

CALCUL A LA RUPTURE ET ANALYSE LIMITE

Chapitre 3

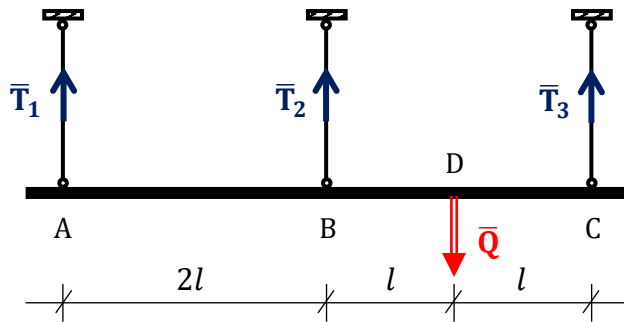
Approche cinématique par l'extérieur

Exercices

Prof. Mohamed KHEMISSA

*Département de Génie Civil, Faculté de Technologie,
Université Mohamed Boudiaf – M'sila*

Ex. 1 Considérons une barre indéformable suspendue par des tirants flexibles comme l'indique la figure ci-après. On demande de déterminer le domaine des chargements potentiellement supportables $K(\bar{Q})$ pour cette structure, où $\bar{Q}$ désigne la charge appliquée.

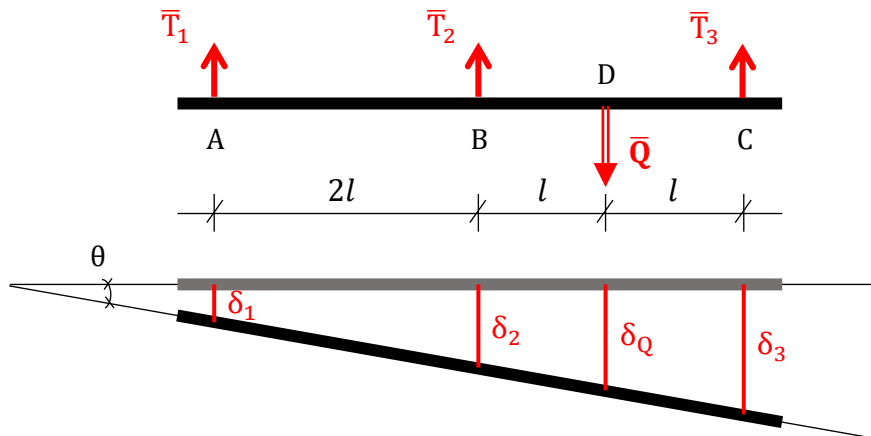


Critère de rupture : $|T_i| \leq L$; $i = 1, 2, 3$

L – chargement limite (limite de résistance du matériau en traction)

Rép. 1

- **Mécanisme de ruine** : Mécanisme de rotation



- **Compatibilité cinématique**

$$\bullet \quad \frac{\delta_2 - \delta_1}{2l} = \frac{\delta_3 - \delta_1}{4l} \Rightarrow \delta_2 = \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_3) \Rightarrow \dot{\delta}_2 = \frac{1}{2}(\dot{\delta}_1 + \dot{\delta}_3) \quad (1)$$

$$\bullet \quad \frac{\delta_Q - \delta_1}{3l} = \frac{\delta_2 - \delta_1}{2l} \Rightarrow \delta_Q = \frac{1}{2}(3\delta_2 - \delta_1) \Rightarrow \dot{\delta}_Q = \frac{1}{2}(3\dot{\delta}_2 - \dot{\delta}_1) \quad (2)$$

$$\bullet \quad \frac{\delta_Q - \delta_1}{3l} = \frac{\delta_3 - \delta_1}{4l} \Rightarrow \delta_Q = \frac{1}{4}(\delta_1 + 3\delta_3) \Rightarrow \dot{\delta}_Q = \frac{1}{4}(\dot{\delta}_1 + 3\dot{\delta}_3) \quad (3)$$

- **Combinaison (I)** : $\delta_1 = f(\delta_2 ; \delta_3)$

$$(1) \Rightarrow \dot{\delta}_1 = 2\dot{\delta}_2 - \dot{\delta}_3 \quad (4)$$

$$(2) \& (4) \Rightarrow \dot{\delta}_Q = \frac{1}{2}(\dot{\delta}_2 + \dot{\delta}_3)$$

✓ Puissance des efforts extérieurs :

$$\wp_{ext} = \bar{Q} \cdot \dot{\bar{q}} = \bar{Q} \cdot \dot{\delta}_Q = \frac{1}{2}Q(\dot{\delta}_2 + \dot{\delta}_3)$$

✓ Puissance des efforts intérieurs :

$$\wp_{int} = \sum_i T_i \dot{\delta}_i = T_1 \dot{\delta}_1 + T_2 \dot{\delta}_2 + T_3 \dot{\delta}_3 = T_1(2\dot{\delta}_2 - \dot{\delta}_3) + T_2 \dot{\delta}_2 + T_3 \dot{\delta}_3$$

✓ Principe des puissances virtuelles :

$$\wp_{ext} \leq \wp_{int} \quad \forall \quad \dot{\delta}_1, \dot{\delta}_2, \dot{\delta}_3 \text{ C.A.}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} Q (\dot{\delta}_2 + \dot{\delta}_3) \leq T_1 (2\dot{\delta}_2 - \dot{\delta}_3) + T_2 \dot{\delta}_2 + T_3 \dot{\delta}_3$$

$$\text{Posons : } \quad \frac{1}{2} (\dot{\delta}_2 + \dot{\delta}_3) = 1 \quad \Rightarrow \quad \dot{\delta}_2 = 2 - \dot{\delta}_3$$

$$\Rightarrow \quad Q \leq T_1 (4 - 3\dot{\delta}_3) + T_2 (2 - \dot{\delta}_3) + T_3 \dot{\delta}_3$$

✓ Domaine des chargements potentiellement supportables :

Sachant que : $|T_i| \leq L ; i = 1, 2, 3$

$$\Rightarrow \quad Q \leq L (|4 - 3\dot{\delta}_3| + |2 - \dot{\delta}_3| + |\dot{\delta}_3|) \quad \forall \quad \dot{\delta}_3 \text{ C.A.}$$

