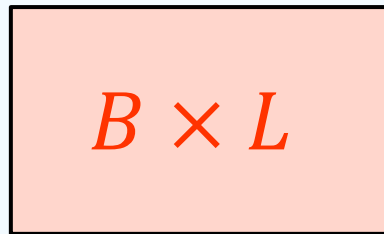


❑ Calcul des fondations sous vibration

- **Vibration verticale (Pompage)**

- ❖ *Cas des fondations non circulaires*

Pour une semelle rectangulaire, on prendra une semelle circulaire de section équivalente :



$$B \times L = \pi R_e^2 \Rightarrow$$

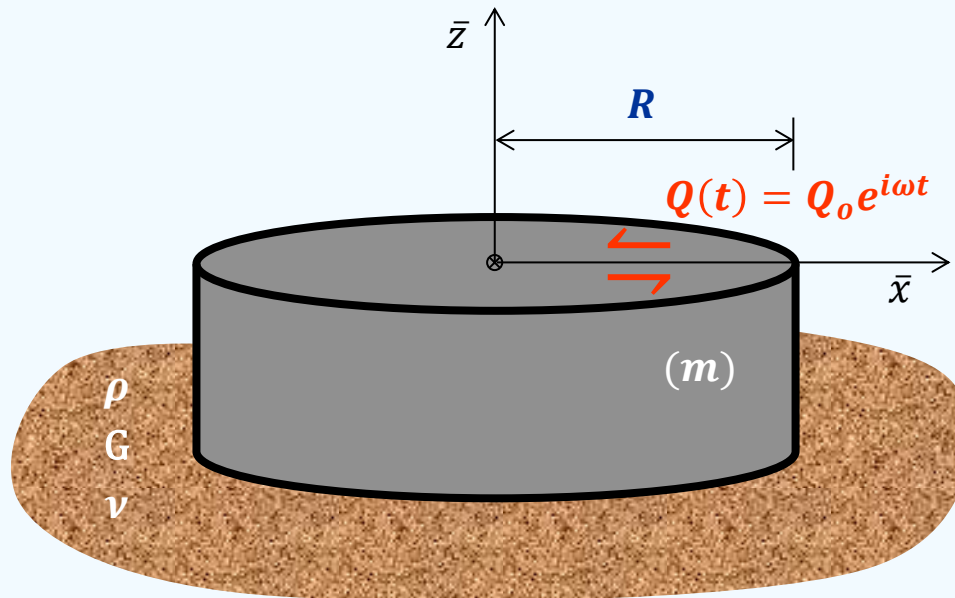
$$R_e = \sqrt{\frac{B \times L}{\pi}}$$

□ Calcul des fondations sous vibration

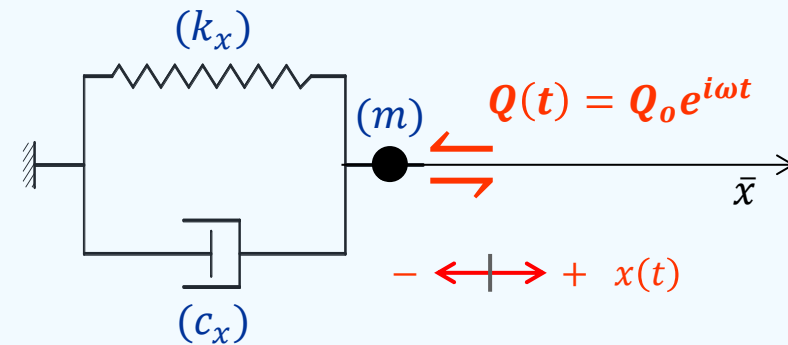
• **Vibration horizontale (Tamis)**

❖ *Problème*

Semelle circulaire de rayon R et de masse m reposant sur un massif de sol de densité ρ , de module de cisaillement G et de coefficient de Poisson ν soumis à une vibration horizontale de type harmonique.



Modèle physique



Modèle rhéologique

□ Calcul des fondations sous vibration

• **Vibration horizontale (Tamis)**

❖ *Problème*

Semelle circulaire de rayon R et de masse m reposant sur un massif de sol de densité ρ , de module de cisaillement G et de coefficient de Poisson ν soumis à une vibration horizontale de type harmonique.

❖ *Equation générale du mouvement*

$$m\ddot{x}(t) + c_x\dot{x}(t) + k_x x(t) = Q_o e^{i\omega t}$$

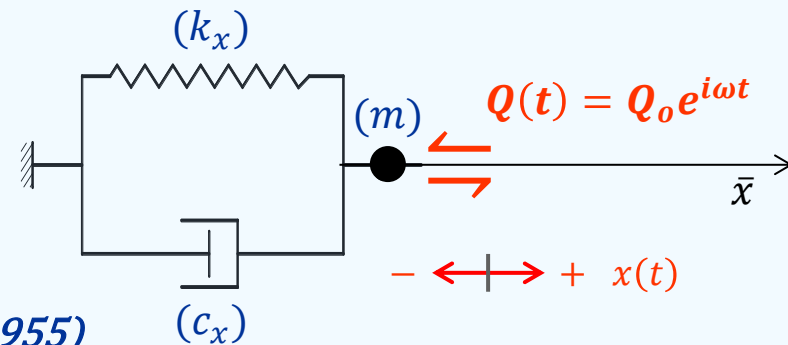
avec : $k_x = \frac{32(1-\nu)GR}{7-8\nu}$

$$c_x = \frac{18.4(1-\nu)R^2\sqrt{\rho G}}{7-8\nu}$$

❖ *Rapport des masses*

$$b = \frac{m}{\rho R^3}$$

(Arnold et al., 1955)



❑ Calcul des fondations sous vibration

- **Vibration horizontale (Tamis)**

- ❖ *Rapport des masses modifié*

$$B_x = \frac{7-8\nu}{32(1-\nu)} b = \frac{7-8\nu}{32(1-\nu)} \frac{m}{\rho R^3} \Rightarrow m = \frac{32(1-\nu)\rho R^3 B_x}{7-8\nu}$$

- ❖ *Rapport d'amortissement critique*

$$D_x = \frac{c_x}{c_{cx}}$$

avec : $c_x = \frac{18.4(1-\nu)R^2\sqrt{\rho G}}{7-8\nu}$

$$c_{cx} = 2\sqrt{k_x m} = 2\sqrt{\left[\frac{32(1-\nu)GR}{7-8\nu}\right] \left[\frac{32(1-\nu)\rho R^3 B_x}{7-8\nu}\right]} = \frac{64(1-\nu)R^2\sqrt{\rho G B_x}}{7-8\nu}$$

$$\Rightarrow D_x = \frac{0.2875}{\sqrt{B_x}}$$

- ❖ *Fréquence naturelle*

$$f_{n-x} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_x}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{32(1-\nu)GR}{(7-8\nu)m}} \Rightarrow f_{n-x} = \frac{1}{2\pi R} \sqrt{\frac{G}{\rho B_x}}$$

□ Calcul des fondations sous vibration

• **Vibration horizontale (Tamis)**

❖ *Fréquence de résonance*

$$f_{res-x} = f_{n-x} \sqrt{1 - 2D_x^2} = \frac{1}{2\pi R B_x} \sqrt{\frac{G(B_x - 0.165)}{\rho}}$$

