

Chapitre Trois

Approche cinématique par l'extérieur

- ❑ **Bases théoriques**
- ❑ **Exemples d'application**
 - ❖ *Cylindre en compression*
 - ❖ *Cylindre en torsion*
 - ❖ *Plaque pleine en traction*
 - ❖ *Plaque trouée en traction*
 - ❖ *Tube en traction-torsion*
 - ❖ *Structure réticulée*
 - ❖ *Excavations*
 - ❖ *Fondations*
 - ❖ *Soutènements*
- ❑ **Exercices**



BASES THÉORIQUES

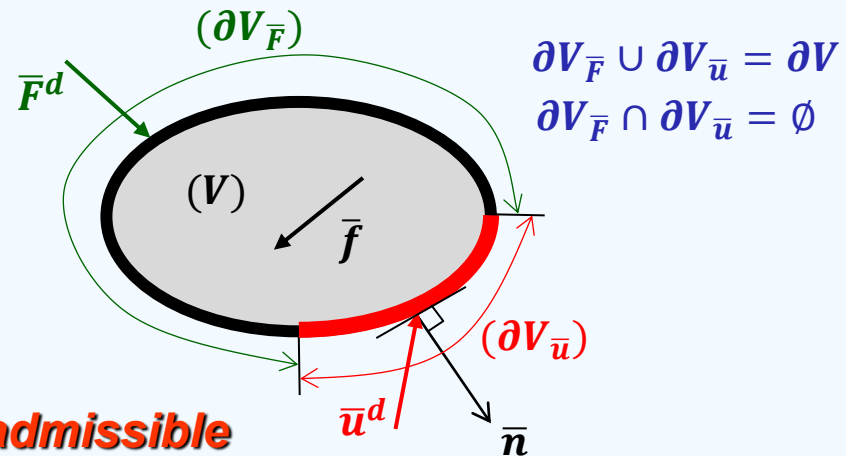
□ Bases théoriques

Soit : $\bar{\sigma}$ - Tenseur de contraintes

$\bar{f}$ - Densité de forces dans (V)

$\bar{F}^d$ - Forces surfaciques sur $(\partial V_{\bar{F}})$

$\bar{u}^d$ - Champ de déplacement sur $(\partial V_{\bar{u}})$



- **Champ de vitesses cinématiquement admissible**

On dit que $\hat{v}$ est cinématiquement admissible (C.A.) si et seulement si :

$$\hat{v}_i = v_i^d(\bar{x}) \text{ sur } \partial V_{\bar{u}} \quad | \quad \hat{v}^d = \dot{\bar{u}}^d$$

- **Champ de contraintes physiquement admissible**

On dit que $\bar{\sigma}$ est physiquement admissible (P.A.) si et seulement si :

$$\bar{\sigma} \in G(\bar{x}) \quad \forall \bar{x} \in (V) \quad | \quad G(\bar{x}) - \text{Domaine de résistance du matériau}$$

$\Rightarrow$ **Critère de rupture** (Tresca, von Mises, Mohr-Coulomb, Drucker-Prager, ...)

□ Bases théoriques

• **Condition d'équilibre : Principe des puissances virtuelles**

Soit :

► $\wp_{ext}(\bar{\mathbf{v}}) = \bar{\mathbf{Q}} \cdot \dot{\bar{\mathbf{q}}}(\bar{\mathbf{v}})$ (Puissance des efforts extérieurs)

► $\wp_{int}(\bar{\mathbf{v}}) = \int_V \bar{\boldsymbol{\sigma}} : \bar{\mathbf{d}}(\bar{\mathbf{v}}) dV + \int_{\Sigma} \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \bar{\mathbf{n}} \cdot [\![\bar{\mathbf{v}}]\!] d\Sigma$ (Puissance des efforts intérieurs)

$\Rightarrow \wp_{ext}(\bar{\mathbf{v}}) \leq \wp_{int}(\bar{\mathbf{v}}) \quad \forall \bar{\mathbf{v}} \text{ C.A. (Condition d'équilibre)}$

$\bar{\mathbf{Q}}$ - Charge appliquée

$\bar{\mathbf{q}}$ - Déplacement

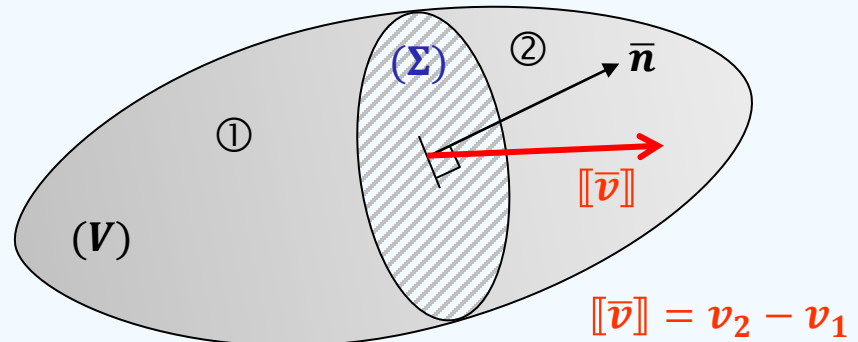
$\dot{\bar{\mathbf{q}}}$ - Vitesse de déplacement

Σ - Surface de discontinuité

$[\![\bar{\mathbf{v}}]\!]$ - Discontinuité du champ de vitesses

$\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ - Tenseur de contraintes

$\bar{\mathbf{d}} = \frac{1}{2} [\overline{\overline{\mathbf{grad}(\bar{\mathbf{v}})}} + {}^t\overline{\overline{\mathbf{grad}(\bar{\mathbf{v}})}}] - \text{Tenseur des vitesses de déformation } (\bar{\mathbf{d}} = \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}})$



□ Bases théoriques

- **Puissance résistante maximale**

On définit une puissance résistante maximale $\wp_{rm}(\bar{v})$:

$$\wp_{rm}(\bar{v}) = \int_V \pi[\bar{x}, \bar{\bar{d}}(\bar{x})] dV + \int_{\Sigma} \pi[\bar{x}, \bar{n}(\bar{x}), [[\bar{v}(\bar{x})]]] d\Sigma$$

où π désigne la fonction d'appui telle que :

$$\wp_{ext}(\bar{v}) = \bar{Q} \cdot \dot{\bar{q}}(\bar{v}) \leq \wp_{rm}(\bar{v}) \quad \forall \bar{v} \text{ C.A.}$$

Il s'ensuit donc que :

$$\text{Si } \exists \bar{v} \text{ C.A.} \mid \wp_{ext}(\bar{v}) = \bar{Q} \cdot \dot{\bar{q}}(\bar{v}) \leq \wp_{rm}(\bar{v}) \Rightarrow \bar{Q} \in K$$

$$\Rightarrow \bar{Q}_{ult} \leq \bar{Q} = \bar{Q}_{max} \quad (\text{Borne supérieure})$$



Remarque : L'approche cinématique est une approche par excès.

□ Bases théoriques

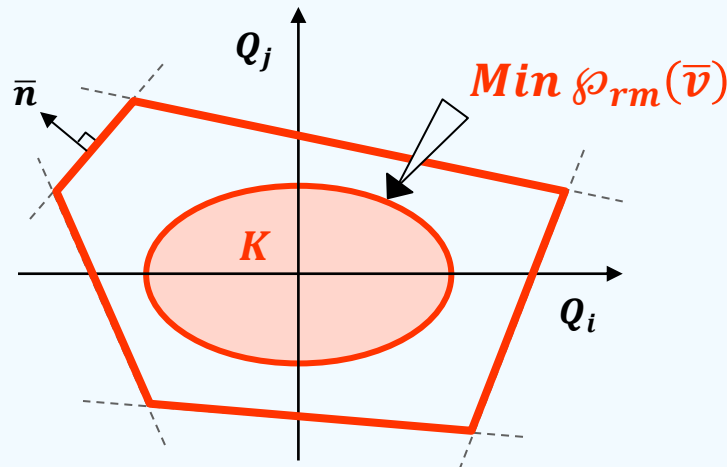
- **Expressions de la fonction d'appui π**

Cette fonction est définie par :

$$\pi[\bar{x}, \bar{d}(\bar{x})] = \text{Sup}\{\bar{\sigma}(\bar{x}) : \bar{d}(\bar{x}) \mid \bar{\sigma}(\bar{x}) \in G(\bar{x})\} \quad \text{dans } (V)$$

$$\pi[\bar{x}, \bar{n}(\bar{x}), \llbracket \bar{v}(\bar{x}) \rrbracket] = \text{Sup}\{\bar{\sigma}(\bar{x}) \cdot \bar{n}(\bar{x}) \cdot \llbracket \bar{v}(\bar{x}) \rrbracket \mid \bar{\sigma}(\bar{x}) \in G(\bar{x})\} \quad \text{sur } (\Sigma)$$

Raisonnement :



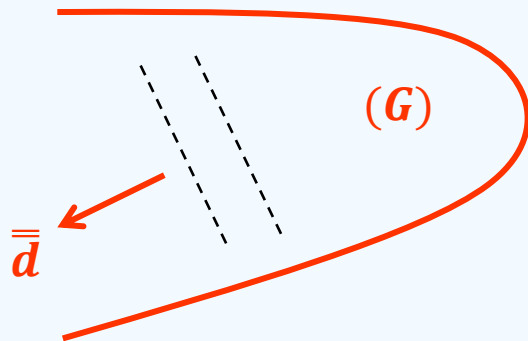
D'où le domaine des chargements potentiellement supportables :

$$K = \{\bar{Q} \mid \bar{Q} \cdot \dot{\bar{q}}(\bar{v}) - \wp_{rm}(\bar{v}) \leq 0 \quad \forall \bar{v} \text{ C.A.}\}$$

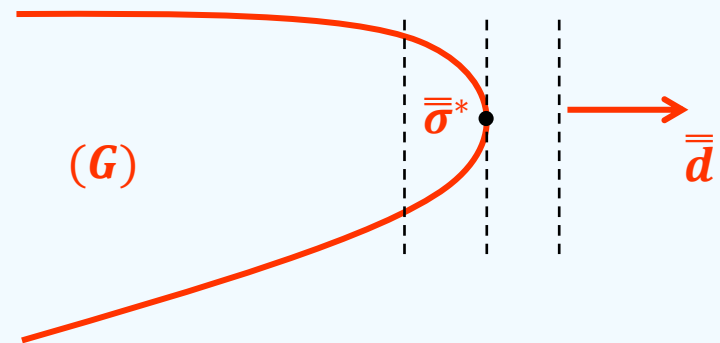
□ Bases théoriques

- **Expressions de la fonction d'appui π**

Remarque : Pour que le problème soit possible, il faut que $\wp_{rm}(\bar{v})$ soit finie en certains points. Soit donc :



$$\pi(\bar{d}) = +\infty \text{ (infinie)}$$



$$\pi(\bar{d}) = \bar{\sigma}^* : \bar{d} = \text{cste} \text{ (finie)}$$

⇒ On doit choisir des champs de vitesses $\bar{v}$ C.A. | $\wp_{rm}(\bar{v}) < +\infty$

Propriétés de la fonction d'appui π :

$$\pi(\alpha \bar{d}) = \alpha \pi(\bar{d}) \quad \forall \alpha > 0$$

□ Bases théoriques

- **Critères de rupture et fonctions d'appui π correspondantes**

1. Milieux continus tridimensionnels (3D) : Cas général

❖ Notations

$\bar{\bar{s}}$ - Tenseur des contraintes déviatoriques

$s_1 \geq s_2 \geq s_3$ - Contraintes principales déviatoriques

$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{2}{3} Tr(\bar{\bar{s}}^2)} = \sqrt{\frac{2}{3} s_{ij} s_{ji}} = \sqrt{\frac{2}{3} (s_1^2 + s_2^2 + s_3^2)}$ - Contrainte équivalente

$\bar{\bar{d}} = \frac{1}{2} [\overline{grad}(\bar{v}) + {}^t\overline{grad}(\bar{v})]$ - Tenseur des vitesses de déformation ($\bar{\bar{d}} = \dot{\bar{\bar{\epsilon}}}$)

$d_1 \geq d_2 \geq d_3$ - Taux principaux de déformation (Valeurs principales de $\bar{\bar{d}}$)

$d_{eq} = \sqrt{\frac{2}{3} Tr(\bar{\bar{d}}^2)} = \sqrt{\frac{2}{3} d_{ij} d_{ji}} = \sqrt{\frac{2}{3} (d_1^2 + d_2^2 + d_3^2)}$ - Déformation équivalente

$[[\bar{v}]]$ - Discontinuité de la vitesse $\bar{v}$ au franchissement de la surface de discontinuité Σ

$$\wp_{rm}(\bar{v}) = \int_V \pi[\bar{x}, \bar{\bar{d}}(\bar{x})] dV + \int_{\Sigma} \pi[\bar{x}, \bar{n}(\bar{x}), [[\bar{v}(\bar{x})]]] d\Sigma$$

□ Bases théoriques

• **Critères de rupture et fonctions d'appui π correspondantes**

1. Milieux continus tridimensionnels (3D) : Cas général

❖ Critère de Tresca

✓ Domaine de résistance : $G(\bar{\sigma}) = \sup_{\substack{i=1,2,3 \\ j=1,2,3}} \{\sigma_i - \sigma_j - \sigma_o\} \leq 0$

σ_o - Limite de résistance en traction simple (ou en compression simple)

✓ Fonction π :

$$\pi(\bar{\bar{d}}) = \begin{cases} +\infty & \text{si } Tr(\bar{\bar{d}}) \neq 0 \\ \frac{\sigma_o}{2} (|d_1| + |d_2| + |d_3|) & \text{si } Tr(\bar{\bar{d}}) = 0 \end{cases} \quad \text{dans (V)}$$

$$\pi(\bar{n}, [\bar{v}]) = \begin{cases} +\infty & \text{si } [\bar{v}] \cdot \bar{n} \neq 0 \\ \frac{\sigma_o}{2} |[\bar{v}]| & \text{si } [\bar{v}] \cdot \bar{n} = 0 \end{cases} \quad \text{sur } (\Sigma)$$

□ Bases théoriques

• **Critères de rupture et fonctions d'appui π correspondantes**

1. **Milieux continus tridimensionnels (3D) : Cas général**

❖ Critère de von Mises

✓ Domaine de résistance : $G(\bar{\sigma}) = \sigma_{eq}^2 - k^2 = \frac{1}{2} Tr(\bar{s}^2) - k^2 = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ji} - k^2 \leq 0$

k - Limite de résistance en cisson simple (Cisaillement pur)

(= σ_o en cisson simple ; = $\sigma_o/\sqrt{3}$ en traction simple ; = $-\sigma_o/\sqrt{3}$ en compression simple)

✓ Fonction π :

$$\pi(\bar{d}) = \begin{cases} +\infty & \text{si } Tr(\bar{d}) \neq 0 \\ k \times \sqrt{2Tr(\bar{d}^2)} = \sigma_o d_{eq} & \text{si } Tr(\bar{d}) = 0 \end{cases} \quad \text{dans (V)}$$

$$\pi(\bar{n}, [[\bar{v}]]) = \begin{cases} +\infty & \text{si } [[\bar{v}]] \cdot \bar{n} \neq 0 \\ k |[[\bar{v}]]| & \text{si } [[\bar{v}]] \cdot \bar{n} = 0 \end{cases} \quad \text{sur } (\Sigma)$$

□ Bases théoriques

• **Critères de rupture et fonctions d'appui π correspondantes**

1. **Milieux continus tridimensionnels (3D) : Cas général**

❖ Critère de Mohr - Coulomb

✓ Domaine de résistance :

$$G(\bar{\sigma}) = \sup_{\substack{i=1,2,3 \\ j=1,2,3}} \{ (1 + \sin \varphi) \sigma_i - (1 - \sin \varphi) \sigma_j - 2c \cdot \cos \varphi \} \leq 0$$

c et φ – Paramètres de cisaillement du matériau

✓ Fonction π :

$$\pi(\bar{d}) = \begin{cases} +\infty & \text{si } Tr(\bar{d}) < (|d_1| + |d_2| + |d_3|) \sin \varphi \\ \frac{c}{\tan \varphi} Tr(\bar{d}) & \text{si } Tr(\bar{d}) \geq (|d_1| + |d_2| + |d_3|) \sin \varphi \end{cases} \quad \text{dans (V)}$$

$$\pi(\bar{n}, [\bar{v}]) = \begin{cases} +\infty & \text{si } [\bar{v}] \cdot \bar{n} < [\bar{v}] \sin \varphi \\ \frac{c}{\tan \varphi} [\bar{v}] \cdot \bar{n} & \text{si } [\bar{v}] \cdot \bar{n} \geq [\bar{v}] \sin \varphi \end{cases} \quad \text{sur } (\Sigma)$$

telle que $H = \frac{c}{\tan \varphi}$ est la pression de cohésion (Limite de résistance en traction triple).

□ Bases théoriques

• Critères de rupture et fonctions d'appui π correspondantes

1. Milieux continus tridimensionnels (3D) : Cas général

❖ Critère de Drucker - Prager

✓ Domaine de résistance : $G(\bar{\sigma}) = \sqrt{\frac{1}{2} Tr(\bar{S}^2)} - \frac{3 \sin \varphi}{\sqrt{3(3+\sin^2 \varphi)}} \left[\frac{c}{\tan \varphi} - \frac{1}{3} Tr(\bar{\sigma}) \right] \leq 0$

c et φ – Paramètres de cisaillement du matériau (Sols)

✓ Fonction π :

$$\pi(\bar{d}) = \begin{cases} +\infty & \text{si } Tr(\bar{d}) < \sqrt{\frac{2 \sin^2 \varphi}{3+\sin^2 \varphi} [3Tr(\bar{d}^2) - (Tr(\bar{d}))^2]} \\ \frac{c}{\tan \varphi} Tr(\bar{d}) & \text{si } Tr(\bar{d}) \geq \sqrt{\frac{2 \sin^2 \varphi}{3+\sin^2 \varphi} [3Tr(\bar{d}^2) - (Tr(\bar{d}))^2]} \end{cases} \quad \text{dans (V)}$$

$$\pi(\bar{n}, [\bar{v}]) = \begin{cases} +\infty & \text{si } [\bar{v}] \cdot \bar{n} < [\bar{v}] \sin \varphi \\ \frac{c}{\tan \varphi} [\bar{v}] \cdot \bar{n} & \text{si } [\bar{v}] \cdot \bar{n} \geq [\bar{v}] \sin \varphi \end{cases} \quad \text{sur } (\Sigma)$$

□ Bases théoriques

• Critères de rupture et fonctions d'appui π correspondantes

2. Milieux continus bidimensionnels (2D) : Plaques en flexion

❖ Notations

3D

2D

$\bar{\sigma}$

$\bar{M}$

$\bar{d}$

$\dot{\bar{\chi}}$

$[[\bar{v}]]$

$[[\dot{\bar{\omega}}(\bar{x})]]$

$\bar{M} = M_{ij} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j \mid i = 1, 2 \text{ \& } j = 1, 2$ - Tenseur des moments de flexion au point $\bar{x}$

$\dot{\bar{w}}(\bar{x})$ - Vitesse de flèche au point $\bar{x}$ suivant l'axe $\bar{z}$

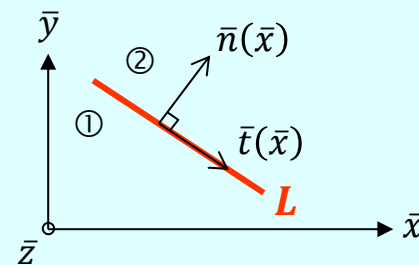
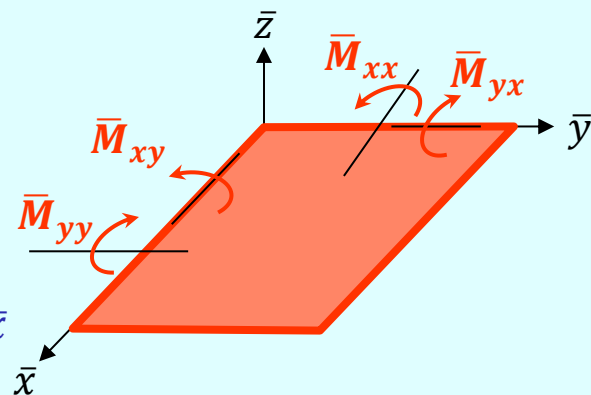
$\dot{\bar{\omega}}(\bar{x}) = \overline{\text{grad}}[\dot{\bar{w}}(\bar{x})]$

$\dot{\bar{\chi}}(\bar{x})$ - Tenseur des vitesses de courbure au point $\bar{x}$

$[[\dot{\bar{\omega}}(\bar{x})]] = \dot{\bar{\omega}}_2(\bar{x}) - \dot{\bar{\omega}}_1(\bar{x})$ - Discontinuité de $\dot{\bar{\omega}}$ au franchissement de la ligne de discontinuité L au point $\bar{x}$ de normale $\bar{n}(\bar{x})$

$$\wp_{rm}(\bar{v}) = \wp(\dot{\bar{\omega}}) = \int_S \pi[\bar{x}, \dot{\bar{\chi}}(\bar{x})] dS + \int_L \pi[\bar{x}, \bar{n}(\bar{x}), \dot{\bar{\theta}}(\bar{x})] dL$$

$$\dot{\bar{\chi}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial y^2} \end{bmatrix}_{(\bar{x}; \bar{y})} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial r^2} & \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial \theta^2} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial \theta^2} & \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{w}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial \theta^2} \end{bmatrix}_{(\bar{e}_r; \bar{e}_\theta)}$$



❑ Bases théoriques

• Critères de rupture et fonctions d'appui π correspondantes

2. Milieux continus bidimensionnels (2D) : Plaques en flexion

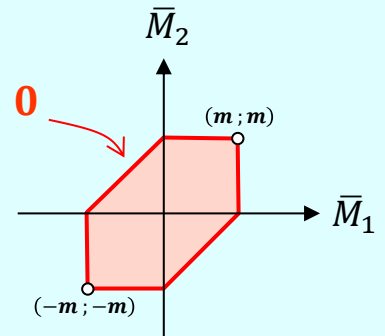
❖ Critère de Tresca

✓ Domaine de résistance : $G(\bar{\bar{M}}) = \sup_{i,j} \{|M_i| ; |M_i - M_j|\} - m \leq 0$

