

FILIERE : Génie Civil

SPECIALITE : Master Géotechnique (S3)

COURS : Calcul à la rupture et Analyse limite

EPREUVE DE FIN DE SEMESTRE

(Date : 14/01/2026 - Durée : 2 heures)

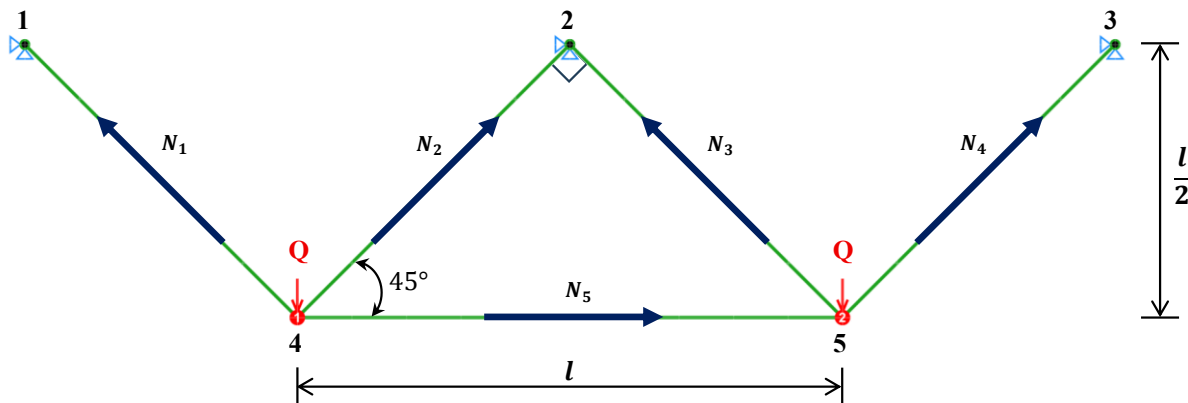
Ex. 1 (8 points) Soit, en un point M d'un matériau solide, le tenseur des contraintes $\bar{\sigma}$ défini dans le repère orthonormé $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$:

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k \\ 0 & k & 0 \end{bmatrix} \quad (N/mm^2), \text{ où } k \geq 0 \text{ désigne le paramètre de chargement.}$$

Déterminer les domaines de résistance $G(\bar{x})$ du matériau obéissant aux critères de rupture de von Mises et de Tresca. Commenter ensuite avec justification les résultats trouvés.

Ex. 2 (12 points) Déterminer les bornes inférieure Q_{min} et supérieure Q_{max} du chargement potentiellement supportable de la structure réticulée ci-dessous, où Q désigne la charge appliquée. Commenter ensuite les résultats trouvés, puis déduire la charge ultime Q_{ult} de cette structure.

Critère de rupture : $|N_i| \leq L$; $i = 1, 2, 3, 4, 5$ | L - chargement limite



N.B. : Seules les notes de cours sont autorisées.

Bonne chance
Prof. Mohamed KHEMISSA

Corrigé

Exercice 1

1.1 Contraintes principales : $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$

$$\sigma_{12} = \sigma_{13} = 0 \Rightarrow \text{L'axe } \bar{x}_1 \text{ est principal} \Rightarrow \sigma_I = +k$$

$$\sigma_{II,III} = \frac{0+0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{0-0}{2}\right)^2 + (k)^2} = 0 \pm k \Rightarrow \sigma_{II} = +k$$

$$\Rightarrow \sigma_{III} = -k$$

D'où : $\begin{cases} \sigma_1 = +k \\ \sigma_2 = +k \\ \sigma_3 = -k \end{cases} \quad (N/mm^2) \quad \begin{matrix} \#1 \\ \#1 \\ \#1 \end{matrix}$