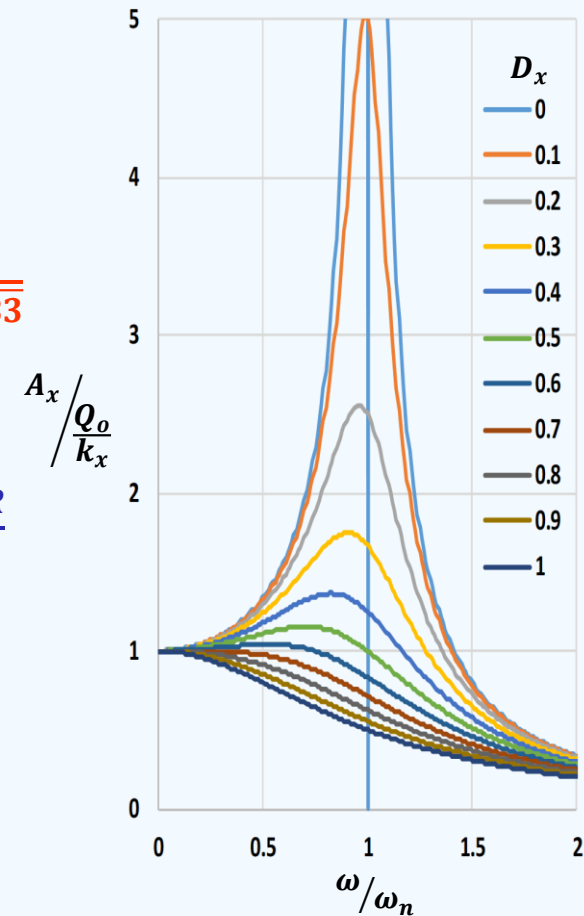
❖ *Amplitude de vibration à la résonance*

$$A_{res-x} = \frac{(7-8\nu)Q_o}{64(1-\nu)GRD_x\sqrt{1-D_x^2}} = \frac{(7-8\nu)Q_o B_x}{18.4(1-\nu)GR\sqrt{B_x-0.083}}$$

❖ *Amplitude de vibration quelconque*

$$A_x = \frac{Q_o}{k_x} \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + 4D_x^2\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \quad | \quad k_x = \frac{32(1-\nu)GR}{7-8\nu}$$

$$\Rightarrow A_x = \frac{(7-8\nu)Q_o}{32(1-\nu)GR} \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + 4D_x^2\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

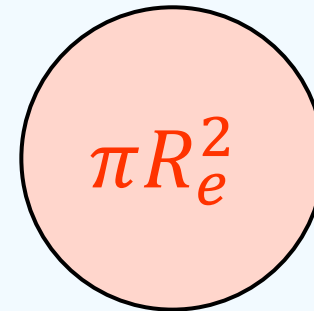
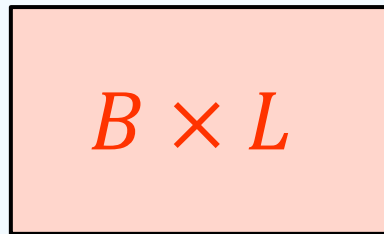


❑ Calcul des fondations sous vibration

- **Vibration horizontale (Tamis)**

- ❖ *Cas des fondations non circulaires*

Pour une semelle rectangulaire, on prendra une semelle circulaire de section équivalente :



$$B \times L = \pi R_e^2 \Rightarrow$$

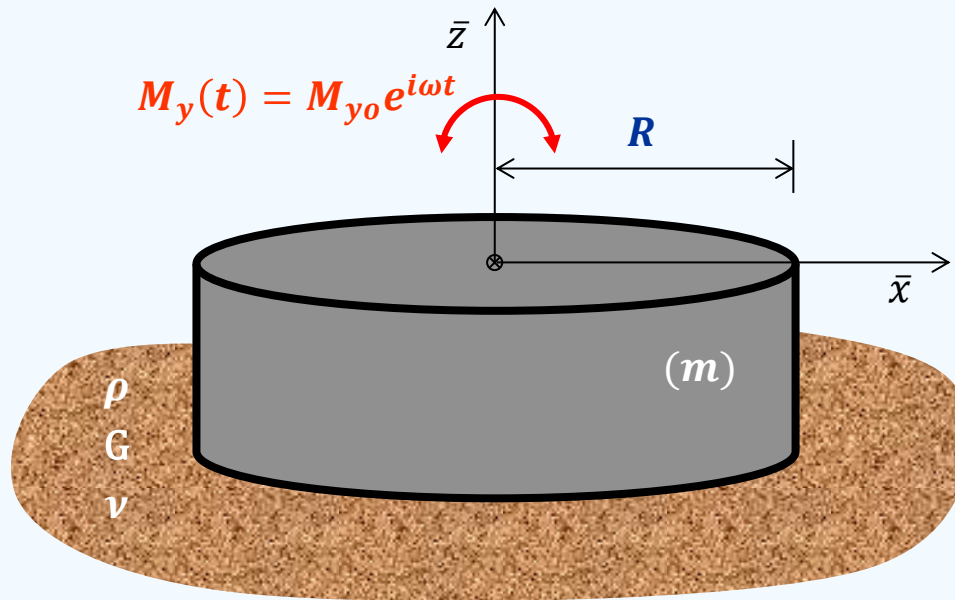
$$R_e = \sqrt{\frac{B \times L}{\pi}}$$

□ Calcul des fondations sous vibration

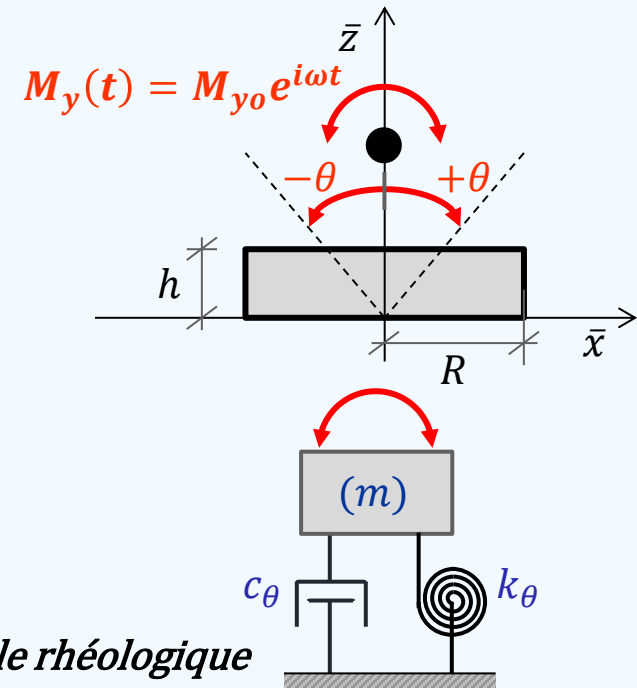
• **Vibration de balancement (Roulis & Tangage)**

❖ *Problème*

Semelle circulaire de rayon R et de masse m reposant sur un massif de sol de densité ρ , de module de cisaillement G et de coefficient de Poisson ν soumis à une vibration de balancement de type harmonique.



Modèle physique



Modèle rhéologique

□ Calcul des fondations sous vibration

• **Vibration de balancement (Roulis & Tangage)**

❖ *Problème*

Semelle circulaire de rayon R et de masse m reposant sur un massif de sol de densité ρ , de module de cisaillement G et de coefficient de Poisson ν soumis à une vibration de balancement de type harmonique.

❖ *Equation générale du mouvement*

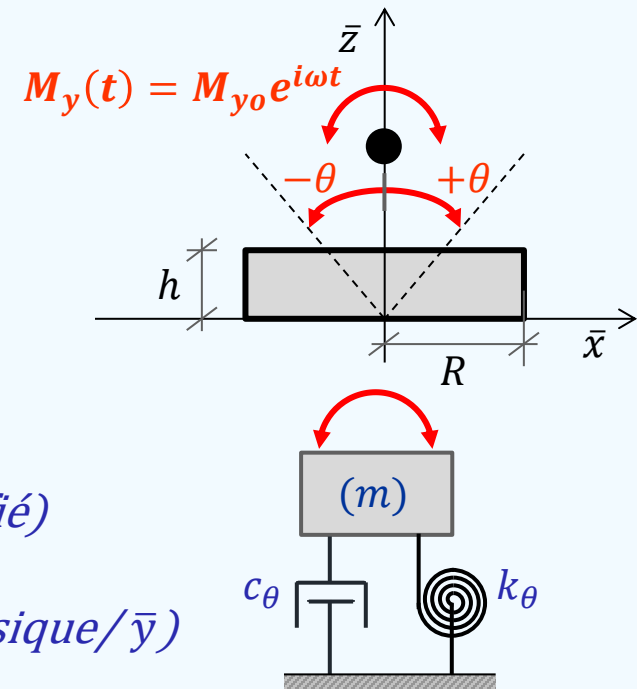
$$J_y \ddot{\theta}(t) + c_\theta \dot{\theta}(t) + k_\theta \theta(t) = M_{y0} e^{i\omega t}$$

avec : $k_\theta = \frac{8GR^3}{3(1-\nu)}$ (Hall, 1967)

$$c_\theta = \frac{0.8R^4 \sqrt{\rho G}}{(1-\nu)(1+B_\theta)}$$

$$B_\theta = \frac{3(1-\nu)}{8} \frac{J_y}{\rho R^5} \quad (\text{Rapport d'inertie modifié})$$

$$J_y = m \left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{3} \right) \quad (\text{Moment d'inertie massique}/\bar{y})$$