✓ Fonction π :

$$\pi(\dot{\bar{\chi}}) = m \cdot \sup_{i,j} \{|\dot{\chi}_i| ; |\dot{\chi}_i - \dot{\chi}_j|\}$$

$$\pi(\dot{\omega}) = m|\dot{\omega}| \quad (\text{Discontinuité})$$



❖ Critère de von Mises

✓ Domaine de résistance : $G(\bar{\bar{M}}) = M_1^2 + M_2^2 - M_1 M_2 - \frac{3}{4} m^2 \leq 0$

m - Limite de résistance en flexion

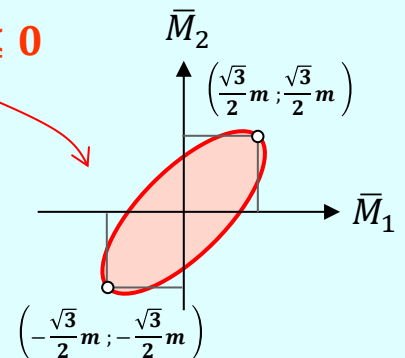
$M_1 \geq M_2$ - Moments principaux

✓ Fonction π :

$$\pi(\dot{\bar{\chi}}) = \sqrt{\dot{\chi}_{xx}^2 + \dot{\chi}_{yy}^2 + \dot{\chi}_{xy}^2 + \dot{\chi}_{xx}\dot{\chi}_{yy}} = \sqrt{\dot{\chi}_1^2 + \dot{\chi}_2^2 + \dot{\chi}_1\dot{\chi}_2}$$

$$\pi(\dot{\omega}) = m|\dot{\omega}| \quad (\text{Discontinuité})$$

$\dot{\chi}_1 \geq \dot{\chi}_2$ - Valeurs principales de $\dot{\bar{\chi}}(\bar{x})$



□ Bases théoriques

• Critères de rupture et fonctions d'appui π correspondantes

2. Milieux continus bidimensionnels (2D) : Plaques en flexion

❖ Critère de Johansen isotrope (Béton armé)

✓ Domaine de résistance : $G(\bar{\bar{M}}) = \sup_i \{M_i - m; -M_i - m'\} \leq 0$

m - Limite de résistance en flexion positive (+)

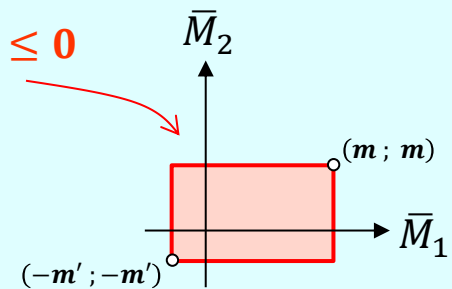
m' - Limite de résistance en flexion négative (-)

✓ Fonction π :

$$\pi(\dot{\bar{\chi}}) = \sup \{m\dot{\chi}_1; -m'\dot{\chi}_1\} + \sup \{m\dot{\chi}_2; -m'\dot{\chi}_2\}$$

$$\pi(\dot{\omega}) = \sup \{m\dot{\omega}; -m'\dot{\omega}\} \quad (\text{Discontinuité})$$

$$\dot{\chi}_1 \geq \dot{\chi}_2 - \text{Valeurs principales de } \dot{\bar{\chi}}(\bar{x})$$



□ Bases théoriques

• Critères de rupture et fonctions d'appui π correspondantes

3. Milieux continus unidimensionnels (1D)

❖ Sections en traction-compression (Systèmes réticulés)

✓ Notations :

$N(s)$ - Effort normal sur la section d'abscisse curviligne s

$\dot{u}(s)$ - Composante tangentielle de la vitesse du point d'abscisse s

$\dot{\epsilon}(s) = d\dot{u}(s)/ds$ - Vitesse (Taux) d'extension à l'abscisse s

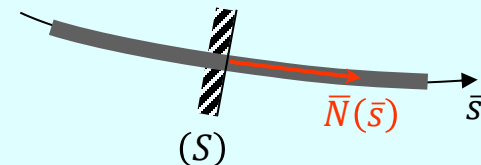
$$\wp_{rm}(\bar{v}) = \wp(\dot{u}) = \int \pi[s, \dot{\epsilon}(s)] ds + \sum_i \pi[s_i, \dot{u}(s_i)]$$

✓ Domaine de résistance :

$$G(N) = \text{Sup}\{N - N_o ; -N - N'_o\} \leq 0$$

N_o - Limite de résistance en traction (+)

N'_o - Limite de résistance en compression (—)



✓ Fonction π :

$$\pi(\dot{\epsilon}) = \text{Sup}\{\dot{\epsilon}N_o ; -\dot{\epsilon}N'_o\}$$

$$\pi(\dot{U}) = \text{Sup}\{\dot{U}N_o ; -\dot{U}N'_o\} \quad (\text{Discontinuité})$$

<u>3D</u>	<u>1D</u>
$\bar{\sigma}$	$\bar{N}$
$\bar{d}$	$\dot{\epsilon}$
$\bar{V} = \llbracket \bar{v} \rrbracket$	$\dot{U}(s) = \llbracket \dot{u}(s) \rrbracket$

□ Bases théoriques

• Critères de rupture et fonctions d'appui π correspondantes

3. Milieux continus unidimensionnels (1D)

❖ Sections en flexion simple (Poutres)

✓ Notations :

$M(s)$ - Moment fléchissant sur la section d'abscisse curviligne s

$\dot{\omega}(s)$ - Composante de la vitesse de rotation de la section d'abscisse s

$\dot{\chi}(s) = d\dot{\omega}(s)/ds$ - Vitesse (Taux) de courbure à l'abscisse s

$\dot{\theta}(s) = \llbracket \dot{\omega}(s) \rrbracket = \dot{\omega}(S^+) - \dot{\omega}(S^-)$ - Discontinuité de $\dot{\omega}$ à l'abscisse s

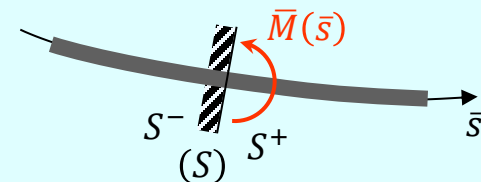
$$\wp_{rm}(\bar{v}) = \wp(\dot{\omega}) = \int \pi[s, \dot{\theta}(s)] ds + \sum_i \pi[s_i, \dot{\theta}(s_i)]$$

✓ Domaine de résistance :

$$G(M) = \text{Sup}\{M - m; -M - m'\} \leq 0$$

m - Limite de résistance en flexion positive (+)

m' - Limite de résistance en flexion négative (-)



✓ Fonction π :

$$\pi(\dot{\chi}) = \text{Sup}\{\dot{\chi}m; -\dot{\chi}m'\}$$

$$\pi(\dot{\theta}) = \text{Sup}\{\dot{\theta}m; -\dot{\theta}m'\} \quad (\text{Discontinuité})$$

3D

$\bar{\sigma}$

$\bar{d}$

$\bar{V} = \llbracket \bar{v} \rrbracket$

1D

$\bar{M}$

$\dot{\chi}$

$\dot{\theta}(s) = \llbracket \dot{\omega}(s) \rrbracket$

□ Bases théoriques

• Critères de rupture et fonctions d'appui π correspondantes

3. Milieux continus unidimensionnels (1D)

❖ Sections en torsion (Poutres)

✓ Notations :

$T(s)$ - Couple de torsion sur la section d'abscisse curviligne s

$\dot{\alpha}(s)$ - Composante tangentielle de la vitesse de rotation de la section d'abscisse s

$\dot{\psi}(s) = d\dot{\alpha}(s)/ds$ - Vitesse (Taux) de torsion à l'abscisse s

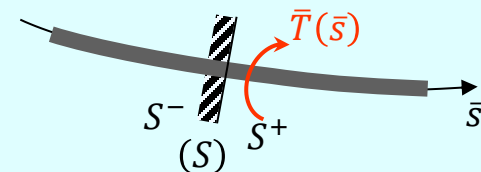
$\dot{\Psi}(s) = \llbracket \dot{\alpha}(s) \rrbracket = \dot{\alpha}(s^+) - \dot{\alpha}(s^-)$ - Discontinuité de $\dot{\alpha}$ à l'abscisse s

$$\wp_{rm}(\bar{v}) = \wp(\dot{\alpha}) = \int \pi[\bar{s}, \dot{\psi}(s)] ds + \sum_i \pi[s_i, \dot{\psi}(s_i)]$$

✓ Domaine de résistance :

$$G(T) = \text{Sup}\{T - T_o ; -T - T_o\} \leq 0$$

T_o - Limite de résistance en torsion



✓ Fonction π :

$$\pi(\dot{\psi}) = \text{Sup}\{\dot{\psi}T_o ; -\dot{\psi}T_o\}$$

$$\pi(\dot{\Psi}) = \text{Sup}\{\dot{\Psi}T_o ; -\dot{\Psi}T_o\} \quad (\text{Discontinuité})$$

<u>3D</u>	<u>1D</u>
$\bar{\sigma}$	$\bar{T}$
$\bar{d}$	$\dot{\psi}$
$\bar{V} = \llbracket \bar{v} \rrbracket$	$\dot{\Psi}(s) = \llbracket \dot{\alpha}(s) \rrbracket$

□ Bases théoriques

- **Critères de rupture et fonctions d'appui π correspondantes**

3. Milieux continus unidimensionnels (1D)

❖ Sections rectangulaires en flexion déviée

✓ Notations :

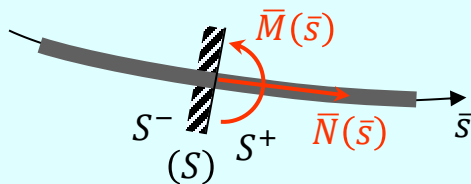
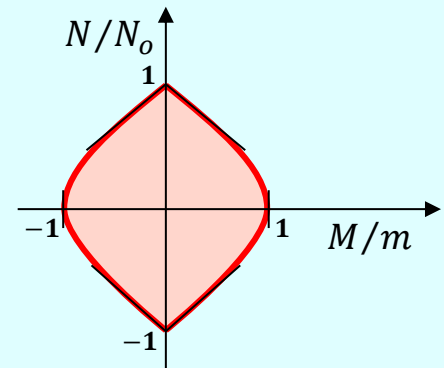
$$\wp_{rm}(\bar{\mathbf{v}}) = \wp(\dot{\mathbf{u}}, \dot{\omega}) = \int \pi[s, \dot{\epsilon}(s), \dot{\chi}(s)] ds + \sum_i \pi[s_i, \dot{u}(s_i), \dot{\theta}(s_i)]$$

✓ Domaine de résistance :

$$G(M, N) = \left| \frac{M}{m} \right| + \left(\frac{N}{N_o} \right)^2 - 1 \leq 0$$

m - Limite de résistance en flexion pure

N_o - Limite de résistance en traction-compression



Remarque : Le matériau constitutif de la section est supposé homogène et régi par les critères de von Mises ou de Tresca.

□ Bases théoriques

- **Critères de rupture et fonctions d'appui π correspondantes**

3. Milieux continus unidimensionnels (1D)

❖ Sections rectangulaires en flexion déviée

✓ Fonction π :

$$\pi(\dot{\epsilon}, \dot{\chi}) = \begin{cases} \frac{4(m\dot{\chi})^2 + (N_o\dot{\epsilon})^2}{4|m\dot{\chi}|} & si \quad \left| \frac{N_o\dot{\epsilon}}{2m\dot{\chi}} \right| < 1 \\ N_o|\dot{\epsilon}| & si \quad \left| \frac{N_o\dot{\epsilon}}{2m\dot{\chi}} \right| \geq 1 \end{cases}$$

$$\pi(\dot{U}, \dot{\theta}) = \begin{cases} \frac{4(m\dot{\theta})^2 + (N_o\dot{U})^2}{4|m\dot{\theta}|} & si \quad \left| \frac{N_o\dot{U}}{2m\dot{\theta}} \right| < 1 \\ N_o|\dot{U}| & si \quad \left| \frac{N_o\dot{U}}{2m\dot{\theta}} \right| \geq 1 \end{cases}$$

□ Bases théoriques

- **Critères de rupture et fonctions d'appui π correspondantes**

3. Milieux continus unidimensionnels (1D)

❖ Sections "I" en flexion déviée

- ✓ Notations :

$$\wp_{rm}(\bar{v}) = \wp(\dot{u}, \dot{\omega}) = \int \pi[s, \dot{\epsilon}(s), \dot{\chi}(s)] ds + \sum_i \pi[s_i, \dot{u}(s_i), \dot{\theta}(s_i)]$$

- ✓ Domaine de résistance :

$$G(M, N) = \left| \frac{M}{m} \right| + \left| \frac{N}{N_o} \right| - 1 \leq 0$$

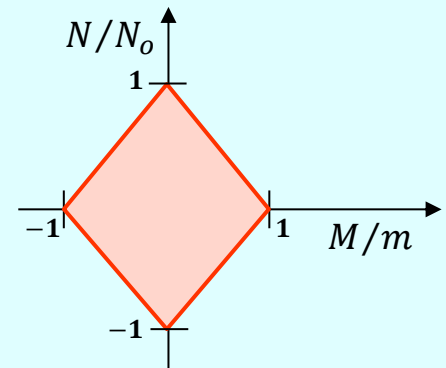
m - Limite de résistance en flexion pure

N_o - Limite de résistance en traction-compression

- ✓ Fonction π :

$$\pi(\dot{\epsilon}, \dot{\chi}) = \text{Sup}\{N_o |\dot{\epsilon}| ; m |\dot{\chi}|\}$$

$$\pi(\dot{U}, \dot{\theta}) = \text{Sup}\{N_o |\dot{U}| ; m |\dot{\theta}|\}$$



□ Bases théoriques

- **Critères de rupture et fonctions d'appui π correspondantes**

3. Milieux continus unidimensionnels (1D)

❖ Sections "Double T" en flexion déviée

✓ Notations :

$$\wp_{rm}(\bar{v}) = \wp(\dot{u}, \dot{\omega}) = \int \pi[s, \dot{\epsilon}(s), \dot{\chi}(s)] ds + \sum_i \pi[s_i, \dot{v}(s_i), \dot{\theta}(s_i)]$$

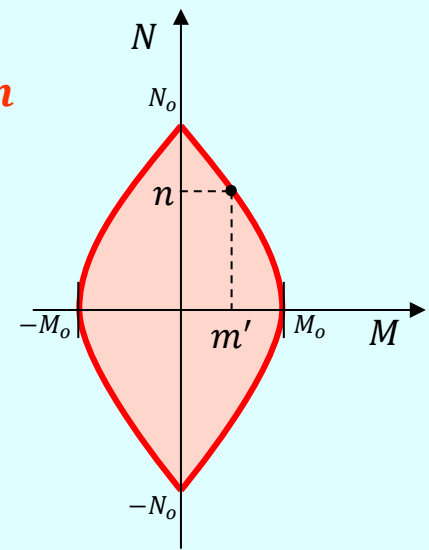
✓ Domaine de résistance :

$$G(M, N) = \begin{cases} \frac{|M| - m'}{m - m'} + \left(\frac{N}{n}\right)^2 - 1 \leq 0 & \text{si } m' \leq |M| \leq m \\ 2 \frac{|N| - n}{n} + \frac{|M| - m'}{m - m'} \leq 0 & \text{si } |M| \leq m' \end{cases}$$

m - Limite de résistance en flexion pure

N_o - Limite de résistance en traction-compression

Nota : $N_o = \frac{n(2m - m')}{2(m - m')}$



□ Bases théoriques

- **Critères de rupture et fonctions d'appui π correspondantes**

3. Milieux continus unidimensionnels (1D)

❖ Sections "Double T" en flexion déviée

✓ Fonction π :

$$\pi(\dot{\epsilon}, \dot{\chi}) = \begin{cases} \frac{m(2m-m')^2 \dot{\chi}^2 + (m-m')(N_o \dot{\epsilon})^2}{(2m-m')^2 |\dot{\chi}|} & si \quad \left| \frac{N_o \dot{\epsilon}}{(2m-m') \dot{\chi}} \right| \leq 1 \\ N_o |\dot{\epsilon}| & si \quad \left| \frac{N_o \dot{\epsilon}}{(2m-m') \dot{\chi}} \right| \geq 1 \end{cases}$$

$$\pi(\dot{U}, \dot{\theta}) = \begin{cases} \frac{m(2m-m')^2 \dot{\theta}^2 + (m-m')(N_o \dot{U})^2}{(2m-m')^2 |\dot{\theta}|} & si \quad \left| \frac{N_o \dot{U}}{(2m-m') \dot{\theta}} \right| \leq 1 \\ N_o |\dot{U}| & si \quad \left| \frac{N_o \dot{U}}{(2m-m') \dot{\theta}} \right| \geq 1 \end{cases}$$

□ Bases théoriques

• Critères de rupture et fonctions d'appui π correspondantes

3. Milieux continus unidimensionnels (1D)

❖ Sections tubulaires minces en traction-torsion

✓ Notations :

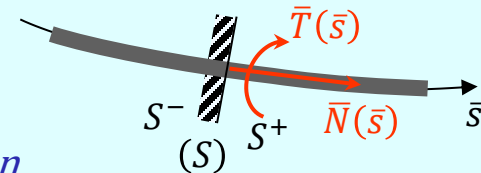
$$\wp_{rm}(\bar{\nu}) = \wp(\dot{\mathbf{u}}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}) = \int \pi[s, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(s), \dot{\boldsymbol{\psi}}(s)] ds + \sum_i \pi[s_i, \dot{\mathbf{u}}(s_i), \dot{\boldsymbol{\psi}}(s_i)]$$

✓ Domaine de résistance :

$$G(N, T) = \left(\frac{N}{N_o}\right)^2 + \left(\frac{T}{T_o}\right)^2 - 1 \leq 0$$

N_o - Limite de résistance en traction-compression

T_o - Limite de résistance en torsion pure



✓ Fonction π :

$$\pi(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \dot{\boldsymbol{\psi}}) = \sqrt{N_o^2 \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^2 + T_o^2 \dot{\boldsymbol{\psi}}^2}$$

$$\pi(\dot{\mathbf{U}}, \dot{\boldsymbol{\psi}}) = \sqrt{N_o^2 \dot{\mathbf{U}}^2 + T_o^2 \dot{\boldsymbol{\psi}}^2}$$

Remarque : Le matériau constitutif de la section est supposé homogène et régi par les critères de von Mises ou de Tresca.

□ Bases théoriques

• **Critères de rupture et fonctions d'appui π correspondantes**

3. Milieux continus unidimensionnels (1D)

❖ Sections tubulaires minces en flexion-torsion

✓ Notations :

$$\wp_{rm}(\bar{v}) = \wp(\dot{\omega}, \dot{\alpha}) = \int \pi[s, \dot{\chi}(s), \dot{\psi}(s)] ds + \sum_i \pi[s_i, \dot{\theta}(s_i), \dot{\psi}(s_i)]$$

✓ Domaine de résistance :

$$G(M, T) = \left(\frac{M}{m}\right)^2 + \left(\frac{T}{T_o}\right)^2 - 1 \leq 0$$

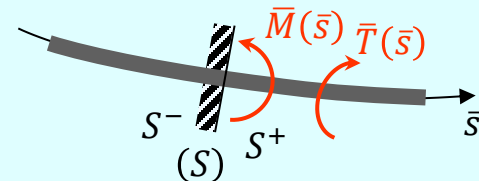
m - Limite de résistance en flexion pure

T_o - Limite de résistance en torsion pure

✓ Fonction π :

$$\pi(\dot{\chi}, \dot{\psi}) = \sqrt{m^2 \dot{\chi}^2 + T_o^2 \dot{\psi}^2}$$

$$\pi(\dot{\theta}, \dot{\psi}) = \sqrt{m^2 \dot{\theta}^2 + T_o^2 \dot{\psi}^2}$$



Remarque : Le matériau constitutif de la section est supposé homogène et régi par le critère de von Mises.

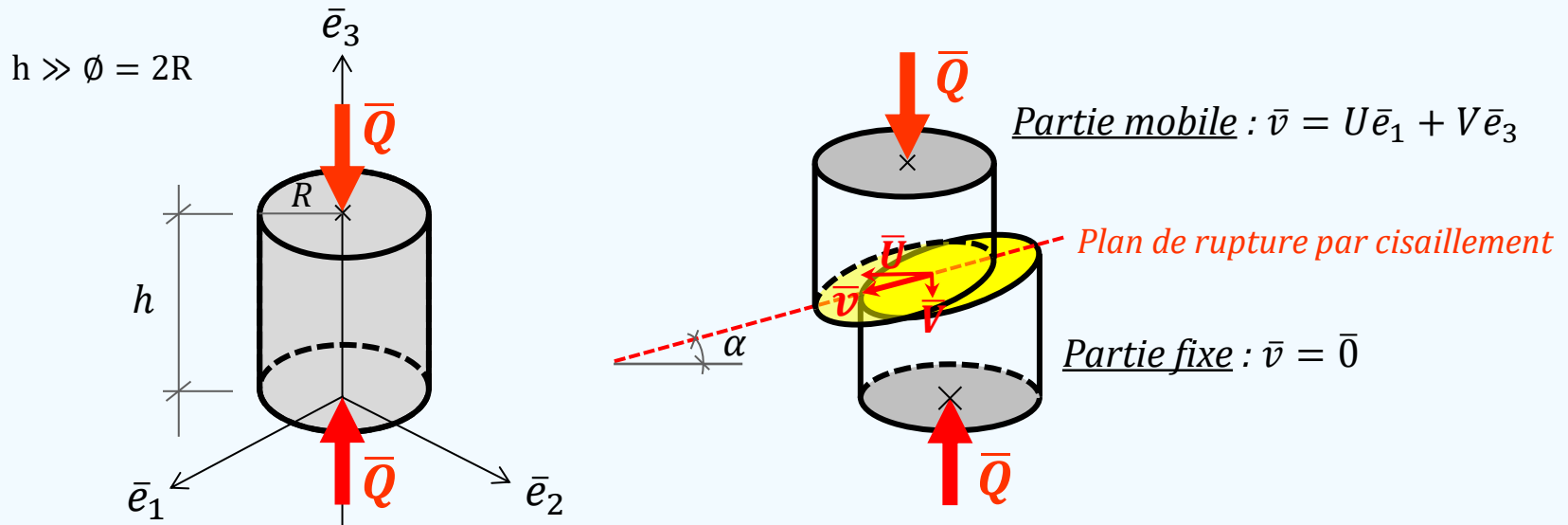
EXEMPLES D'APPLICATION

□ Exemples d'application

• **Cylindre en compression**

Soit un cylindre en béton de limite de résistance σ_o soumis à une force de compression $\bar{Q}$. Déterminer la borne supérieure Q_{max} obéissant aux critères de rupture de Tresca et de von Mises.

