

CALCUL A LA RUPTURE ET ANALYSE LIMITE

Chapitre 2

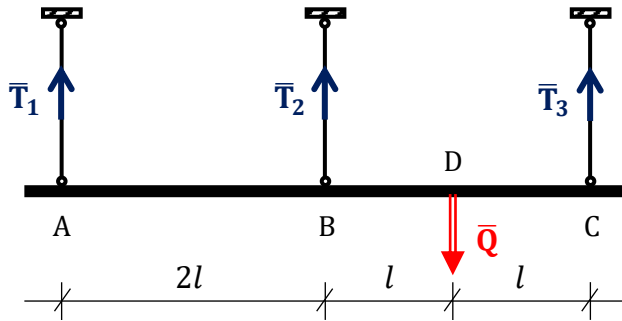
Approche statique par l'intérieur

Exercices

Prof. Mohamed KHEMISSA

*Département de Génie Civil, Faculté de Technologie,
Université Mohamed Boudiaf – M'Sila*

Ex. 1 Considérons une barre indéformable suspendue par des tirants flexibles comme l'indique la figure ci-après. On demande de déterminer le domaine des chargements potentiellement supportables $K(\bar{Q})$ pour cette structure, où $\bar{Q}$ désigne la charge appliquée.



Critère de rupture : $|T_i| \leq L ; i = 1, 2, 3$

L – chargement limite (limite de résistance du matériau en traction)

Rép. 1

A. Equations d'équilibre

$$\bullet \quad \sum \bar{F} = \bar{0} \quad \Rightarrow \quad T_1 + T_2 + T_3 = Q \quad (\text{i})$$

$$\bullet \quad \sum \bar{M}_{/A} = \bar{0} \quad \Rightarrow \quad T_2 \times 2l + T_3 \times 4l = Q \times 3l$$

$$\quad \quad \quad \Rightarrow \quad 2T_2 + 4T_3 = 3Q \quad (\text{ii})$$

$$\bullet \quad \sum \bar{M}_{/B} = \bar{0} \quad \Rightarrow \quad -T_1 \times 2l + T_3 \times 2l = Q \times l$$

$$\quad \quad \quad \Rightarrow \quad -2T_1 + 2T_3 = Q \quad (\text{iii})$$

$$\bullet \quad \sum \bar{M}_{/C} = \bar{0} \quad \Rightarrow \quad -T_1 \times 4l - T_2 \times 2l = -Q \times l$$

$$\quad \quad \quad \Rightarrow \quad 4T_1 + 2T_2 = Q \quad (\text{iv})$$

$$\bullet \quad \sum \bar{M}_{/D} = \bar{0} \quad \Rightarrow \quad -T_1 \times 3l - T_2 \times l + T_3 \times l = 0$$

$$\quad \quad \quad \Rightarrow \quad 3T_1 + T_2 - T_3 = 0 \quad (\text{v})$$

Remarque :

L'équation (v) s'identifie avec les équations (iii) et (iv) :

$$-2T_1 + 2T_3 = Q \quad (\text{iii})$$

$$4T_1 + 2T_2 = Q \quad (\text{iv})$$

$$\Rightarrow \quad 6T_1 + 2T_2 - 2T_3 = 0 \quad (\text{iv})-(\text{iii}) \quad \Rightarrow \quad 3T_1 + T_2 - T_3 = 0 \quad (\text{v})$$

D'où le système d'équations à résoudre :

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} T_1 + T_2 + T_3 = Q & (1) \\ 2T_2 + 4T_3 = 3Q & (2) \\ -2T_1 + 2T_3 = Q & (3) \\ 4T_1 + 2T_2 = Q & (4) \\ |T_i| \leq L ; i = 1, 2, 3 & (5) \end{cases}$$

B. **Combinaison (I) :** $T_1 = f(T_3)$ et $T_2 = f(T_3)$

$$(2) \Rightarrow 2T_2 + 4T_3 = 3Q \Rightarrow 2T_2 = 3Q - 4T_3 \Rightarrow T_2 = \frac{3}{2}Q - 2T_3$$

$$(3) \Rightarrow -2T_1 + 2T_3 = Q \Rightarrow 2T_1 = -Q + 2T_3 \Rightarrow T_1 = -\frac{1}{2}Q + T_3$$

$$\begin{aligned} \bullet |T_1| \leq L &\Rightarrow -L \leq T_1 \leq +L \Rightarrow -L \leq -\frac{1}{2}Q + T_3 \leq +L \\ &\Rightarrow \frac{1}{2}Q - L \leq T_3 \leq \frac{1}{2}Q + L \quad (a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet |T_2| \leq L &\Rightarrow -L \leq T_2 \leq +L \Rightarrow -L \leq \frac{3}{2}Q - 2T_3 \leq +L \\ &\Rightarrow \frac{3}{4}Q - \frac{1}{2}L \leq T_3 \leq \frac{3}{4}Q + \frac{1}{2}L \quad (b) \end{aligned}$$

$$\bullet |T_3| \leq L \Rightarrow -L \leq T_3 \leq +L \quad (c)$$

Combinaison de (a), (b) et (c) :

$$\bullet (a) \text{ et } (c) \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}Q - L \leq +L \\ -L \leq \frac{1}{2}Q + L \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q \leq +4L \\ -4L \leq Q \end{cases} \Rightarrow -4L \leq Q \leq +4L \quad (A)$$

$$\bullet (b) \text{ et } (c) \Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{4}Q - \frac{1}{2}L \leq +L \\ -L \leq \frac{3}{4}Q + \frac{1}{2}L \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q \leq +2L \\ -2L \leq Q \end{cases} \Rightarrow -2L \leq Q \leq +2L \quad (B)$$

$$\bullet (a) \text{ et } (b) \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}Q - L \leq \frac{3}{4}Q + \frac{1}{2}L \\ \frac{3}{4}Q - \frac{1}{2}L \leq \frac{1}{2}Q + L \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6L \leq Q \\ Q \leq +6L \end{cases} \Rightarrow -6L \leq Q \leq +6L \quad (C)$$