□ Calcul des fondations sous vibration

• **Vibration de balancement (Roulis & Tangage)**

❖ *Rapport d'inertie modifié*

$$B_{\theta} = \frac{3(1-\nu)}{8} \frac{J_y}{\rho R^5} \Rightarrow J_y = \frac{8\rho R^5 B_{\theta}}{3(1-\nu)}$$

❖ *Rapport d'amortissement critique*

$$D_{\theta} = \frac{c_{\theta}}{c_{c\theta}}$$

$$\text{avec : } c_{\theta} = \frac{0.8R^4 \sqrt{\rho G}}{(1-\nu)(1+B_{\theta})}$$

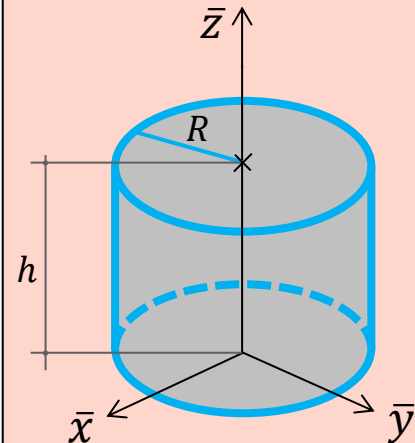
$$c_{c\theta} = 2\sqrt{k_{\theta}J_y} = 2\sqrt{\left[\frac{8GR^3}{3(1-\nu)}\right] \left[\frac{8\rho R^5 B_{\theta}}{3(1-\nu)}\right]} = \frac{16R^4 \sqrt{\rho G B_{\theta}}}{3(1-\nu)}$$

$$\Rightarrow D_{\theta} = \frac{0.15}{(1+B_{\theta})\sqrt{B_{\theta}}}$$

❖ *Fréquence naturelle*

$$f_{n-\theta} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_{\theta}}{J_y}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{8GR^3}{3(1-\nu)J_y}} \Rightarrow f_{n-\theta} = \frac{1}{2\pi R} \sqrt{\frac{G}{\rho B_{\theta}}}$$

Moments d'inertie massiques



$$J_x = m \left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{3} \right)$$

$$J_y = m \left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{3} \right)$$

$$J_z = m \frac{R^2}{2}$$

□ Calcul des fondations sous vibration

• **Vibration de balancement (Roulis & Tangage)**

❖ *Fréquence de résonance*

$$f_{res-\theta} = \frac{f_{n-\theta}}{\sqrt{1-2D_{\theta}^2}}$$

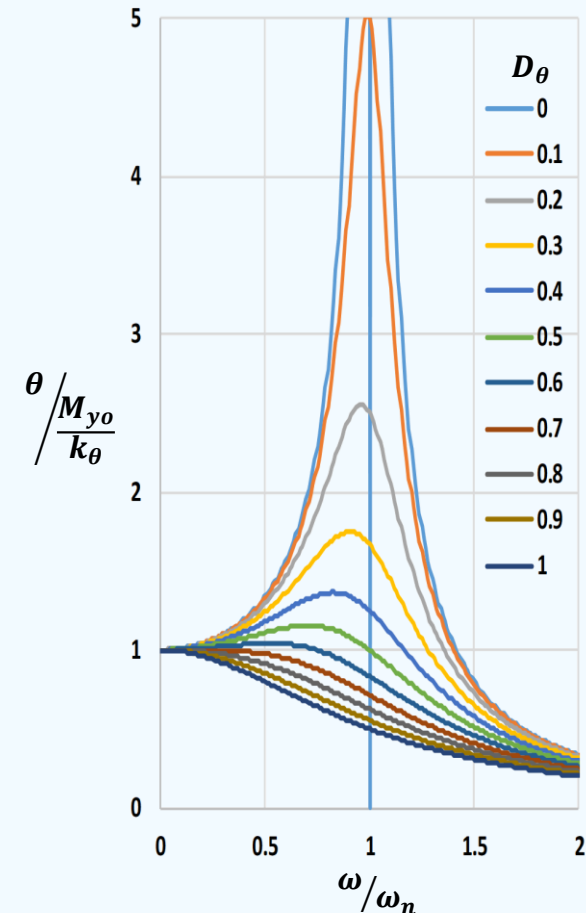
❖ *Amplitude de vibration à la résonance*

$$\theta_{res} = \frac{3(1-\nu)M_{yo}}{16GR^3D_{\theta}\sqrt{1-D_{\theta}^2}}$$

❖ *Amplitude de vibration quelconque*

$$\theta = \frac{M_{yo}}{k_{\theta}} \frac{1}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + 4D_{\theta}^2\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \quad | \quad k_{\theta} = \frac{8GR^3}{3(1-\nu)}$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{3(1-\nu)M_{yo}}{8GR^3} \frac{1}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + 4D_{\theta}^2\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

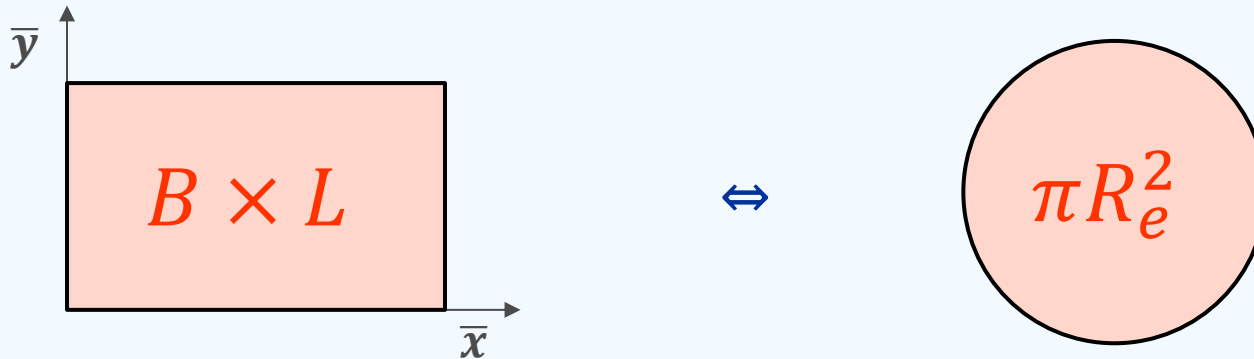


❑ Calcul des fondations sous vibration

- **Vibration de balancement (Roulis & Tangage)**

- ❖ *Cas des fondations non circulaires*

Pour une semelle rectangulaire, on prendra une semelle circulaire d'inertie axiale équivalente :