a/ Mécanisme de rupture : Cisaillement



Exemples d'application

Cylindre en compression

b/ Puissance des efforts extérieurs

$$\wp_{ext}(\bar{v}) = \bar{Q} \cdot \dot{\bar{q}}(\bar{v})$$

telle que :

$$\dot{\bar{q}}(\bar{v}) = \bar{V}$$

$$\Rightarrow \wp_{ext}(\bar{v}) = \bar{Q} \cdot \bar{V}$$

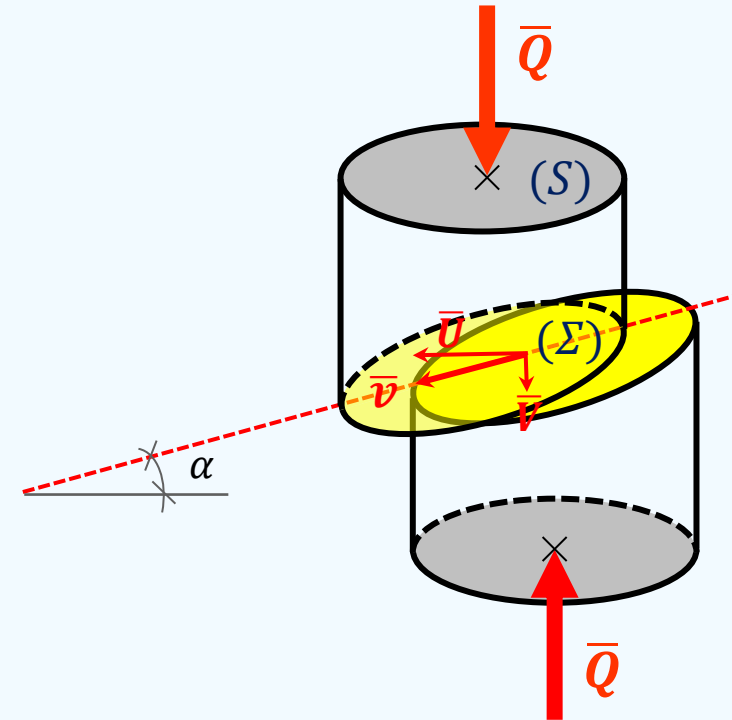
$$\Rightarrow \wp_{ext}(\bar{v}) = QV$$

c/ Puissance résistante maximale

$$\wp_{rm}(\bar{v}) = \int_{\Sigma} \pi[\bar{x}, \bar{n}(\bar{x}), \llbracket \bar{v}(\bar{x}) \rrbracket] d\Sigma$$

d/ Discontinuité des vitesses

$$\llbracket \bar{v} \rrbracket = \sqrt{U^2 + V^2} = V / \sin \alpha$$



Exemples d'application

Cylindre en compression

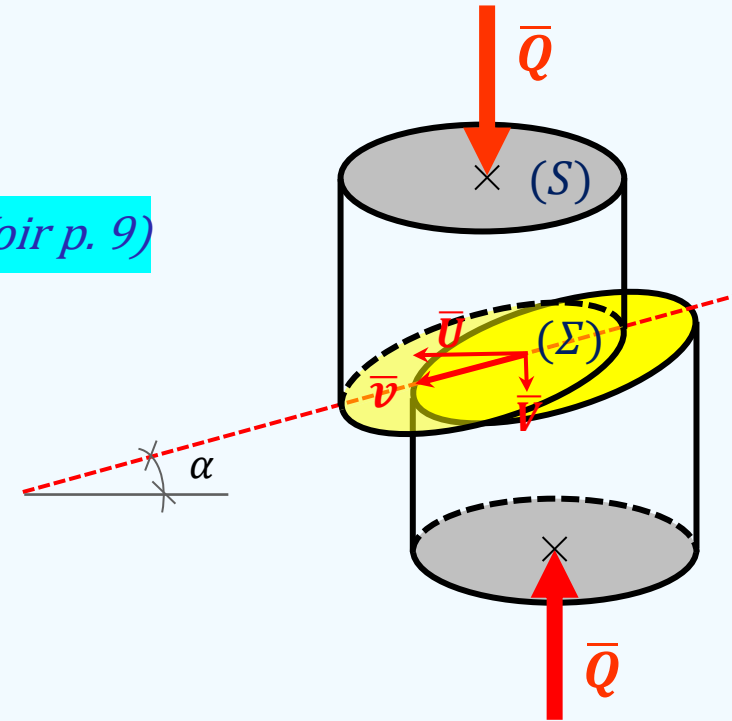
e/ Critère de Tresca

$$\begin{aligned}\pi[\bar{x}, \bar{n}(\bar{x}), \llbracket \bar{v}(\bar{x}) \rrbracket] &= \frac{\sigma_o}{2} |\llbracket \bar{v}(\bar{x}) \rrbracket| \quad (\text{Voir p. 9}) \\ &= \frac{\sigma_o}{2} \llbracket \bar{v}(\bar{x}) \rrbracket^*\end{aligned}$$

avec : $\llbracket \bar{v}(\bar{x}) \rrbracket = V / \sin \alpha$

$$d\Sigma : 0 \rightarrow \Sigma = \frac{S}{\cos \alpha} \quad | \quad S = \pi R^2$$

$$\begin{aligned}\blacktriangleright \quad \wp_{rm}(\bar{v}) &= \int_{\Sigma} \frac{\sigma_o}{2} \llbracket \bar{v}(\bar{x}) \rrbracket d\Sigma \\ \Rightarrow \quad \wp_{rm}(\bar{v}) &= \frac{\sigma_o}{2} \frac{V}{\sin \alpha} \int_0^{\Sigma = \frac{S}{\cos \alpha}} d\Sigma \\ \Rightarrow \quad \wp_{rm}(\bar{v}) &= \frac{\sigma_o}{2} \frac{V}{\sin \alpha} \frac{S}{\cos \alpha} = \frac{\sigma_o V S}{\sin 2\alpha}\end{aligned}$$



* Contrairement aux conventions de la MMC, on adopte ici le signe + pour la compression.

Exemples d'application

Cylindre en compression

e/ Critère de Tresca

$$\wp_{ext}(\bar{v}) \leq \wp_{rm}(\bar{v})$$

$$\Rightarrow QV \leq \frac{\sigma_o V S}{\sin 2\alpha}$$

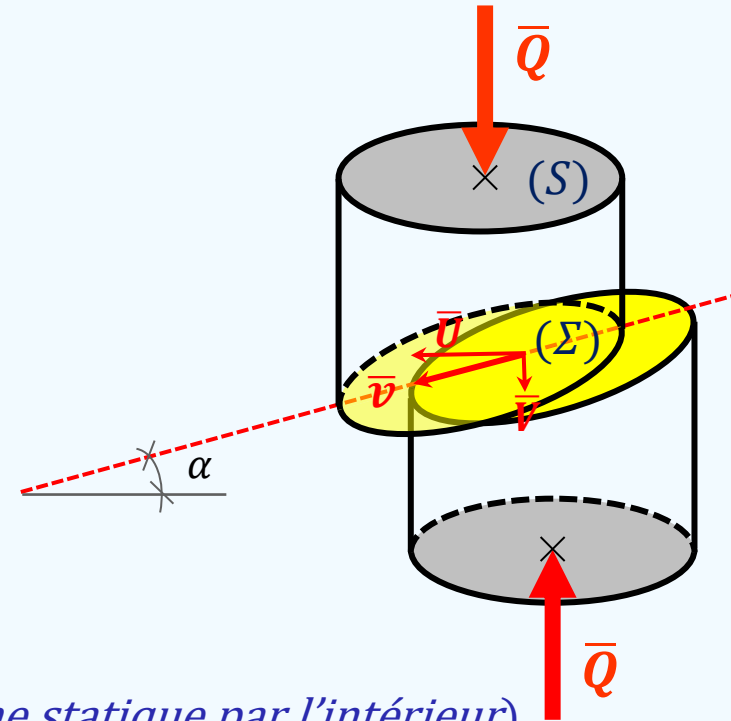
$$\Rightarrow Q \leq \frac{\sigma_o S}{\sin 2\alpha}$$

Optimisation : $\alpha = \pi/4$

$$\Rightarrow Q_{max} = \sigma_o S$$

Remarque : Sachant que $Q_{min} = \sigma_o S$ (Approche statique par l'intérieur), les deux bornes inférieure et supérieure coïncident.

$$\Rightarrow Q_{min} = Q_{max} = Q_{ult} = \sigma_o S$$



Exemples d'application

Cylindre en compression

f/ Critère de von Mises

$$\pi[\bar{x}, \bar{n}(\bar{x}), \llbracket \bar{v}(\bar{x}) \rrbracket] = k \llbracket \bar{v}(\bar{x}) \rrbracket \quad (\text{Voir p. 10})$$

avec : $k = \sigma_0 / \sqrt{3}$ (Compression simple*)

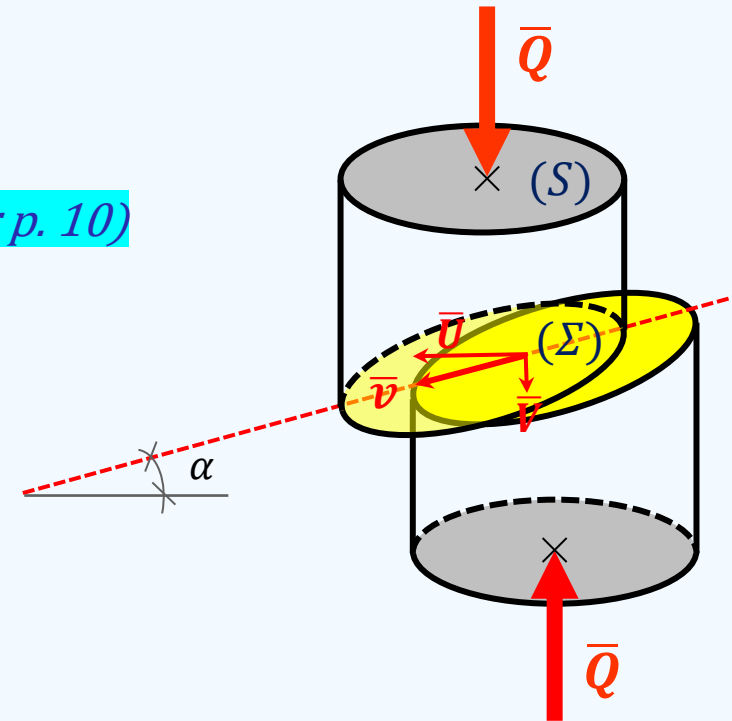
$$\llbracket \bar{v}(\bar{x}) \rrbracket = V / \sin \alpha$$

$$d\Sigma : 0 \rightarrow \Sigma = \frac{S}{\cos \alpha} \quad | \quad S = \pi R^2$$

$$\triangleright \mathcal{P}_{rm}(\bar{v}) = \int_{\Sigma} k \llbracket \bar{v}(\bar{x}) \rrbracket d\Sigma$$

$$\Rightarrow \mathcal{P}_{rm}(\bar{v}) = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \frac{V}{\sin \alpha} \int_0^{\Sigma = \frac{S}{\cos \alpha}} d\Sigma$$

$$\Rightarrow \mathcal{P}_{rm}(\bar{v}) = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \frac{V}{\sin \alpha} \frac{S}{\cos \alpha} = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \frac{VS}{\sin 2\alpha}$$



* Contrairement aux conventions de la MMC, on adopte ici le signe + pour la compression.

Exemples d'application

Cylindre en compression

f/ Critère de von Mises

$$\wp_{ext}(\bar{v}) \leq \wp_{rm}(\bar{v})$$

$$\Rightarrow QV \leq \frac{2\sigma_o}{\sqrt{3}} \frac{VS}{\sin 2\alpha}$$

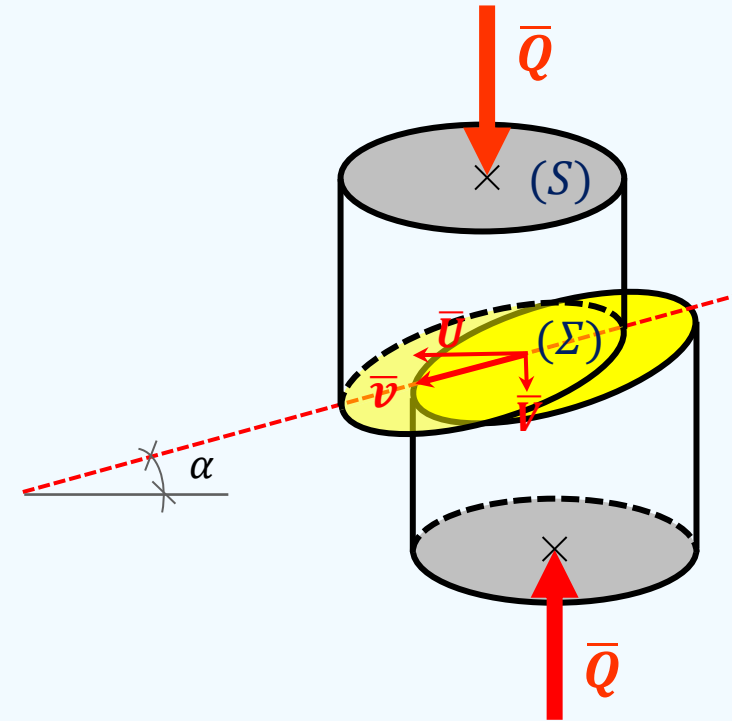
$$\Rightarrow Q \leq \frac{2\sigma_o}{\sqrt{3}} \frac{S}{\sin 2\alpha}$$

Optimisation : $\alpha = \pi/4$

$$\Rightarrow Q_{max} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_o S$$

Remarque : Sachant que $Q_{min} = \sigma_o S$ (*Approche statique par l'intérieur*), d'où l'encadrement suivant :

$$\Rightarrow Q_{min} = \sigma_o S \leq Q_{ult} \leq Q_{max} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_o S$$



33

Exemples d'application

Cylindre en torsion

b/ Puissance des efforts extérieurs

$$\wp_{ext}(\bar{\mathbf{v}}) = \bar{\mathbf{Q}} \cdot \dot{\bar{\mathbf{q}}}(\bar{\mathbf{v}})$$

tels que :

$$\bar{\mathbf{Q}} = \bar{T}$$

$$\dot{\bar{\mathbf{q}}}(\bar{\mathbf{v}}) = \alpha \text{ (Taux de distorsion)}$$

$$\Rightarrow \wp_{ext}(\bar{\mathbf{v}}) = T\alpha$$

c/ Puissance résistante maximale

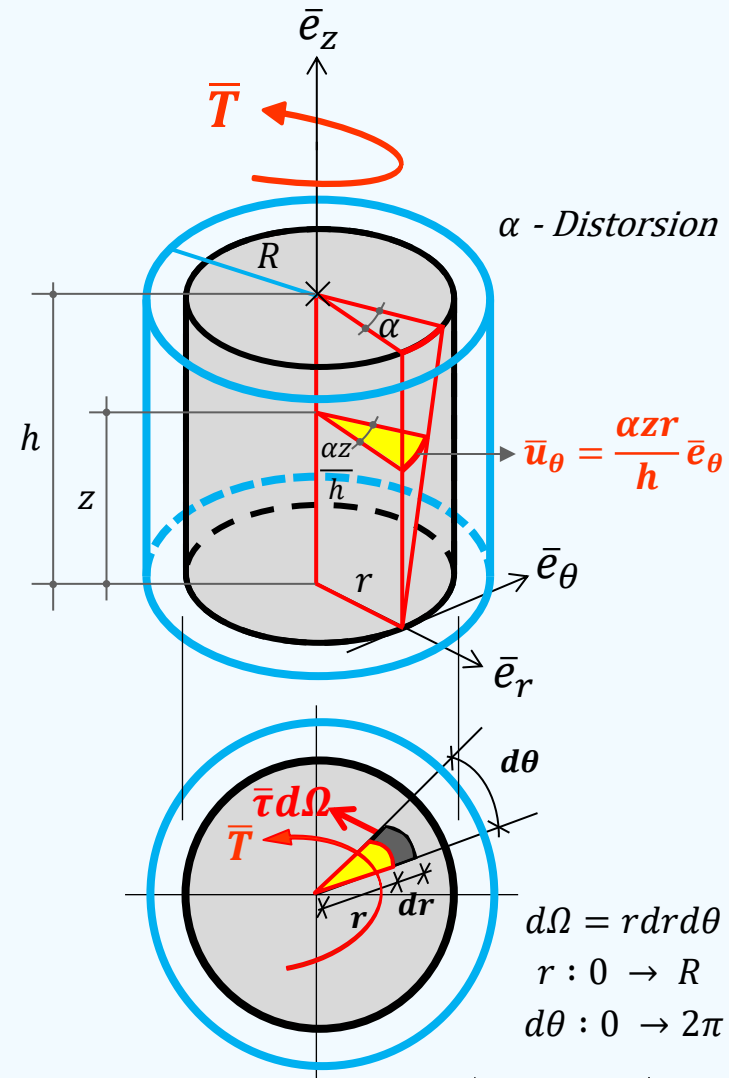
$$\wp_{rm}(\bar{\mathbf{v}}) = \int_V \pi[\bar{\mathbf{x}}, \bar{\bar{\mathbf{d}}}(\bar{\mathbf{x}})] dV$$

tels que :

$$dV = 2\pi h r dr$$

$$r : 0 \rightarrow R$$

$\bar{\bar{\mathbf{d}}}$ - Tenseur des vitesses de déformation



Exemples d'application

Cylindre en torsion

d/ Tenseur des vitesses de déformation

$$\bar{d} = \frac{1}{2} [\overline{\text{grad}}(\bar{v}) + {}^t\overline{\text{grad}}(\bar{v})]$$

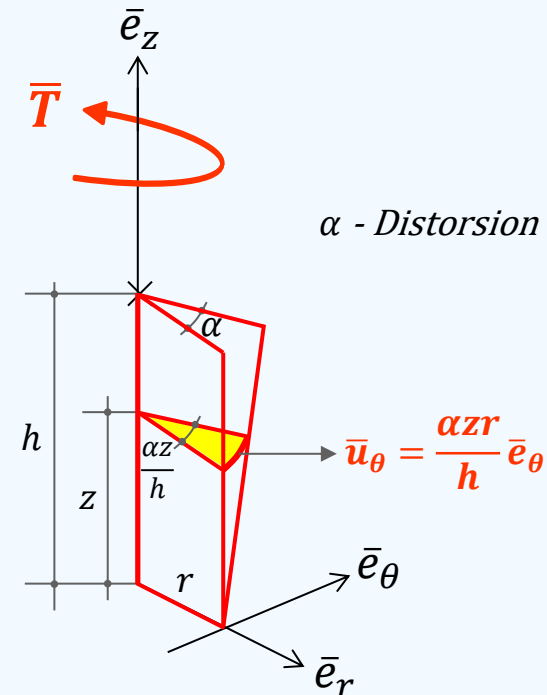
tels que :

$$\bar{v} = \cancel{v_r} \bar{e}_r + v_\theta \bar{e}_\theta + \cancel{v_z} \bar{e}_z = \frac{\dot{\alpha} r z}{h} \bar{e}_\theta \quad | \quad v_\theta = \dot{u}_\theta$$

$$\overline{\text{grad}}(\bar{v}) = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = v_{i,j} = \begin{pmatrix} v_{r,r} & v_{r,\theta} & v_{r,z} \\ & v_{\theta,\theta} & v_{\theta,z} \\ \text{sym.} & & v_{z,z} \end{pmatrix}$$

où :

$$\begin{aligned} v_{r,r} &= \frac{\partial v_r}{\partial r} = ? & v_{\theta,\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} = ? \\ v_{z,z} &= \frac{\partial v_z}{\partial z} = ? & v_{r,\theta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) = ? \\ v_{\theta,z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right) = ? & v_{r,z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) = ? \end{aligned}$$



Exemples d'application

Cylindre en torsion

d/ Tenseur des vitesses de déformation

$$\bar{d} = \frac{1}{2} [\overline{\text{grad}}(\bar{v}) + {}^t\overline{\text{grad}}(\bar{v})]$$

tels que :

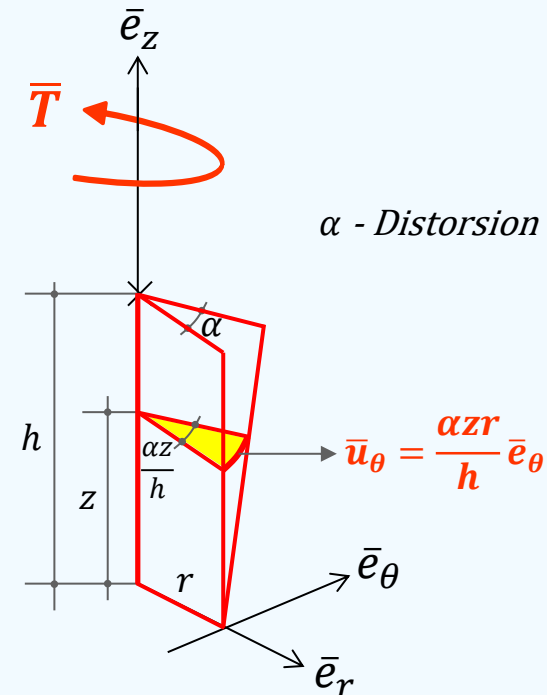
$$\bar{v} = \cancel{v_r} \bar{e}_r + v_\theta \bar{e}_\theta + \cancel{v_z} \bar{e}_z = \frac{\dot{\alpha} r z}{h} \bar{e}_\theta \quad | \quad v_\theta = \dot{u}_\theta$$

$$\overline{\text{grad}}(\bar{v}) = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = v_{i,j} = \begin{pmatrix} v_{r,r} & v_{r,\theta} & v_{r,z} \\ & v_{\theta,\theta} & v_{\theta,z} \\ \text{sym.} & & v_{z,z} \end{pmatrix}$$

où : $v_{r,r} = \frac{\partial v_r}{\partial r} = 0 \quad ; \quad v_{\theta,\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} = 0$

$$v_{z,z} = \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad ; \quad v_{r,\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{\alpha} z}{h} - \frac{\dot{\alpha} z}{h} + 0 \right) = 0$$

$$v_{\theta,z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{\alpha} r}{h} + 0 \right) = \frac{\dot{\alpha} r}{2h} \quad ; \quad v_{r,z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) = 0$$