1.2 Domaine de résistance du matériau

• **Critère de von Mises**

$$\sigma_{eq} \leq \sigma_o \quad | \quad \sigma_{eq} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}$$

$$\Rightarrow (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \leq 2\sigma_o^2$$

$$\Rightarrow (k - k)^2 + (k + k)^2 + (-k - k)^2 \leq 2\sigma_o^2$$

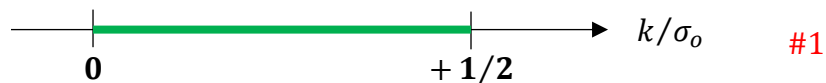
$$\Rightarrow 0 + 4k^2 + 4k^2 \leq 2\sigma_o^2$$

$$\Rightarrow 8k^2 \leq 2\sigma_o^2$$

$$\Rightarrow |k| \leq \frac{1}{2}\sigma_o$$

Sachant que : $k \geq 0 \Rightarrow 0 \leq k \leq \frac{1}{2}\sigma_o \quad \#1$

D'où le domaine de résistance $G(\bar{x})$:



• **Critère de Tresca**

$$\text{Sup}\{|\sigma_1 - \sigma_2|; |\sigma_2 - \sigma_3|; |\sigma_3 - \sigma_1|\} \leq \sigma_o$$

$$\Rightarrow \text{Sup}\{|k - k|; |k + k|; |-k - k|\} \leq \sigma_o$$

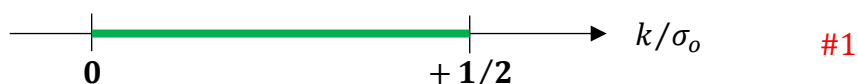
$$\Rightarrow \text{Sup}\{0; 2|k|; 2|k|\} \leq \sigma_o$$

$$\Rightarrow 2|k| \leq \sigma_o$$

$$\Rightarrow |k| \leq \frac{1}{2}\sigma_o$$

Sachant que : $k \geq 0 \Rightarrow 0 \leq k \leq \frac{1}{2}\sigma_o \quad \#1$

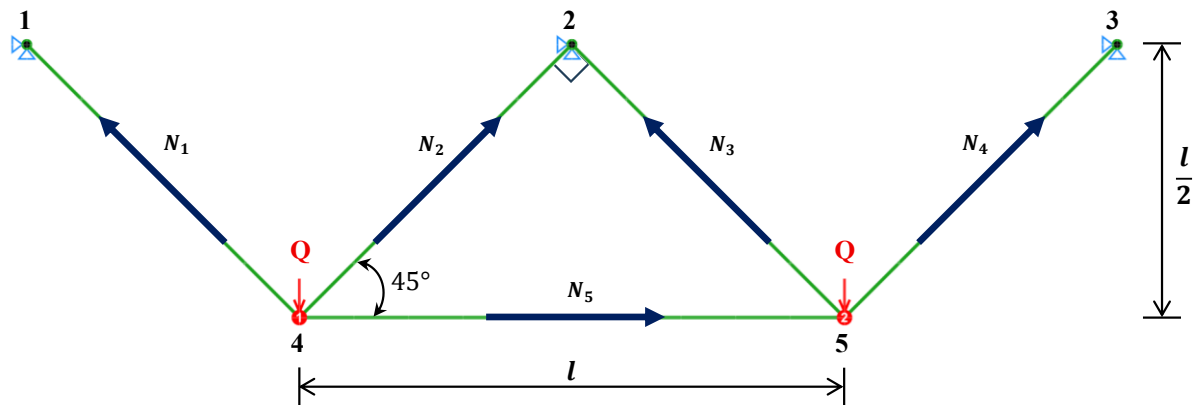
D'où le domaine de résistance $G(\bar{x})$:



• **Commentaire**

Le deux critères coïncident. #1

Exercice 2



Remarque : Par raison de symétrie, on a : $N_1 = N_2 = N_3 = N_4 = N$ #1

2.1 Borne inférieure (Q_{min}) :

- Approche de calcul : Approche statique par l'intérieur #1
- $\sum F_x = 0 \Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2}N_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}N_2 - \frac{\sqrt{2}}{2}N_3 + \frac{\sqrt{2}}{2}N_4 + N_5 = 0 \Rightarrow N_5 = 0$ #1
- $\sum F_y = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}N_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}N_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}N_3 + \frac{\sqrt{2}}{2}N_4 - 2Q = 0 \Rightarrow Q = \sqrt{2}N$ #1
- $\sum M_{/4} = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}N_3 \times l + \frac{\sqrt{2}}{2}N_4 \times l - Q \times l = 0 \Rightarrow Q = \sqrt{2}N$ #1

Sachant que : $|N_1| = |N_2| = |N_3| = |N_4| = |N| \leq L \Rightarrow Q \leq \sqrt{2}|L|$

Sachant que : $N \geq 0$ (Tirants travaillant en traction) $\Rightarrow Q \leq \sqrt{2}L$

$\Rightarrow$ Borne inférieure : $Q_{min} = \sqrt{2}L$ #1

2.2 Borne supérieure (Q_{max}) :

- Approche de calcul : Approche cinématique par l'extérieur #1
- $\mathcal{P}_{ext} = \bar{\mathbf{Q}} \times \dot{\bar{\mathbf{q}}} = Q \times \dot{\delta}_4 + Q \times \dot{\delta}_5 = Q \times \left(\frac{l}{2}\dot{\varepsilon}\right) + Q \times \left(\frac{l}{2}\dot{\varepsilon}\right) = Q \times l\dot{\varepsilon}$ #1
- $\mathcal{P}_{int} = \sum_{i=1,5} (N_i \times \mathbf{l}_i \dot{\varepsilon}) = N_1 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{l}{2}\dot{\varepsilon}\right) + N_2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{l}{2}\dot{\varepsilon}\right) + N_3 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{l}{2}\dot{\varepsilon}\right) + N_4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{l}{2}\dot{\varepsilon}\right) + 0$
 $= N \times \sqrt{2}l\dot{\varepsilon}$ #1

- $\mathcal{P}_{ext} \leq \mathcal{P}_{int} \quad \forall \dot{\varepsilon} \text{ C.A. (Cinématiquement Admissible)}$

$$\Rightarrow Q \times l\dot{\varepsilon} \leq \sqrt{2}N \times l\dot{\varepsilon} \Rightarrow Q \leq \sqrt{2}N$$

Sachant que : $|N_1| = |N_2| = |N_3| = |N_4| = |N| \leq L \Rightarrow Q \leq \sqrt{2}|L|$

Sachant que : $N \geq 0$ (Tirants travaillant en traction) $\Rightarrow Q \leq \sqrt{2}L$

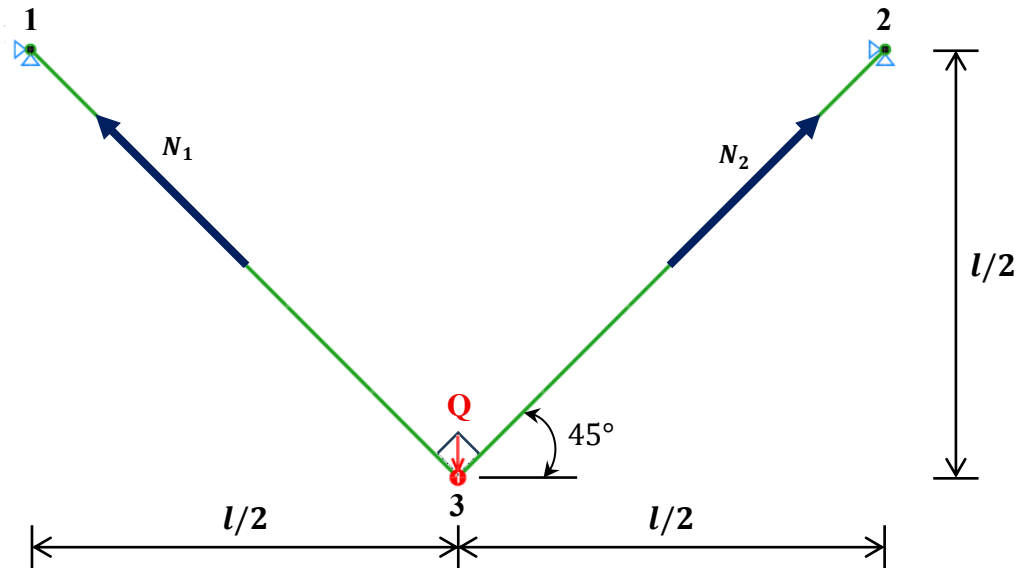
$\Rightarrow$ Borne supérieure : $Q_{max} = \sqrt{2}L$ #1

