

FILIERE : Génie Civil

SPECIALITE : Master Géotechnique (S3)

COURS : Calcul à la rupture et analyse limite

EPREUVE DE RATRAPAGE

(Date : 16/05/2022 - Durée : 1 heure 30)

Ex. 1 Soit, en un point M d'un matériau, le tenseur des contraintes $\bar{\sigma}$ défini dans le repère orthonormé $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$:

$$\bar{\sigma} = [\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & k\sqrt{3} \\ 0 & 1+k & 0 \\ k\sqrt{3} & 0 & 1+2k \end{bmatrix}, \quad \text{où } k \geq 0 \text{ désigne le paramètre de chargement.}$$

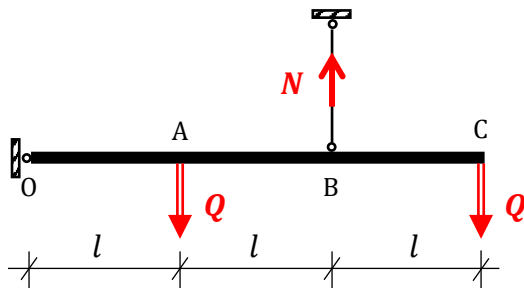
Déterminer le domaine de résistance $G(\bar{x})$ du matériau obéissant aux critères de rupture suivants :

a/ von Mises,

b/ Tresca,

Commenter ensuite les résultats trouvés.

Ex. 2 Déterminer les bornes inférieure Q_{min} et supérieure Q_{max} du chargement potentiellement supportable de la structure ci-dessous, où Q désigne la charge appliquée. Commenter ensuite les résultats trouvés, puis déduire la charge ultime Q_{ult} correspondante.



Critère de rupture : $|N| \leq L$

L – chargement limite

N.B. : Seules les notes de cours sont autorisées.

Bonne chance
Prof. Mohamed Khemissa

Exercice 1

1.1 Contraintes principales : $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$

$$\sigma_{12} = \sigma_{23} = 0 \Rightarrow \text{L'axe } \bar{x}_2 \text{ est principal} \Rightarrow \sigma_I = 1 + k$$

$$\sigma_{II,III} = \frac{1+1+2k}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1-1-2k}{2}\right)^2 + (k\sqrt{3})^2} = 1 + k \pm 2k \Rightarrow \sigma_{II} = 1 + 3k$$

$$\Rightarrow \sigma_{III} = 1 - k$$

D'où :

$$\begin{cases} \sigma_1 = 1 + 3k \\ \sigma_2 = 1 + k \\ \sigma_3 = 1 - k \end{cases}$$

#1

#1

#1

1.2 Domaine de résistance

• **Critère de von Mises**

$$\sigma_{eq} \leq \sigma_o \quad | \quad \sigma_{eq} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}$$

$$\Rightarrow (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \leq 2\sigma_o^2$$

$$\Rightarrow (1 + 3k - 1 - k)^2 + (1 + k - 1 + k)^2 + (1 - k - 1 - 3k)^2 \leq 2\sigma_o^2$$

$$\Rightarrow 4k^2 + 4k^2 + 16k^2 \leq 2\sigma_o^2$$

$$\Rightarrow 24k^2 \leq 2\sigma_o^2$$

$$\Rightarrow |k| \leq \frac{1}{2\sqrt{3}} \sigma_o$$

$$\text{Sachant que : } k \geq 0 \Rightarrow 0 \leq k \leq \frac{1}{2\sqrt{3}} \sigma_o$$

#1

D'où le domaine de résistance $G(\bar{x})$:



#1

• **Critère de Tresca**

$$\text{Sup}\{|\sigma_1 - \sigma_2|; |\sigma_2 - \sigma_3|; |\sigma_3 - \sigma_1|\} \leq \sigma_o$$

$$\Rightarrow \text{Sup}\{|1 + 3k - 1 - k|; |1 + k - 1 + k|; |1 - k - 1 - 3k|\} \leq \sigma_o$$

$$\Rightarrow \text{Sup}\{2|k|; 2|k|; 4|k|\} \leq \sigma_o$$

$$\Rightarrow 4|k| \leq \sigma_o$$

$$\Rightarrow |k| \leq \frac{1}{4} \sigma_o$$

$$\text{Sachant que : } k \geq 0 \Rightarrow 0 \leq k \leq \frac{1}{4} \sigma_o$$

#1

D'où le domaine de résistance $G(\bar{x})$:

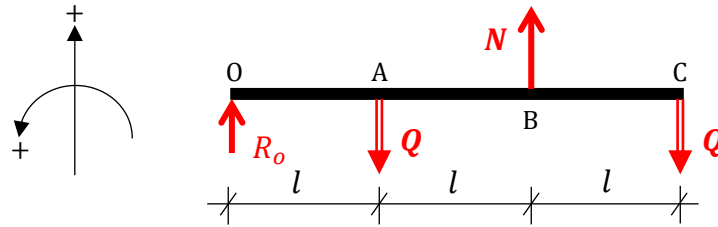


#1

1.3 Commentaire : Le critère de Tresca est plus restrictif que le critère de von Mises

#1

Exercice 2



2.1 Borne inférieure (Q_{min}) :

- Approche de calcul : Approche statique par l'intérieur #1
- $\sum F = 0 \Rightarrow N + R_o - 2Q = 0 \Rightarrow Q = \frac{1}{2}(N + R_o)$ (1) #1
- $\sum M_{/O} = 0 \Rightarrow N \times 2l - Q \times l - Q \times 3l = 0 \Rightarrow Q = N/2$ (2) #1

Sachant que : $|N| \leq L$

$$(2) \Rightarrow Q \leq |L|/2$$

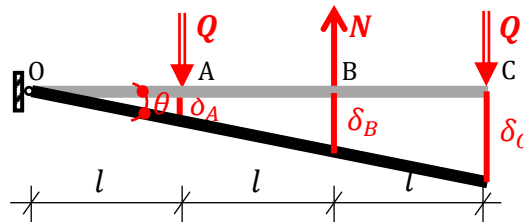
D'où :

$$\Rightarrow \text{Borne inférieure : } Q_{min} = L/2 \quad \text{\#1}$$

2.2 Borne supérieure (Q_{max}) :

- Approche de calcul : Approche cinématique par l'extérieur #1
- Mécanisme de ruine : Mécanisme de rotation #1

$$\theta \approx \tan(\theta) = \frac{\delta_A}{l} = \frac{\delta_B}{2l} = \frac{\delta_C}{3l}$$



- Compatibilité cinématique : $\delta_A = \delta_B/2 = \delta_C/3$
 $\Rightarrow \dot{\delta}_A = \dot{\delta}_B/2 = \dot{\delta}_C/3 = \dot{\theta} \times l$ #1
- $\mathcal{P}_{ext} = \bar{Q} \times \dot{q} = Q \times \dot{\delta}_A + Q \times \dot{\delta}_C = Q \times \dot{\theta} \times l + Q \times \dot{\theta} \times 3l = Q \times \dot{\theta} \times 4l$ #1
- $\mathcal{P}_{int} = \sum_{i=1,3} (N_i \times \dot{\delta}_i) = N \times \dot{\delta}_B = N \times \dot{\theta} \times 2l$ #1
 $\Rightarrow Q \times \dot{\theta} \times 4l \leq N \times \dot{\theta} \times 2l \Rightarrow Q \leq N/2$

Sachant que : $|N| \leq L$

$$\Rightarrow Q \leq |L|/2$$

D'où :

$$\Rightarrow \text{Borne supérieure : } Q_{max} = L/2 \quad \text{\#1}$$

2.3 Commentaire : Les deux bornes coïncident avec la solution exacte #1

$$\Rightarrow \text{Charge ultime : } Q_{ult} = Q_{min} = Q_{max} = L/2 \quad \text{\#1}$$