Combinaison de (A), (B) et (C) :

$$\Rightarrow -2L \leq Q \leq +2L \quad (I)$$

C. **Combinaison (II) :** $T_2 = f(T_1)$ et $T_3 = f(T_1)$

$$(3) \Rightarrow -2T_1 + 2T_3 = Q \Rightarrow 2T_3 = Q + 2T_1 \Rightarrow T_3 = \frac{1}{2}Q + T_1$$

$$(4) \Rightarrow 4T_1 + 2T_2 = Q \Rightarrow 2T_2 = Q - 4T_1 \Rightarrow T_2 = \frac{1}{2}Q - 2T_1$$

$$\begin{aligned} \bullet |T_2| \leq L &\Rightarrow -L \leq T_2 \leq +L \Rightarrow -L \leq \frac{1}{2}Q - 2T_1 \leq +L \\ &\Rightarrow \frac{1}{4}Q - \frac{1}{2}L \leq T_1 \leq \frac{1}{4}Q + \frac{1}{2}L \quad (a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet |T_3| \leq L &\Rightarrow -L \leq T_3 \leq +L \Rightarrow -L \leq \frac{1}{2}Q + T_1 \leq +L \\ &\Rightarrow -\frac{1}{2}Q - L \leq T_1 \leq \frac{1}{2}Q + L \quad (b) \end{aligned}$$

$$\bullet |T_1| \leq L \Rightarrow -L \leq T_1 \leq +L \quad (c)$$

Combinaison de (a), (b) et (c) :

$$\bullet \text{ (a) et (c) } \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{4}Q - \frac{1}{2}L \leq +L \\ -L \leq \frac{1}{4}Q + \frac{1}{2}L \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q \leq +6L \\ -6L \leq Q \end{cases} \Rightarrow -6L \leq Q \leq +6L \quad (\text{A})$$

$$\bullet \text{ (b) et (c) } \Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2}Q - L \leq +L \\ -L \leq \frac{1}{2}Q + L \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q \leq 4L \\ -4L \leq Q \end{cases} \Rightarrow -4L \leq Q \leq +4L \quad (\text{B})$$

$$\bullet \text{ (a) et (b) } \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{4}Q - \frac{1}{2}L \leq \frac{1}{2}Q + L \\ -\frac{1}{2}Q - L \leq \frac{1}{4}Q + \frac{1}{2}L \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2L \leq Q \\ Q \leq +2L \end{cases} \Rightarrow -2L \leq Q \leq +2L \quad (\text{C})$$

Combinaison de (A), (B) et (C) :

$$\Rightarrow -2L \leq Q \leq +2L \quad (\text{II})$$

D. **Combinaison (III) :** $T_1 = f(T_2)$ et $T_3 = f(T_2)$

$$(2) \Rightarrow 2T_2 + 4T_3 = 3Q \Rightarrow 4T_3 = 3Q - 2T_2 \Rightarrow T_3 = \frac{3}{4}Q - \frac{1}{2}T_2$$

$$(4) \Rightarrow 4T_1 + 2T_2 = Q \Rightarrow 4T_1 = Q - 2T_2 \Rightarrow T_1 = \frac{1}{4}Q - \frac{1}{2}T_2$$

$$\begin{aligned} \bullet |T_1| \leq L &\Rightarrow -L \leq T_1 \leq +L \Rightarrow -L \leq \frac{1}{4}Q - \frac{1}{2}T_2 \leq +L \\ &\Rightarrow \frac{1}{2}Q - 2L \leq T_2 \leq \frac{1}{2}Q + 2L \quad (\text{a}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet |T_3| \leq L &\Rightarrow -L \leq T_3 \leq +L \Rightarrow -L \leq \frac{3}{4}Q - \frac{1}{2}T_2 \leq +L \\ &\Rightarrow \frac{3}{2}Q - 2L \leq T_2 \leq \frac{3}{2}Q + 2L \quad (\text{b}) \end{aligned}$$

$$\bullet |T_2| \leq L \Rightarrow -L \leq T_2 \leq +L \quad (\text{c})$$

Combinaison de (a), (b) et (c) :

$$\bullet \text{ (a) et (c) } \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}Q - 2L \leq +L \\ -L \leq \frac{1}{2}Q + 2L \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q \leq +6L \\ -6L \leq Q \end{cases} \Rightarrow -6L \leq Q \leq +6L \quad (\text{A})$$

$$\bullet \text{ (b) et (c) } \Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{2}Q - 2L \leq +L \\ -L \leq \frac{3}{2}Q + 2L \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q \leq 2L \\ -2L \leq Q \end{cases} \Rightarrow -2L \leq Q \leq +2L \quad (\text{B})$$

$$\bullet \text{ (a) et (b) } \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}Q - 2L \leq \frac{3}{2}Q + 2L \\ \frac{3}{2}Q - 2L \leq \frac{1}{2}Q + 2L \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4L \leq Q \\ Q \leq +4L \end{cases} \Rightarrow -4L \leq Q \leq +4L \quad (\text{C})$$

Combinaison de (A), (B) et (C) :

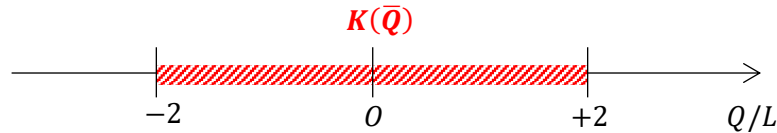
$$\Rightarrow -2L \leq Q \leq +2L \quad (\text{III})$$