$$I_x = \frac{LB^3}{12} = \frac{\pi R_e^4}{4} \Rightarrow$$

$$R_{e/x} = \sqrt[4]{\frac{L \times B^3}{3\pi}}$$

$$I_y = \frac{BL^3}{12} = \frac{\pi R_e^4}{4} \Rightarrow$$

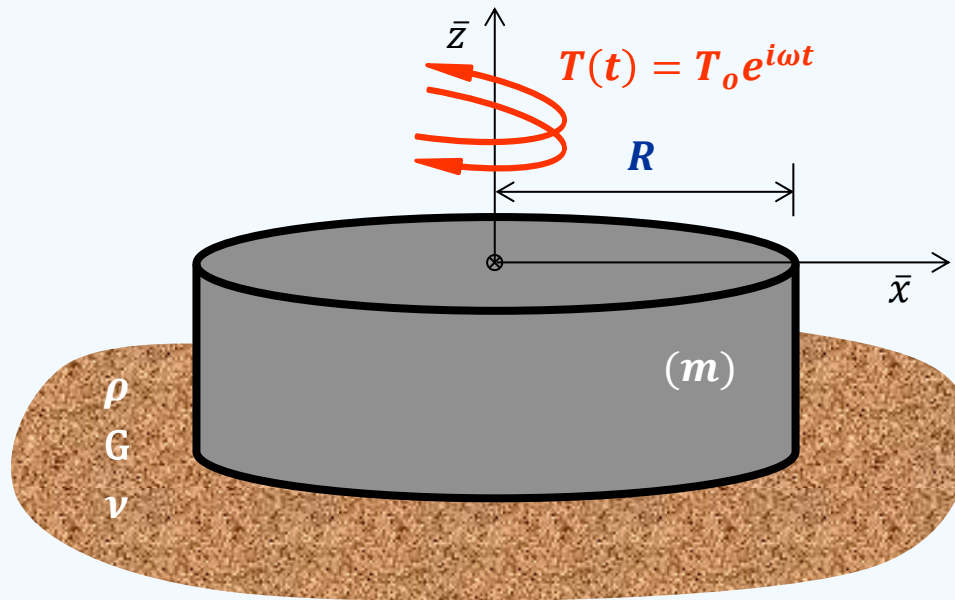
$$R_{e/y} = \sqrt[4]{\frac{B \times L^3}{3\pi}}$$

□ Calcul des fondations sous vibration

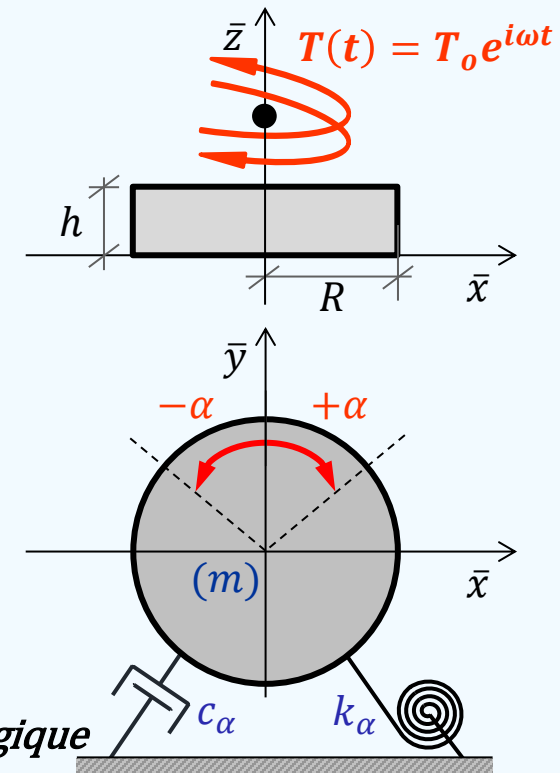
• **Vibration de torsion (Lacet)**

❖ *Problème*

Semelle circulaire de rayon R et de masse m reposant sur un massif de sol de densité ρ , de module de cisaillement G et de coefficient de Poisson ν soumis à une vibration de torsion de type harmonique.



Modèle physique



Modèle rhéologique

□ Calcul des fondations sous vibration

• **Vibration de torsion (Lacet)**

❖ *Problème*

Semelle circulaire de rayon R et de masse m reposant sur un massif de sol de densité ρ , de module de cisaillement G et de coefficient de Poisson ν soumis à une vibration de torsion de type harmonique.

❖ *Equation générale du mouvement*

$$J_z \ddot{\alpha}(t) + c_\alpha \dot{\alpha}(t) + k_\alpha \alpha(t) = T_o e^{i\omega t}$$

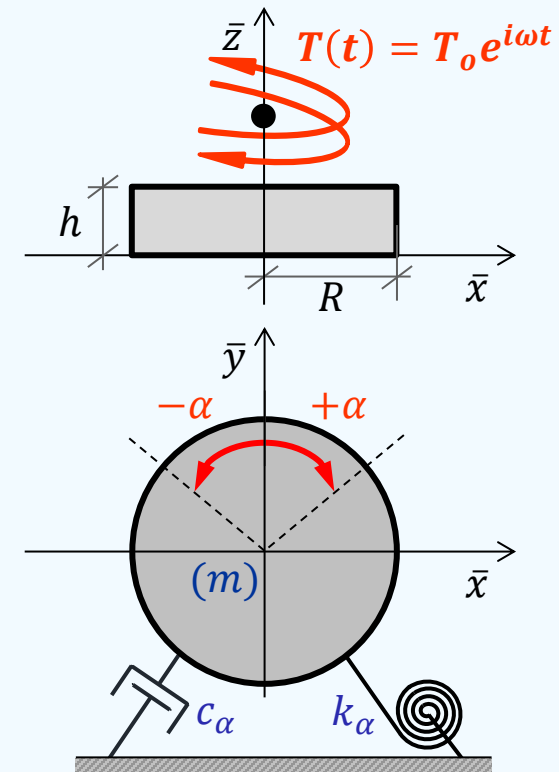
avec : $k_\alpha = \frac{16GR^3}{3}$

$$c_\alpha = \frac{4R^4 \sqrt{3\rho GB_\alpha}}{3(1+2B_\alpha)}$$

(Richart et al., 1970)

$$B_\alpha = \frac{J_z}{\rho R^5} \text{ (Rapport d'inertie modifié)}$$

$$J_z = \frac{mR^2}{2} \text{ (Moment d'inertie massique / } \bar{z} \text{)}$$



□ Calcul des fondations sous vibration

• **Vibration de torsion (Lacet)**

❖ *Rapport d'inertie modifié*

$$B_{\alpha} = \frac{J_z}{\rho R^5} \Rightarrow J_z = \rho R^5 B_{\alpha}$$

❖ *Rapport d'amortissement critique*

$$D_{\alpha} = \frac{c_{\alpha}}{c_{c\alpha}}$$

$$\text{avec : } c_{\alpha} = \frac{4R^4 \sqrt{3\rho G B_{\alpha}}}{3(1+2B_{\alpha})}$$

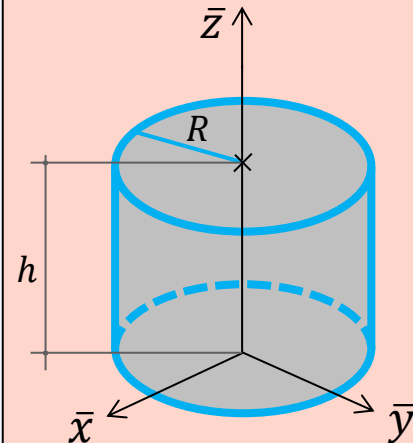
$$c_{c\alpha} = 2\sqrt{k_{\alpha} J_z} = 2\sqrt{\left[\frac{16GR^3}{3}\right] \rho R^5 B_{\alpha}} = \frac{8R^4 \sqrt{3\rho G B_{\alpha}}}{3}$$

$$\Rightarrow D_{\alpha} = \frac{0.50}{1+2B_{\alpha}}$$

❖ *Fréquence naturelle*

$$f_{n-\alpha} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_{\alpha}}{J_z}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{16GR^3}{3J_z}} \Rightarrow f_{n-\alpha} = \frac{1}{2\pi R} \sqrt{\frac{16G}{3\rho B_{\alpha}}}$$