Exemples d'application

Cylindre en torsion

d/ Tenseur des vitesses de déformation

$$\Rightarrow \bar{\bar{d}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\alpha}r/2h \\ 0 & \dot{\alpha}r/2h & 0 \end{pmatrix} = \frac{\dot{\alpha}r}{2h} (\bar{e}_\theta \otimes \bar{e}_z + \bar{e}_z \otimes \bar{e}_\theta)$$

$$\Rightarrow d_1 = ?$$

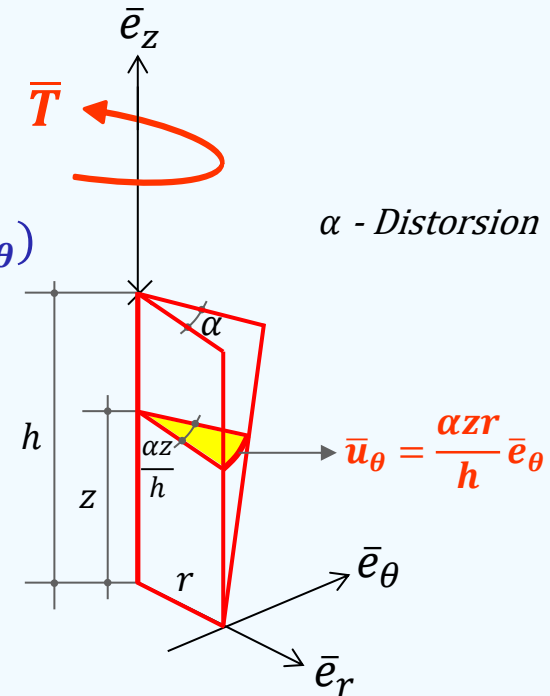
$$d_2 = ?$$

$$d_3 = ?$$

e/ Taux de déformation équivalente

$$d_{eq} = \sqrt{\frac{2}{3} Tr(\bar{\bar{d}}^2)} = \sqrt{\frac{2}{3} d_{ij} d_{ji}} = \sqrt{\frac{2}{3} (d_1^2 + d_2^2 + d_3^2)}$$

$$\Rightarrow d_{eq} = \sqrt{\frac{2}{3} \left[\left(\frac{\dot{\alpha}r}{2h} \right)^2 + \left(\frac{\dot{\alpha}r}{2h} \right)^2 + 0 \right]} \Rightarrow d_{eq} = \frac{\dot{\alpha}r}{\sqrt{3}h}$$



Exemples d'application

Cylindre en torsion

d/ Tenseur des vitesses de déformation

$$\Rightarrow \bar{\bar{d}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\alpha}r/2h \\ 0 & \dot{\alpha}r/2h & 0 \end{pmatrix} = \frac{\dot{\alpha}r}{2h} (\bar{e}_\theta \otimes \bar{e}_z + \bar{e}_z \otimes \bar{e}_\theta)$$

$$\Rightarrow d_1 = \frac{0+0}{2} + \sqrt{\left(\frac{0-0}{2}\right)^2 + \left(\frac{\dot{\alpha}r}{2h}\right)^2} = +\frac{\dot{\alpha}r}{2h}$$

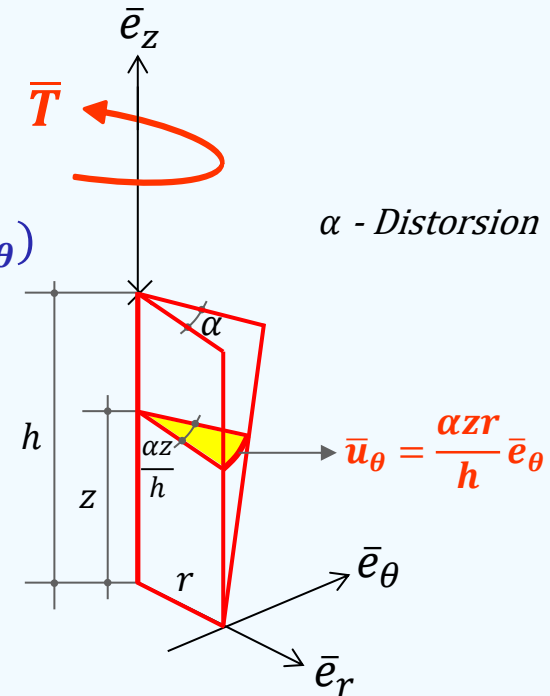
$$d_2 = \frac{0+0}{2} - \sqrt{\left(\frac{0-0}{2}\right)^2 + \left(\frac{\dot{\alpha}r}{2h}\right)^2} = -\frac{\dot{\alpha}r}{2h}$$

$$d_3 = 0$$

e/ Taux de déformation équivalente

$$d_{eq} = \sqrt{\frac{2}{3} Tr(\bar{\bar{d}}^2)} = \sqrt{\frac{2}{3} d_{ij} d_{ji}} = \sqrt{\frac{2}{3} (d_1^2 + d_2^2 + d_3^2)}$$

$$\Rightarrow d_{eq} = \sqrt{\frac{2}{3} \left[\left(\frac{\dot{\alpha}r}{2h}\right)^2 + \left(\frac{\dot{\alpha}r}{2h}\right)^2 + 0 \right]} \Rightarrow d_{eq} = \frac{\dot{\alpha}r}{\sqrt{3}h}$$



Exemples d'application

Cylindre en torsion

f/ Critère de Tresca

$$\pi[\bar{x}, \bar{d}(\bar{x})] = \frac{\sigma_o}{2} (|d_1| + |d_2| + |d_3|) \quad (\text{Voir p. 9})$$

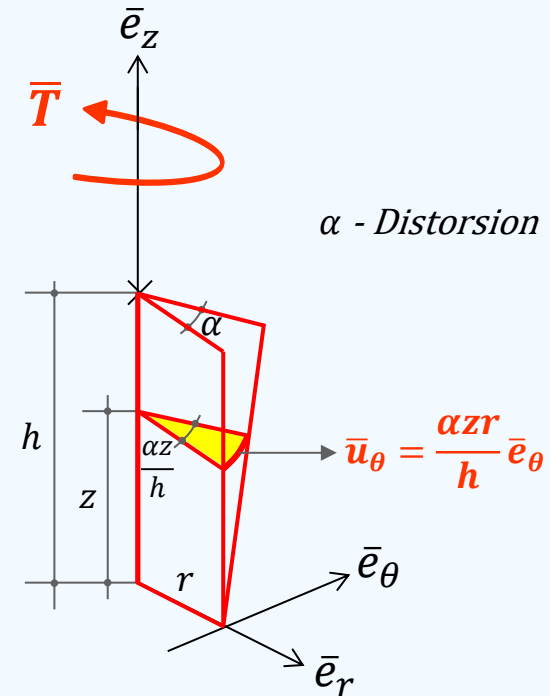
$$\triangleright \wp_{rm}(\bar{v}) = \int_V \pi[\bar{x}, \bar{d}(\bar{x})] dV$$

$$\Rightarrow \wp_{rm}(\bar{v}) = \int_0^{r=R} \frac{\sigma_o}{2} \left(\frac{\dot{\alpha} r}{2h} + \frac{\dot{\alpha} r}{2h} + 0 \right) 2\pi h r dr$$

$$\Rightarrow \wp_{rm}(\bar{v}) = \frac{\pi R^3}{3} \sigma_o \dot{\alpha}$$

$$\triangleright \wp_{ext}(\bar{v}) \leq \wp_{rm}(\bar{v})$$

$$\Rightarrow T \dot{\alpha} \leq \frac{\pi R^3}{3} \sigma_o \dot{\alpha} \quad \Rightarrow \quad T_{max} = \frac{\pi R^3}{3} \sigma_o$$



Remarque : Sachant que $T_{min} = \frac{\pi R^3}{3} \sigma_o$ (*Approche statique par l'intérieur*), les deux bornes inférieure et supérieure coïncident.

$$\Rightarrow T_{min} = T_{max} = T_{ult} = \frac{\pi R^3}{3} \sigma_o$$



Exemples d'application

Cylindre en torsion

g/ Critère de von Mises

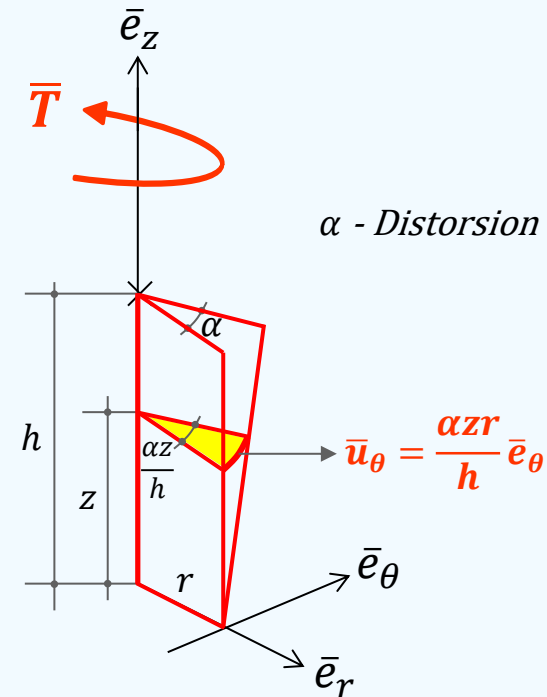
$$\pi[\bar{x}, \bar{d}(\bar{x})] = \sigma_o d_{eq} \quad | \quad d_{eq} = \frac{\dot{\alpha} r}{\sqrt{3}h} \quad (\text{Voir p. 10})$$

$$\triangleright \wp_{rm}(\bar{v}) = \int_V \sigma_o \frac{\dot{\alpha} r}{\sqrt{3}h} 2\pi h r dr = \frac{2\pi R^3}{3\sqrt{3}} \sigma_o \dot{\alpha}$$

$$\Rightarrow \wp_{rm}(\bar{v}) = \frac{2\pi R^3}{3\sqrt{3}} \sigma_o \dot{\alpha}$$

$$\triangleright \wp_{ext}(\bar{v}) \leq \wp_{rm}(\bar{v})$$

$$\Rightarrow T \dot{\alpha} \leq \frac{2\pi R^3}{3\sqrt{3}} \sigma_o \dot{\alpha} \quad \Rightarrow \quad T_{max} = \frac{2\pi R^3}{3\sqrt{3}} \sigma_o$$



Remarque : Sachant que $T_{min} = \frac{2\pi R^3}{3\sqrt{3}} \sigma_o$ (Approche statique par l'intérieur), les deux bornes inférieure et supérieure coïncident.

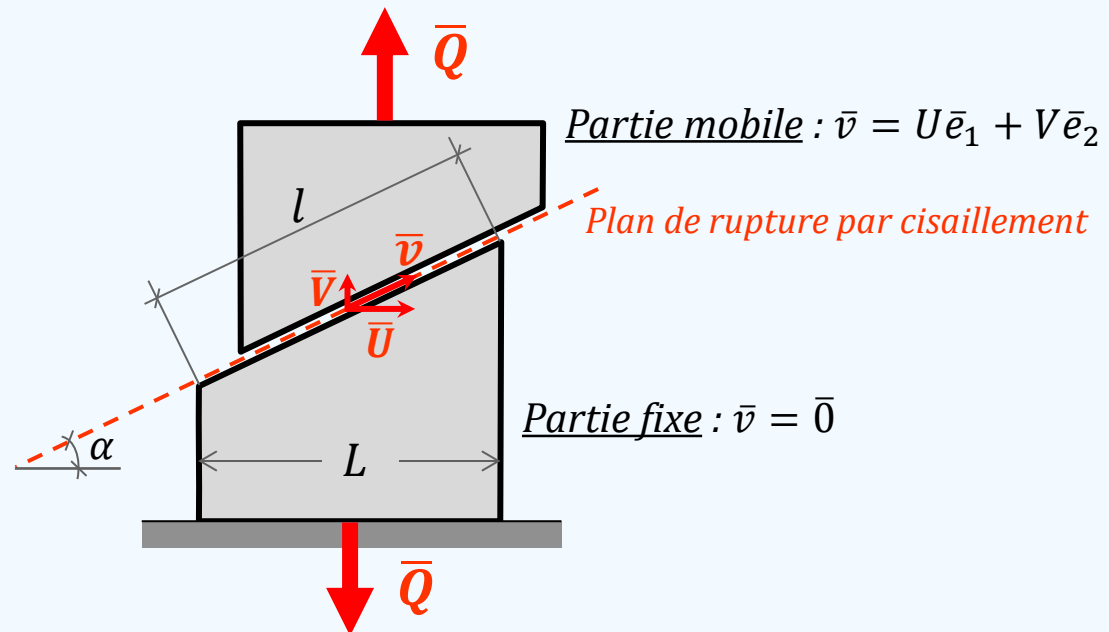
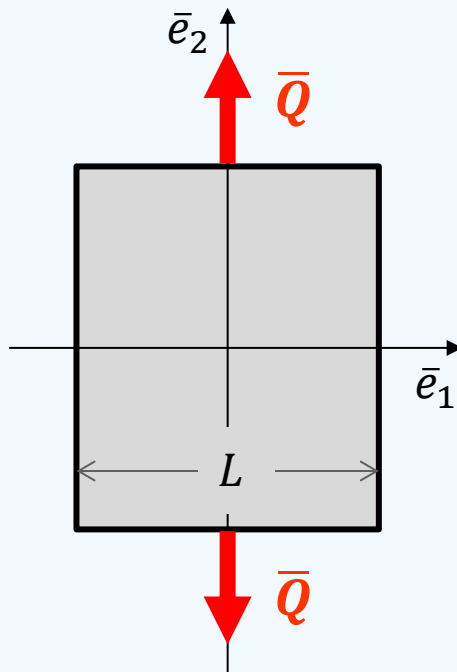
$$\Rightarrow T_{min} = T_{max} = T_{ult} = \frac{2\pi R^3}{3\sqrt{3}} \sigma_o$$

□ Exemples d'application

• **Plaque pleine en traction**

Soit une plaque métallique de limite de résistance σ_o soumise à une force de traction $\bar{Q}$. Déterminer la borne supérieure Q_{max} obéissant aux critères de rupture de Tresca et de von Mises.

a/ Mécanisme de rupture : Cisaillement



□ Exemples d'application

• **Plaque pleine en traction**

b/ Puissance des efforts extérieurs

$$\wp_{ext}(\bar{v}) = \bar{Q} \cdot \dot{\bar{q}}(\bar{v}) \quad | \quad \dot{\bar{q}}(\bar{v}) = \bar{V}$$

$$\Rightarrow \wp_{ext}(\bar{v}) = \bar{Q} \cdot \bar{V}$$

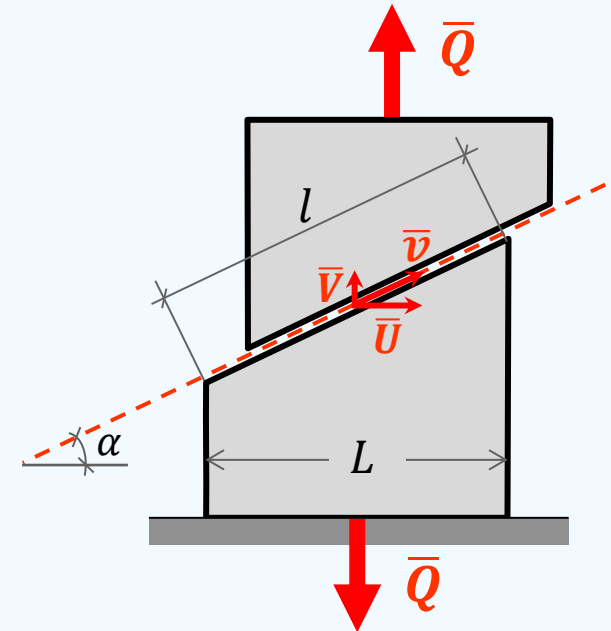
$$\Rightarrow \wp_{ext}(\bar{v}) = QV$$

c/ Puissance résistante maximale

$$\wp_{rm}(\bar{v}) = \int_{\Sigma} \pi[\bar{x}, \bar{n}(\bar{x}), \llbracket \bar{v}(\bar{x}) \rrbracket] d\Sigma$$

d/ Discontinuité des vitesses

$$\llbracket \bar{v} \rrbracket = \sqrt{U^2 + V^2} = V / \sin \alpha$$



Exemples d'application

Plaques pleine en traction

e/ Critère de Tresca

$$\pi[\bar{x}, \bar{n}(\bar{x}), \llbracket \bar{v}(\bar{x}) \rrbracket] = \frac{\sigma_o}{2} \llbracket \bar{v}(\bar{x}) \rrbracket \quad (\text{Voir p. 9})$$

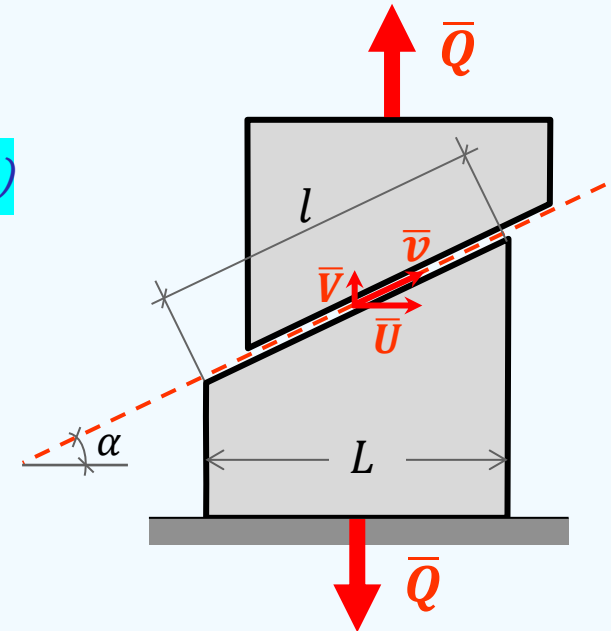
avec : $\llbracket \bar{v}(\bar{x}) \rrbracket = V / \sin \alpha$

$$d\Sigma = 1 \times dl \quad | \quad dl : 0 \rightarrow l = \frac{L}{\cos \alpha}$$

$$\triangleright \mathcal{P}_{rm}(\bar{v}) = \int_{\Sigma} \frac{\sigma_o}{2} \llbracket \bar{v}(\bar{x}) \rrbracket d\Sigma$$

$$\Rightarrow \mathcal{P}_{rm}(\bar{v}) = \frac{\sigma_o}{2} \frac{V}{\sin \alpha} \int_0^{l=\frac{L}{\cos \alpha}} dl$$

$$\Rightarrow \mathcal{P}_{rm}(\bar{v}) = \frac{\sigma_o}{2} \frac{V}{\sin \alpha} \frac{L}{\cos \alpha}$$



Exemples d'application

Plaques pleine en traction

e/ Critère de Tresca

$$\mathcal{P}_{ext}(\bar{v}) \leq \mathcal{P}_{rm}(\bar{v})$$

$$\Rightarrow QV \leq \frac{\sigma_o}{2} \frac{V}{\sin \alpha \cos \alpha} \frac{L}{\sin \alpha \cos \alpha}$$

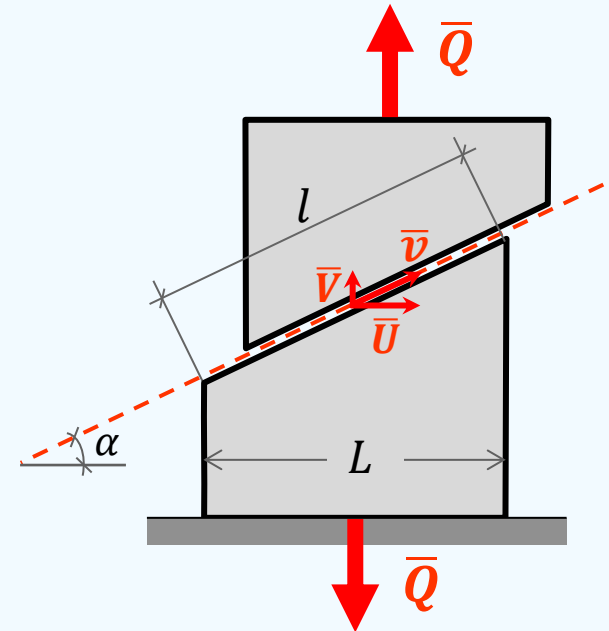
$$\Rightarrow Q \leq \frac{L}{\sin 2\alpha} \sigma_o$$

Optimisation : $\alpha = \pi/4$

$$\Rightarrow Q_{max} = \sigma_o L$$

Remarque : Sachant que $Q_{min} = \sigma_o L$ (Approche statique par l'intérieur), les deux bornes inférieure et supérieure coïncident.

$$\Rightarrow Q_{min} = Q_{max} = Q_{ult} = \sigma_o L$$



Exemples d'application

Plaques pleine en traction

f/ Critère de von Mises

$$\pi[\bar{x}, \bar{n}(\bar{x}), \llbracket \bar{v}(\bar{x}) \rrbracket] = k \llbracket \bar{v}(\bar{x}) \rrbracket \quad (\text{Voir p. 10})$$

avec : $k = \sigma_0 / \sqrt{3}$ (Traction simple)

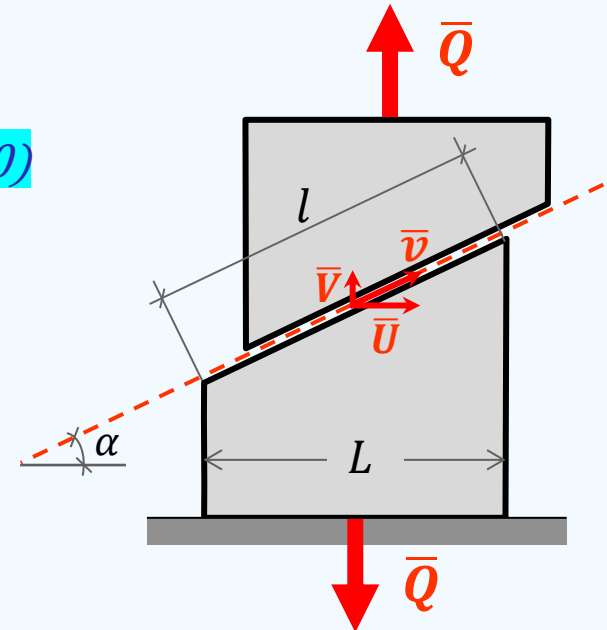
$$\llbracket \bar{v}(\bar{x}) \rrbracket = V / \sin \alpha$$

$$d\Sigma = 1 \times dl \quad | \quad dl : 0 \rightarrow l = \frac{L}{\cos \alpha}$$

$$\triangleright \mathcal{P}_{rm}(\bar{v}) = \int_{\Sigma} k \llbracket \bar{v}(\bar{x}) \rrbracket d\Sigma$$

$$\Rightarrow \mathcal{P}_{rm}(\bar{v}) = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \frac{V}{\sin \alpha} \int_0^{l=\frac{L}{\cos \alpha}} dl$$

$$\Rightarrow \mathcal{P}_{rm}(\bar{v}) = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \frac{V}{\sin \alpha} \frac{L}{\cos \alpha}$$