E. Synthèse

Combinaison de (I), (II) et (III) :

$$\Rightarrow -2L \leq Q \leq +2L$$

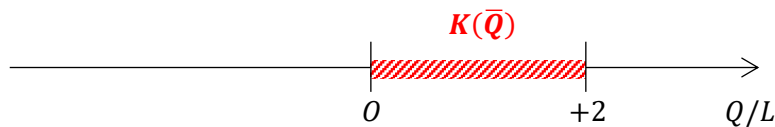
$\Rightarrow$ Le domaine des chargements potentiellement supportables $K(\bar{Q})$ est défini dans le segment $(\frac{Q}{L})$ représenté par la figure suivante :



Remarque : Comme la barre est suspendue par des tirants flexibles, les efforts ne peuvent donc être que des tractions :

$$\Rightarrow 0 \leq Q \leq +2L$$

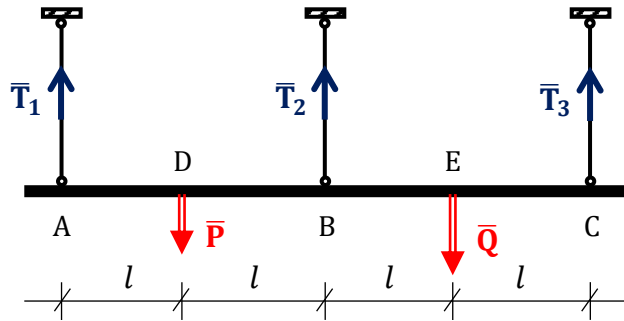
$\Rightarrow$ Le domaine des chargements potentiellement supportables $K(\bar{Q})$ est défini dans le segment $(\frac{Q}{L})$ représenté par la figure suivante :



F. Nota

- En pratique, seule la combinaison (I), (II) ou (III) suffit.

Ex. 2 Considérons une barre indéformable suspendue par des tirants flexibles comme l'indique la figure ci-après. On demande de déterminer le domaine des chargements potentiellement supportables $K(\bar{P}, \bar{Q})$ pour cette structure, où $\bar{P}$ et $\bar{Q}$ désignent les charges appliquées.



Critère de rupture : $|T_i| \leq L$; $i = 1, 2, 3$

L – chargement limite (limite de résistance du matériau en traction)

Rép. 2

A. Equations d'équilibre

- $\sum \bar{F} = \bar{0} \Rightarrow T_1 + T_2 + T_3 = P + Q$ (i)
- $\sum \bar{M}_{/A} = \bar{0} \Rightarrow T_2 \times 2l + T_3 \times 4l = P \times l + Q \times 3l$
 $\Rightarrow 2T_2 + 4T_3 = P + 3Q$ (ii)
- $\sum \bar{M}_{/B} = \bar{0} \Rightarrow -T_1 \times 2l + T_3 \times 2l = -P \times l + Q \times l$
 $\Rightarrow -2T_1 + 2T_3 = -P + Q$ (iii)
- $\sum \bar{M}_{/C} = \bar{0} \Rightarrow T_1 \times 4l + T_2 \times 2l = P \times 3l + Q \times l$
 $\Rightarrow 4T_1 + 2T_2 = 3P + Q$ (iv)
- $\sum \bar{M}_{/D} = \bar{0} \Rightarrow -T_1 \times l + T_2 \times l + T_3 \times 3l = Q \times 2l$
 $\Rightarrow -T_1 + T_2 + 3T_3 = 2Q$ (v)
- $\sum \bar{M}_{/E} = \bar{0} \Rightarrow -T_1 \times 3l - T_2 \times l - T_3 \times l = -P \times 2l$
 $\Rightarrow -3T_1 - T_2 + T_3 = -2P$ (vi)

Remarque :

Les équations (v) et (vi) s'identifient avec l'équation (i) :

$$-T_1 + T_2 + 3T_3 = 2Q \quad (v)$$

$$-3T_1 - T_2 + T_3 = -2P \quad (vi)$$

$$\Rightarrow 2T_1 + 2T_2 + 4T_3 = 2P + 2Q \quad (v)-(vi) \Rightarrow T_1 + T_2 + T_3 = P + Q \quad (i)$$

D'où le système d'équations à résoudre :

$$\Rightarrow \begin{cases} T_1 + T_2 + T_3 = P + Q & (1) \\ 2T_2 + 4T_3 = P + 3Q & (2) \\ -2T_1 + 2T_3 = -P + Q & (3) \\ 4T_1 + 2T_2 = 3P + Q & (4) \\ |T_i| \leq L ; i = 1, 2, 3 & (5) \end{cases}$$

B. **Combinaison (I) :** $T_1 = f(T_3)$ et $T_2 = f(T_3)$

$$(2) \Rightarrow 2T_2 + 4T_3 = P + 3Q \Rightarrow 2T_2 = P + 3Q - 4T_3$$

$$\Rightarrow T_2 = \frac{1}{2}P + \frac{3}{2}Q - 2T_3$$

$$(3) \Rightarrow -2T_1 + 2T_3 = -P + Q \Rightarrow -2T_1 = -P + Q - 2T_3$$

$$\Rightarrow T_1 = \frac{1}{2}P - \frac{1}{2}Q + T_3$$

$$\bullet |T_1| \leq L \Rightarrow -L \leq T_1 \leq +L \Rightarrow -L \leq \frac{1}{2}P - \frac{1}{2}Q + T_3 \leq +L$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}P + \frac{1}{2}Q - L \leq T_3 \leq -\frac{1}{2}P + \frac{1}{2}Q + L \quad (a)$$

$$\bullet |T_2| \leq L \Rightarrow -L \leq T_2 \leq +L \Rightarrow -L \leq \frac{1}{2}P + \frac{3}{2}Q - 2T_3 \leq +L$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}P + \frac{3}{4}Q - \frac{1}{2}L \leq T_3 \leq \frac{1}{4}P + \frac{3}{4}Q + \frac{1}{2}L \quad (b)$$

$$\bullet |T_3| \leq L \Rightarrow -L \leq T_3 \leq +L \quad (c)$$

Combinaison de (a), (b) et (c) :