Moments d'inertie massiques



$$J_x = m \left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{3} \right)$$

$$J_y = m \left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{3} \right)$$

$$J_z = m \frac{R^2}{2}$$

□ Calcul des fondations sous vibration

• **Vibration de torsion (Lacet)**

❖ *Fréquence de résonance*

$$f_{res-\alpha} = f_{n-\alpha} \sqrt{1 - 2D_\alpha^2}$$

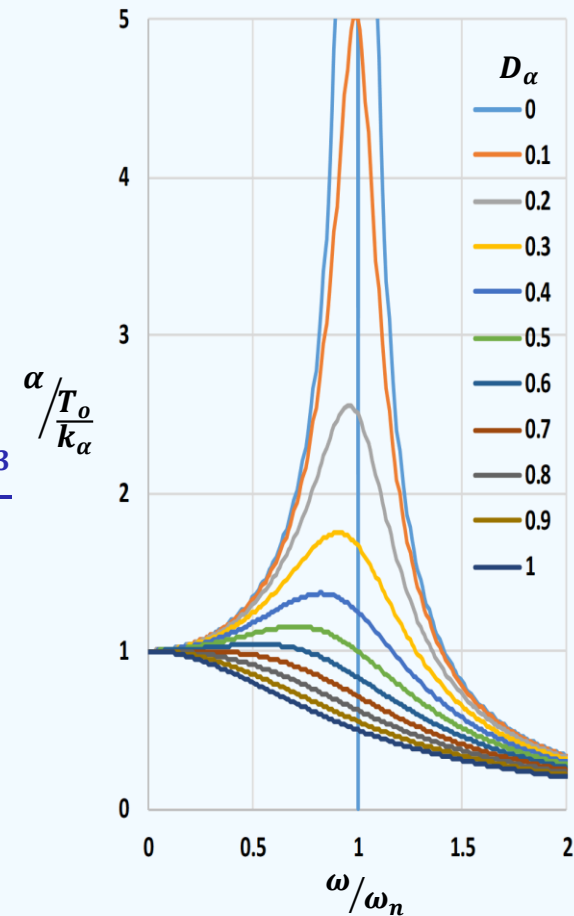
❖ *Amplitude de vibration à la résonance*

$$\alpha_{res} = \frac{3T_o}{32GR^3 D_\alpha \sqrt{1 - D_\alpha^2}}$$

❖ *Amplitude de vibration quelconque*

$$\alpha = \frac{T_o}{k_\alpha} \frac{1}{16GR^3 \sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + 4D_\alpha^2 \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \quad | \quad k_\alpha = \frac{16GR^3}{3}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{3T_o}{16GR^3} \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + 4D_\alpha^2 \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

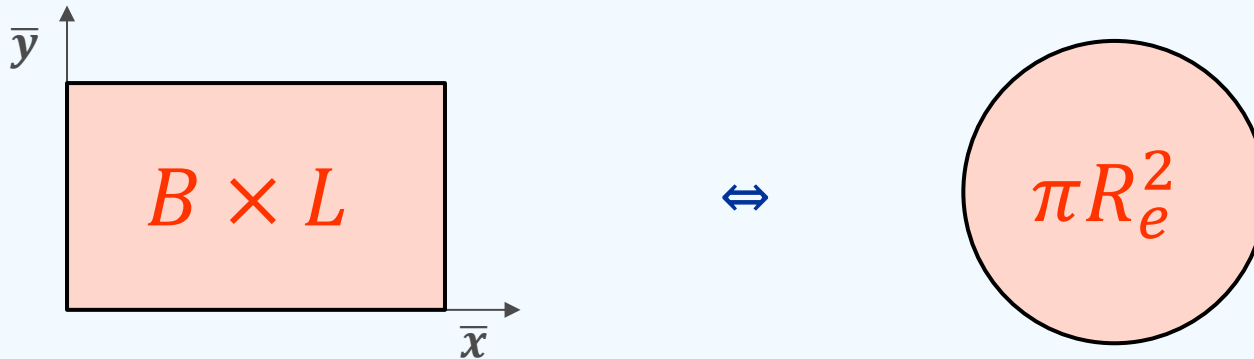


❑ Calcul des fondations sous vibration

- **Vibration de torsion (Lacet)**

- ❖ *Cas des fondations non circulaires*

Pour une semelle rectangulaire, on prendra une semelle circulaire d'inertie polaire équivalente :



$$I_o = I_x + I_y = \frac{BL^3}{12} + \frac{B^3L}{12} = \frac{\pi R_e^4}{2} \Rightarrow$$

$$R_e = \sqrt[4]{\frac{B \times L \times (B^2 + L^2)}{6\pi}}$$

□ Calcul des fondations sous vibration

• **Autres approches**

Semelle circulaire de rayon R et de masse m reposant sur un massif de sol de densité ρ , de module de cisaillement G et de coefficient de Poisson ν

Formules de Gazetas (1983)

Mode de vibration	Vertical (Pompage)	Horizontal (Tamis)	Balancement (Roulis / Tangage)	Torsion (Lacet)
Coefficient de rigidité k	$\frac{4GR}{1-\nu}$	$\frac{8GR}{2-\nu}$	$\frac{8GR^3}{3(1-\nu)}$	$\frac{16GR^3}{3}$
Rapport des masses B	$\frac{1-\nu}{4} \frac{m}{\rho R^3}$	$\frac{2-\nu}{8} \frac{m}{\rho R^3}$	$\frac{3(1-\nu)}{8} \frac{J_{x/y}}{\rho R^5}$	$\frac{J_z}{\rho R^5}$
Rapport d'amortissement D	$\frac{0.425}{\sqrt{B}}$	$\frac{0.29}{\sqrt{B}}$	$\frac{0.15}{(1+B)\sqrt{B}}$	$\frac{0.5}{1+2B}$
$J_{x/y} = m \left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{3} \right)$ et $J_z = \frac{mR^2}{2}$ - moments massiques autour des axes x (ou y) et z respectivement R et h - rayon et épaisseur de la semelle				

❑ Calcul des fondations sous vibration

• **Prise en compte de l'ancrage des fondations**

❖ *Massif homogène en profondeur*

Désignons par :

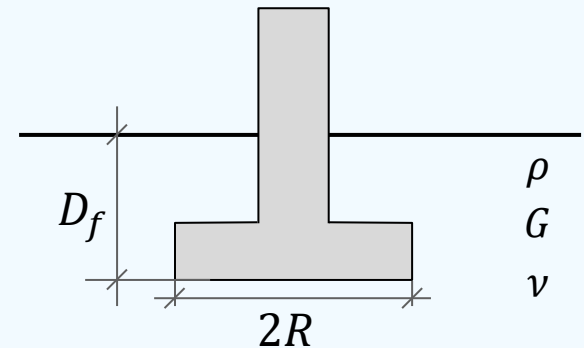
- R – *rayon de la semelle*
- D_f – *profondeur d'ancrage de la semelle*
- k – *raideur de la semelle non ancrée dans le sol*
- $\bar{k}$ – *raideur de la semelle ancrée dans le sol*
- c – *coefficient d'amortissement de la semelle non ancrée dans le sol*
- $\bar{c}$ – *coefficient d'amortissement de la semelle ancrée dans le sol*

Alors :

$$\bar{k} = \eta k$$

$$\bar{c} = \alpha c$$

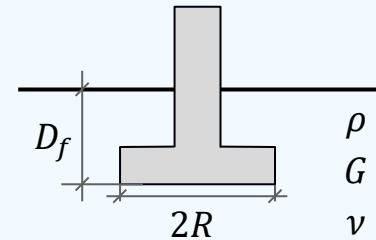
où η et α désignent deux paramètres correcteurs donnés par les tableaux donnés ci-après.



□ Calcul des fondations sous vibration

- **Prise en compte de l'ancrage des fondations**

❖ *Massif homogène en profondeur*



$$\bar{k} = \eta k$$

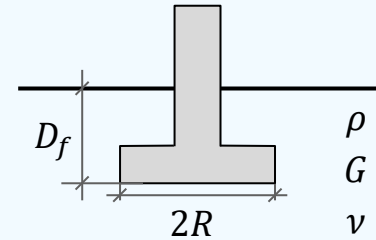
Formules de Whitman (1972)

Vibration	η
Verticale (Pompage)	$1 + 0.6(1 - \nu) \frac{D_f}{R}$
Horizontale (Tamis)	$1 + 0.55(2 - \nu) \frac{D_f}{R}$
Balancement (Roulis / Tangage)	$1 + 1.2(1 - \nu) \frac{D_f}{R} + 0.2(2 - \nu) \left(\frac{D_f}{R} \right)^3$
Torsion (Lacet)	1

Calcul des fondations sous vibration

- Prise en compte de l'ancrage des fondations**

- ❖ *Massif homogène en profondeur*



$$\bar{c} = \alpha c$$

Formules de Whitman (1972)

