

CALCUL A LA RUPTURE ET ANALYSE LIMITE

Chapitre 1

Notion de chargements limites et critères de rupture usuels

Exercices

Prof. Mohamed KHEMISSA

*Département de Génie Civil, Faculté de Technologie,
Université Mohamed Boudiaf – M'Sila*

Ex. 1 Soit, en un point M d'un matériau, le tenseur des contraintes $\bar{\sigma}$ défini dans le repère orthonormé $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$:

$$\bar{\sigma} = [\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 2\sigma & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix}.$$

Calculer les contraintes principales $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, puis déterminer les domaines de résistance du matériau $G(\bar{x})$ satisfaisant aux critères de rupture de von Mises et de Tresca. Commenter les résultats trouvés. La limite de résistance du matériau est égale à σ_o .

Rép. 1

A. Contraintes principales

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0 \Rightarrow \text{L'axe } \bar{x}_3 \text{ est principal} \Rightarrow \lambda_{III} = \sigma$$

$$\lambda_{I,II} = \frac{2\sigma+0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2\sigma-0}{2}\right)^2 + \tau^2} = \sigma \pm \sqrt{\sigma^2 + \tau^2} \Rightarrow \lambda_I = \sigma + \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$$

$$\Rightarrow \lambda_{II} = \sigma - \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$$

D'où $(\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3)$:

$$\begin{cases} \sigma_1 = \sigma + \sqrt{\sigma^2 + \tau^2} \\ \sigma_2 = \sigma \\ \sigma_3 = \sigma - \sqrt{\sigma^2 + \tau^2} \end{cases}$$

B. Critère de von Mises

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_o^2$$

$$\Rightarrow (\sigma + \sqrt{\sigma^2 + \tau^2} - \sigma)^2 + (\sigma - \sigma + \sqrt{\sigma^2 + \tau^2})^2 + (\sigma - \sqrt{\sigma^2 + \tau^2} - \sigma - \sqrt{\sigma^2 + \tau^2})^2 = 2\sigma_o^2$$

$$\Rightarrow \sigma^2 + \tau^2 + \sigma^2 + \tau^2 + 4(\sigma^2 + \tau^2) = 2\sigma_o^2$$

$$\Rightarrow 6(\sigma^2 + \tau^2) = 2\sigma_o^2$$

$$\text{Soit donc : } \sigma^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_o}{\sqrt{3}}\right)^2$$

D'où le domaine de résistance du matériau $G(\bar{x})$:

$$\Rightarrow \text{Domaine limité par le cercle de centre } O(0, 0) \text{ et de rayon } R = \frac{\sigma_o}{\sqrt{3}}$$

C. Critère de Tresca

$$\text{Sup}\{|\sigma_1 - \sigma_2|; |\sigma_2 - \sigma_3|; |\sigma_3 - \sigma_1|\} = \sigma_o$$

$$\Rightarrow \text{Sup}\{|\sigma + \sqrt{\sigma^2 + \tau^2} - \sigma|; |\sigma - \sigma - \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}|; |\sigma - \sqrt{\sigma^2 + \tau^2} - \sigma - \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}|\} = \sigma_o$$

$$\Rightarrow \text{Sup}\{|\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}|; |-\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}|; |-2\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}|\} = \sigma_o$$

$$\Rightarrow \text{Sup}\{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}; \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}; 2\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}\} = \sigma_o$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{\sigma^2 + \tau^2} = \sigma_o$$

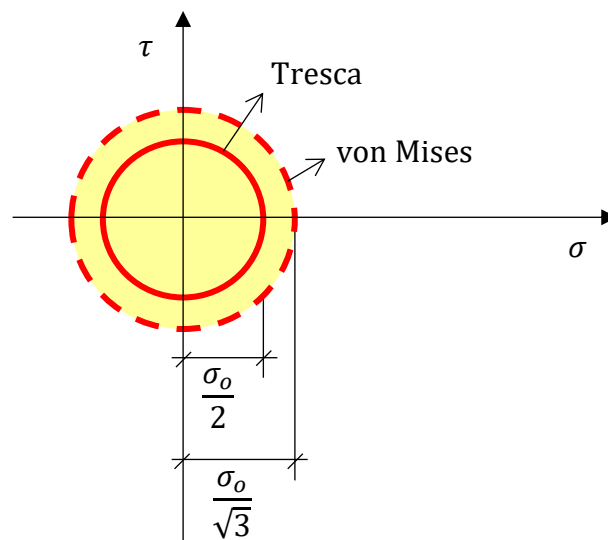
$$\text{Soit donc : } \sigma^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_o}{2}\right)^2$$