$$\bullet (a) \text{ et } (c) \Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2}P + \frac{1}{2}Q - L \leq +L \\ -L \leq -\frac{1}{2}P + \frac{1}{2}Q + L \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -P + Q \leq +4L \\ -4L \leq -P + Q \end{cases} \Rightarrow -4L \leq P - Q \leq +4L \quad (A)$$

$$\bullet (b) \text{ et } (c) \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{4}P + \frac{3}{4}Q - \frac{1}{2}L \leq +L \\ -L \leq \frac{1}{4}P + \frac{3}{4}Q + \frac{1}{2}L \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{4}P + \frac{3}{4}Q \leq +\frac{3}{2}L \\ -\frac{3}{2}L \leq \frac{1}{4}P + \frac{3}{4}Q \end{cases} \Rightarrow -6L \leq P + 3Q \leq +6L \quad (B)$$

$$\bullet (a) \text{ et } (b) \Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2}P + \frac{1}{2}Q - L \leq \frac{1}{4}P + \frac{3}{4}Q + \frac{1}{2}L \\ \frac{1}{4}P + \frac{3}{4}Q - \frac{1}{2}L \leq -\frac{1}{2}P + \frac{1}{2}Q + L \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\frac{3}{4}P - \frac{1}{4}Q \leq +\frac{3}{2}L \\ -\frac{3}{2}L \leq -\frac{3}{4}P - \frac{1}{4}Q \end{cases} \Rightarrow -6L \leq 3P + Q \leq +6L \quad (C)$$

Combinaison de (A), (B) et (C) :

$$\Rightarrow \begin{cases} -4L \leq P - Q \leq 4L \\ -6L \leq P + 3Q \leq 6L \\ -6L \leq 3P + Q \leq 6L \end{cases} \quad (I)$$

C. **Combinaison (II) :** $T_2 = f(T_1)$ et $T_3 = f(T_1)$

$$(3) \Rightarrow -2T_1 + 2T_3 = -P + Q \Rightarrow 2T_3 = -P + Q + 2T_1$$

$$\Rightarrow T_3 = -\frac{1}{2}P + \frac{1}{2}Q + T_1$$

$$(4) \Rightarrow 4T_1 + 2T_2 = 3P + Q \Rightarrow 2T_2 = 3P + Q - 4T_1$$

$$\Rightarrow T_2 = \frac{3}{2}P + \frac{1}{2}Q - 2T_1$$

$$\bullet |T_2| \leq L \Rightarrow -L \leq T_2 \leq +L \Rightarrow -L \leq \frac{3}{2}P + \frac{1}{2}Q - 2T_1 \leq +L$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4}P + \frac{1}{4}Q - \frac{1}{2}L \leq T_1 \leq \frac{3}{4}P + \frac{1}{4}Q + \frac{1}{2}L \quad (a)$$

$$\bullet |T_3| \leq L \Rightarrow -L \leq T_3 \leq +L \Rightarrow -L \leq -\frac{1}{2}P + \frac{1}{2}Q + T_1 \leq +L$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}P - \frac{1}{2}Q - L \leq T_1 \leq \frac{1}{2}P - \frac{1}{2}Q + L \quad (b)$$

$$\bullet |T_3| \leq L \Rightarrow -L \leq T_3 \leq +L \quad (c)$$

Combinaison de (a), (b) et (c) :

$$\bullet (a) \text{ et } (c) \Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{4}P + \frac{1}{4}Q - \frac{1}{2}L \leq +L \\ -L \leq \frac{3}{4}P + \frac{1}{4}Q + \frac{1}{2}L \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3P + Q \leq +6L \\ -6L \leq 3P + Q \end{cases} \Rightarrow -6L \leq 3P + Q \leq +6L \quad (A)$$

$$\bullet (b) \text{ et } (c) \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}P - \frac{1}{2}Q - L \leq +L \\ -L \leq \frac{1}{2}P - \frac{1}{2}Q + L \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P - Q \leq +4L \\ -4L \leq P - Q \end{cases} \Rightarrow -4L \leq P - Q \leq +4L \quad (B)$$

$$\bullet (a) \text{ et } (b) \Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{4}P + \frac{1}{4}Q - \frac{1}{2}L \leq \frac{1}{2}P - \frac{1}{2}Q + L \\ \frac{1}{2}P - \frac{1}{2}Q - L \leq \frac{3}{4}P + \frac{1}{4}Q + \frac{1}{2}L \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{4}P + \frac{3}{4}Q \leq +\frac{3}{2}L \\ -\frac{3}{2}L \leq \frac{1}{4}P + \frac{3}{4}Q \end{cases} \Rightarrow -6L \leq P + 3Q \leq +6L \quad (C)$$

Combinaison de (A), (B) et (C) :

$$\Rightarrow \begin{cases} -6L \leq 3P + Q \leq +6L \\ -4L \leq P - Q \leq +4L \\ -6L \leq P + 3Q \leq +6L \end{cases} \quad (\text{II})$$

D. **Combinaison (III) :** $T_1 = f(T_2)$ et $T_3 = f(T_2)$

$$(2) \Rightarrow 2T_2 + 4T_3 = P + 3Q \Rightarrow 4T_3 = P + 3Q - 2T_2$$

$$\Rightarrow T_3 = \frac{1}{4}P + \frac{3}{4}Q - \frac{1}{2}T_2$$

$$(4) \Rightarrow 4T_1 + 2T_2 = 3P + Q \Rightarrow 4T_1 = 3P + Q - 2T_2$$

$$\Rightarrow T_1 = \frac{3}{4}P + \frac{1}{4}Q - \frac{1}{2}T_2$$

$$\bullet |T_1| \leq L \Rightarrow -L \leq T_1 \leq +L \Rightarrow -L \leq \frac{3}{4}P + \frac{1}{4}Q - \frac{1}{2}T_2 \leq +L$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}P + \frac{1}{2}Q - 2L \leq T_2 \leq \frac{3}{2}P + \frac{1}{2}Q + 2L \quad (\text{a})$$