Par minimisation de Q , on obtient les cas suivants :

$$\text{Cas 1 : } \quad \dot{\delta}_3 = \frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad -L \left(0 + \frac{2}{3} + \frac{4}{3} \right) \leq Q \leq +L \left(0 + \frac{2}{3} + \frac{4}{3} \right)$$

$$\Rightarrow \quad -2L \leq Q \leq +2L$$

$$\text{Cas 2 : } \quad \dot{\delta}_3 = 2 \quad \Rightarrow \quad -L(2 + 0 + 2) \leq Q \leq +L(2 + 0 + 2)$$

$$\Rightarrow \quad -4L \leq Q \leq +4L$$

$$\text{Cas 3 : } \quad \dot{\delta}_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad -L(4 + 2 + 0) \leq Q \leq +L(4 + 2 + 0)$$

$$\Rightarrow \quad -6L \leq Q \leq +6L$$

D'où finalement : $-2L \leq Q \leq +2L$

- **Combinaison (II) :** $\dot{\delta}_2 = f(\dot{\delta}_1 ; \dot{\delta}_3)$

✓ Puissance des efforts extérieurs :

$$\wp_{ext} = \bar{Q} \cdot \dot{\bar{q}} = \bar{Q} \cdot \dot{\bar{\delta}}_Q = \frac{1}{4} Q (\dot{\delta}_1 + 3\dot{\delta}_3)$$

✓ Puissance des efforts intérieurs :

$$\wp_{int} = \sum_i T_i \dot{\delta}_i = T_1 \dot{\delta}_1 + T_2 \dot{\delta}_2 + T_3 \dot{\delta}_3 = T_1 \dot{\delta}_1 + \frac{1}{2} T_2 (\dot{\delta}_1 + \dot{\delta}_3) + T_3 \dot{\delta}_3$$

✓ Principe des puissances virtuelles :

$$\wp_{ext} \leq \wp_{int} \quad \forall \quad \dot{\delta}_1, \dot{\delta}_2, \dot{\delta}_3 \text{ C.A.}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{4} Q (\dot{\delta}_1 + 3\dot{\delta}_3) \leq T_1 \dot{\delta}_1 + \frac{1}{2} T_2 (\dot{\delta}_1 + \dot{\delta}_3) + T_3 \dot{\delta}_3$$

$$\text{Posons : } \quad \frac{1}{4} (\dot{\delta}_1 + 3\dot{\delta}_3) = 1 \quad \Rightarrow \quad \dot{\delta}_3 = \frac{1}{3} (4 - \dot{\delta}_1)$$

$$\Rightarrow \quad Q \leq T_1 \dot{\delta}_1 + \frac{1}{3} T_2 (2 + \dot{\delta}_1) + \frac{1}{3} T_3 (4 - \dot{\delta}_1)$$

✓ Domaine des chargements supportables :

Sachant que : $|T_i| \leq L ; i = 1, 2, 3$

$$\Rightarrow Q \leq L \left(|\dot{\delta}_1| + \frac{1}{3}|2 + \dot{\delta}_1| + \frac{1}{3}|4 - \dot{\delta}_1| \right) \quad \forall \dot{\delta}_1 \text{ C.A.}$$

Par minimisation de Q , on obtient les cas suivants :

$$\begin{aligned} \text{Cas 1 : } \dot{\delta}_1 = 0 & \Rightarrow -L \left(0 + \frac{2}{3} + \frac{4}{3} \right) \leq Q \leq +L \left(0 + \frac{2}{3} + \frac{4}{3} \right) \\ & \Rightarrow -2L \leq Q \leq +2L \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Cas 2 : } \dot{\delta}_1 = -2 & \Rightarrow -L(2 + 0 + 2) \leq Q \leq +L(2 + 0 + 2) \\ & \Rightarrow -4L \leq Q \leq +4L \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Cas 3 : } \dot{\delta}_1 = 4 & \Rightarrow -L(4 + 2 + 0) \leq Q \leq +L(4 + 2 + 0) \\ & \Rightarrow -6L \leq Q \leq +6L \end{aligned}$$

D'où finalement : $-2L \leq Q \leq +2L$

- **Combinaison (III) : $\dot{\delta}_3 = f(\dot{\delta}_1 ; \dot{\delta}_2)$**

$$(1) \Rightarrow \dot{\delta}_3 = 2\dot{\delta}_2 - \dot{\delta}_1$$

✓ Puissance des efforts extérieurs :

$$\wp_{ext} = \bar{Q} \cdot \dot{\bar{q}} = \bar{Q} \cdot \dot{\delta}_Q = \frac{1}{2} Q (3\dot{\delta}_2 - \dot{\delta}_1)$$

✓ Puissance des efforts intérieurs :

$$\wp_{int} = \sum_i T_i \dot{\delta}_i = T_1 \dot{\delta}_1 + T_2 \dot{\delta}_2 + T_3 \dot{\delta}_3 = T_1 \dot{\delta}_1 + T_2 \dot{\delta}_2 + T_3 (2\dot{\delta}_2 - \dot{\delta}_1)$$

✓ Principe des puissances virtuelles :

$$\wp_{ext} \leq \wp_{int} \quad \forall \dot{\delta}_1, \dot{\delta}_2, \dot{\delta}_3 \text{ C.A.}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} Q (3\dot{\delta}_2 - \dot{\delta}_1) \leq T_1 \dot{\delta}_1 + T_2 \dot{\delta}_2 + T_3 (2\dot{\delta}_2 - \dot{\delta}_1)$$

$$\text{Posons : } \frac{1}{2} (3\dot{\delta}_2 - \dot{\delta}_1) = 1 \Rightarrow \dot{\delta}_1 = -2 + 3\dot{\delta}_2$$

$$\Rightarrow Q \leq T_1 (3\dot{\delta}_2 - 2) + T_2 \dot{\delta}_2 + T_3 (2 - \dot{\delta}_2)$$

✓ Domaine des chargements potentiellement supportables :

Sachant que : $|T_i| \leq L ; i = 1, 2, 3$

$$\Rightarrow Q \leq L (|3\dot{\delta}_2 - 2| + |\dot{\delta}_2| + |2 - \dot{\delta}_2|) \quad \forall \dot{\delta}_2 \text{ C.A.}$$

Par minimisation de Q , on obtient les cas suivants :

$$\begin{aligned} \text{Cas 1 : } \dot{\delta}_2 = \frac{2}{3} & \Rightarrow -L \left(0 + \frac{2}{3} + \frac{4}{3} \right) \leq Q \leq +L \left(0 + \frac{2}{3} + \frac{4}{3} \right) \\ & \Rightarrow -2L \leq Q \leq +2L \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Cas 2 : } \dot{\delta}_2 = 0 & \Rightarrow -L(2 + 0 + 2) \leq Q \leq +L(2 + 0 + 2) \\ & \Rightarrow -4L \leq Q \leq +4L \end{aligned}$$

$$\text{Cas 3 : } \delta_2 = 2 \quad \Rightarrow \quad -L(4 + 2 + 0) \leq Q \leq +L(4 + 2 + 0)$$

$$\Rightarrow \quad -6L \leq Q \leq +6L$$

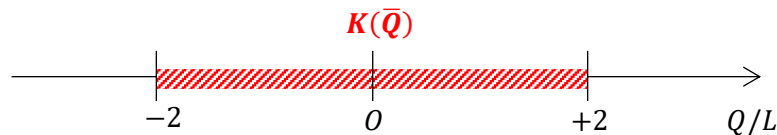
$$\text{D'où finalement : } -2L \leq Q \leq +2L$$