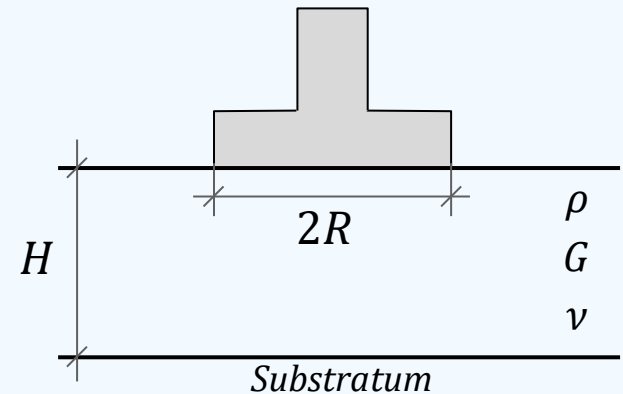
Vibration	α
Verticale (Pompage)	$\left[1 + 1.9(1 - \nu) \frac{D_f}{R} \right] / \sqrt{\eta}$
Horizontale (Tamis)	$\left[1 + 1.9(2 - \nu) \frac{D_f}{R} \right] / \sqrt{\eta}$
Balancement (Roulis / Tangage)	$\left[1 + 0.7(1 - \nu) \frac{D_f}{R} + 0.6(2 - \nu) \left(\frac{D_f}{R} \right)^3 \right] / \sqrt{\eta}$
Torsion (Lacet)	1

Calcul des fondations sous vibration

Prise en compte de l'ancrage des fondations

Massif monocouche d'épaisseur limitée

✓ Semelle non ancrée



Formules de Kausel (1974)

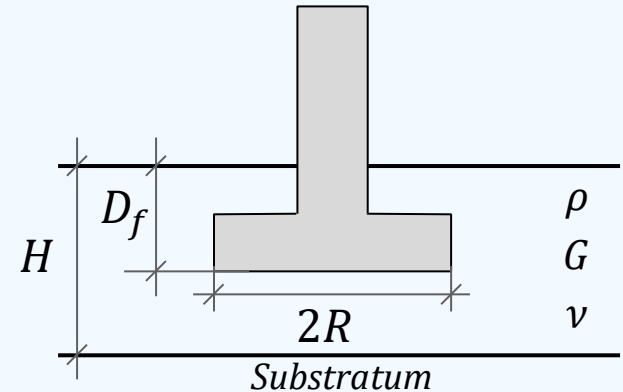
Vibration	Raideur	Expression	Domaine de validité
Verticale	k_z	$\frac{4GR}{1-\nu} \left[1 + 1.28 \frac{R}{H} \right]$	$H \geq 2R$
Horizontale	k_x ou k_y	$\frac{8GR}{2-\nu} \left[1 + \frac{R}{2H} \right]$	$H \geq R$
Balancement	k_θ	$\frac{8GR^3}{3(1-\nu)} \left[1 + \frac{R}{6H} \right]$	$4R \geq H \geq R$
Torsion	k_α	$\frac{16GR^3}{3}$	$H \geq 1.25R$

Calcul des fondations sous vibration

Prise en compte de l'ancrage des fondations

❖ Massif monocouche d'épaisseur limitée

✓ Semelle ancrée



Formules de Elsabee-Morray (1977)

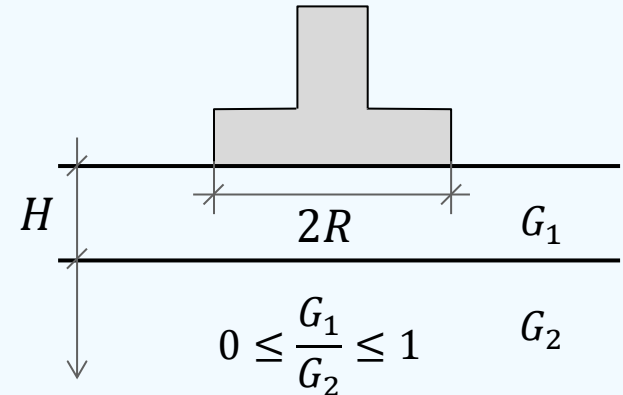
Vibration	Raideur	Expression
Verticale	k_z	$\frac{4GR}{1-\nu} \left[1 + 1.28 \frac{R}{H} \right] \left[1 + \frac{D_f}{2R} \right] \left[1 + \left(0.85 - 0.28 \frac{D_f}{R} \right) \left(\frac{D_f/H}{1 - D_f/H} \right) \right]$
Horizontale	k_x ou k_y	$\frac{8GR}{2-\nu} \left[1 + \frac{R}{2H} \right] \left[1 + \frac{2D_f}{3R} \right] \left[1 + \frac{5D_f}{4H} \right]$
Balancement	k_θ	$\frac{8GR^3}{3(1-\nu)} \left[1 + \frac{R}{6H} \right] \left[1 + \frac{D_f}{2R} \right] \left[1 + 0.7 \frac{D_f}{H} \right]$
Torsion	k_α	$\frac{16GR^3}{3} \left[1 + 2.67 \frac{D_f}{R} \right]$

Calcul des fondations sous vibration

Prise en compte de l'ancrage des fondations

❖ Massif bicouche

✓ Semelle non ancrée



Formules de Gazetas (1983)

Vibration	Raideur	Expression	Domaine de validité
Verticale	k_z	$\frac{4G_1R}{1-\nu_1} \left[\left(1 + 1.28 \frac{R}{H} \right) / \left(1 + 1.28 \frac{R}{H} \frac{G_1}{G_2} \right) \right]$	$1 \leq \frac{H}{R} \leq 5$
Horizontale	k_x ou k_y	$\frac{8G_1R}{2-\nu_1} \left[\left(1 + \frac{R}{2H} \right) / \left(1 + \frac{R}{2H} \frac{G_1}{G_2} \right) \right]$	$1 \leq \frac{H}{R} \leq 4$
Balancement	k_θ	$\frac{8G_1R^3}{3(1-\nu_1)} \left[\left(1 + \frac{R}{6H} \right) / \left(1 + \frac{R}{6H} \frac{G_1}{G_2} \right) \right]$	$0.75 \leq \frac{H}{R} \leq 2$
Torsion	k_α	$\frac{16GR^3}{3}$	—

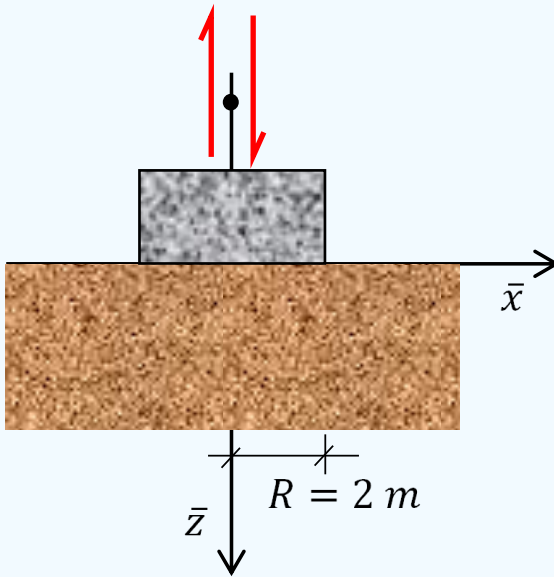
Merci de votre attention

Fin du Deuxième Chapitre

EXERCICES

Ex. 1 Calculer la fréquence de vibration à la résonance d'une semelle circulaire de rayon $R = 2 \text{ m}$ reposant sur un sol homogène en profondeur et soumise à un mouvement de pompage comme l'indique la figure ci-après, puis commenter le résultat trouvé. Calculer ensuite l'amplitude de vibration de la semelle à la résonance et à la fréquence appliquée, puis commenter les résultats trouvés.