$$\bullet |T_3| \leq L \Rightarrow -L \leq T_3 \leq +L \Rightarrow -L \leq \frac{1}{4}P + \frac{3}{4}Q - \frac{1}{2}T_2 \leq +L$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}P + \frac{3}{2}Q - 2L \leq T_2 \leq \frac{1}{2}P + \frac{3}{2}Q + 2L \quad (\text{b})$$

$$\bullet |T_3| \leq L \Rightarrow -L \leq T_3 \leq +L \quad (\text{c})$$

Combinaison de (a), (b) et (c) :

$$\bullet (\text{a}) \text{ et } (\text{c}) \Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{2}P + \frac{1}{2}Q - 2L \leq +L \\ -L \leq \frac{3}{2}P + \frac{1}{2}Q + 2L \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3P + Q \leq +6L \\ -6L \leq 3P + Q \end{cases} \Rightarrow -6L \leq 3P + Q \leq +6L \quad (\text{A})$$

$$\bullet (\text{b}) \text{ et } (\text{c}) \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}P + \frac{3}{2}Q - 2L \leq +L \\ -L \leq \frac{1}{2}P + \frac{3}{2}Q + 2L \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P + 3Q \leq +6L \\ -6L \leq P + 3Q \end{cases} \Rightarrow -6L \leq P + 3Q \leq +6L \quad (\text{B})$$

$$\bullet (\text{a}) \text{ et } (\text{b}) \Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{2}P + \frac{1}{2}Q - 2L \leq \frac{1}{2}P + \frac{3}{2}Q + 2L \\ \frac{1}{2}P + \frac{3}{2}Q - 2L \leq \frac{3}{2}P + \frac{1}{2}Q + 2L \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P - Q \leq +4L \\ -4L \leq P - Q \end{cases} \Rightarrow -4L \leq P - Q \leq +4L \quad (\text{C})$$

Combinaison de (A), (B) et (C) :

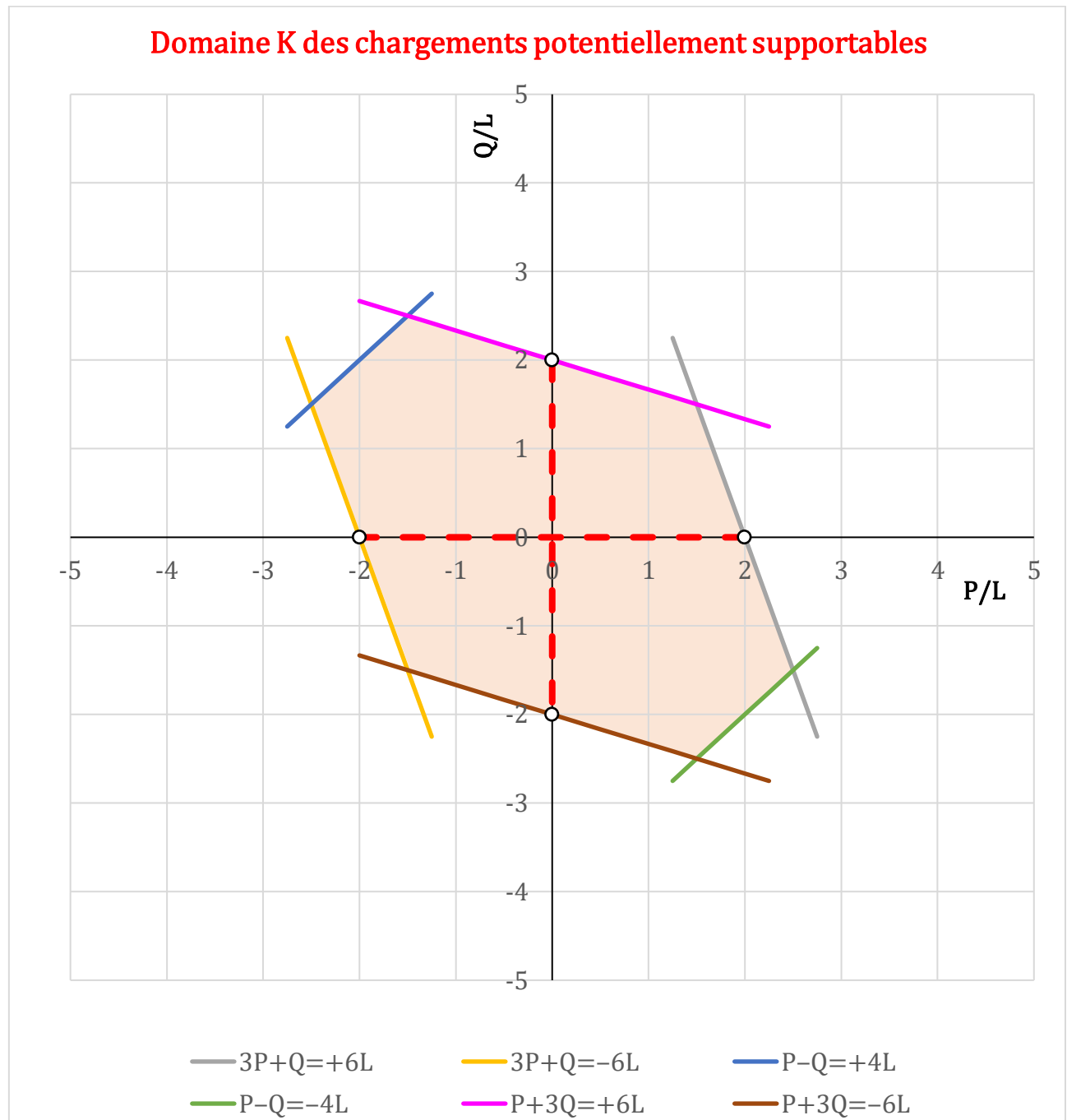
$$\Rightarrow \begin{cases} -6L \leq 3P + Q \leq +6L \\ -6L \leq P + 3Q \leq +6L \\ -4L \leq P - Q \leq +4L \end{cases} \quad (\text{III})$$