- **Synthèse :**

Combinaison de (I), (II) et (III) :

$$\Rightarrow \quad -2L \leq Q \leq +2L$$

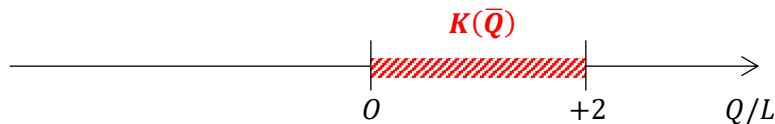
$\Rightarrow$ Le domaine des chargements potentiellement supportables $K(\bar{Q})$ est défini dans le segment $(\frac{Q}{L})$ représenté par la figure suivante :



Remarque : Comme la barre est suspendue par des tirants flexibles, les efforts ne peuvent donc être que des tractions :

$$\Rightarrow \quad 0 \leq Q \leq +2L$$

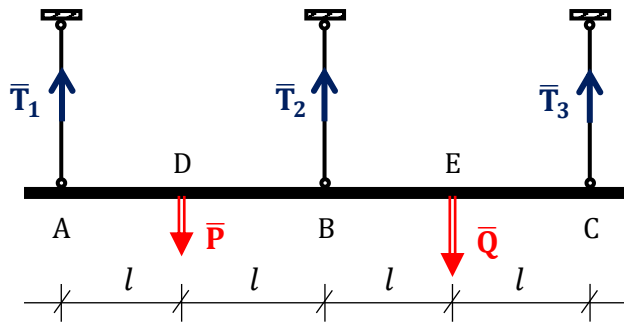
$\Rightarrow$ Le domaine des chargements potentiellement supportables $K(\bar{Q})$ est défini dans le segment $(\frac{Q}{L})$ représenté par la figure suivante :



- **Nota :**

- L'approche statique par l'intérieur et l'approche cinématique par l'extérieur conduisent aux mêmes résultats.
- En pratique, seule une combinaison (I), (II) ou (III) suffit.

Ex. 2 Considérons une barre indéformable suspendue par des tirants flexibles comme l'indique la figure ci-après. On demande de déterminer le domaine des chargements potentiellement supportables $K(\bar{P}, \bar{Q})$ pour cette structure, où $\bar{P}$ et $\bar{Q}$ désignent les charges appliquées.

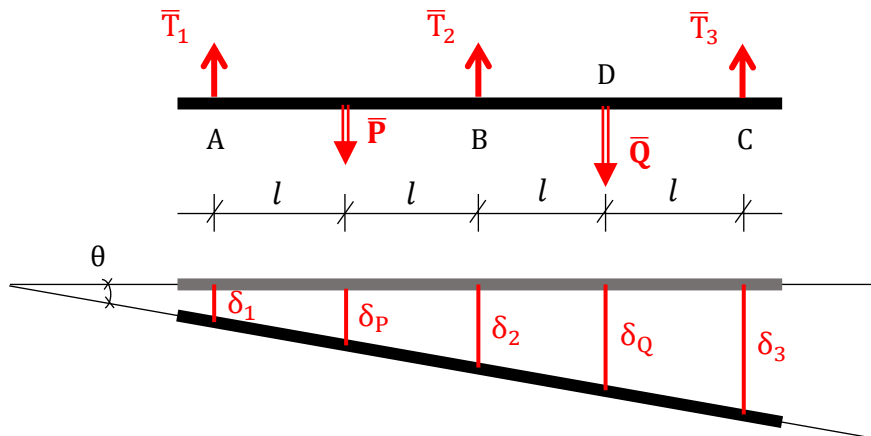


Critère de rupture : $|T_i| \leq L$; $i = 1, 2, 3$

L – chargement limite (limite de résistance du matériau en traction)

Rép. 2

- **Mécanisme de ruine** : Mécanisme de rotation



- **Compatibilité cinématique**

$$\bullet \quad \frac{\delta_P - \delta_1}{l} = \frac{\delta_2 - \delta_1}{2l} = \frac{\delta_Q - \delta_1}{3l} = \frac{\delta_3 - \delta_1}{4l} \Rightarrow \delta_P = \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_2) \Rightarrow \dot{\delta}_P = \frac{1}{2}(\dot{\delta}_1 + \dot{\delta}_2) \quad (1)$$

$$\Rightarrow \delta_Q = \frac{1}{2}(\delta_2 + \delta_3) \Rightarrow \dot{\delta}_Q = \frac{1}{2}(\dot{\delta}_2 + \dot{\delta}_3) \quad (2)$$

$$\Rightarrow \delta_1 = 2\delta_2 - \delta_3 \Rightarrow \dot{\delta}_1 = 2\dot{\delta}_2 - \dot{\delta}_3 \quad (3)$$

$$\Rightarrow \delta_2 = \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_3) \Rightarrow \dot{\delta}_2 = \frac{1}{2}(\dot{\delta}_1 + \dot{\delta}_3) \quad (4)$$

- **Combinaison (I)** : $\delta_1 = f(\delta_2 ; \delta_3)$

$$(1) \text{ \& } (3) \Rightarrow \dot{\delta}_P = \frac{1}{2}(3\dot{\delta}_2 - \dot{\delta}_3)$$

- ✓ Puissance des efforts extérieurs :

$$\mathcal{P}_{ext} = \bar{\mathbf{Q}} \cdot \dot{\bar{\mathbf{q}}} = \bar{P} \cdot \dot{\delta}_P + \bar{Q} \cdot \dot{\delta}_Q = \frac{1}{2}P(3\dot{\delta}_2 - \dot{\delta}_3) + \frac{1}{2}Q(\dot{\delta}_2 + \dot{\delta}_3)$$

- ✓ Puissance des efforts intérieurs :

$$\mathcal{P}_{int} = \sum_i \mathbf{T}_i \dot{\boldsymbol{\delta}}_i = T_1 \dot{\delta}_1 + T_2 \dot{\delta}_2 + T_3 \dot{\delta}_3 = T_1(2\dot{\delta}_2 - \dot{\delta}_3) + T_2 \dot{\delta}_2 + T_3 \dot{\delta}_3$$