$$P(t) = 25 \sin 20t \text{ (kN)}$$



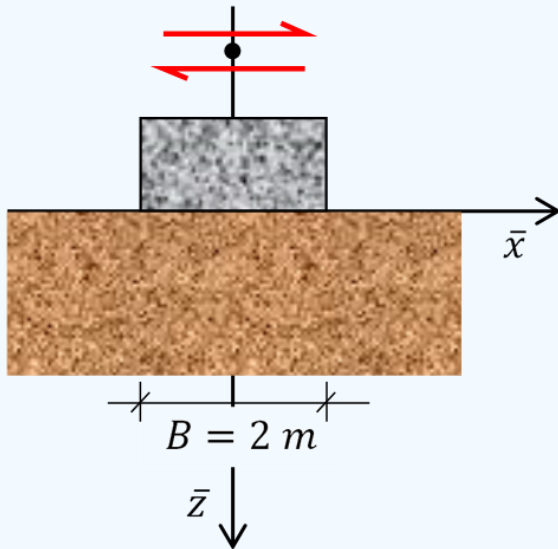
Données

- Poids total (semelle+machine) : $W = 700 \text{ kN}$
- Poinçonnement/Soulèvement admissible : $\Delta h_{adm} = \pm 1 \text{ mm}$
- Poids volumique du sol : $\gamma = 17 \text{ kN/m}^3$
- Module de Young du sol : $E = 55 \text{ MPa}$
- Coefficient de Poisson du sol : $\nu = 0.33$
- Accélération de la pesanteur : $g = 10 \text{ m/s}^2$

EXERCICES

Ex. 2 Calculer la fréquence de vibration à la résonance d'une semelle carrée de côté $B = 2 \text{ m}$ reposant sur un sol homogène en profondeur et soumise à un mouvement de tamis comme l'indique la figure ci-après, puis commenter le résultat trouvé. Calculer ensuite l'amplitude de vibration de la semelle à la résonance et à la fréquence appliquée, puis commenter les résultats trouvés.

$$Q(t) = Q_o e^{i\omega_o t}$$

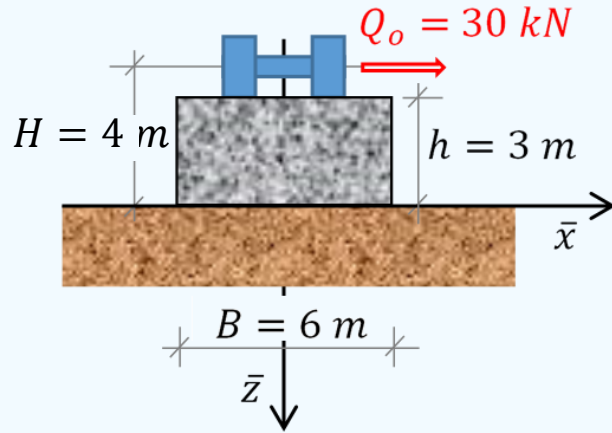


Données

- Poids total (semelle+machine) : $W = 20 \text{ t}$
- Amplitude de la force excitatrice : $Q_o = 1 \text{ t}$
- Fréquence de vibration appliquée : $f_o = 2.50 \text{ Hz}$
- Glissement admissible : $\Delta l_{adm} = \pm 1 \text{ mm}$
- Densité du sol : $\rho = 1.9$
- Module de cisaillement du sol : $G = 4 \text{ MPa}$
- Coefficient de Poisson du sol : $\nu = 0.3$
- Accélération de la pesanteur : $g = 10 \text{ m/s}^2$

EXERCICES

Ex. 3 Calculer la fréquence de vibration à la résonance et l'amplitude de vibration à la résonance d'une semelle rectangulaire de largeur $B = 6 \text{ m}$ et de longueur $L = 8 \text{ m}$ en béton armé reposant sur un sol homogène en profondeur et soumise à un mouvement de roulis dû à un compresseur comme l'indique la figure ci-après.



Données

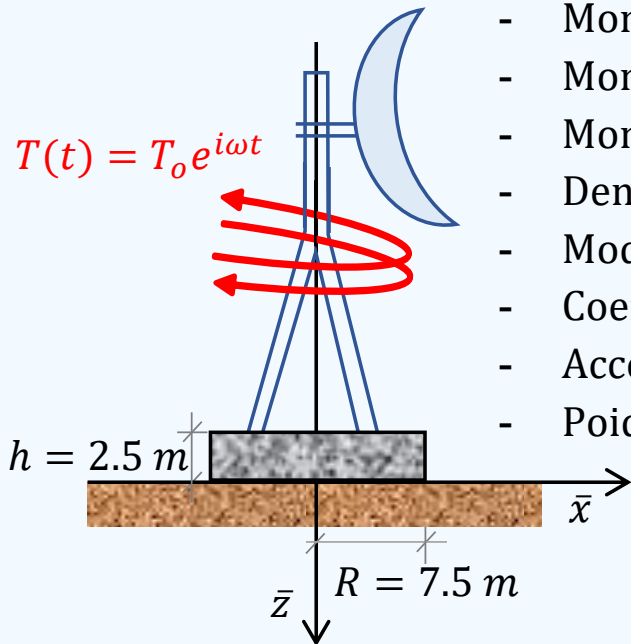
- Force horizontale engendrée par le compresseur : $Q_o = 30 \text{ kN}$
- Moment d'inertie massique du compresseur : $J_m = 1600 \text{ kNm}^2$
- Densité du sol : $\rho = 1.8$
- Module de cisaillement du sol : $G = 18 \text{ MPa}$
- Coefficient de Poisson du sol : $\nu = 0.35$
- Accélération de la pesanteur : $g = 9.81 \text{ m/s}^2$
- Poids volumique du béton : $\gamma_b = 24 \text{ kN/m}^3$

EXERCICES

Ex. 4 Soit un radar fondé sur une semelle circulaire de rayon $R = 7.5 \text{ m}$ en béton armé soumise à un mouvement de lacet dû au vent comme l'indique la figure ci-après. On demande de calculer la fréquence de résonance et la déflection angulaire de cette semelle.

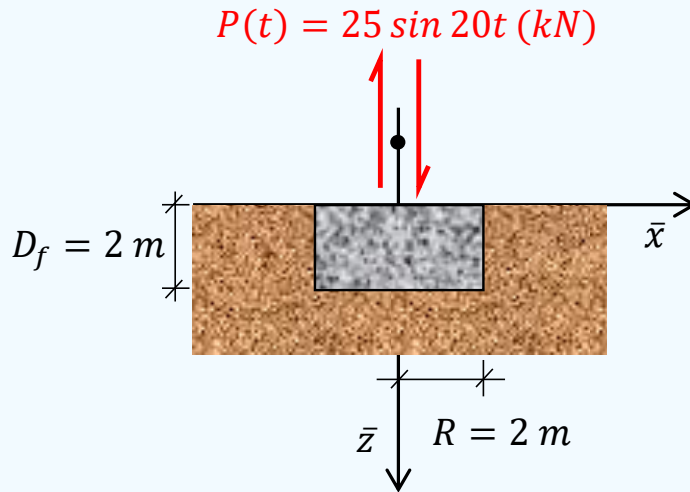
Données

- Moment de torsion dû à l'inertie : $(T_o)_{inertie} = 250 \text{ kNm}$
- Moment de torsion dû au vent : $(T_o)_{vent} = 100 \text{ kNm}$
- Moment d'inertie massique de la tour / $\bar{z}$: $J_{z-Tour} = 10^4 \text{ kN/m}^2$
- Densité du sol : $\rho = 1.76$
- Module de cisaillement du sol : $G = 135 \text{ MPa}$
- Coefficient de Poisson du sol : $\nu = 0.25$
- Accélération de la pesanteur : $g = 10 \text{ m/s}^2$
- Poids volumique du béton : $\gamma_b = 24 \text{ kN/m}^3$



EXERCICES

Ex. 5 Reprenons les données de l'exercice Ex.1 avec cette fois-ci la semelle est ancrée à $D_f = 2\text{ m}$ dans le sol. On demande de calculer la fréquence de résonance et l'amplitude de vibration à la résonance de la semelle, puis de commenter les résultats trouvés.