Exemples d'application

Plaques pleine en traction

f/ Critère de von Mises

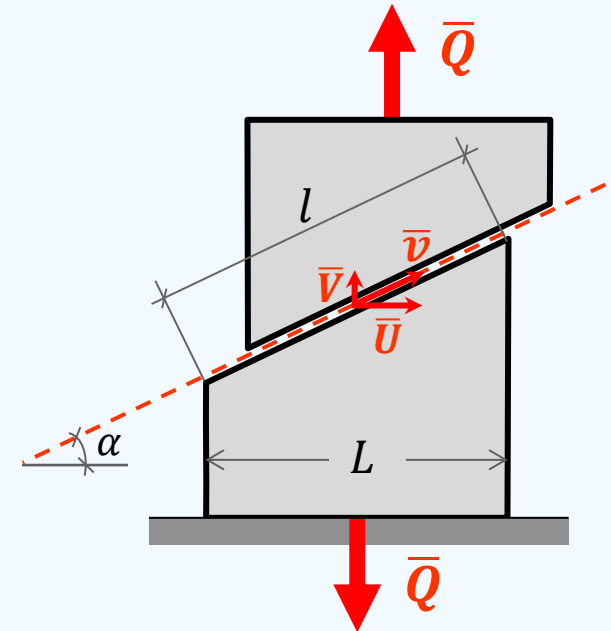
$$\wp_{ext}(\bar{v}) \leq \wp_{rm}(\bar{v})$$

$$\Rightarrow QV \leq \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \frac{V}{\sin \alpha} \frac{L}{\cos \alpha}$$

$$\Rightarrow Q \leq \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \frac{L}{\sin 2\alpha}$$

Optimisation : $\alpha = \pi/4$

$$\Rightarrow Q_{max} = \frac{2\sigma_0 L}{\sqrt{3}}$$



Remarque : Sachant que $Q_{min} = \frac{2\sigma_0 L}{\sqrt{3}}$ (*Approche statique par l'intérieur*), les deux bornes inférieure et supérieure coïncident.

$$\Rightarrow Q_{min} = Q_{max} = Q_{ult} = \frac{2\sigma_0 L}{\sqrt{3}}$$

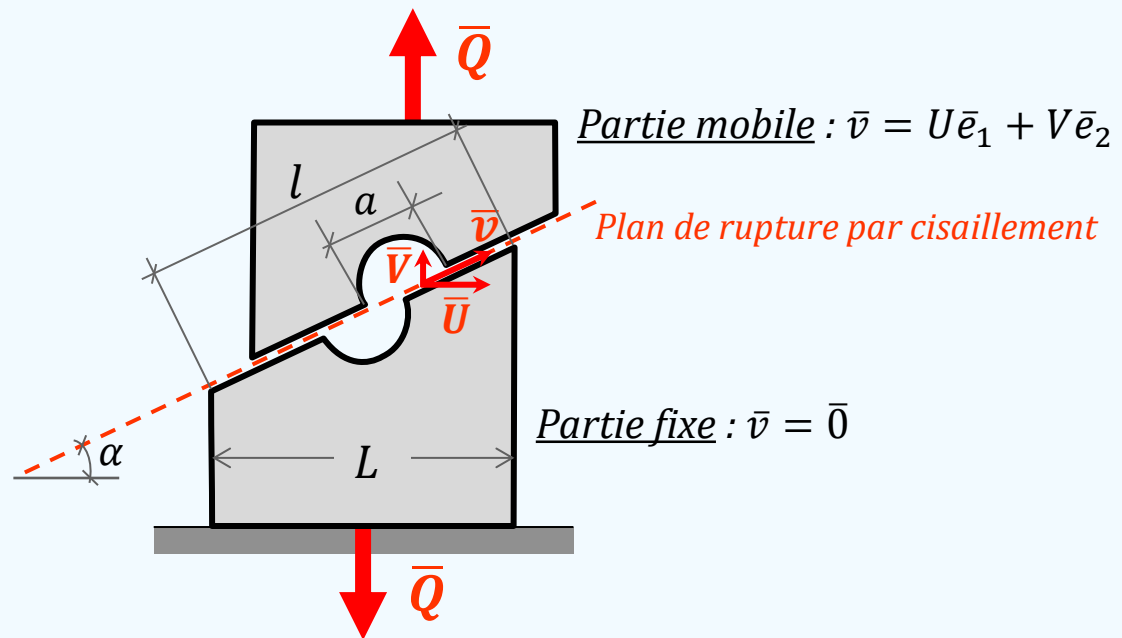
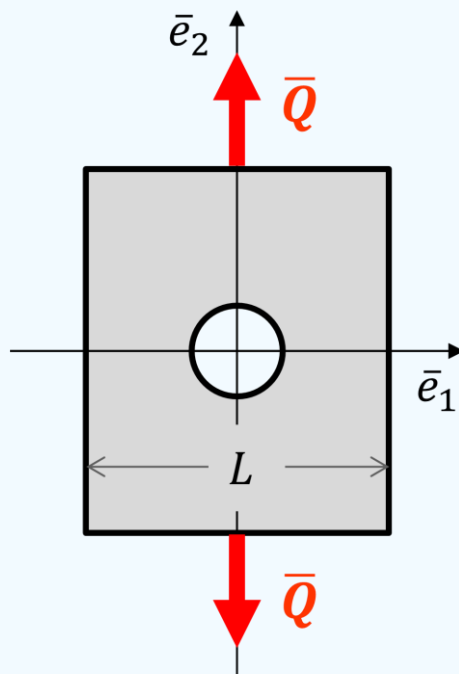


□ Exemples d'application

• **Plaque trouée en traction**

Soit une plaque métallique trouée de limite de résistance σ_0 soumise à une force de traction $\bar{Q}$. Déterminer la borne supérieure Q_{max} obéissant aux critères de rupture de Tresca et de von Mises.

a/ Mécanisme de rupture : Cisaillement



□ Exemples d'application

• **Plaque trouée en traction**

b/ Puissance des efforts extérieurs

$$\wp_{ext}(\bar{v}) = \bar{Q} \cdot \dot{\bar{q}}(\bar{v})$$

telle que :

$$\dot{\bar{q}}(\bar{v}) = \bar{V}$$

$$\Rightarrow \wp_{ext}(\bar{v}) = \bar{Q} \cdot \bar{V}$$

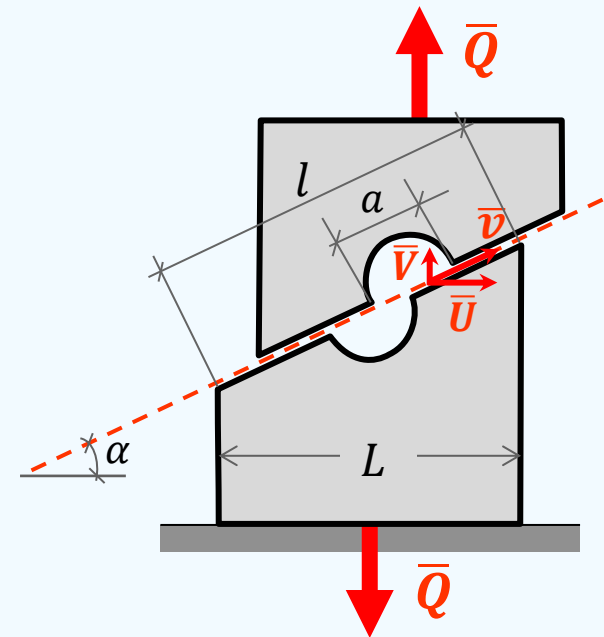
$$\Rightarrow \wp_{ext}(\bar{v}) = QV$$

c/ Puissance résistante maximale

$$\wp_{rm}(\bar{v}) = \int_{\Sigma} \pi[\bar{x}, \bar{n}(\bar{x}), [\bar{v}(\bar{x})]] d\Sigma$$

d/ Discontinuité des vitesses

$$[\bar{v}] = \sqrt{U^2 + V^2} = V / \sin \alpha$$



Exemples d'application

Plaques trouées en traction

e/ Critère de Tresca

$$\pi[\bar{x}, \bar{n}(\bar{x}), \llbracket \bar{v}(\bar{x}) \rrbracket] = \frac{\sigma_o}{2} \llbracket \bar{v}(\bar{x}) \rrbracket \quad (\text{Voir p. 9})$$

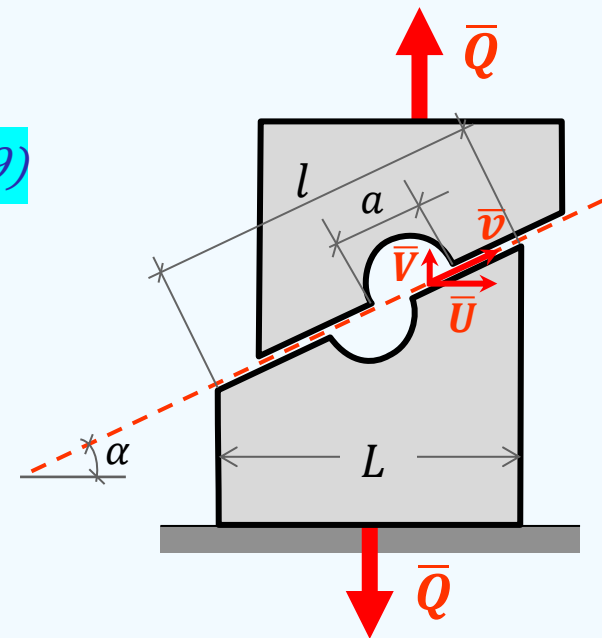
avec : $\llbracket \bar{v}(\bar{x}) \rrbracket = V / \sin \alpha$

$$d\Sigma = 1 \times dl \quad | \quad dl : 0 \rightarrow l = \frac{L}{\cos \alpha} - a$$

$$\triangleright \mathcal{P}_{rm}(\bar{v}) = \int_{\Sigma} \frac{\sigma_o}{2} \llbracket \bar{v}(\bar{x}) \rrbracket d\Sigma$$

$$\Rightarrow \mathcal{P}_{rm}(\bar{v}) = \frac{\sigma_o}{2} \frac{V}{\sin \alpha} \int_0^{l = \frac{L}{\cos \alpha} - a} dl$$

$$\Rightarrow \mathcal{P}_{rm}(\bar{v}) = \frac{\sigma_o}{2} \frac{V}{\sin \alpha} \left(\frac{L}{\cos \alpha} - a \right)$$



Exemples d'application

Plaques trouées en traction

e/ Critère de Tresca

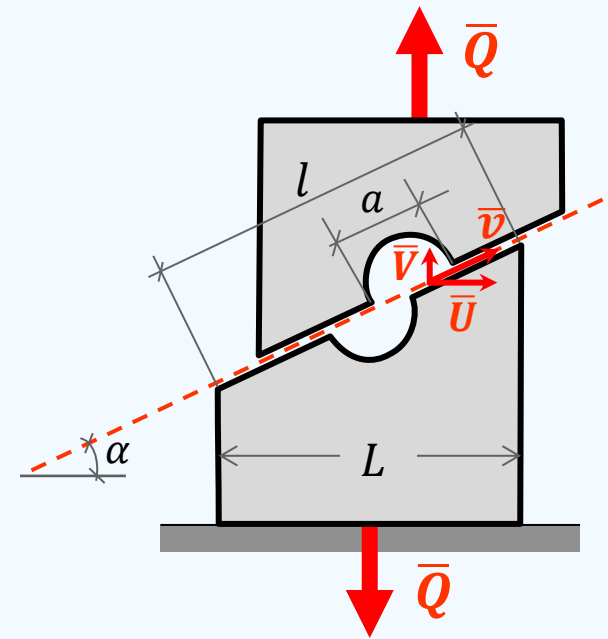
$$\mathcal{P}_{ext}(\bar{v}) \leq \mathcal{P}_{rm}(\bar{v})$$

$$\Rightarrow QV \leq \frac{\sigma_o}{2} \frac{V}{\sin \alpha} \left(\frac{L}{\cos \alpha} - a \right)$$

$$\Rightarrow Q \leq \frac{\sigma_o}{\sin 2\alpha} (L - a \cos \alpha)$$

Optimisation : $\alpha = \pi/4$

$$\Rightarrow Q_{max} = \sigma_o \left(L - \frac{a}{\sqrt{2}} \right)$$



Remarque : Sachant que $Q_{min} = \sigma_o(L - a)$ (Approche statique par l'intérieur), d'où l'encadrement suivant :

$$\Rightarrow Q_{min} = \sigma_o(L - a) \leq Q_{ult} \leq Q_{max} = \sigma_o \left(L - \frac{a}{\sqrt{2}} \right)$$

Exemples d'application

Plaques trouées en traction

f/ Critère de von Mises

$$\pi[\bar{x}, \bar{n}(\bar{x}), \llbracket \bar{v}(\bar{x}) \rrbracket] = k \llbracket \bar{v}(\bar{x}) \rrbracket \quad (\text{Voir p. 10})$$

avec : $k = \sigma_o / \sqrt{3}$ (Traction simple)

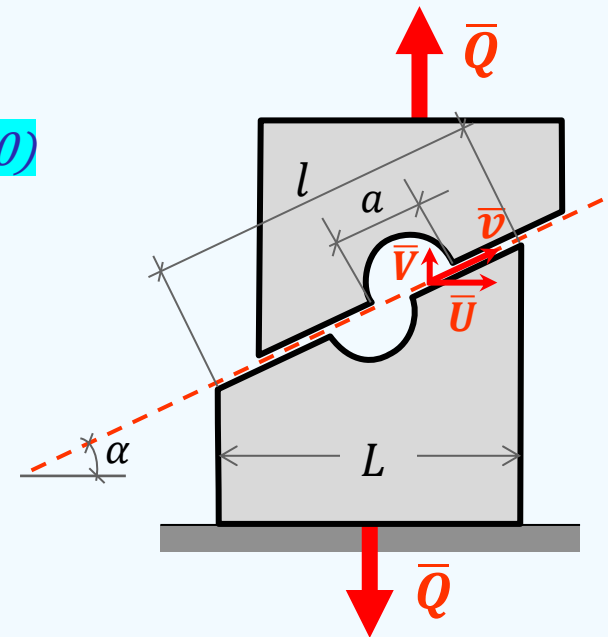
$$\llbracket \bar{v}(\bar{x}) \rrbracket = V / \sin \alpha$$

$$d\Sigma = 1 \times dl \quad | \quad dl : 0 \rightarrow l = \frac{L}{\cos \alpha} - a$$

$$\triangleright \mathcal{P}_{rm}(\bar{v}) = \int_{\Sigma} k \llbracket \bar{v}(\bar{x}) \rrbracket d\Sigma$$

$$\Rightarrow \mathcal{P}_{rm}(\bar{v}) = \frac{\sigma_o}{\sqrt{3}} \frac{V}{\sin \alpha} \int_0^{l=\frac{L}{\cos \alpha} - a} dl$$

$$\Rightarrow \mathcal{P}_{rm}(\bar{v}) = \frac{\sigma_o}{\sqrt{3}} \frac{V}{\sin \alpha} \left(\frac{L}{\cos \alpha} - a \right)$$



Exemples d'application

Plaques trouées en traction

f/ Critère de von Mises

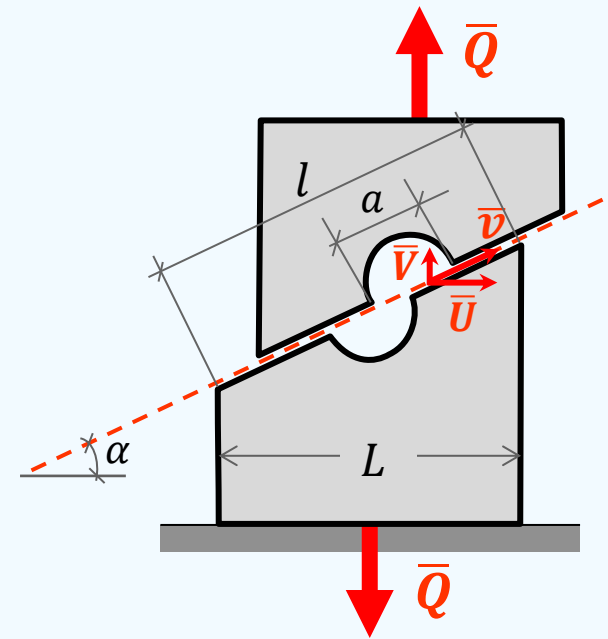
$$\triangleright \wp_{ext}(\bar{v}) \leq \wp_{rm}(\bar{v})$$

$$\Rightarrow QV \leq \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \frac{V}{\sin \alpha} \left(\frac{L}{\cos \alpha} - a \right)$$

$$\Rightarrow Q \leq \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sin 2\alpha} (L - a \cos \alpha)$$

Optimisation : $\alpha = \pi/4$

$$\Rightarrow Q_{max} = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \left(L - \frac{a}{\sqrt{2}} \right)$$



Remarque : Sachant que $Q_{min} = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} (L - a)$ (*Approche statique par l'intérieur*), d'où l'encadrement suivant :

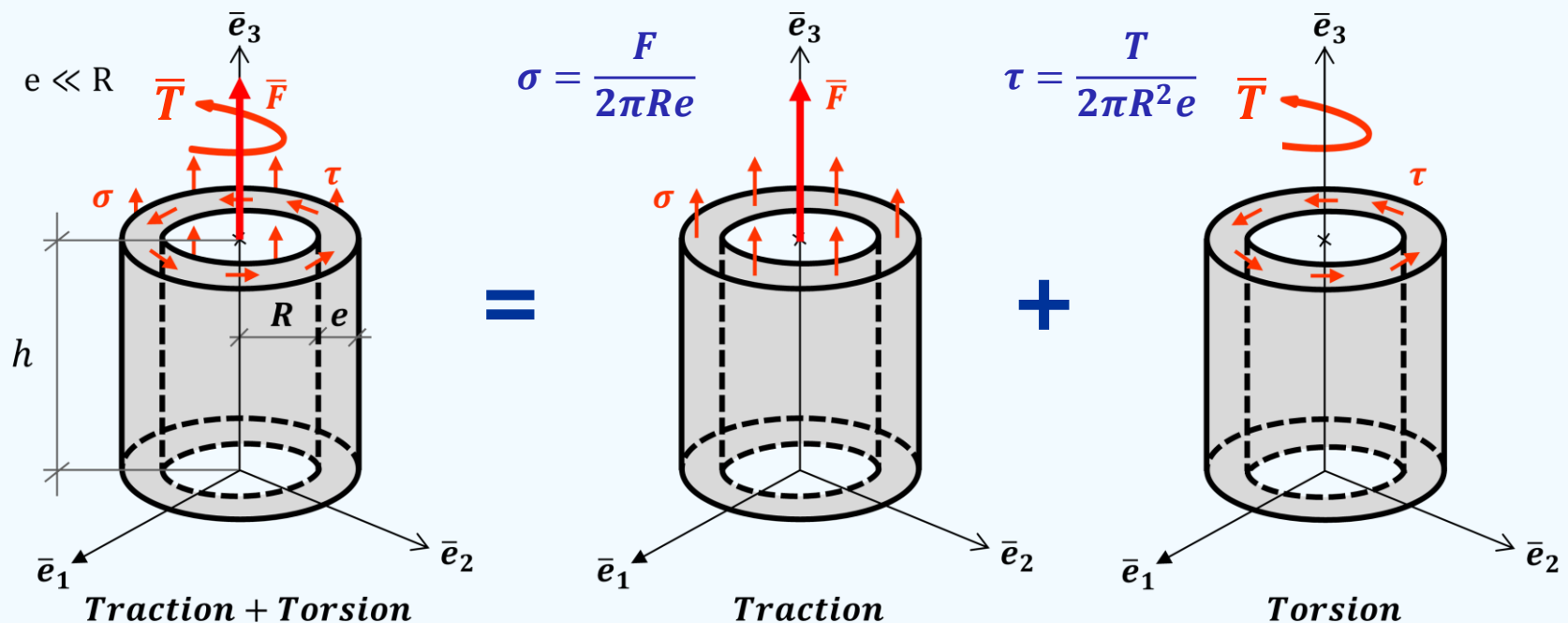
$$\Rightarrow Q_{min} = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} (L - a) \leq Q_{ult} \leq Q_{max} = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \left(L - \frac{a}{\sqrt{2}} \right)$$

Exemples d'application

Tube en traction-torsion

Soit un tube métallique mince de limite de résistance σ_0 soumis à une force de traction $\bar{F}$ et à un couple de torsion $\bar{T}$. Déterminer le domaine des chargements potentiellement supportables $K(\bar{Q})$ pour les critères de Tresca et de von Mises.