- ✓ Principe des puissances virtuelles :

$$\mathcal{P}_{ext} \leq \mathcal{P}_{int} \quad \forall \quad \dot{\delta}_1, \dot{\delta}_2, \dot{\delta}_3 \text{ C.A.}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}P(3\dot{\delta}_2 - \dot{\delta}_3) + \frac{1}{2}Q(\dot{\delta}_2 + \dot{\delta}_3) \leq T_1(2\dot{\delta}_2 - \dot{\delta}_3) + T_2 \dot{\delta}_2 + T_3 \dot{\delta}_3$$

$$\text{Posons : } \quad \frac{1}{2}(\dot{\delta}_2 + \dot{\delta}_3) = 1 \quad \Rightarrow \quad \dot{\delta}_2 = 2 - \dot{\delta}_3$$

$$\Rightarrow \quad P(3 - 2\dot{\delta}_3) + Q \leq T_1(4 - 3\dot{\delta}_3) + T_2(2 - \dot{\delta}_3) + T_3 \dot{\delta}_3$$

- ✓ Domaine des chargements potentiellement supportables :

Sachant que : $|T_i| \leq L ; i = 1, 2, 3$

$$\Rightarrow \quad P(3 - 2\dot{\delta}_3) + Q \leq L(|4 - 3\dot{\delta}_3| + |2 - \dot{\delta}_3| + |\dot{\delta}_3|) \quad \forall \quad \dot{\delta}_3 \text{ C.A.}$$

Par minimisation de (P, Q) , on obtient les cas suivants :

$$\text{Cas 1 : } \quad \dot{\delta}_3 = \frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad -L\left(0 + \frac{2}{3} + \frac{4}{3}\right) \leq \frac{1}{3}P + Q \leq +L\left(0 + \frac{2}{3} + \frac{4}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \quad -6L \leq P + 3Q \leq +6L$$

$$\text{Cas 2 : } \quad \dot{\delta}_3 = 2 \quad \Rightarrow \quad -L(2 + 0 + 2) \leq -P + Q \leq +L(2 + 0 + 2)$$

$$\Rightarrow \quad -4L \leq P - Q \leq +4L$$

$$\text{Cas 3 : } \quad \dot{\delta}_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad -L(4 + 2 + 0) \leq 3P + Q \leq +L(4 + 2 + 0)$$

$$\Rightarrow \quad -6L \leq 3P + Q \leq +6L$$

D'où finalement :

$$\begin{cases} -6L \leq P + 3Q \leq +6L \\ -4L \leq P - Q \leq +4L \\ -6L \leq 3P + Q \leq +6L \end{cases}$$

- Combinaison (II) : $\dot{\delta}_2 = f(\dot{\delta}_1 ; \dot{\delta}_3)$

$$(3) \quad \Rightarrow \quad \dot{\delta}_2 = \frac{1}{2}(\dot{\delta}_1 + \dot{\delta}_3) \quad (5)$$

$$(1) \& (5) \quad \Rightarrow \quad \dot{\delta}_P = \frac{1}{4}(3\dot{\delta}_1 + \dot{\delta}_3)$$

$$(2) \& (3) \quad \Rightarrow \quad \dot{\delta}_Q = \frac{1}{4}(\dot{\delta}_1 + 3\dot{\delta}_3)$$

- ✓ Puissance des efforts extérieurs :

$$\mathcal{P}_{ext} = \bar{\mathbf{Q}} \cdot \dot{\bar{\mathbf{q}}} = \bar{P} \cdot \dot{\delta}_P + \bar{Q} \cdot \dot{\delta}_Q = \frac{1}{4}P(3\dot{\delta}_1 + \dot{\delta}_3) + \frac{1}{4}Q(\dot{\delta}_1 + 3\dot{\delta}_3)$$

✓ Puissance des efforts intérieurs :

$$\mathcal{P}_{int} = \sum_i \mathbf{T}_i \dot{\boldsymbol{\delta}}_i = T_1 \dot{\delta}_1 + T_2 \dot{\delta}_2 + T_3 \dot{\delta}_3 = T_1 \dot{\delta}_1 + \frac{1}{2} T_2 (\dot{\delta}_1 + \dot{\delta}_3) + T_3 \dot{\delta}_3$$

✓ Principe des puissances virtuelles :

$$\mathcal{P}_{ext} \leq \mathcal{P}_{int} \quad \forall \quad \dot{\delta}_1, \dot{\delta}_2, \dot{\delta}_3 \text{ C.A.}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{4} P (3\dot{\delta}_1 + \dot{\delta}_3) + \frac{1}{4} Q (\dot{\delta}_1 + 3\dot{\delta}_3) \leq T_1 \dot{\delta}_1 + \frac{1}{2} T_2 (\dot{\delta}_1 + \dot{\delta}_3) + T_3 \dot{\delta}_3$$

$$\text{Posons : } \quad \frac{1}{4} (\dot{\delta}_1 + 3\dot{\delta}_3) = 1 \quad \Rightarrow \quad \dot{\delta}_3 = \frac{1}{3} (4 - \dot{\delta}_1)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{3} P (1 + 2\dot{\delta}_1) + Q \leq T_1 \dot{\delta}_1 + \frac{1}{3} T_2 (2 + \dot{\delta}_1) + \frac{1}{3} T_3 (4 - \dot{\delta}_1)$$

✓ Domaine des chargements potentiellement supportables :

$$\text{Sachant que : } |T_i| \leq L ; i = 1, 2, 3$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{3} P (1 + 2\dot{\delta}_1) + Q \leq L \left(|\dot{\delta}_1| + \frac{1}{3} |2 + \dot{\delta}_1| + \frac{1}{3} |4 - \dot{\delta}_1| \right) \quad \forall \quad \dot{\delta}_1 \text{ C.A.}$$

Par minimisation de (P, Q) , on obtient les cas suivants :

$$\underline{\text{Cas 1 :}} \quad \dot{\delta}_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad -L \left(0 + \frac{2}{3} + \frac{4}{3} \right) \leq \frac{1}{3} P + Q \leq +L \left(0 + \frac{2}{3} + \frac{4}{3} \right)$$

$$\Rightarrow \quad -6L \leq P + 3Q \leq +6L$$

$$\underline{\text{Cas 2 :}} \quad \dot{\delta}_1 = -2 \quad \Rightarrow \quad -L(2 + 0 + 2) \leq -P + Q \leq +L(2 + 0 + 2)$$

$$\Rightarrow \quad -4L \leq P - Q \leq +4L$$

$$\underline{\text{Cas 3 :}} \quad \dot{\delta}_1 = 4 \quad \Rightarrow \quad -L(4 + 2 + 0) \leq 3P + Q \leq +L(4 + 2 + 0)$$

$$\Rightarrow \quad -6L \leq 3P + Q \leq +6L$$

D'où finalement :

$$\begin{cases} -6L \leq P + 3Q \leq +6L \\ -4L \leq P - Q \leq +4L \\ -6L \leq 3P + Q \leq +6L \end{cases}$$