E. Synthèse

Combinaison de (I), (II) et (III) :

$$\Rightarrow \begin{cases} -6L \leq 3P + Q \leq +6L \\ -6L \leq P + 3Q \leq +6L \\ -4L \leq P - Q \leq +4L \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Le domaine des chargements potentiellement supportables $K(\bar{P}; \bar{Q})$ est défini dans le plan $(\frac{P}{L}; \frac{Q}{L})$ représenté par la figure suivante :



F. Nota

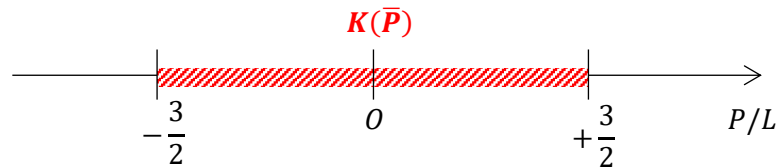
- En pratique, seule la combinaison (I), (II) ou (III) suffit.

G. Cas particuliers

$$1. P = Q \Rightarrow -6L \leq 4P \leq +6L$$

$$\Rightarrow -\frac{3}{2}L \leq P \leq +\frac{3}{2}L$$

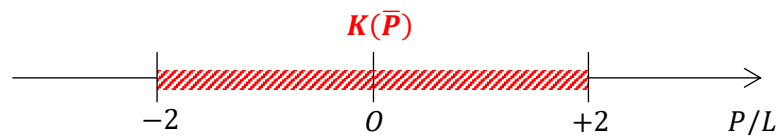
$\Rightarrow$ Le domaine $K(\bar{Q})$ se réduit à un segment :



$$2. P \neq 0 \text{ \& } Q = 0 \Rightarrow -6L \leq 3P \leq +6L$$

$$\Rightarrow -2L \leq P \leq +2L$$

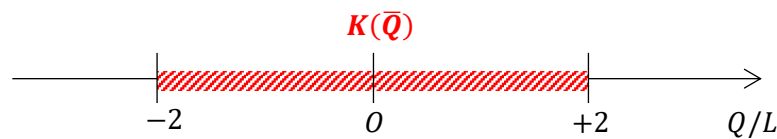
$\Rightarrow$ Le domaine $K(\bar{P})$ se réduit à un segment :



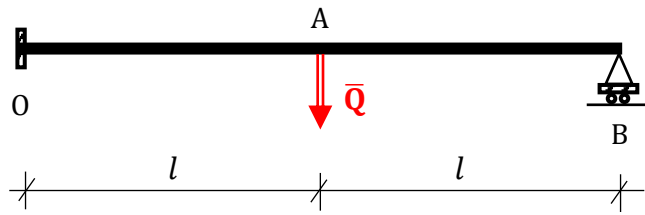
$$3. P = 0 \text{ \& } Q \neq 0 \Rightarrow -6L \leq 3Q \leq +6L$$

$$\Rightarrow -2L \leq Q \leq +2L$$

$\Rightarrow$ Le domaine $K(\bar{Q})$ se réduit à un segment :



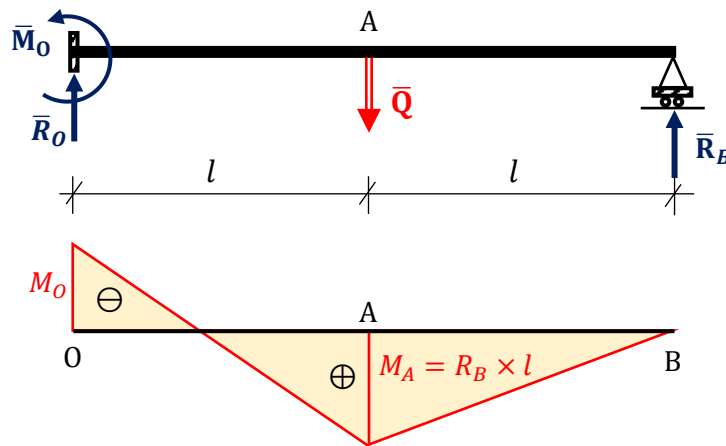
Ex. 3 Considérons une poutre encastree d'un côté et simplement appuyée de l'autre comme l'indique la figure ci-après. On demande de déterminer le domaine des chargements potentiellement supportables $K(\bar{Q})$ pour cette poutre, où $\bar{Q}$ désigne la charge appliquée.



Critère de rupture : $|M| \leq m_p$

m_p – moment limite (limite de résistance du matériau en flexion)

Rép. 3



$$\bullet \quad \sum \bar{F} = \bar{0} \quad \Rightarrow \quad R_O + R_B = Q \quad (1)$$

$$\bullet \quad \sum \bar{M}_{/O} = \bar{0} \quad \Rightarrow \quad R_B \times 2l - Q \times l + M_O = 0 \quad \Rightarrow \quad 2R_B - Q + \frac{1}{l}M_O = 0 \quad (2)$$

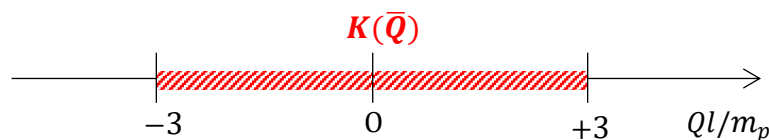
$$(2) \quad \Rightarrow \quad 2R_B = Q - \frac{1}{l}M_O \quad \Rightarrow \quad R_B = \frac{1}{2}Q - \frac{1}{2l}M_O$$

$$\text{Sachant que : } M_A = R_B \times l \quad \Rightarrow \quad R_B = \frac{1}{l}M_A$$