1. Procédure : Principe de superposition des effets



□ Exemples d'application

• **Tube en traction-torsion**

2. Effet de la traction seule

2a/ Puissance des efforts extérieurs

$$\wp_{ext}(\bar{v}) = \bar{F} \cdot \dot{\bar{q}}(\bar{v})$$

telle que :

$$\dot{\bar{q}}(\bar{v}) = \bar{V}$$

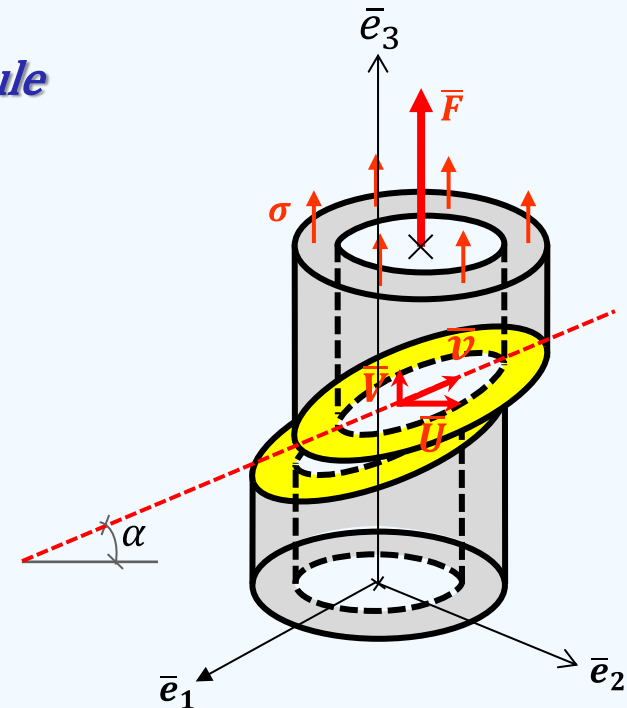
$$\Rightarrow \wp_{ext}(\bar{v}) = FV$$

2b/ Puissance résistante maximale

$$\wp_{rm}(\bar{v}) = \int_{\Sigma} \pi[\bar{x}, \bar{n}(\bar{x}), [[\bar{v}(\bar{x})]]] d\Sigma$$

2c/ Discontinuité des vitesses

$$[[\bar{v}]] = \sqrt{U^2 + V^2} = V / \sin \alpha$$



□ Exemples d'application

• **Tube en traction-torsion**

2. Effet de la traction seule

2d/ Critère de Tresca

$$\pi[\bar{x}, \bar{n}(\bar{x}), \llbracket \bar{v}(\bar{x}) \rrbracket] = k[\llbracket \bar{v}(\bar{x}) \rrbracket] \quad (\text{Voir p. 9})$$

avec : $k = \sigma_o/2$ (Traction simple)

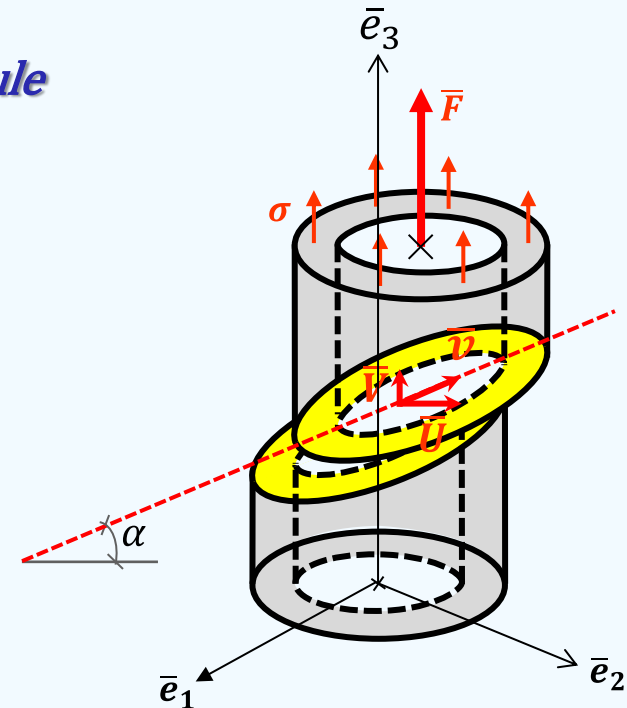
$$\llbracket \bar{v}(\bar{x}) \rrbracket = V/\sin \alpha$$

$$d\Sigma : 0 \rightarrow \Sigma = \frac{S}{\cos \alpha} \quad | \quad S = 2\pi Re$$

$$\blacktriangleright \wp_{rm}(\bar{v}) = \int_{\Sigma} k[\llbracket \bar{v}(\bar{x}) \rrbracket] d\Sigma$$

$$\Rightarrow \wp_{rm}(\bar{v}) = \frac{\sigma_o}{2} \frac{V}{\sin \alpha} \int_0^{\Sigma = \frac{2\pi Re}{\cos \alpha}} d\Sigma$$

$$\Rightarrow \wp_{rm}(\bar{v}) = \frac{\sigma_o}{2} \frac{V}{\sin \alpha} \frac{2\pi Re}{\cos \alpha} = \frac{2\pi Re \sigma_o V}{\sin 2\alpha}$$



Exemples d'application

Tube en traction-torsion

2. Effet de la traction seule

2d/ Critère de Tresca

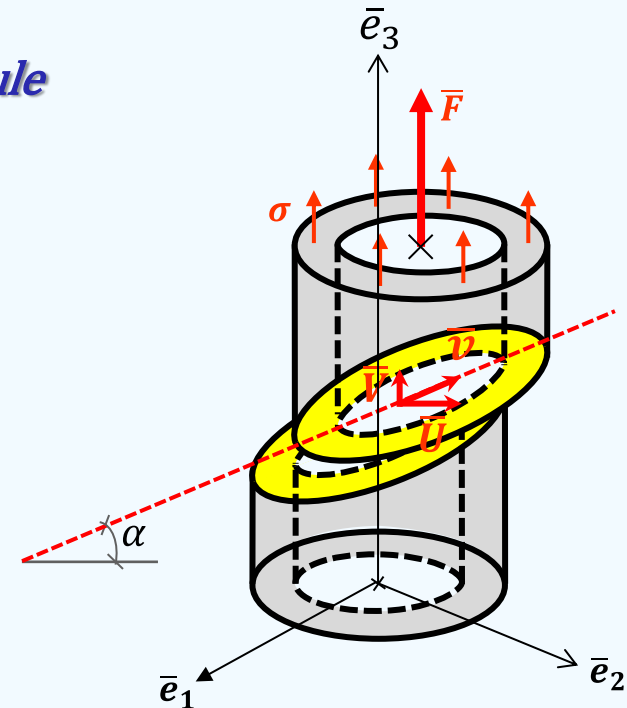
$$\triangleright \wp_{ext}(\bar{v}) \leq \wp_{rm}(\bar{v})$$

$$\Rightarrow FV \leq \frac{2\pi Re\sigma_o V}{\sin 2\alpha}$$

$$\Rightarrow F \leq \frac{2\pi Re\sigma_o}{\sin 2\alpha}$$

Optimisation : $\alpha = \pi/4$

$$\Rightarrow F_{max} = 2\pi Re\sigma_o$$



Remarque : Sachant que $F_{min} = 2\pi Re\sigma_o$ (*Approche statique par l'intérieur*), les deux bornes inférieure et supérieure coïncident.

$$\Rightarrow F_{min} = F_{max} = F_{ult} = 2\pi Re\sigma_o$$



Exemples d'application

Tube en traction-torsion

2. Effet de la traction seule

2e/ Critère de von Mises

$$\pi[\bar{x}, \bar{n}(\bar{x}), \llbracket \bar{v}(\bar{x}) \rrbracket] = k[\llbracket \bar{v}(\bar{x}) \rrbracket] \quad (\text{Voir p. 10})$$

avec : $k = \sigma_o / \sqrt{3}$ (Traction simple)

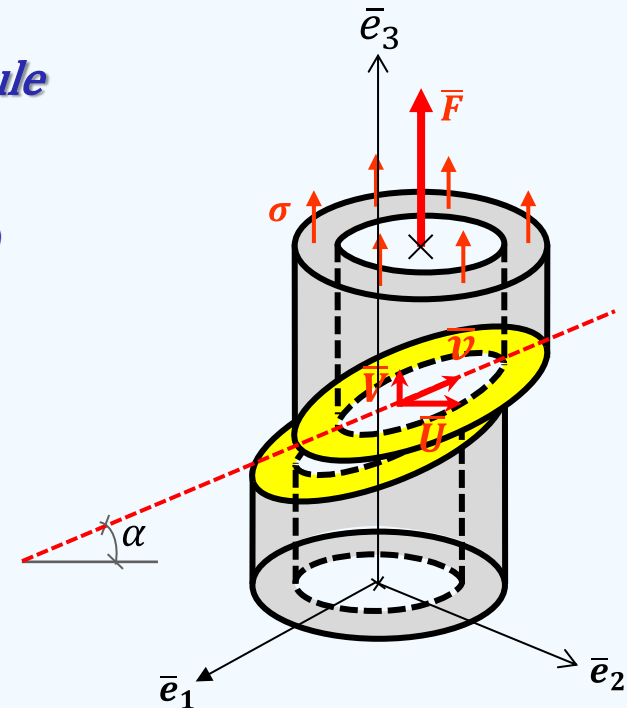
$$\llbracket \bar{v}(\bar{x}) \rrbracket = V / \sin \alpha$$

$$d\Sigma : 0 \rightarrow \Sigma = \frac{S}{\cos \alpha} \quad | \quad S = 2\pi Re$$

$$\triangleright \wp_{rm}(\bar{v}) = \int_{\Sigma} k[\llbracket \bar{v}(\bar{x}) \rrbracket] d\Sigma$$

$$\Rightarrow \wp_{rm}(\bar{v}) = \frac{\sigma_o}{\sqrt{3}} \frac{V}{\sin \alpha} \int_0^{\Sigma = \frac{2\pi Re}{\cos \alpha}} d\Sigma$$

$$\Rightarrow \wp_{rm}(\bar{v}) = \frac{\sigma_o}{\sqrt{3}} \frac{V}{\sin \alpha} \frac{2\pi Re}{\cos \alpha} = \frac{4\pi Re \sigma_o}{\sqrt{3}} \frac{V}{\sin 2\alpha}$$



Exemples d'application

Tube en traction-torsion

2. Effet de la traction seule

2e/ Critère de von Mises

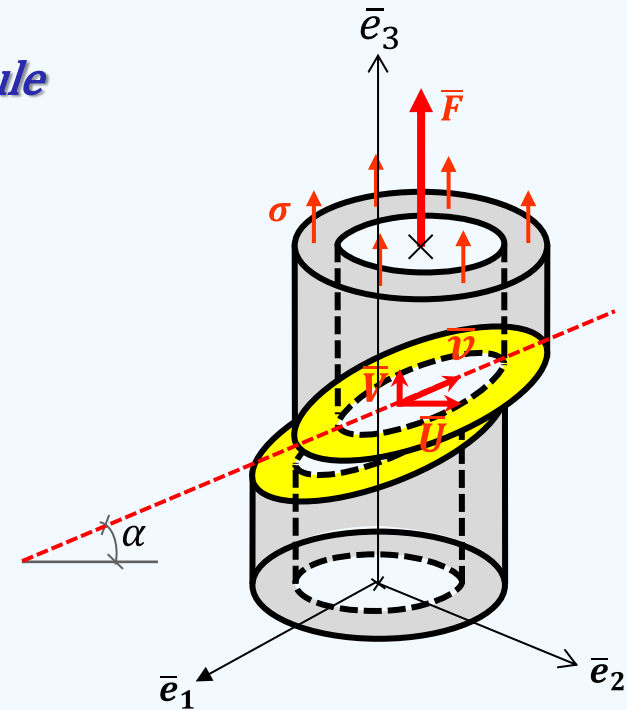
$$\triangleright \wp_{ext}(\bar{v}) \leq \wp_{rm}(\bar{v})$$

$$\Rightarrow FV \leq \frac{4\pi Re \sigma_o}{\sqrt{3}} \frac{V}{\sin 2\alpha}$$

$$\Rightarrow F \leq \frac{4\pi Re \sigma_o}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sin 2\alpha}$$

Optimisation : $\alpha = \pi/4$

$$\Rightarrow F_{max} = \frac{4}{\sqrt{3}} \pi Re \sigma_o$$



Remarque : Sachant que $F_{min} = 2\pi Re \sigma_o$ (Approche statique par l'intérieur), d'où l'encadrement suivant :

$$\Rightarrow F_{min} = 2\pi Re \sigma_o \leq F_{ult} \leq F_{max} = \frac{4}{\sqrt{3}} \pi Re \sigma_o$$



Exemples d'application

Tube en traction-torsion

3. Effet de la torsion seule

3a/ Puissance des efforts extérieurs

$$\wp_{ext}(\bar{\mathbf{v}}) = \bar{\mathbf{Q}} \cdot \dot{\bar{\mathbf{q}}}(\bar{\mathbf{v}})$$

tels que :

$$\bar{\mathbf{Q}} = T$$

$$\dot{\bar{\mathbf{q}}}(\bar{\mathbf{v}}) = \dot{\alpha} \text{ (Taux de distorsion)}$$

$$\Rightarrow \wp_{ext}(\bar{\mathbf{v}}) = T \dot{\alpha}$$

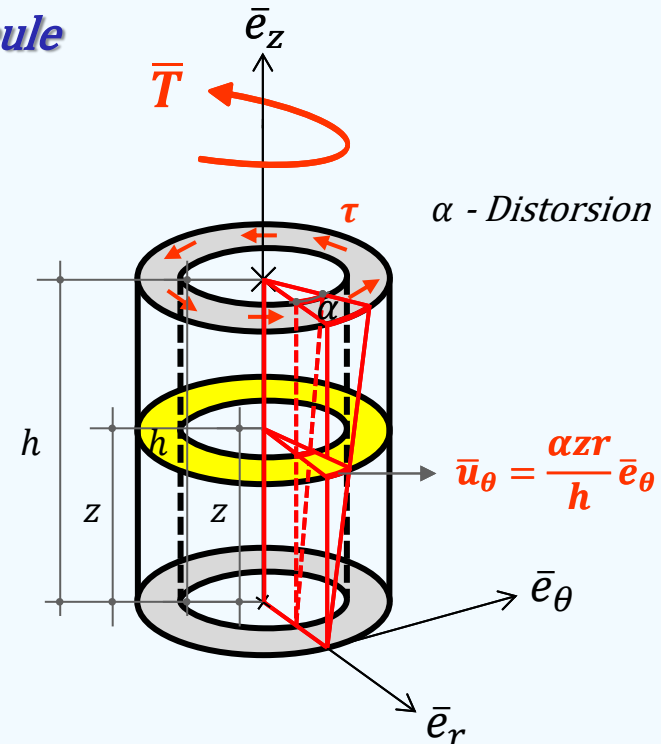
3b/ Puissance résistante maximale

$$\wp_{rm}(\bar{\mathbf{v}}) = \int_V \pi[\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{d}}(\bar{\mathbf{x}})] dV$$

tels que :

$$dV = 2\pi h r dr$$

$$r : R \rightarrow R + e$$



□ Exemples d'application

• Tube en traction-torsion

3. Effet de la torsion seule

3c/ Tenseur des vitesses de déformation

$$\bar{\bar{d}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\dot{\alpha}r}{2h} \\ 0 & \frac{\dot{\alpha}r}{2h} & 0 \end{pmatrix} = \frac{\dot{\alpha}r}{2h} (\bar{e}_\theta \otimes \bar{e}_z + \bar{e}_z \otimes \bar{e}_\theta)$$

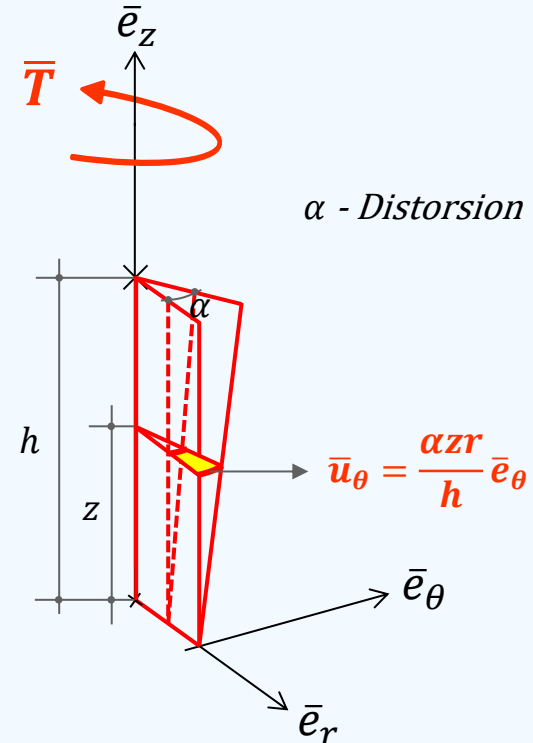
$$\Rightarrow d_1 = \frac{0+0}{2} + \sqrt{\left(\frac{0-0}{2}\right)^2 + \left(\frac{\dot{\alpha}r}{2h}\right)^2} = \frac{\dot{\alpha}r}{2h}$$

$$d_2 = \frac{0+0}{2} - \sqrt{\left(\frac{0-0}{2}\right)^2 + \left(\frac{\dot{\alpha}r}{2h}\right)^2} = -\frac{\dot{\alpha}r}{2h}$$

$$d_3 = 0$$

3d/ Taux de déformation équivalente

$$d_{eq} = \sqrt{\frac{2}{3} \text{Tr}(\bar{\bar{d}}^2)} = \sqrt{\frac{2}{3} d_{ij} d_{ji}} = \sqrt{\frac{2}{3} (d_1^2 + d_2^2 + d_3^2)} = \frac{\dot{\alpha}r}{\sqrt{3}h}$$



Exemples d'application

Tube en traction-torsion

3. Effet de la torsion seule

3e/ Critère de Tresca

$$\pi[\bar{x}, \bar{d}(\bar{x})] = \frac{\sigma_o}{2} (|d_1| + |d_2| + |d_3|) \quad (\text{Voir p. 9})$$

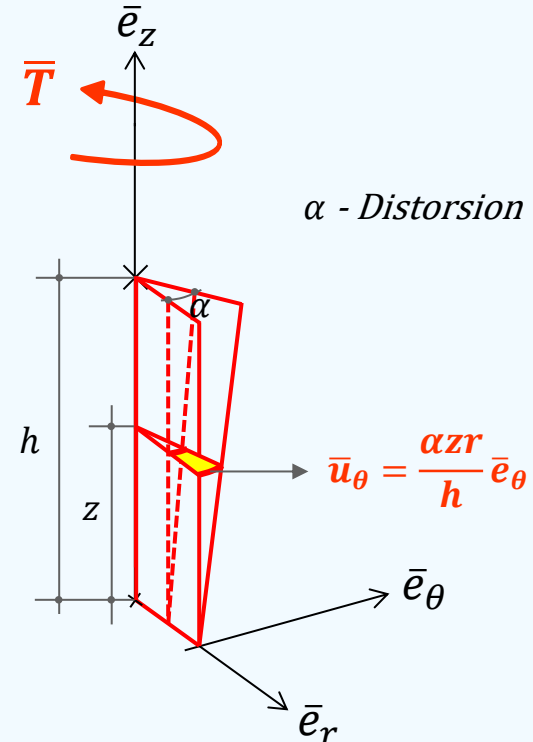
$$\triangleright \wp_{rm}(\bar{v}) = \int_V \pi[\bar{x}, \bar{d}(\bar{x})] dV$$

$$\Rightarrow \wp_{rm}(\bar{v}) = \int_{r=R}^{r=R+e} \frac{\sigma_o}{2} \left(\frac{\dot{\alpha}r}{2h} + \frac{\dot{\alpha}r}{2h} + 0 \right) 2\pi h r dr$$

$$\Rightarrow \wp_{rm}(\bar{v}) = \pi R^2 e \sigma_o \dot{\alpha}$$

$$\triangleright \wp_{ext}(\bar{v}) \leq \wp_{rm}(\bar{v})$$

$$\Rightarrow T \dot{\alpha} \leq \pi R^2 e \sigma_o \dot{\alpha} \quad \Rightarrow \quad T_{max} = \pi R^2 e \sigma_o$$



Remarque : Sachant que $T_{min} = \pi R^2 e \sigma_o$ (Approche statique par l'intérieur), les deux bornes inférieure et supérieure coïncident.

$$\Rightarrow T_{min} = T_{max} = T_{ult} = \pi R^2 e \sigma_o$$



Exemples d'application

Tube en traction-torsion

3. Effet de la torsion seule

3f/ Critère de von Mises

$$\pi[\bar{x}, \bar{d}(\bar{x})] = \sigma_o d_{eq} \quad | \quad d_{eq} = \frac{\dot{\alpha} r}{\sqrt{3}h} \quad (\text{Voir p. 10})$$

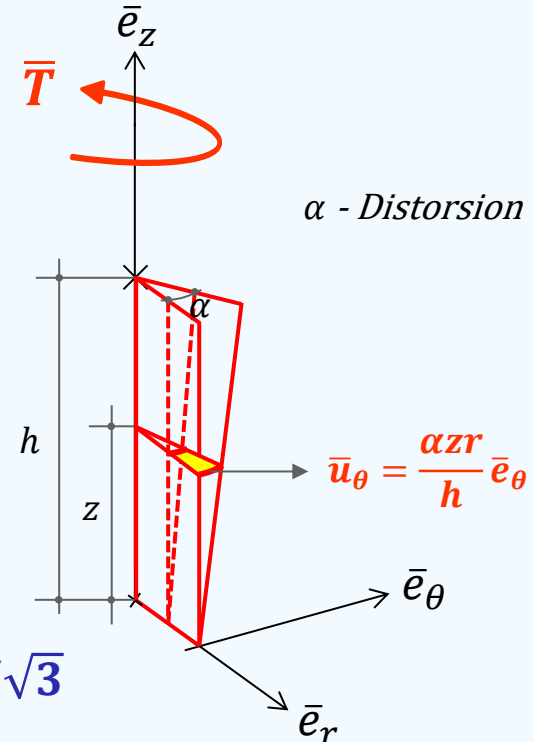
$$\triangleright \wp_{rm}(\bar{v}) = \int_V \pi[\bar{x}, \bar{d}(\bar{x})] dV$$

$$\Rightarrow \wp_{rm}(\bar{v}) = \int_{r=R}^{r=R+e} \sigma_o \frac{\dot{\alpha} r}{\sqrt{3}h} 2\pi h r dr$$

$$\Rightarrow \wp_{rm}(\bar{v}) = 2\pi R^2 e \sigma_o \dot{\alpha} / \sqrt{3}$$

$$\triangleright \wp_{ext}(\bar{v}) \leq \wp_{rm}(\bar{v})$$

$$\Rightarrow T \dot{\alpha} \leq 2\pi R^2 e \sigma_o \dot{\alpha} / \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad T_{max} = 2\pi R^2 e \sigma_o / \sqrt{3}$$



Remarque : Sachant que $T_{min} = 2\pi R^2 e \sigma_o / \sqrt{3}$ (Approche statique par l'intérieur), les deux bornes inférieure et supérieure coïncident.

$$\Rightarrow T_{min} = T_{max} = T_{ult} = 2\pi R^2 e \sigma_o / \sqrt{3} \sigma_o$$



□ Exemples d'application

• **Tube en traction-torsion**

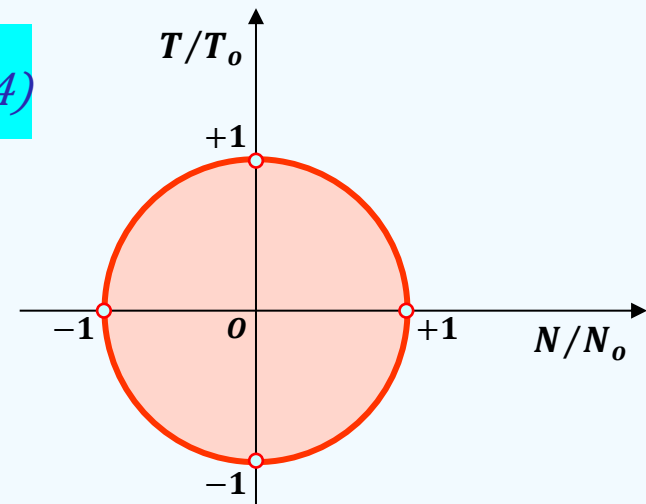
4. Effet combiné de la traction et de la torsion

Compte tenu du principe de superposition des effets évoqué ci-dessus et sachant que, pour un tube mince constitué d'un matériau homogène régi par les critères de rupture de Tresca et de von Mises, le domaine de résistance de celui-ci sous l'effet combiné de l'effort de traction (ou de compression) N et du couple de torsion T est défini par l'expression suivante* :

$$G(N, T) = \left(\frac{N}{N_o}\right)^2 + \left(\frac{T}{T_o}\right)^2 \leq 1 \quad (\text{Voir p. 24})$$

N_o - Limite de résistance en traction-compression

T_o - Limite de résistance en torsion pure



* Voir page 24

Exemples d'application

Tube en traction-torsion

4. Effet combiné de la traction et de la torsion

4a/ Critère de Tresca

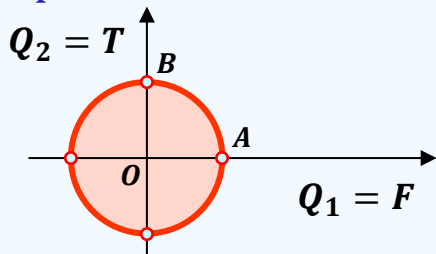
Sachant que $N_o = F_{max} = 2\pi R e \sigma_o$ et $T_o = T_{max} = \pi R^2 e \sigma_o$, on a alors :

$$\left(\frac{F}{2\pi R e \sigma_o} \right)^2 + \left(\frac{T}{\pi R^2 e \sigma_o} \right)^2 \leq 1 \quad \Rightarrow \quad F^2 + \left(\frac{2}{R} T \right)^2 \leq (2\pi R e \sigma_o)^2$$