- **Combinaison (III) :** $\dot{\delta}_3 = f(\dot{\delta}_1 ; \dot{\delta}_2)$

$$(3) \quad \Rightarrow \quad \dot{\delta}_3 = 2\dot{\delta}_2 - \dot{\delta}_1 \quad (5)$$

$$(2) \& (5) \quad \Rightarrow \quad \dot{\delta}_Q = \frac{1}{2} (3\dot{\delta}_2 - \dot{\delta}_1)$$

✓ Puissance des efforts extérieurs :

$$\mathcal{P}_{ext} = \bar{\mathbf{Q}} \cdot \dot{\bar{\mathbf{q}}} = \bar{P} \cdot \dot{\delta}_P + \bar{Q} \cdot \dot{\delta}_Q = \frac{1}{2} P (\dot{\delta}_1 + \dot{\delta}_2) + \frac{1}{2} Q (3\dot{\delta}_2 - \dot{\delta}_1)$$

✓ Puissance des efforts intérieurs :

$$\mathcal{P}_{int} = \sum_i \mathbf{T}_i \dot{\boldsymbol{\delta}}_i = T_1 \dot{\delta}_1 + T_2 \dot{\delta}_2 + T_3 \dot{\delta}_3 = T_1 \dot{\delta}_1 + T_2 \dot{\delta}_2 + T_3 (2\dot{\delta}_2 - \dot{\delta}_1)$$

✓ Principe des puissances virtuelles :

$$\mathcal{P}_{ext} \leq \mathcal{P}_{int} \quad \forall \quad \dot{\delta}_1, \dot{\delta}_2, \dot{\delta}_3 \text{ C.A.}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}P(\dot{\delta}_1 + \dot{\delta}_2) + \frac{1}{2}Q(3\dot{\delta}_2 - \dot{\delta}_1) \leq T_1\dot{\delta}_1 + T_2\dot{\delta}_2 + T_3(2\dot{\delta}_2 - \dot{\delta}_1)$$

$$\text{Posons : } \frac{1}{2}(\dot{\delta}_1 + \dot{\delta}_2) = 1 \Rightarrow \dot{\delta}_1 = 2 - \dot{\delta}_2$$

$$\Rightarrow P + Q(2\dot{\delta}_2 - 1) \leq T_1(2 - \dot{\delta}_2) + T_2\dot{\delta}_2 + T_3(3\dot{\delta}_2 - 2)$$

✓ Domaine des chargements potentiellement supportables :

Sachant que : $|T_i| \leq L ; i = 1, 2, 3$

$$\Rightarrow P + Q(2\dot{\delta}_2 - 1) \leq L(|2 - \dot{\delta}_2| + |\dot{\delta}_2| + |3\dot{\delta}_2 - 2|) \quad \forall \dot{\delta}_2 \text{ C.A.}$$

Par minimisation de (P, Q) , on obtient les cas suivants :

$$\begin{aligned} \text{Cas 1 : } \dot{\delta}_2 = 2 &\Rightarrow -L(0 + 2 + 4) \leq P + 3Q \leq +L(0 + 2 + 4) \\ &\Rightarrow -6L \leq P + 3Q \leq +6L \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Cas 2 : } \dot{\delta}_2 = 0 &\Rightarrow -L(2 + 0 + 2) \leq P - Q \leq +L(2 + 0 + 2) \\ &\Rightarrow -4L \leq P - Q \leq +4L \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Cas 3 : } \dot{\delta}_2 = \frac{2}{3} &\Rightarrow -L\left(\frac{4}{3} + \frac{2}{3} + 0\right) \leq P + \frac{1}{3}Q \leq +L\left(\frac{4}{3} + \frac{2}{3} + 0\right) \\ &\Rightarrow -6L \leq 3P + Q \leq +6L \end{aligned}$$

D'où finalement :

$$\begin{cases} -6L \leq P + 3Q \leq +6L \\ -4L \leq P - Q \leq +4L \\ -6L \leq 3P + Q \leq +6L \end{cases}$$

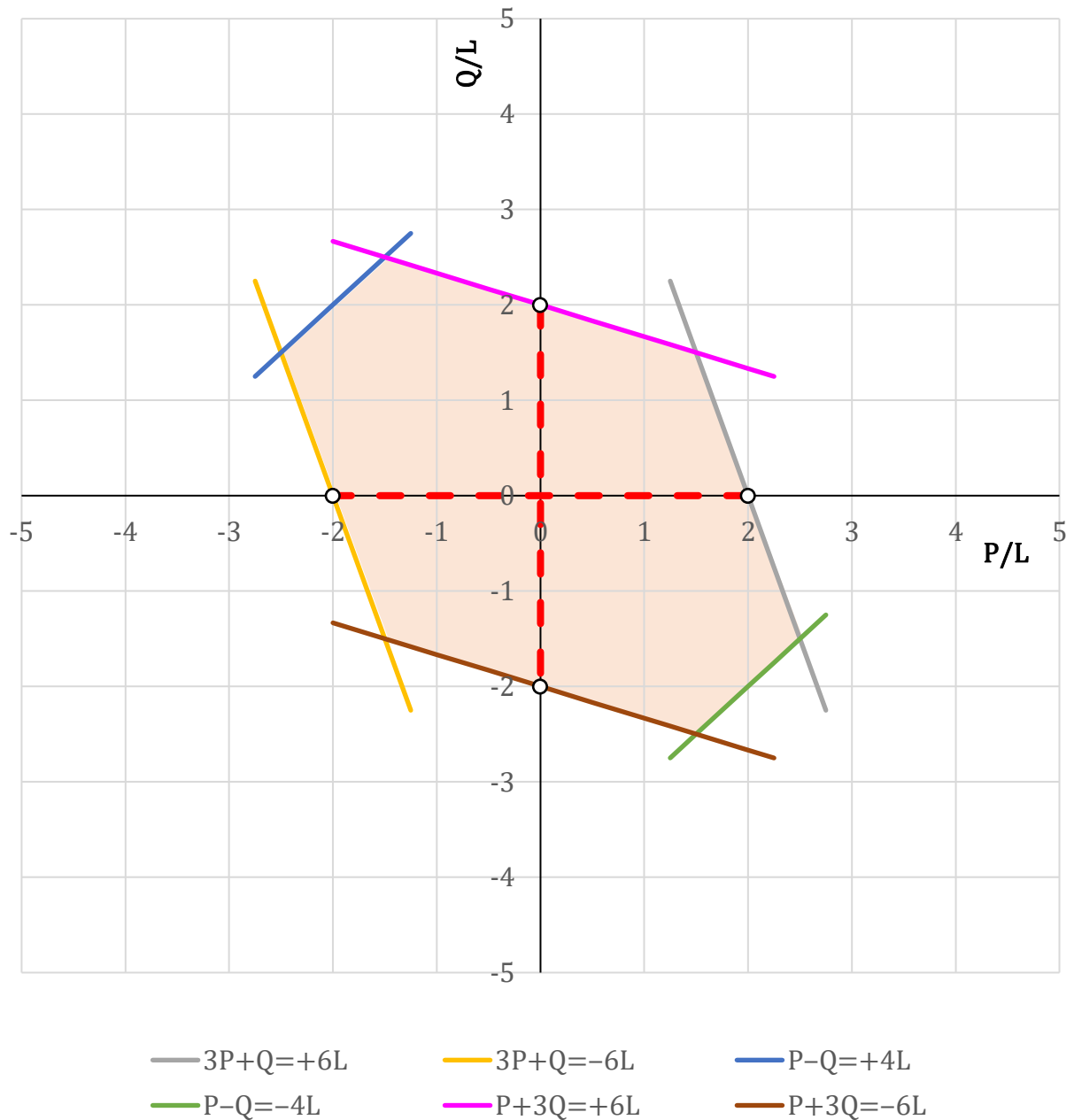
- Synthèse :