2.3 Commentaire : Les deux bornes coïncident, la solution est donc exacte. #1

$$\Rightarrow \text{Charge ultime : } Q_{ult} = Q_{min} = Q_{max} = \sqrt{2}L \quad \#1$$

Annexe : Solution alternative

Par raison de symétrie, la structure peut être décomposée en deux parties identiques et l'on traitera donc l'une d'elles comme suit :



A.1 Borne inférieure (Q_{min}) :

- Approche de calcul : Approche statique par l'intérieur #1
- $\sum F_x = 0 \Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2}N_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}N_2 = 0 \Rightarrow N_1 = N_2$ #1
- $\sum F_y = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}N_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}N_2 - Q = 0 \Rightarrow Q = \sqrt{2}N$ #1
- $\sum M_{/4} = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}N_1 \times 0 + \frac{\sqrt{2}}{2}N_2 \times 0 - Q \times 0 = 0$ (Solution triviale) #1

Sachant que : $|N_1| = |N_2| = |N| \leq L \Rightarrow Q \leq \sqrt{2}|L|$

Sachant que : $N \geq 0$ (Tirants travaillant en traction) $\Rightarrow Q \leq \sqrt{2}L$

$\Rightarrow$ Borne inférieure : $Q_{min} = \sqrt{2}L$ #1

A.2 Borne supérieure (Q_{max}) :

- Approche de calcul : Approche cinématique par l'extérieur #1
- $\mathcal{P}_{ext} = \bar{Q} \times \dot{\bar{q}} = Q \times \dot{\delta} = Q \times \frac{1}{2}l\dot{\epsilon}$ #1
- $\mathcal{P}_{int} = \sum_{i=1,2}(N_i \times l_i \dot{\epsilon}) = N_1 \times \frac{\sqrt{2}}{2}l \dot{\epsilon} + N_2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}l \dot{\epsilon} = N \times \frac{\sqrt{2}}{2}l \dot{\epsilon}$ #1
- $\mathcal{P}_{ext} \leq \mathcal{P}_{int} \quad \forall \dot{\epsilon} \text{ C.A. (Cinématiquement Admissible)}$
- $\Rightarrow Q \times \frac{1}{2}l\dot{\epsilon} \leq \sqrt{2}N \times \frac{\sqrt{2}}{2}l \dot{\epsilon} \Rightarrow Q \leq \sqrt{2}N$ #1

Sachant que : $|N_1| = |N_2| = |N| \leq L \Rightarrow Q \leq \sqrt{2}|L|$

Sachant que : $N \geq 0$ (Tirants travaillant en traction) $\Rightarrow Q \leq \sqrt{2}L$

$\Rightarrow$ Borne supérieure : $Q_{max} = \sqrt{2}L$ #1

A.3 Commentaire : Les deux bornes coïncident, la solution est donc exacte. #1

$\Rightarrow$ Charge ultime : $Q_{ult} = Q_{min} = Q_{max} = \sqrt{2}L$ #1