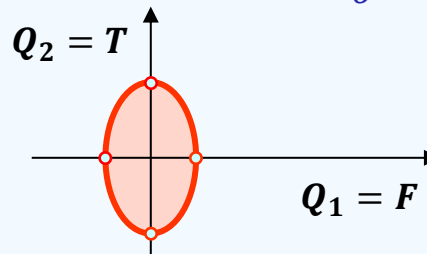
D'où le domaine des chargements potentiellement supportables :

$$K(\bar{Q}) = \left\{ \bar{Q} \mid F^2 + \left(\frac{2}{R} T \right)^2 \leq (2\pi R e \sigma_o)^2 \mid F = Q_1 \text{ \& } T = Q_2 \right\}$$

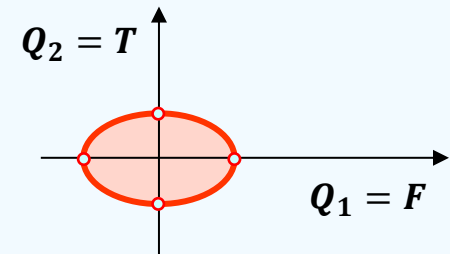
$\Rightarrow$ Ellipse d'axes $\overline{OA} = 2\pi R e \sigma_o$ et $\overline{OB} = \pi R^2 e \sigma_o$



Cas 1 : $R = 2$



Cas 2 : $R < 2$



Cas 3 : $R > 2$

□ Exemples d'application

• **Tube en traction-torsion**

4. Effet combiné de la traction et de la torsion

4b/ Critère de von Mises

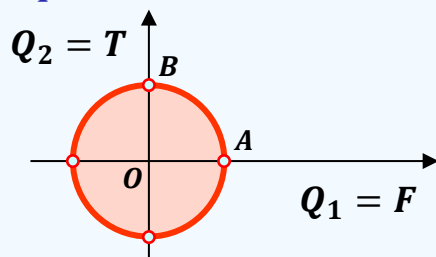
Sachant que $N_o = F_{max} = 4\pi R e \sigma_o / \sqrt{3}$ et $T_o = T_{max} = 2\pi R^2 e \sigma_o / \sqrt{3}$, on a alors :

$$\left(\frac{\sqrt{3}F}{4\pi R e \sigma_o} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}T}{2\pi R^2 e \sigma_o} \right)^2 \leq 1 \quad \Rightarrow \quad F^2 + \left(\frac{2}{R} T \right)^2 \leq (4\pi R e \sigma_o / \sqrt{3})^2$$

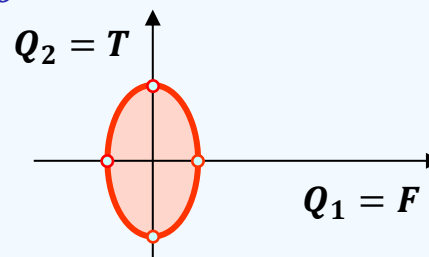
D'où le domaine des chargements potentiellement supportables :

$$K(\bar{Q}) = \left\{ \bar{Q} \mid F^2 + \left(\frac{2}{R} T \right)^2 \leq (4\pi R e \sigma_o / \sqrt{3})^2 \mid F = Q_1 \text{ \& } T = Q_2 \right\}$$

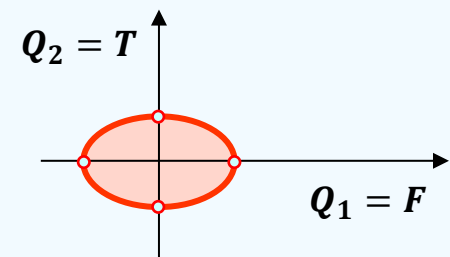
$\Rightarrow$ Ellipse d'axes $\overline{OA} = 4\pi R e \sigma_o / \sqrt{3}$ et $\overline{OB} = 2\pi R^2 e \sigma_o / \sqrt{3}$



Cas 1 : $R = 2$



Cas 2 : $R < 2$



Cas 3 : $R > 2$

Exemples d'application

Structure réticulée

Soit un treillis métallique carré de limite de résistance de ses tirants égale à L soumis à une force de traction $\bar{Q}$ comme l'indique la figure ci-après. Déterminer le domaine des chargements potentiellement supportables $K(\bar{Q})$.

a/ Convention de signe

$$N_i > 0 \quad \forall i = 1, \dots, 6 \Rightarrow \text{Traction}$$

b/ Capacité de résistance

$$|N_i| \leq L \quad | \quad i = 1, \dots, 6$$

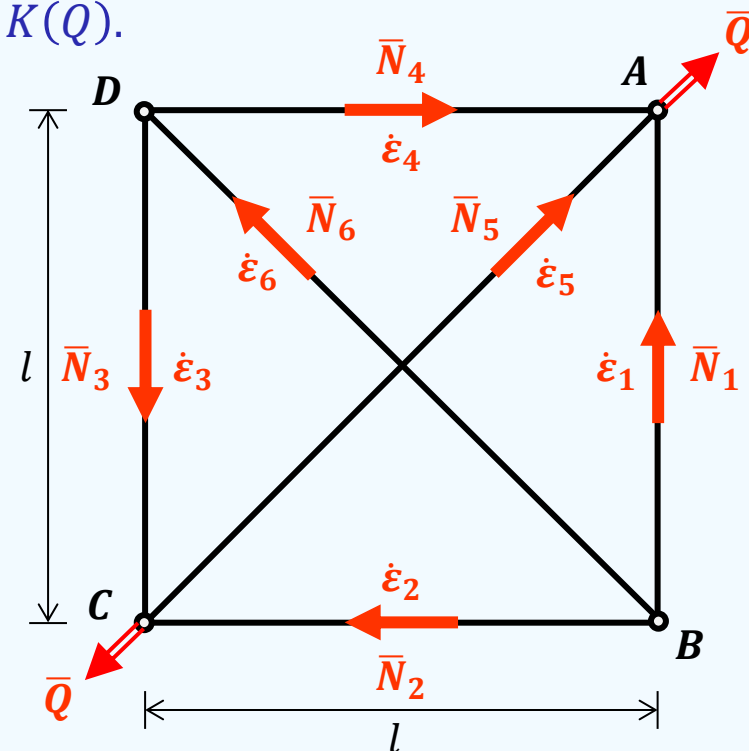
c/ Domaine de résistance

$$G(\bar{x}) = \{|N_i| \leq L ; i = 1, \dots, 6\}$$

d/ Champ des déplacements admissibles

$$\pi[\bar{v}] = \pi[\dot{\bar{\epsilon}}] = \max_{i=1, \dots, 6} \{N_i \dot{\epsilon}_i \mid |N_i| \leq L\}$$

$$\Rightarrow \pi[\dot{\bar{\epsilon}}] = L|\dot{\epsilon}_i| \quad | \quad \dot{\epsilon}_i - \text{Vitesse d'extension du tirant } (i) \quad (\text{Voir p. 16})$$



□ Exemples d'application

- **Structure réticulée**

e/ Compatibilité géométrique

$$\sum_i N_i \dot{\delta}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad N_1 \dot{\delta}_1 + N_2 \dot{\delta}_2 + N_3 \dot{\delta}_3 + N_4 \dot{\delta}_4 + N_5 \dot{\delta}_5 + N_6 \dot{\delta}_6 = 0$$

Sachant que : $\dot{\delta}_i = l_i \dot{\epsilon}_i$

$$\Rightarrow (N_1 \dot{\epsilon}_1 + N_2 \dot{\epsilon}_2 + N_3 \dot{\epsilon}_3 + N_4 \dot{\epsilon}_4 + N_5 \dot{\epsilon}_5 \sqrt{2} + N_6 \dot{\epsilon}_6 \sqrt{2})l = 0$$

$$\Rightarrow N_1 \dot{\epsilon}_1 + N_2 \dot{\epsilon}_2 + N_3 \dot{\epsilon}_3 + N_4 \dot{\epsilon}_4 = -(N_5 \dot{\epsilon}_5 + N_6 \dot{\epsilon}_6) \sqrt{2}$$

Etat neutre (Etat non chargé) :

$$N_5 + N_1 \sqrt{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad N_5 = -N_1 \sqrt{2}$$

$$N_6 + N_1 \sqrt{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad N_6 = -N_1 \sqrt{2}$$

Sachant que : $N_1 = N_2 = N_3 = N_4$ et $N_5 = N_6$

$$\Rightarrow 2(\dot{\epsilon}_5 + \dot{\epsilon}_6) = \dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2 + \dot{\epsilon}_3 + \dot{\epsilon}_4$$

Equilibre statique :

$$N_1 = N_2 = N_3 = N_4$$

$$N_5 + N_1 \sqrt{2} = Q$$

$$N_6 + N_1 \sqrt{2} = 0$$

(Voir Chapitre 2)

Exemples d'application

Structure réticulée

f/ Puissance des efforts extérieurs

$$\wp_{ext}(\bar{\mathbf{v}}) = \bar{\mathbf{Q}} \cdot \dot{\bar{\mathbf{q}}}(\bar{\mathbf{v}}) \quad | \quad \bar{\mathbf{v}} = \dot{\bar{\mathbf{e}}}$$

$$\Rightarrow \wp_{ext}(\dot{\bar{\mathbf{e}}}) = Q \dot{\delta}_5 \quad | \quad \dot{\delta}_5 = \dot{\epsilon}_5 l_5 = \dot{\epsilon}_5 l\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \wp_{ext}(\dot{\bar{\mathbf{e}}}) = Q \dot{\epsilon}_5 l\sqrt{2}$$

g/ Puissance résistante maximale

$$\wp_{int}(\bar{\mathbf{v}}) = \sum_i N_i \dot{\delta}_i \leq \wp_{rm}(\bar{\mathbf{v}}) \quad | \quad \bar{\mathbf{v}} = \dot{\bar{\mathbf{e}}} \quad \& \quad \dot{\delta}_i = \dot{\epsilon}_i l_i$$

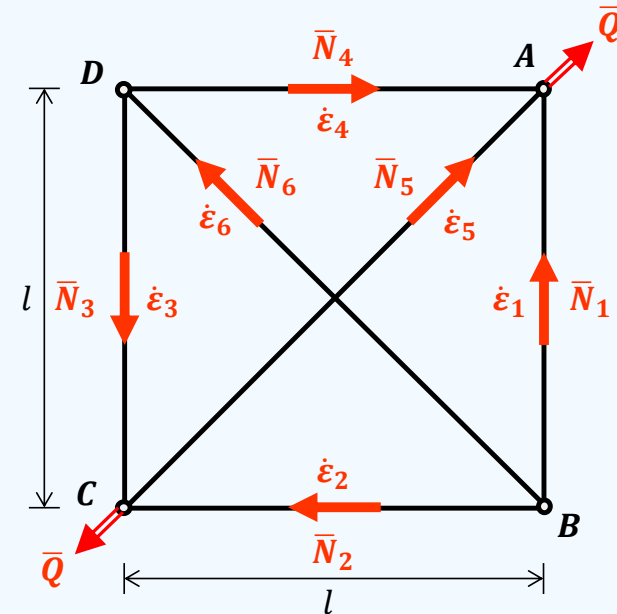
$$\Rightarrow \wp_{int}(\dot{\bar{\mathbf{e}}}) = N_1 \dot{\epsilon}_1 l + N_2 \dot{\epsilon}_2 l + N_3 \dot{\epsilon}_3 l + N_4 \dot{\epsilon}_4 l + N_5 \dot{\epsilon}_5 l\sqrt{2} + N_6 \dot{\epsilon}_6 l\sqrt{2}$$

$$\text{Idem. Approche statique : } N_1 = N_2 = N_3 = N_4 \quad \Rightarrow \quad \dot{\epsilon}_1 = \dot{\epsilon}_2 = \dot{\epsilon}_3 = \dot{\epsilon}_4$$

$$\Rightarrow \wp_{int}(\dot{\bar{\mathbf{e}}}) = 4N_1 \dot{\epsilon}_1 l + N_5 \dot{\epsilon}_5 l\sqrt{2} + N_6 \dot{\epsilon}_6 l\sqrt{2}$$

Sachant que : $|N_i| \leq L \quad | \quad i = 1, \dots, 6$

$$\Rightarrow \wp_{rm}(\dot{\bar{\mathbf{e}}}) = (4|\dot{\epsilon}_1| + \sqrt{2}|\dot{\epsilon}_5| + \sqrt{2}|\dot{\epsilon}_6|)Ll$$



Exemples d'application

Structure réticulée

h/ Domaine des chargements potentiellement supportables

On pose : $\dot{\epsilon}_T = \dot{\epsilon}_1 = \dot{\epsilon}_2 = \dot{\epsilon}_3 = \dot{\epsilon}_4$

$\dot{\epsilon}_U = \dot{\epsilon}_5$

$\dot{\epsilon}_V = \dot{\epsilon}_6$

Sachant que : $2(\dot{\epsilon}_5 + \dot{\epsilon}_6) = \dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2 + \dot{\epsilon}_3 + \dot{\epsilon}_4$

$\Rightarrow \dot{\epsilon}_U + \dot{\epsilon}_V = 2\dot{\epsilon}_T$

Soit donc :

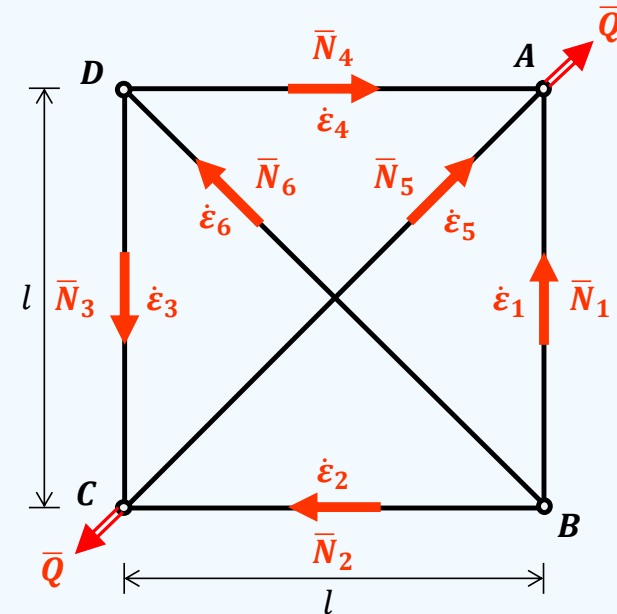
$$\wp_{ext}(\dot{\epsilon}) \leq \wp_{rm}(\dot{\epsilon})$$

$$\Rightarrow Ql\sqrt{2}\dot{\epsilon}_U \leq (4|\dot{\epsilon}_T| + \sqrt{2}|\dot{\epsilon}_U| + \sqrt{2}|\dot{\epsilon}_V|)Ll$$

On se fixe maintenant $\dot{q}$ à une valeur positive. Soit par exemple : $\dot{q} = l\sqrt{2}$

$$\Rightarrow \dot{\epsilon}_U = 1 \Rightarrow \dot{\epsilon}_V = 2\dot{\epsilon}_T - 1 \quad \forall \dot{q} \quad C.A.$$

$$\Rightarrow Q \leq \frac{\sqrt{2}}{2} (4|\dot{\epsilon}_T| + \sqrt{2} + \sqrt{2}|2\dot{\epsilon}_T - 1|)L$$



□ Exemples d'application

- **Structure réticulée**

h/ Domaine des chargements potentiellement supportables

On en déduit alors :

$$Q_{min} \leq -\frac{\sqrt{2}}{2} [4\dot{\epsilon}_T + \sqrt{2} + \sqrt{2}(2\dot{\epsilon}_T - 1)]L$$

$$Q_{max} \leq +\frac{\sqrt{2}}{2} [4\dot{\epsilon}_T + \sqrt{2} + \sqrt{2}(2\dot{\epsilon}_T - 1)]L$$

Par minimisation de $\dot{\epsilon}_T$ ($\dot{\epsilon}_T = 0$), on obtient finalement :

$$Q_{min} = -2L \leq Q_{ult} \leq Q_{max} = +2L$$

D'où le domaine des chargements potentiellement supportables :

$$K(\bar{Q}) = \{\bar{Q} \mid -2L \leq Q \leq +2L\}$$

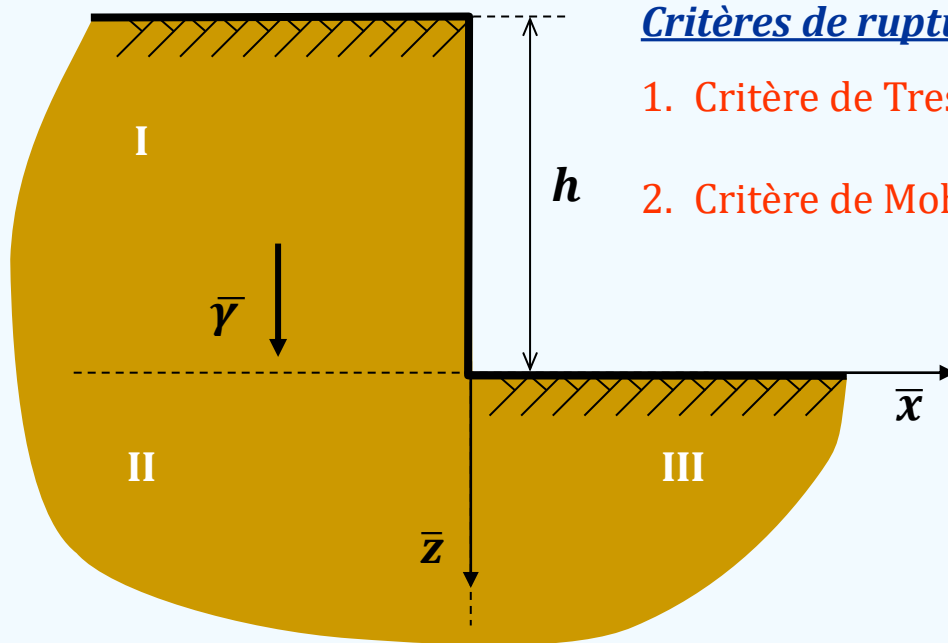


Remarque : Idem. Approche statique par l'intérieur.

Exemples d'application

Excavations : Cas d'une fouille verticale

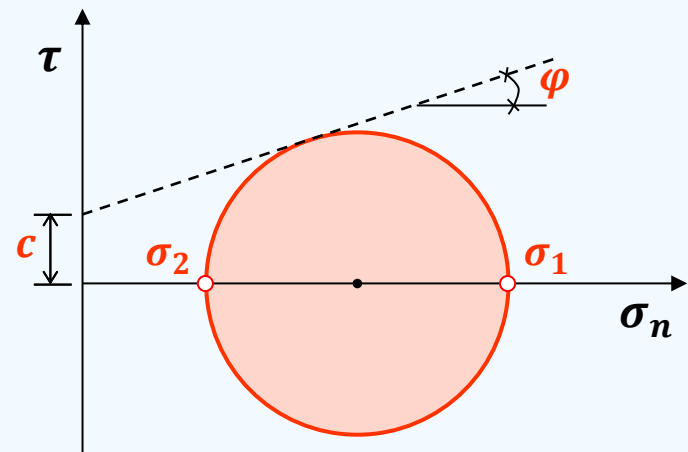
Position du problème



Critères de rupture :

1. Critère de Tresca : $|\sigma_1 - \sigma_2| - 2c_u \leq 0$

2. Critère de Mohr-Coulomb : $\sigma_1 - \sigma_2 \frac{1 - \sin \varphi'}{1 + \sin \varphi'} - 2c' \frac{\cos \varphi'}{1 + \sin \varphi'} \leq 0$



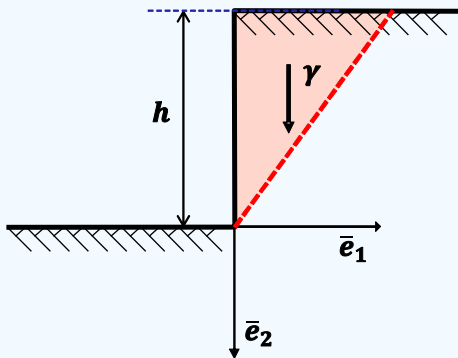
Données : Fouille verticale satisfaisant aux critères de rupture définis ci-dessus.

Question : Etant donné le poids volumique γ , la cohésion c et l'angle de frottement interne du sol φ , on cherche à déterminer la hauteur maximale h_{max} de cette fouille verticale.