D'où le domaine de résistance du matériau $G(\bar{x})$:

$\Rightarrow$ **Domaine limité par le cercle de centre $O(0, 0)$ et de rayon $R = \frac{\sigma_o}{2}$**

D. Commentaire

Les deux critères s'obtiennent par homothétie de centre $O(0, 0)$ et de rapport $\frac{\sqrt{3}}{2}$, le critère de Tresca étant plus restrictif que celui de von Mises.



Ex. 2 Soit, en un point M d'un matériau, le tenseur des contraintes $\bar{\sigma}$ défini dans le repère orthonormé $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$:

$$\bar{\sigma} = [\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & \tau \\ 0 & \tau & \sigma \end{bmatrix} \text{ telle que } \sigma > \tau.$$

Calculer les contraintes principales $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, puis déterminer les domaines de résistance du matériau $G(\bar{x})$ satisfaisant aux critères de rupture de von Mises et de Tresca. La limite de résistance du matériau est égale à σ_o .

Rép. 2

A. Contraintes principales

$$\sigma_{12} = \sigma_{13} = 0 \Rightarrow \text{L'axe } \bar{x}_1 \text{ est principal} \Rightarrow \lambda_I = 0$$

$$\lambda_{II,III} = \frac{\sigma + \sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma - \sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} = \sigma \pm \tau \Rightarrow \lambda_{II} = \sigma + \tau$$

$$\Rightarrow \lambda_{III} = \sigma - \tau$$

D'où ($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ et $\sigma > \tau$) :

$$\begin{cases} \sigma_1 = \sigma + \tau \\ \sigma_2 = \sigma - \tau \\ \sigma_3 = 0 \end{cases}$$

B. Critère de von Mises

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_o^2$$

$$\Rightarrow (\sigma + \tau - \sigma + \tau)^2 + (\sigma - \tau - 0)^2 + (0 - \sigma - \tau)^2 = 2\sigma_o^2$$

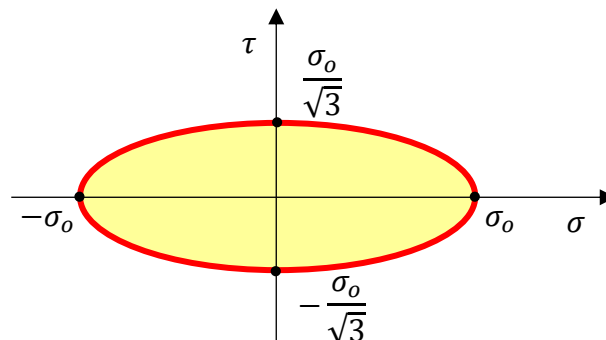
$$\Rightarrow 4\tau^2 + \sigma^2 + \tau^2 - 2\sigma\tau + \sigma^2 + \tau^2 + 2\sigma\tau = 2\sigma_o^2$$

$$\Rightarrow 2(\sigma^2 + 3\tau^2) = 2\sigma_o^2$$

$$\text{Soit donc : } \sigma^2 + 3\tau^2 = \sigma_o^2$$

D'où le domaine de résistance du matériau $G(\bar{x})$:

$\Rightarrow$ **Domaine limité par l'ellipse représentée sur la figure ci-après**



C. Critère de Tresca

$$\text{Sup}\{|\sigma_1 - \sigma_2|; |\sigma_2 - \sigma_3|; |\sigma_3 - \sigma_1|\} = \sigma_o$$

$$\Rightarrow \text{Sup}\{|\sigma + \tau - \sigma + \tau|; |\sigma - \tau - 0|; |0 - \sigma - \tau|\} = \sigma_o$$

$$\Rightarrow \text{Sup}\{2|\tau|; |\sigma - \tau|; |\sigma + \tau|\} = \sigma_o$$