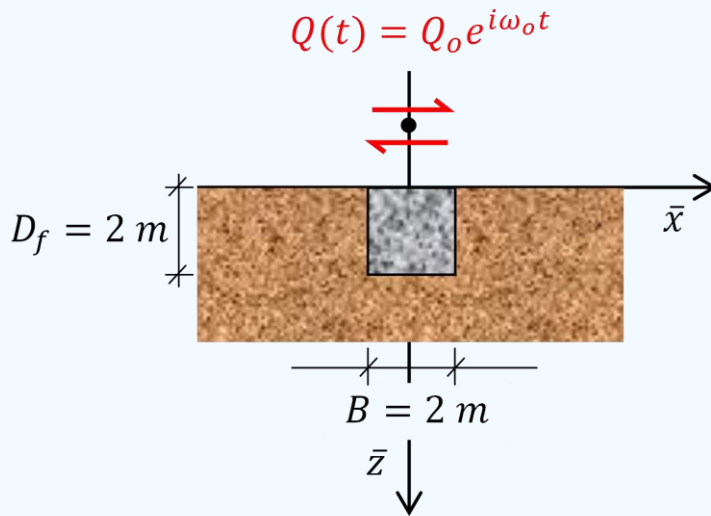


Données

- Poids total (semelle+machine) : $W = 700\text{ kN}$
- Poinçonnement/Soulèvement admissible : $\Delta h_{adm} = \pm 1\text{ mm}$
- Poids volumique du sol : $\gamma = 17\text{ kN/m}^3$
- Module de Young du sol : $E = 55\text{ MPa}$
- Coefficient de Poisson du sol : $\nu = 0.33$
- Accélération de la pesanteur : $g = 10\text{ m/s}^2$

EXERCICES

Ex. 6 Reprenons les données de l'exercice Ex.2 avec cette fois-ci la semelle ancrée à $D_f = 2 \text{ m}$ dans le sol. On demande de calculer la fréquence de résonance et l'amplitude de vibration à la résonance de la semelle, puis de commenter les résultats trouvés.

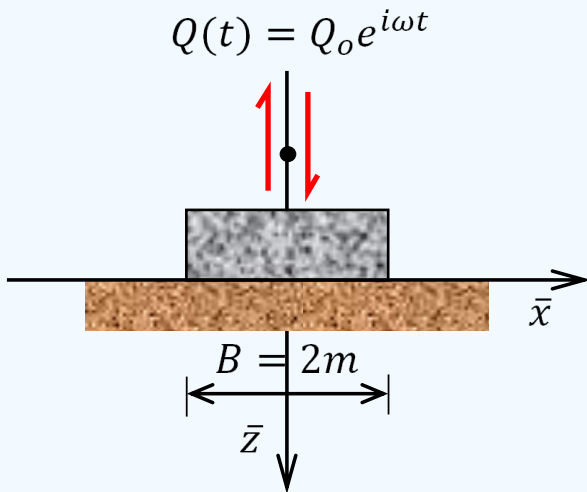


Données

- Poids total (semelle+machine) : $W = 20 \text{ t}$
- Amplitude de la force excitatrice : $Q_o = 1 \text{ t}$
- Fréquence de vibration appliquée : $f_o = 2.50 \text{ Hz}$
- Glissement admissible : $\Delta l_{adm} = \pm 1 \text{ mm}$
- Densité du sol : $\rho = 1.9$
- Module de cisaillement du sol : $G = 4 \text{ MPa}$
- Coefficient de Poisson du sol : $\nu = 0.3$
- Accélération de la pesanteur : $g = 10 \text{ m/s}^2$

EXERCICES

Ex. 7 (Interro. du 12/12/2022) Calculer la fréquence et l'amplitude de vibration à la résonance d'une semelle carrée de côté $B = 2 \text{ m}$ reposant sur un sol homogène en profondeur et soumise à un mouvement de pompage comme l'indique la figure ci-après. Commenter avec justification les résultats trouvés.

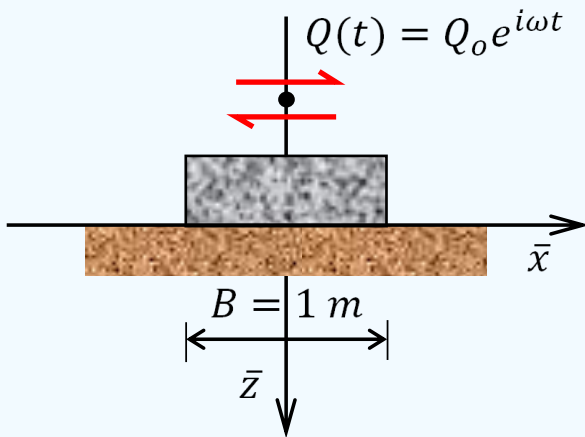


Données :

- Poids total (semelle+machine) : $W = 100 \text{ t}$
- Amplitude de la force excitatrice : $Q_o = 1 \text{ t}$
- Fréquence de vibration de la machine : $f_o = 1 \text{ Hz}$
- Amplitude de vibration admissible : $\Delta h_{adm} = \pm 1 \text{ mm}$
- Poids volumique du sol : $\gamma = 20 \text{ kN/m}^3$
- Module de cisaillement du sol : $G = 4 \text{ MPa}$
- Coefficient de Poisson du sol : $\nu = 0.3$
- Accélération de la pesanteur : $g = 10 \text{ m/s}^2$

EXERCICES

Ex. 8 (EFS du 14/01/2023) Calculer la fréquence de vibration à la résonance d'une semelle rectangulaire de largeur $B = 1 \text{ m}$ et de longueur $L = 2 \text{ m}$ reposant sur un sol homogène en profondeur et soumise à un mouvement de tamis comme l'indique la figure ci-après, puis commenter le résultat trouvé. Calculer ensuite l'amplitude de vibration de la semelle à la résonance et à la fréquence appliquée, puis commenter les résultats trouvés.

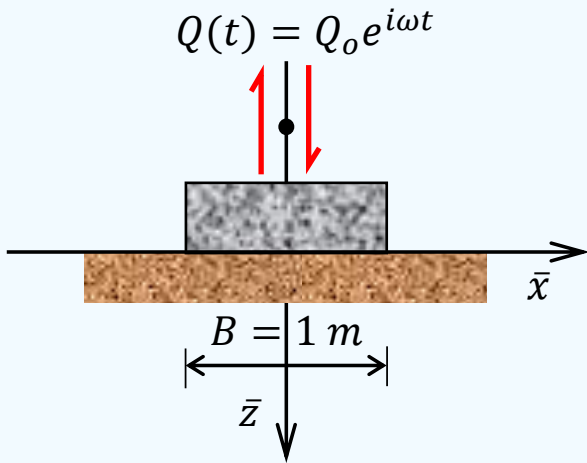


Données :

- Poids total (semelle+machine) : $W = 10 \text{ t}$
- Amplitude de la force excitatrice : $Q_o = 1 \text{ t}$
- Fréquence de vibration de la machine : $f_o = 2 \text{ Hz}$
- Amplitude de vibration admissible : $\Delta l_{adm} = \pm 2 \text{ mm}$
- Poids volumique du sol : $\gamma = 20 \text{ kN/m}^3$
- Module de cisaillement du sol : $G = 5 \text{ MPa}$
- Coefficient de Poisson du sol : $\nu = 0.3$
- Accélération de la pesanteur : $g = 10 \text{ m/s}^2$

EXERCICES

Ex. 9 (EFS du 21/01/2025) Considérons une semelle rectangulaire de largeur $B = 1\text{ m}$ et de longueur $L = 2\text{ m}$ reposant sur un sol homogène en profondeur et soumise à un mouvement de pompage comme l'indique la figure ci-après. On demande de calculer la fréquence naturelle de cette semelle, sa fréquence de vibration à la résonance, son amplitude de vibration à la résonance et son amplitude de vibration à la fréquence appliquée. Commenter ensuite avec justification les résultats trouvés.



Données :

- Poids total (semelle+machine) : $W = 10\text{ t}$
- Amplitude de la force excitatrice : $Q_o = 1\text{ t}$
- Fréquence de vibration de la machine : $f_o = 2\text{ Hz}$
- Amplitude de vibration admissible : $\Delta h_{adm} = \pm 1\text{ mm}$
- Poids volumique du sol : $\gamma = 20\text{ kN/m}^3$
- Module de cisaillement du sol : $G = 5\text{ MPa}$
- Coefficient de Poisson du sol : $\nu = 0.3$
- Accélération de la pesanteur : $g = 10\text{ m/s}^2$