Combinaison de (I), (II) et (III) :

$$\Rightarrow \begin{cases} -6L \leq 3P + Q \leq +6L \\ -6L \leq P + 3Q \leq +6L \\ -4L \leq P - Q \leq +4L \end{cases}$$

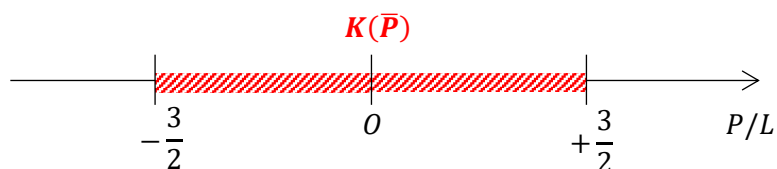
⇒ Le domaine des chargements potentiellement supportables $K(\bar{P}; \bar{Q})$ est défini dans le plan $(\frac{P}{L}; \frac{Q}{L})$ représenté par la figure suivante.

Domaine K des chargements potentiellement supportables

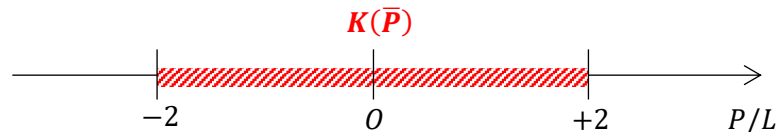


- Cas particuliers :

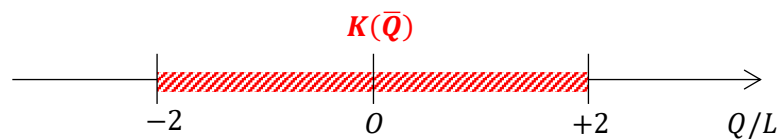
$$\begin{aligned}
 1. \quad P = Q &\Rightarrow -6L \leq 4P \leq +6L \\
 &\Rightarrow -\frac{3}{2}L \leq P \leq +\frac{3}{2}L \\
 &\Rightarrow \text{Le domaine } K(\bar{Q}) \text{ se réduit à un segment :}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 2. \quad P \neq 0 \text{ \& } Q = 0 &\Rightarrow -6L \leq 3P \leq +3L \\
 &\Rightarrow -2L \leq P \leq +2L \\
 &\Rightarrow \text{Le domaine } K(\bar{P}) \text{ se réduit à un segment :}
 \end{aligned}$$



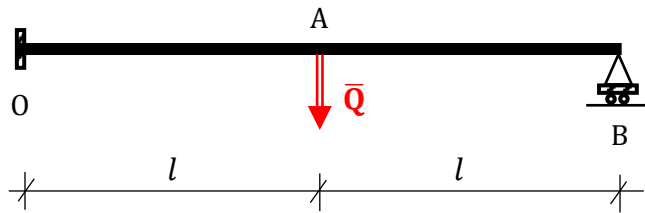
$$\begin{aligned}
 3. \quad P = 0 \text{ \& } Q \neq 0 &\Rightarrow -6L \leq 3Q \leq +3L \\
 &\Rightarrow -2L \leq Q \leq +2L \\
 &\Rightarrow \text{Le domaine } K(\bar{Q}) \text{ se réduit à un segment :}
 \end{aligned}$$



- Nota :

- L'approche statique par l'intérieur et l'approche cinématique par l'extérieur conduisent aux mêmes résultats.
- En pratique, seule une combinaison (I), (II) ou (III) suffit.

Ex. 3 Considérons une poutre encastree d'un cote et simplement appuyee de l'autre comme l'indique la figure ci-apres. On demande de determiner le domaine des chargements potentiellement supportables $K(\bar{Q})$ pour cette poutre, ou $\bar{Q}$ designe la charge appliquee.

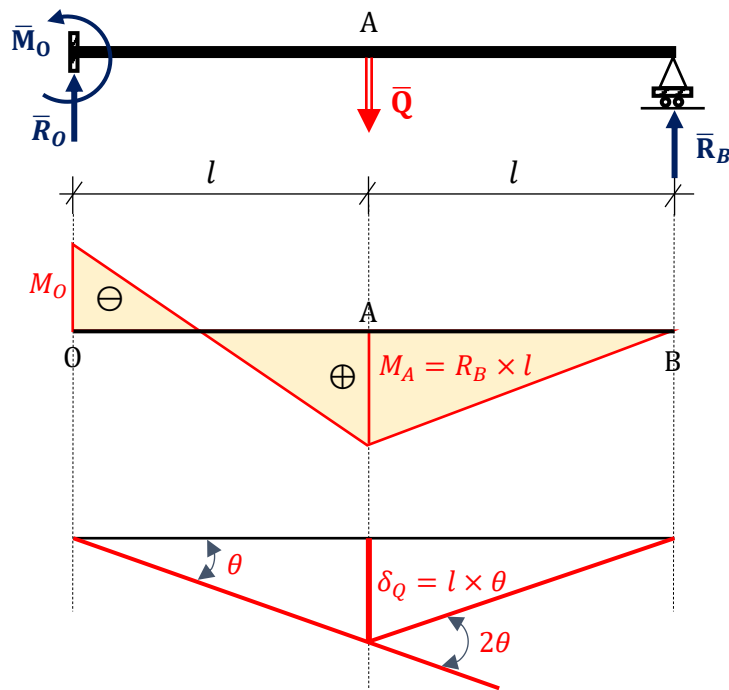


Critère de rupture : $|M| \leq m_p$

m_p – moment limite (limite de résistance du matériau en flexion)