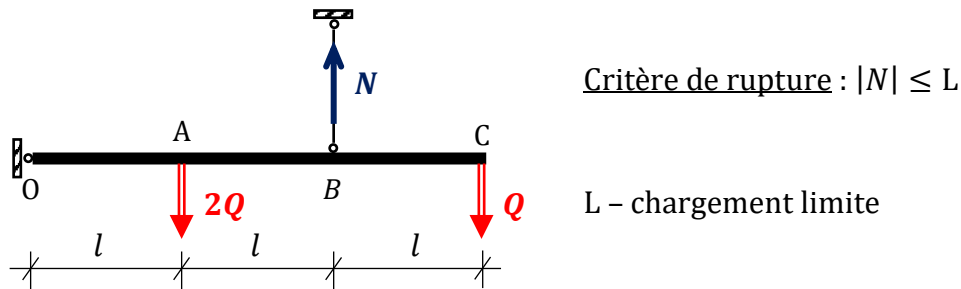
$$\text{D'où alors : } \frac{1}{l}M_A = \frac{1}{2}Q - \frac{1}{2l}M_O \quad \Rightarrow \quad Q = \frac{2}{l}M_A + \frac{1}{l}M_O$$

$$\begin{aligned} \text{Sachant que : } |M_A| \leq m_p \text{ \& } |M_O| \leq m_p &\Rightarrow -\frac{2}{l}m_p - \frac{1}{l}m_p \leq Q \leq +\frac{2}{l}m_p + \frac{1}{l}m_p \\ &\Rightarrow -\frac{3}{l}m_p \leq Q \leq +\frac{3}{l}m_p \end{aligned}$$

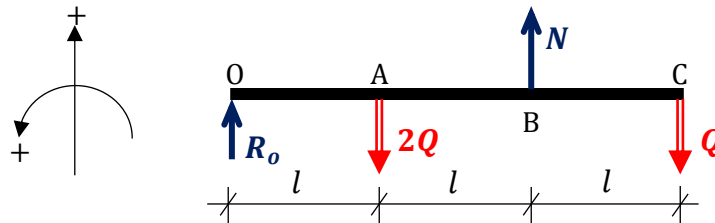
Le domaine des chargements potentiellement supportables $K(\bar{Q})$ est défini dans le segment $\left(\frac{Ql}{m_p}\right)$ représenté par la figure suivante :



Ex. 4 (Interro. du 28/11/2022) Déterminer les bornes inférieure Q_{min} et supérieure Q_{max} du chargement potentiellement supportable de la barre indéformable ci-dessous, où Q désigne la charge appliquée. Commenter ensuite les résultats trouvés, puis déduire la charge ultime Q_{ult} correspondante.



Rep. 4



4.1 Borne inférieure (Q_{min}) :

- Approche de calcul : Approche statique par l'intérieur
- $\sum F = 0 \Rightarrow N + R_o - 3Q = 0 \Rightarrow Q = \frac{1}{3}(N + R_o)$ (1)
- $\sum M_{/O} = 0 \Rightarrow N \times 2l - 2Q \times l - Q \times 3l = 0 \Rightarrow Q = 2N/5$ (2)

Sachant que : $|N| \leq L$

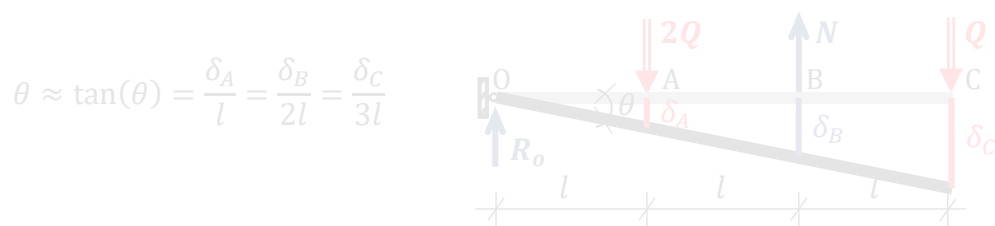
$$(2) \Rightarrow Q \leq 2|L|/5$$

D'où :

$$\Rightarrow \text{Borne inférieure : } Q_{min} = 2L/5$$

4.2 Borne supérieure (Q_{max}) :

- Approche de calcul : Approche cinématique par l'extérieur
- Mécanisme de ruine : Mécanisme de rotation



$$\theta \approx \tan(\theta) = \frac{\delta_A}{l} = \frac{\delta_B}{2l} = \frac{\delta_C}{3l}$$

- Compatibilité cinématique : $\delta_A = \delta_B/2 = \delta_C/3$
 $\Rightarrow \dot{\delta}_A = \dot{\delta}_B/2 = \dot{\delta}_C/3 = \dot{\theta} \times l$
- $\mathcal{P}_{ext} = \bar{Q} \times \dot{q} = 2Q \times \dot{\delta}_A + Q \times \dot{\delta}_C = 2Q \times \dot{\theta} \times l + Q \times \dot{\theta} \times 3l = 5Q \times \dot{\theta} \times l$
- $\mathcal{P}_{int} = \sum_{i=1,3} (N_i \times \dot{\delta}_i) = N \times \dot{\delta}_B = N \times \dot{\theta} \times 2l = 2N \times \dot{\theta} \times l$
 $\Rightarrow 5Q \times \dot{\theta} \times l \leq 2N \times \dot{\theta} \times l$