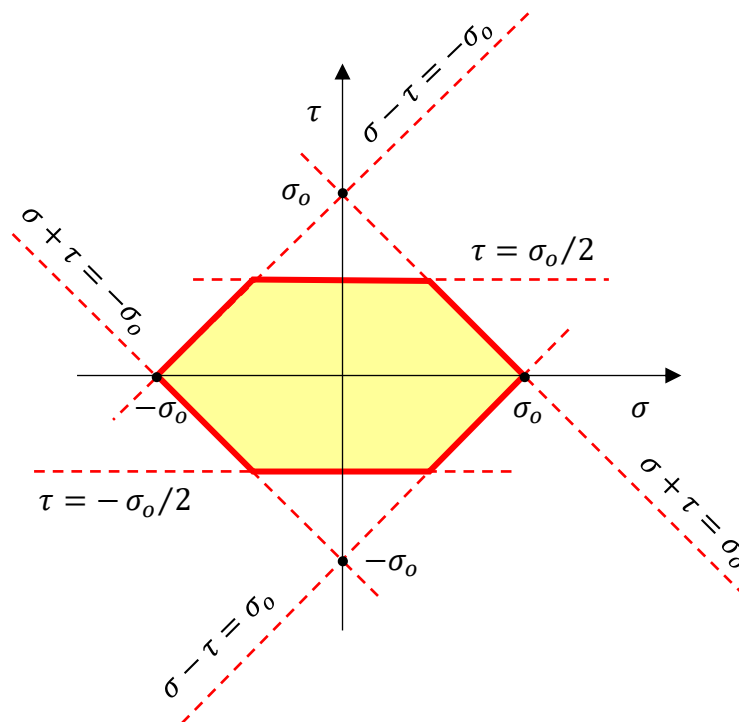
$$\Rightarrow 1^\circ / \tau = \pm \sigma_o/2$$

$$\Rightarrow 2^\circ / \sigma - \tau = \pm \sigma_o$$

$$\Rightarrow 3^\circ / \sigma + \tau = \pm \sigma_o$$

D'où le domaine de résistance du matériau $G(\bar{x})$:

$\Rightarrow$ **Domaine limité par le trapèze représenté sur la figure ci-après.**



Ex. 3 (Interro. du 28/11/2022) Soit, en un point M d'un matériau, le tenseur des contraintes $\bar{\sigma}$ défini dans le repère orthonormé $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$:

$$\bar{\sigma} = [\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} k & 0 & k \\ 0 & 2k & 0 \\ k & 0 & k \end{bmatrix}, \text{ où } k \geq 0 \text{ désigne le paramètre de chargement.}$$

Déterminer le domaine de résistance $G(\bar{x})$ du matériau obéissant aux critères de rupture de von Mises et Tresca. Commenter ensuite les résultats trouvés (justifier la réponse donnée).

Rép. 3

3.1 Contraintes principales : $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$

$$\sigma_{12} = \sigma_{23} = 0 \Rightarrow \text{L'axe } \bar{x}_2 \text{ est principal} \Rightarrow \lambda_{II} = 2k$$

$$\lambda_{I,III} = \frac{k+k}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{k-k}{2}\right)^2 + k^2} = k \pm k \Rightarrow \lambda_I = 2k$$

$$\Rightarrow \lambda_{III} = 0$$

D'où $(\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \text{ et } k \geq 0)$:

$$\begin{cases} \sigma_1 = 2k \\ \sigma_2 = 2k \\ \sigma_3 = 0 \end{cases}$$

3.2 Domaine de résistance du matériau

• Critère de von Mises

$$\sigma_{eq} \leq \sigma_o \quad | \quad \sigma_{eq} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}$$

$$\Rightarrow (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \leq 2\sigma_o^2$$

$$\Rightarrow (2k - 2k)^2 + (2k - 0)^2 + (0 - 2k)^2 \leq 2\sigma_o^2$$

$$\Rightarrow 0 + 4k^2 + 4k^2 \leq 2\sigma_o^2$$

$$\Rightarrow 8k^2 \leq 2\sigma_o^2$$

$$\Rightarrow |k| \leq \frac{1}{2}\sigma_o$$

$$\text{Sachant que : } k \geq 0 \Rightarrow 0 \leq k \leq \frac{1}{2}\sigma_o$$

D'où le domaine de résistance $G(\bar{x})$:



- **Critère de Tresca**

$$\text{Sup}\{|\sigma_1 - \sigma_2| ; |\sigma_2 - \sigma_3| ; |\sigma_3 - \sigma_1|\} \leq \sigma_o$$

$$\Rightarrow \text{Sup}\{|2k - 2k| ; |2k - 0| ; |0 - 2k|\} \leq \sigma_o$$

$$\Rightarrow \text{Sup}\{0 ; 2|k| ; 2|k|\} \leq \sigma_o$$

$$\Rightarrow 2|k| \leq \sigma_o$$

$$\Rightarrow |k| \leq \frac{1}{2}\sigma_o$$

$$\text{Sachant que : } k \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq k \leq \frac{1}{2}\sigma_o$$

D'où le domaine de résistance $G(\bar{x})$:



3.3 *Commentaire*

Le chargement étant cylindrique ($\sigma_1 = \sigma_2 \neq \sigma_3$), les deux critères coïncident.

Ex. 4 (EFS du 10/01/2023) Soit, en un point M d'un matériau, le tenseur des contraintes $\bar{\sigma}$ défini dans le repère orthonormé $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$:

$$\bar{\sigma} = [\sigma_{ij}] = \begin{pmatrix} +3k & 0 & 0 \\ 0 & +2k & -k \\ 0 & -k & +2k \end{pmatrix}, \text{ où } k \geq 0 \text{ désigne le paramètre de chargement.}$$

Déterminer le domaine de résistance $G(\bar{x})$ du matériau obéissant aux critères de rupture de von Mises et de Tresca. Commenter ensuite les résultats trouvés (justifier la réponse donnée).

Rép. 4

4.1 Contraintes principales : $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$

$$\sigma_{12} = \sigma_{13} = 0 \Rightarrow \text{L'axe } \bar{x}_1 \text{ est principal} \Rightarrow \sigma_I = +3k$$

$$\sigma_{II,III} = \frac{2k+2k}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2k-2k}{2}\right)^2 + (-k)^2} = 2k \pm k \Rightarrow \sigma_{II} = +3k$$

$$\Rightarrow \sigma_{III} = +k$$

D'où ($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ et $k \geq 0$) :

$$\begin{cases} \sigma_1 = +3k \\ \sigma_2 = +3k \\ \sigma_3 = +k \end{cases}$$

4.2 Domaine de résistance du matériau

• Critère de von Mises

$$\sigma_{eq} \leq \sigma_o \mid \sigma_{eq} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}$$

$$\Rightarrow (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \leq 2\sigma_o^2$$

$$\Rightarrow (3k - 3k)^2 + (3k - k)^2 + (k - 3k)^2 \leq 2\sigma_o^2$$

$$\Rightarrow 0 + 4k^2 + 4k^2 \leq 2\sigma_o^2$$

$$\Rightarrow 8k^2 \leq 2\sigma_o^2$$

$$\Rightarrow |k| \leq \frac{1}{2}\sigma_o$$

$$\text{Sachant que : } k \geq 0 \Rightarrow 0 \leq k \leq \sigma_o/2$$

D'où le domaine de résistance $G(\bar{x})$:



- **Critère de Tresca**

$$\text{Sup}\{|\sigma_1 - \sigma_2| ; |\sigma_2 - \sigma_3| ; |\sigma_3 - \sigma_1|\} \leq \sigma_o$$

$$\Rightarrow \text{Sup}\{|3k - 3k| ; |3k - k| ; |k - 3k|\} \leq \sigma_o$$

$$\Rightarrow \text{Sup}\{0 ; 2|k| ; 2|k|\} \leq \sigma_o$$

$$\Rightarrow 2|k| \leq \sigma_o$$

$$\Rightarrow |k| \leq \frac{1}{2}\sigma_o$$

$$\text{Sachant que : } k \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq k \leq \sigma_o/2$$

D'où le domaine de résistance $G(\bar{x})$:



4.3 *Commentaire*

Le chargement étant cylindrique ($\sigma_1 = \sigma_2 \neq \sigma_3$), les deux critères coïncident.