Rép. 3

- Mécanisme de ruine : Mécanisme de poutres



- $\delta_Q = l \times \dot{\theta}$

- Puissance des efforts extérieurs

$$\mathcal{P}_{ext} = \bar{Q} \cdot \dot{\bar{q}} = Q \times \delta_Q = Q \times l \times \dot{\theta}$$

- Puissance des efforts intérieurs

$$\mathcal{P}_{int} = \sum_i M_i \dot{\theta}_i = M_o \times \dot{\theta} + M_A \times 2\dot{\theta}$$

- Principe des puissances virtuelles

$$\mathcal{P}_{ext} \leq \mathcal{P}_{int} \quad \forall \dot{\theta} \text{ C. A.}$$

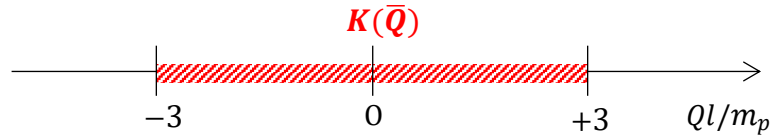
$$\Rightarrow Q \times l \times \dot{\theta} \leq M_o \times \dot{\theta} + M_A \times 2\dot{\theta}$$

$$\Rightarrow Q \leq \frac{1}{l} (M_o + 2M_A)$$

- **Domaine des chargements potentiellement supportables**

$$\begin{aligned} \text{Sachant que : } |M_A| \leq m_p \text{ \& } |M_O| \leq m_p &\Rightarrow -\frac{1}{l}(m_p + 2m_p) \leq Q \leq +\frac{1}{l}(m_p + 2m_p) \\ &\Rightarrow -\frac{3}{l}m_p \leq Q \leq +\frac{3}{l}m_p \end{aligned}$$

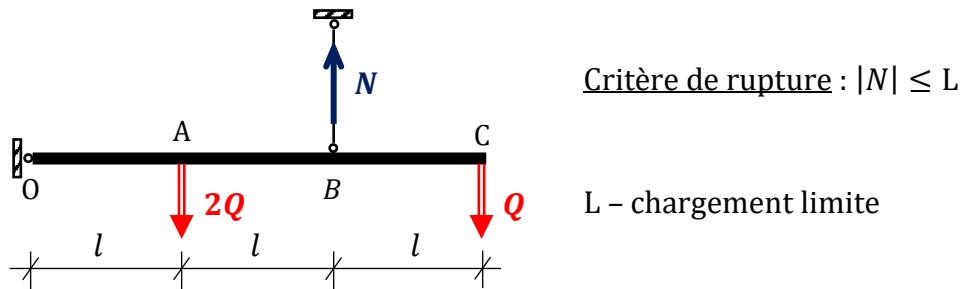
$\Rightarrow$ Le domaine des chargements potentiellement supportables $K(\bar{Q})$ est défini dans le segment (Ql/m_p) représenté par la figure suivante :



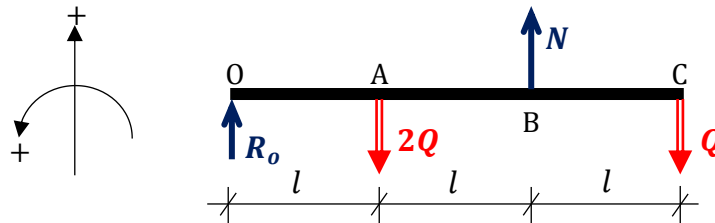
- **Nota :**

- L'approche statique par l'intérieur et l'approche cinématique par l'extérieur conduisent aux mêmes résultats.

Ex. 4 (Interro. du 28/11/2022) Déterminer les bornes inférieure Q_{min} et supérieure Q_{max} du chargement potentiellement supportable de la barre indéformable ci-dessous, où Q désigne la charge appliquée. Commenter ensuite les résultats trouvés, puis déduire la charge ultime Q_{ult} correspondante.



Rep. 4



4.1 Borne inférieure (Q_{min}) :

- Approche de calcul : Approche statique par l'intérieur
- $\sum F = 0 \Rightarrow N + R_o - 3Q = 0 \Rightarrow Q = \frac{1}{3}(N + R_o)$ (1)
- $\sum M_{/O} = 0 \Rightarrow N \times 2l - 2Q \times l - Q \times 3l = 0 \Rightarrow Q = 2N/5$ (2)

Sachant que : $|N| \leq L$

$$(2) \Rightarrow Q \leq 2|L|/5$$

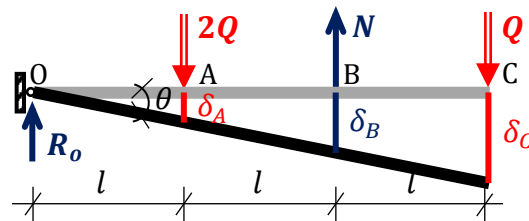
D'où :

$$\Rightarrow \text{Borne inférieure : } Q_{min} = 2L/5$$

4.2 Borne supérieure (Q_{max}) :

- Approche de calcul : Approche cinématique par l'extérieur
- Mécanisme de ruine : Mécanisme de rotation

$$\theta \approx \tan(\theta) = \frac{\delta_A}{l} = \frac{\delta_B}{2l} = \frac{\delta_C}{3l}$$