Sachant que : $|N| \leq L$

$$\Rightarrow Q \leq 2|L|/5$$

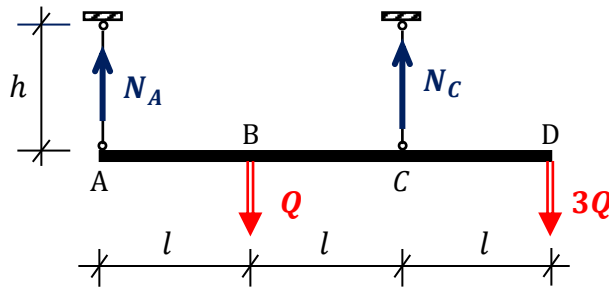
D'où :

$$\Rightarrow \text{Borne supérieure : } Q_{max} = 2L/5$$

4.3 Commentaire : Les deux bornes coïncident avec la solution exacte

$$\Rightarrow \text{Charge ultime : } Q_{ult} = Q_{min} = Q_{max} = 2L/5$$

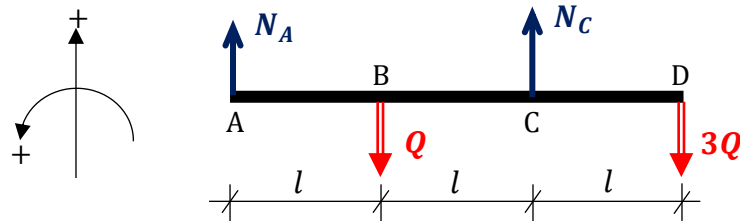
Ex. 5 (EFS du 10/01/2023) Déterminer les bornes inférieure Q_{min} et supérieure Q_{max} du chargement potentiellement supportable de la barre indéformable ci-dessous, où Q désigne la charge appliquée. Commenter ensuite les résultats trouvés, puis déduire la charge ultime Q_{ult} correspondante.



Critère de rupture : $|N_A| \leq L$ et $|N_C| \leq 3L$

L – chargement limite

Rep. 5



5.1 Borne inférieure (Q_{min}) :

- Approche de calcul : Approche statique par l'intérieur
- $\sum F = 0 \Rightarrow N_A + N_C - Q - 3Q = 0 \Rightarrow Q = \frac{1}{4}(N_A + N_C)$ (1)
- $\sum M_{/A} = 0 \Rightarrow N_C \times 2l - Q \times l - 3Q \times 3l = 0 \Rightarrow Q = \frac{1}{5}N_C$ (2)

Sachant que : $|N_A| \leq L$ et $|N_C| \leq 3L$

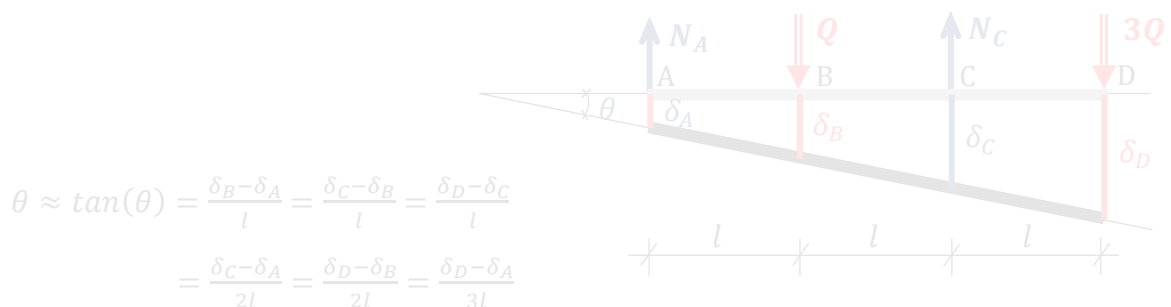
$$(1) \Rightarrow Q \leq \frac{1}{4}(|L| + 3|L|) = |L|$$

$$(2) \Rightarrow Q \leq \frac{1}{5} \times 3|L| = 3|L|/5$$

$\Rightarrow$ Borne inférieure : $Q_{min} = 3L/5$

5.2 Borne supérieure (Q_{max}) :

- Approche de calcul : Approche cinématique par l'extérieur
- Mécanisme de ruine : Mécanisme de rotation



- Compatibilité cinématique :

$$\Rightarrow \dot{\delta}_A = \frac{3}{2}\dot{\delta}_B - \frac{1}{2}\dot{\delta}_D$$

$$\Rightarrow \dot{\delta}_B = \frac{1}{2}(\dot{\delta}_A + \dot{\delta}_D)$$

$$\Rightarrow \dot{\delta}_D = \frac{1}{2}(3\dot{\delta}_C - \dot{\delta}_A)$$

Posons : $\dot{\delta}_A = 0$ (*Principe des Puissances Virtuelles*) $\Rightarrow \dot{\delta}_B = \frac{\dot{\delta}_C}{2}$ et $\dot{\delta}_D = \frac{3\dot{\delta}_C}{2}$

- $\mathcal{P}_{ext} = \bar{Q} \times \dot{q} = Q \times \dot{\delta}_B + 3Q \times \dot{\delta}_D = Q \times \frac{\dot{\delta}_C}{2} + 3Q \times \frac{3\dot{\delta}_C}{2} = 5Q \times \dot{\delta}_C$

- $\mathcal{P}_{int} = N_A \times \dot{\delta}_A + N_C \times \dot{\delta}_C = N_A \times 0 + N_C \times \dot{\delta}_C = N_C \times \dot{\delta}_C$

- $\mathcal{P}_{ext} \leq \mathcal{P}_{int} \quad \forall \dot{\delta}_A \text{ et } \dot{\delta}_C \text{ C.A. (cinématiquement admissible)}$

$$\Rightarrow 5Q \times \dot{\delta}_C \leq N_C \times \dot{\delta}_C \quad \Rightarrow \quad Q \leq \frac{1}{5}N_C$$

Sachant que : $|N_C| \leq 3L \quad \Rightarrow \quad Q \leq \frac{1}{5} \times 3|L| = 3|L|/5$

$$\Rightarrow \text{Borne supérieure : } Q_{max} = 3L/5$$

5.3 Commentaire : Les deux bornes coïncident avec la solution exacte

$$\Rightarrow \text{Charge ultime : } Q_{ult} = Q_{min} = Q_{max} = 3L/5$$