

FILIERE : Génie Civil

SPECIALITE : Master Géotechnique

COURS : Calcul à la rupture et analyse limite

INTERROGATION N°1

(Date : 24/11/2025 - Durée : 1 heure 30)

Ex. 1 (8 points) Soit, en un point M d'un matériau, le tenseur des contraintes $\bar{\sigma}$ défini dans le repère orthonormé $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$:

$$\bar{\sigma} = [\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 3k & 0 & k\sqrt{3} \\ 0 & 2k & 0 \\ k\sqrt{3} & 0 & k \end{bmatrix} (N/mm^2), \text{ où } k \geq 0 \text{ désigne le paramètre de chargement.}$$

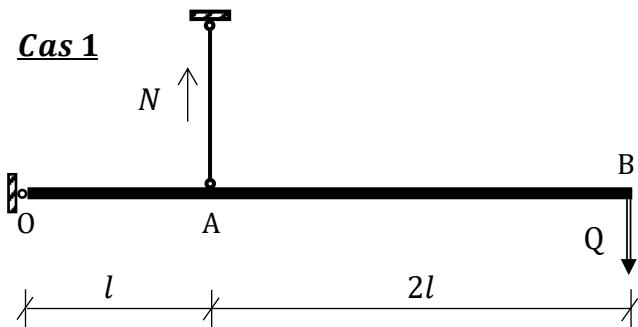
Déterminer le domaine de résistance $G(\bar{x})$ du matériau obéissant aux critères de rupture suivants :

- Tresca
- von Mises.

Commenter les résultats trouvés.

Ex. 2 (12 points) Déterminer le domaine des chargements potentiellement supportables $K(Q)$ pour la structure dans chacun des deux cas suivants, où Q désigne la charge appliquée. Dire laquelle des deux conceptions est-elle la meilleure ? Justifier la réponse donnée.

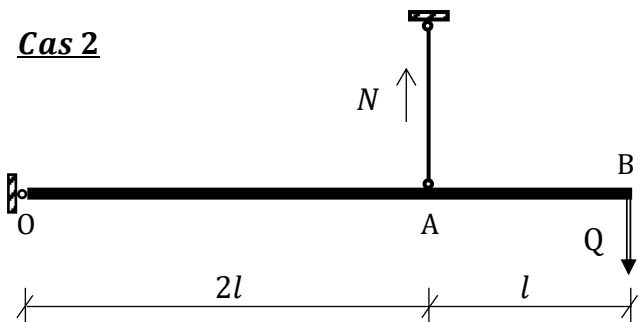
Cas 1



Critère de rupture : $|N| \leq L$

L – chargement limite

Cas 2



N.B. : Seules les notes de cours sont autorisées. Ne pas oublier d'encadrer les résultats.

Bonne chance

Prof. Mohamed Khemissa

Corrigé

Exercice 1

1.1 Contraintes principales : $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$

$$\sigma_{12} = \sigma_{23} = 0 \Rightarrow \text{L'axe } \bar{x}_2 \text{ est principal} \Rightarrow \sigma_I = 2k$$

$$\sigma_{II,III} = \frac{3k+k}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3k-k}{2}\right)^2 + (k\sqrt{3})^2} = 2k \pm 2k \Rightarrow \sigma_{II} = 4k$$

$$\Rightarrow \sigma_{III} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 4k \\ \sigma_2 = 2k \\ \sigma_3 = 0 \end{cases} \quad (N/mm^2) \quad \begin{matrix} \#1 \\ \#1 \\ \#1 \end{matrix}$$

1.2 Domaine de résistance du matériau

• **Critère de Tresca**

$$\text{Sup}\{|\sigma_1 - \sigma_2|; |\sigma_2 - \sigma_3|; |\sigma_3 - \sigma_1|\} \leq \sigma_o$$

$$\Rightarrow \text{Sup}\{|4k - 2k|; |2k - 0|; |0 - 4k|\} \leq \sigma_o$$

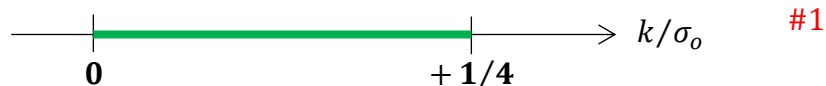
$$\Rightarrow \text{Sup}\{2|k|; 2|k|; 4|k|\} \leq \sigma_o$$

$$\Rightarrow 4|k| \leq \sigma_o$$

$$\Rightarrow |k| \leq \frac{1}{4}\sigma_o$$

$$\text{Sachant que : } k \geq 0 \Rightarrow 0 \leq k \leq \frac{1}{4}\sigma_o \quad \#1$$

D'où le domaine de résistance $G(\bar{x})$:



• **Critère de von Mises**

$$\sigma_{eq} \leq \sigma_o \quad | \quad \sigma_{eq} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}$$

$$\Rightarrow (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \leq 2\sigma_o^2$$

$$\Rightarrow (4k - 2k)^2 + (2k - 0)^2 + (0 - 4k)^2 \leq 2\sigma_o^2$$

$$\Rightarrow 4k^2 + 4k^2 + 16k^2 \leq 2\sigma_o^2$$

$$\Rightarrow 24k^2 \leq 2\sigma_o^2$$

$$\Rightarrow |k| \leq \frac{1}{2\sqrt{3}}\sigma_o$$

$$\text{Sachant que : } k \geq 0 \Rightarrow 0 \leq k \leq \frac{1}{2\sqrt{3}}\sigma_o \quad \#1$$

D'où le domaine de résistance $G(\bar{x})$:

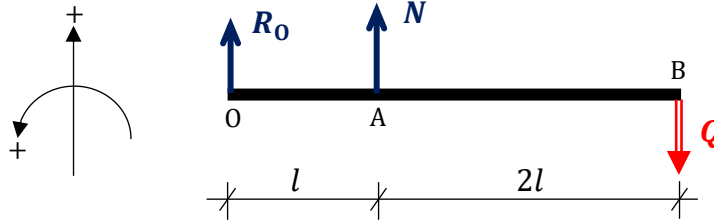


1.3 *Commentaire*

Le critère de Tresca est plus restrictif que celui de von Mises. #1

Exercice 2

2.1 *Cas 1*



2.1.1 *Equations d'équilibre*

$$\bullet \sum F = 0 \Rightarrow R_O + N - Q = 0 \Rightarrow Q = R_O + N \quad \#1$$

$$\bullet \sum M_{/O} = 0 \Rightarrow N \times l - Q \times 3l = 0 \Rightarrow Q = \frac{1}{3}N \quad \#1$$

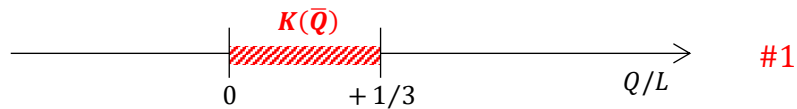
2.1.2 *Domaine des chargements potentiellement supportables*

$$\text{Sachant que : } |N| \leq L \Rightarrow Q \leq \frac{1}{3}|L| \Rightarrow -\frac{1}{3}L \leq Q \leq +\frac{1}{3}L \quad \#1$$

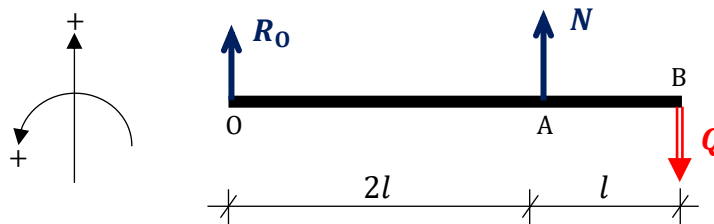
Comme la barre est suspendue par un tirant flexible, l'effort dans celui-ci est donc une force de traction :

$$\Rightarrow 0 \leq Q \leq +\frac{1}{3}L \quad \#1$$

$\Rightarrow$ Le domaine des chargements potentiellement supportables $K(\bar{Q})$ est défini dans le segment (Q/L) représenté par la figure suivante :



2.2 *Cas 2*



2.2.1 *Equations d'équilibre*

$$\bullet \sum F = 0 \Rightarrow R_O + N - Q = 0 \Rightarrow Q = R_O + N \quad \#1$$

$$\bullet \sum M_{/O} = 0 \Rightarrow N \times 2l - Q \times 3l = 0 \Rightarrow Q = \frac{2}{3}N \quad \#1$$

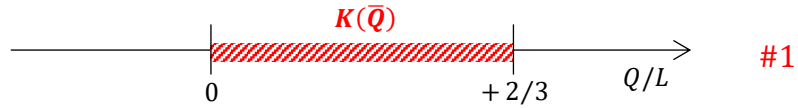
2.2.2 *Domaine des chargements potentiellement supportables*

$$\text{Sachant que : } |N| \leq L \Rightarrow Q \leq \frac{2}{3}|L| \Rightarrow -\frac{2}{3}L \leq Q \leq +\frac{2}{3}L \quad \#1$$

Comme la barre est suspendue par un tirant flexible, l'effort dans celui-ci est donc une force de traction :

$$\Rightarrow 0 \leq Q \leq +\frac{2}{3}L \quad \#1$$

$\Rightarrow$ Le domaine des chargements potentiellement supportables $K(\bar{Q})$ est défini dans le segment (Q/L) représenté par la figure suivante :



2.3 *Commentaire*

Les calculs montrent que la barre peut supporter une charge plus élevée dans le cas 2 que dans le cas 1. La conception présentée dans le cas 2 en est donc la meilleure. $\#2$