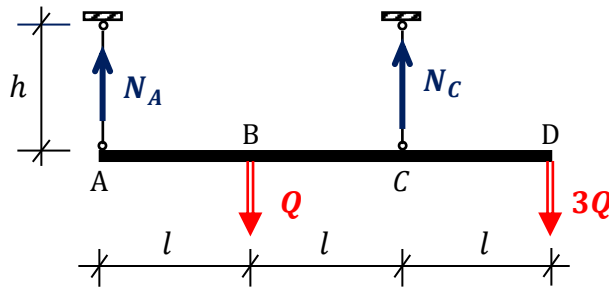


- Compatibilité cinématique : $\delta_A = \delta_B/2 = \delta_C/3$
 $\Rightarrow \dot{\delta}_A = \dot{\delta}_B/2 = \dot{\delta}_C/3 = \dot{\theta} \times l$
 - $\mathcal{P}_{ext} = \bar{Q} \times \dot{\bar{q}} = 2Q \times \dot{\delta}_A + Q \times \dot{\delta}_C = 2Q \times \dot{\theta} \times l + Q \times \dot{\theta} \times 3l = 5Q \times \dot{\theta} \times l$
 - $\mathcal{P}_{int} = \sum_{i=1,3} (N_i \times \dot{\delta}_i) = N \times \dot{\delta}_B = N \times \dot{\theta} \times 2l = 2N \times \dot{\theta} \times l$
 $\Rightarrow 5Q \times \dot{\theta} \times l \leq 2N \times \dot{\theta} \times l$
- Sachant que : $|N| \leq L$
 $\Rightarrow Q \leq 2|L|/5$
 D'où :
 $\Rightarrow$ Borne supérieure : $Q_{max} = 2L/5$

4.3 Commentaire : Les deux bornes coïncident avec la solution exacte.

$$\Rightarrow \text{Charge ultime : } Q_{ult} = Q_{min} = Q_{max} = 2L/5$$

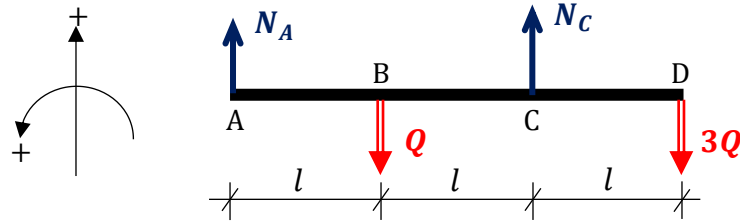
Ex. 5 (EFS du 10/01/2023) Déterminer les bornes inférieure Q_{min} et supérieure Q_{max} du chargement potentiellement supportable de la barre indéformable ci-dessous, où Q désigne la charge appliquée. Commenter ensuite les résultats trouvés, puis déduire la charge ultime Q_{ult} correspondante.



Critère de rupture : $|N_A| \leq L$ et $|N_C| \leq 3L$

L – chargement limite

Rep. 5



5.1 Borne inférieure (Q_{min}) :

- Approche de calcul : Approche statique par l'intérieur
- $\sum F = 0 \Rightarrow N_A + N_C - Q - 3Q = 0 \Rightarrow Q = \frac{1}{4}(N_A + N_C)$ (1)
- $\sum M_{/A} = 0 \Rightarrow N_C \times 2l - Q \times l - 3Q \times 3l = 0 \Rightarrow Q = \frac{1}{5}N_C$ (2)

Sachant que : $|N_A| \leq L$ et $|N_C| \leq 3L$

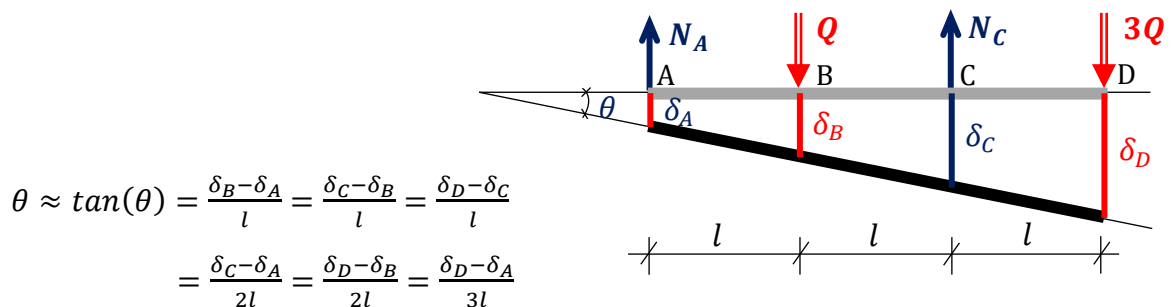
$$(1) \Rightarrow Q \leq \frac{1}{4}(|L| + 3|L|) = |L|$$

$$(2) \Rightarrow Q \leq \frac{1}{5} \times 3|L| = 3|L|/5$$

$\Rightarrow$ Borne inférieure : $Q_{min} = 3L/5$

5.2 Borne supérieure (Q_{max}) :

- Approche de calcul : Approche cinématique par l'extérieur
- Mécanisme de ruine : Mécanisme de rotation



- Compatibilité cinématique :

$$\Rightarrow \dot{\delta}_A = \frac{3}{2}\dot{\delta}_B - \frac{1}{2}\dot{\delta}_D$$

$$\Rightarrow \dot{\delta}_B = \frac{1}{2}(\dot{\delta}_A + \dot{\delta}_C)$$

$$\Rightarrow \dot{\delta}_D = \frac{1}{2}(3\dot{\delta}_C - \dot{\delta}_A)$$

Posons : $\dot{\delta}_A = 0$ (*Principe des Puissances Virtuelles*) $\Rightarrow \dot{\delta}_B = \frac{\dot{\delta}_C}{2}$ et $\dot{\delta}_D = \frac{3\dot{\delta}_C}{2}$

- $\mathcal{P}_{ext} = \bar{Q} \times \dot{q} = Q \times \dot{\delta}_B + 3Q \times \dot{\delta}_D = Q \times \frac{\dot{\delta}_C}{2} + 3Q \times \frac{3\dot{\delta}_C}{2} = 5Q \times \dot{\delta}_C$

- $\mathcal{P}_{int} = N_A \times \dot{\delta}_A + N_C \times \dot{\delta}_C = N_A \times 0 + N_C \times \dot{\delta}_C = N_C \times \dot{\delta}_C$

- $\mathcal{P}_{ext} \leq \mathcal{P}_{int} \quad \forall \dot{\delta}_A \text{ et } \dot{\delta}_C \text{ C.A. (cinématiquement admissible)}$

$$\Rightarrow 5Q \times \dot{\delta}_C \leq N_C \times \dot{\delta}_C \quad \Rightarrow \quad Q \leq \frac{1}{5}N_C$$

Sachant que : $|N_C| \leq 3L \quad \Rightarrow \quad Q \leq \frac{1}{5} \times 3|L| = 3|L|/5$

$$\Rightarrow \text{Borne supérieure : } \mathbf{Q_{max} = 3L/5}$$

5.3 Commentaire : Les deux bornes coïncident avec la solution exacte

$$\Rightarrow \text{Charge ultime : } \mathbf{Q_{ult} = Q_{min} = Q_{max} = 3L/5}$$