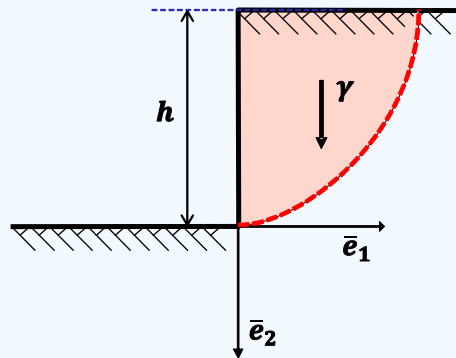
□ Exemples d'application

- **Excavations : Cas d'une fouille verticale**

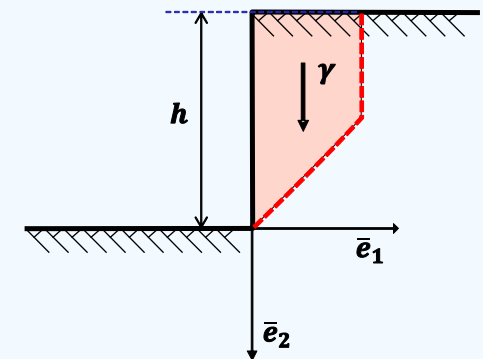
- **Mécanismes de rupture considérés**



Mécanisme de coin



Mécanisme de cercle



Mécanisme de bloc

Exemples d'application

Excavations : Cas d'une fouille verticale

Mécanisme de coin

Critère de Tresca ($c = c_u$ et $\varphi = \varphi_u \cong 0$)

Puissance des efforts extérieurs

$$\mathcal{P}_{ext}(\bar{v}) = \bar{Q} \cdot \dot{\bar{q}}(\bar{v})$$

avec : $Q = W_{OAB} = \frac{1}{2} \gamma h^2 \tan \alpha$

$$\dot{q} = V = v \cos \alpha$$

$$\Rightarrow \mathcal{P}_{ext}(\bar{v}) = \left(\frac{1}{2} \gamma h^2 \tan \alpha \right) (v \cos \alpha)$$

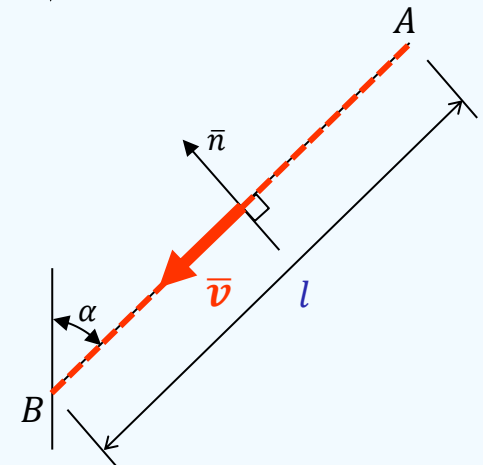
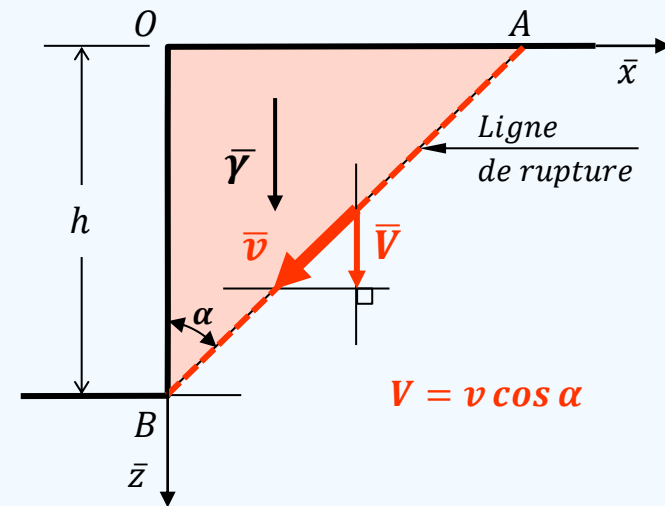
$$\Rightarrow \mathcal{P}_{ext}(\bar{v}) = \left(\frac{1}{2} \gamma h^2 \sin \alpha \right) v$$

Champ de vitesses cinématiquement admissible

$$\pi[\bar{x}, \bar{n}(\bar{x}), [\bar{v}(\bar{x})]] = k |[\bar{v}]| \quad \text{si} \quad [\bar{v}] \cdot \bar{n} = 0$$

$$\Rightarrow [[\bar{v}(\bar{x})]] = \bar{v} \parallel \overline{AB}$$

$$k = \frac{\sigma_0}{2} = c_u \quad (\text{Voir p. 9})$$



Exemples d'application

Excavations : Cas d'une fouille verticale

Mécanisme de coin

Critère de Tresca ($c = c_u$ et $\varphi = \varphi_u \cong 0$)

Puissance résistante maximale

$$\mathcal{P}_{rm}(\bar{v}) = \int_{\Sigma} \pi[\bar{x}, \bar{n}(\bar{x}), [\bar{v}(\bar{x})]] d\Sigma$$

avec : $\pi[\bar{x}, \bar{n}(\bar{x}), [\bar{v}(\bar{x})]] = c_u v$

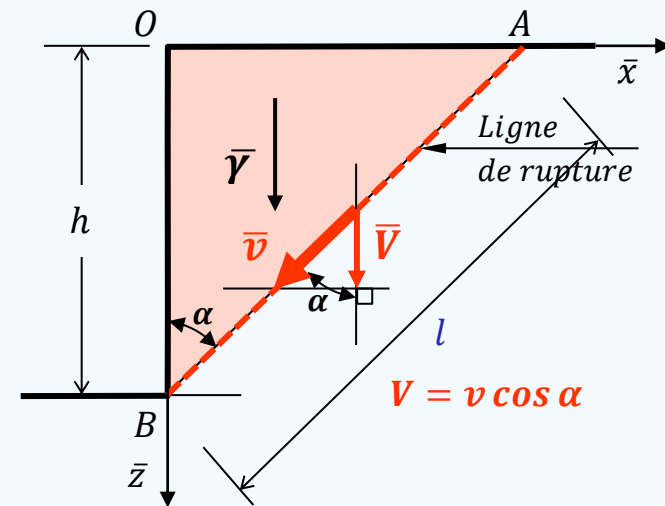
$$d\Sigma = 1 \times dl \quad | \quad dl : 0 \rightarrow l = \overline{AB} = \frac{h}{\cos \alpha}$$

$$\Rightarrow \mathcal{P}_{rm}(\bar{v}) = c_u v \int_0^{l=\frac{h}{\cos \alpha}} dl \quad \Rightarrow \quad \mathcal{P}_{rm}(\bar{v}) = \left(c_u \frac{h}{\cos \alpha} \right) v$$

$$\mathcal{P}_{ext}(\bar{v}) \leq \mathcal{P}_{rm}(\bar{v}) \quad \Rightarrow \quad h \leq \frac{2c_u}{\gamma \sin \alpha \cos \alpha} \quad \Rightarrow \quad \frac{\gamma \cdot h}{c_u} \leq \frac{4}{\sin 2\alpha}$$

$$\text{Optimisation : } \alpha = \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad k^+ = \left(\frac{\gamma \cdot h}{c_u} \right)^+ = 4$$

$$\text{Encadrement : } k^- = 2 \leq \frac{\gamma \cdot h}{c_u} \leq k^+ = 4$$



Exemples d'application

Excavations : Cas d'une fouille verticale

Mécanisme de coin

Critère de Mohr - Coulomb ($c = c'$ et $\varphi = \varphi'$)

Puissance des efforts extérieurs

$$\mathcal{P}_{ext}(\bar{v}) = \bar{Q} \cdot \dot{\bar{q}}(\bar{v})$$

avec : $Q = W_{OAB} = \frac{1}{2} \gamma h^2 \tan \alpha$

$$\dot{q} = V = v \cos(\alpha + \beta)$$

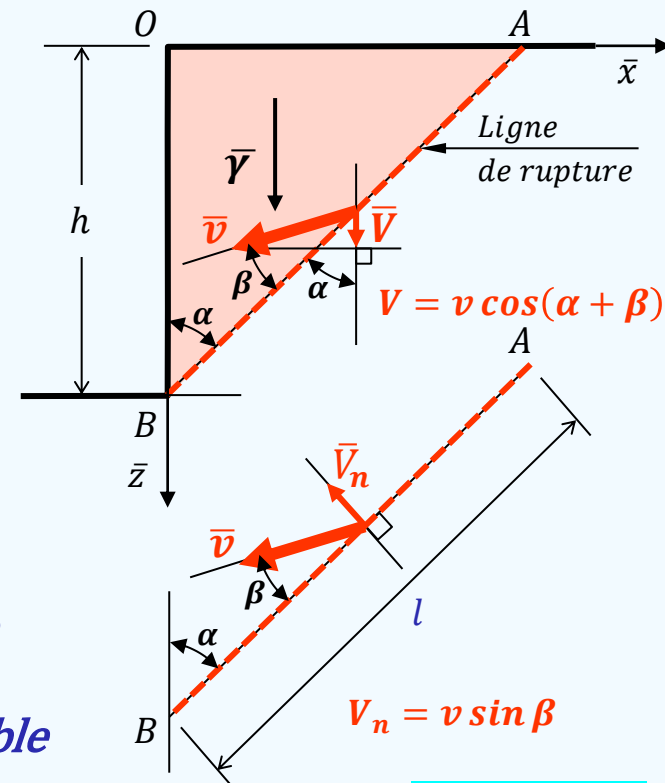
$$\Rightarrow \mathcal{P}_{ext}(\bar{v}) = \left(\frac{1}{2} \gamma h^2 \tan \alpha \right) [v \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\Rightarrow \mathcal{P}_{ext}(\bar{v}) = \left[\frac{1}{2} \gamma h^2 \cdot \tan \alpha \cdot \cos(\alpha + \beta) \right] v$$

Champ de vitesses cinématiquement admissible

$$\pi[\bar{x}, \bar{n}(\bar{x}), \llbracket \bar{v}(\bar{x}) \rrbracket] = \frac{c'}{\tan \varphi'} \llbracket \bar{v} \rrbracket \cdot \bar{n} \quad \text{si} \quad \llbracket \bar{v} \rrbracket \cdot \bar{n} \geq \llbracket \bar{v} \rrbracket \sin \varphi' \quad (\text{Voir p. 11})$$

$$\Rightarrow V_n = \llbracket \bar{v} \rrbracket \cdot \bar{n} = v \sin \beta \geq v \sin \varphi' \Rightarrow \varphi' \leq \beta \leq \pi - \varphi'$$



Exemples d'application

Excavations : Cas d'une fouille verticale

➤ Mécanisme de coin

Critère de Mohr - Coulomb ($c = c'$ et $\varphi = \varphi'$)

➤ Puissance résistante maximale

$$\wp_{rm}(\bar{v}) = \int_{\Sigma} \pi[\bar{x}, \bar{n}(\bar{x}), [\bar{v}(\bar{x})]] d\Sigma$$

$$\text{avec : } \pi[\bar{x}, \bar{n}(\bar{x}), [\bar{v}(\bar{x})]] = \frac{c'}{\tan \varphi'} v \sin \beta$$

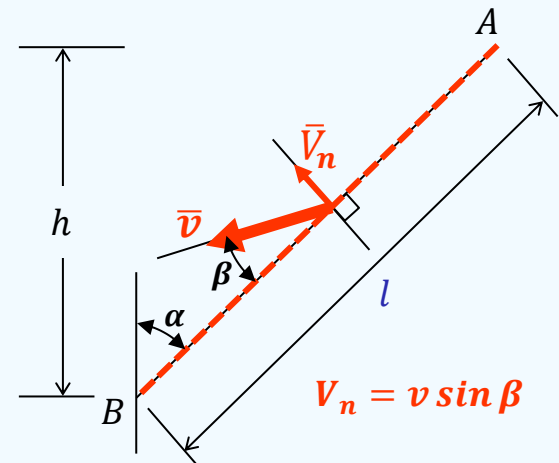
$$d\Sigma = 1 \times dl \quad | \quad dl : 0 \rightarrow l = \overline{AB} = \frac{h}{\cos \alpha}$$

$$\Rightarrow \wp_{rm}(\bar{v}) = \int_{\Sigma} \frac{c'}{\tan \varphi'} v \sin \beta d\Sigma$$

$$\Rightarrow \wp_{rm}(\bar{v}) = \frac{c'}{\tan \varphi'} v \sin \beta \int_0^{l=\frac{h}{\cos \alpha}} dl \quad \Rightarrow \quad \wp_{rm}(\bar{v}) = \left(\frac{c' h}{\tan \varphi'} \frac{\sin \beta}{\cos \alpha} \right) v$$

$$\Rightarrow \wp_{ext}(\bar{v}) \leq \wp_{rm}(\bar{v}) \quad \Rightarrow \quad \left[\frac{1}{2} \gamma h^2 \cdot \tan \alpha \cdot \cos(\alpha + \beta) \right] v \leq \left(\frac{c' h}{\tan \varphi'} \frac{\sin \beta}{\cos \alpha} \right) v$$

$$\Rightarrow \frac{\gamma \cdot h}{c'} \leq \frac{2}{\tan \varphi'} \frac{\sin \beta}{\sin \alpha \cdot \cos(\alpha + \beta)}$$



Exemples d'application

Excavations : Cas d'une fouille verticale

Mécanisme de coin

Critère de Mohr - Coulomb ($c = c'$ et $\varphi = \varphi'$)

Optimisation

$$\frac{\gamma \cdot h}{c'} \leq \frac{2}{\tan \varphi'} \frac{\sin \beta}{\sin \alpha \cdot \cos(\alpha + \beta)}$$

- Majoration de α (à β fixé) : $\alpha = \frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}$

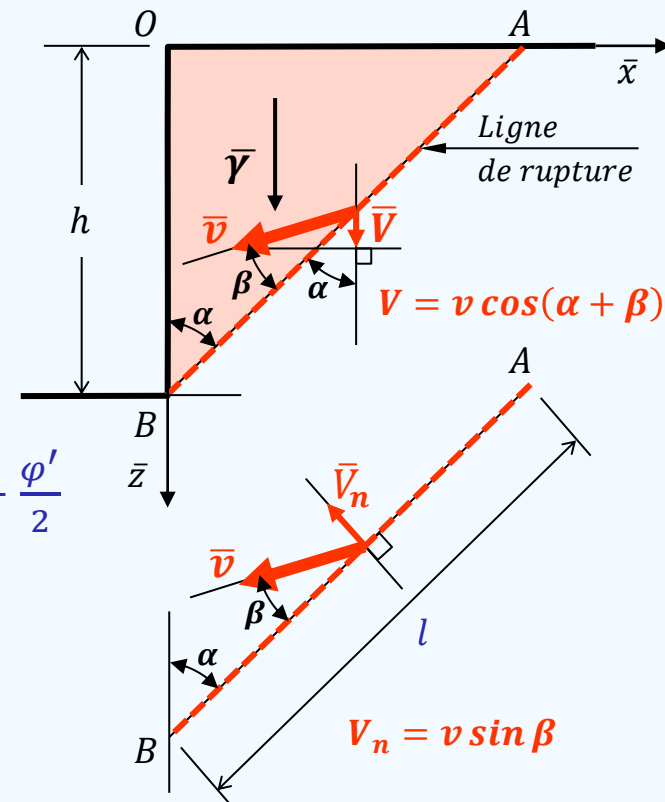
- Minoration de β : $\beta = \varphi' \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi'}{2}$

$$\Rightarrow k^+ = \left(\frac{\gamma \cdot h}{c'} \right)^+ = \frac{2}{\tan \varphi'} \frac{\sin \varphi'}{\sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi'}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi'}{2} \right)}$$

$$\Rightarrow k^+ = \left(\frac{\gamma \cdot h}{c'} \right)^+ = 4 \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi'}{2} \right)$$

Encadrement

$$k^- = 2 \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi'}{2} \right) \leq \frac{\gamma \cdot h}{c'} \leq k^+ = 4 \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi'}{2} \right)$$



Exemples d'application

Excavations : Cas d'une fouille verticale

Mécanisme de cercle

Critère de Tresca ($c = c_u$ et $\varphi = \varphi_u \cong 0$)

Puissance des efforts extérieurs

$$\mathcal{P}_{ext}(\bar{v}) = \bar{Q} \cdot \dot{\bar{q}}(\bar{v}) = \iint_{OAB} d\bar{Q} \cdot d\dot{\bar{q}}(\bar{v})$$

avec : $dQ = dW_{d\Omega} = \gamma d\Omega = \gamma r dr d\theta$

$$d\dot{q} = V(r) = v(r) \cos \theta = \omega r \cos \theta$$

tels que : $r : 0 \rightarrow h$ et $\theta : 0 \rightarrow \pi/2$

$$\Rightarrow \mathcal{P}_{ext}(\bar{v}) = \iint_{OAB} (\gamma r dr d\theta) (\omega r \cos \theta) = \gamma \omega \left(\int_0^h r^2 dr \right) \left(\int_0^{\pi/2} \cos \theta d\theta \right)$$

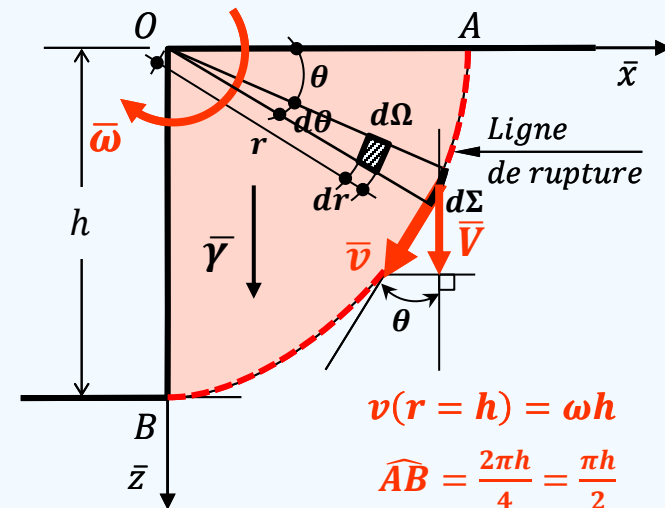
$$\Rightarrow \mathcal{P}_{ext}(\bar{v}) = \frac{1}{3} \gamma \omega h^3$$

Champ de vitesses cinématiquement admissible

$$\pi[\bar{x}, \bar{n}(\bar{x}), [\bar{v}(\bar{x})]] = k |[\bar{v}]| \quad \text{si} \quad [\bar{v}] \cdot \bar{n} = 0$$

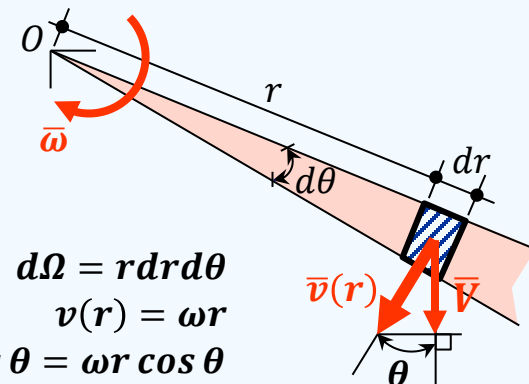
$$\Rightarrow [\bar{v}(\bar{x})] = v(r = h) = \omega h$$

$$k = \frac{\sigma_0}{2} = c_u \quad (\text{Voir p. 9})$$



$$v(r = h) = \omega h$$

$$\widehat{AB} = \frac{2\pi h}{4} = \frac{\pi h}{2}$$



$$d\Omega = r dr d\theta$$

$$v(r) = \omega r$$

$$V(r) = v(r) \cos \theta = \omega r \cos \theta$$



Exemples d'application

Excavations : Cas d'une fouille verticale

Mécanisme de cercle

Critère de Tresca ($c = c_u$ et $\varphi = \varphi_u \cong 0$)

Puissance résistante maximale

$$\mathcal{P}_{rm}(\bar{v}) = \int_{\Sigma} \pi[\bar{x}, \bar{n}(\bar{x}), [\bar{v}(\bar{x})]] d\Sigma$$

avec : $\pi[\bar{x}, \bar{n}(\bar{x}), [\bar{v}(\bar{x})]] = c_u \omega h$

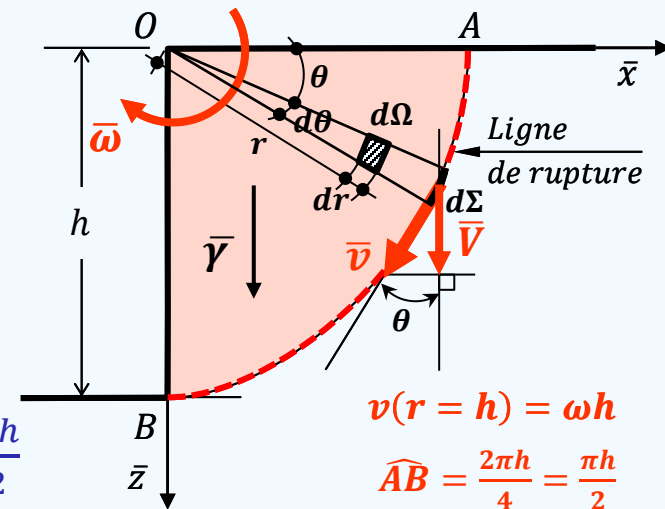
$$d\Sigma = 1 \times dl \quad | \quad dl : 0 \rightarrow l = \widehat{AB} = \frac{\pi h}{2}$$

$$\Rightarrow \mathcal{P}_{rm}(\bar{v}) = c_u \omega h \int_0^{l=\frac{\pi h}{2}} dl \quad \Rightarrow \quad \mathcal{P}_{rm}(\bar{v}) = \frac{\pi}{2} c_u \omega h^2$$

$$\mathcal{P}_{ext}(\bar{v}) \leq \mathcal{P}_{rm}(\bar{v}) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{3} \gamma \omega h^3 \leq \frac{\pi}{2} c_u \omega h^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\gamma \cdot h}{c_u} \leq \frac{3\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \quad k^+ = \left(\frac{\gamma \cdot h}{c_u} \right)^+ = \frac{3\pi}{2} = 4.71$$

Encadrement : $k^- = 2 \leq \frac{\gamma \cdot h}{c_u} \leq k^+ = 4.71$



Exemples d'application

Excavations : Cas d'une fouille verticale

Mécanisme de cercle

Critère de Mohr - Coulomb ($c = c'$ et $\varphi = \varphi'$)

Puissance des efforts extérieurs

$$\mathcal{P}_{ext}(\bar{v}) = \bar{Q} \cdot \dot{\bar{q}}(\bar{v}) = \iint_{OAB} d\bar{Q} \cdot d\dot{\bar{q}}(\bar{v})$$

avec : $dQ = dW_{d\Omega} = \gamma d\Omega = \gamma r dr d\theta$

$$d\dot{q} = V(r) = v(r) \frac{\cos(\beta + \theta)}{\cos \beta} = \omega r \frac{\cos(\beta + \theta)}{\cos \beta}$$

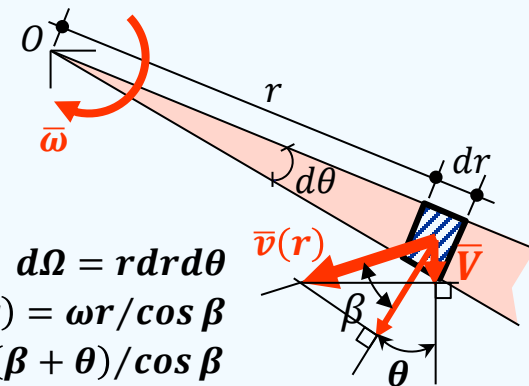
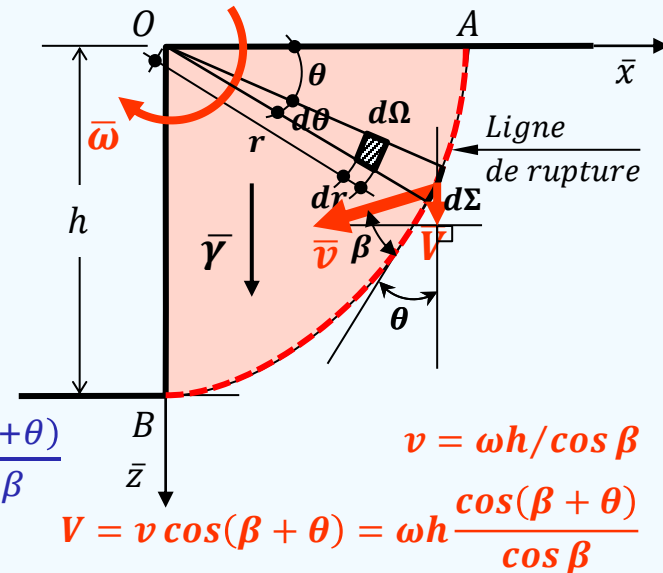
tels que : $r : 0 \rightarrow h$ et $\theta : 0 \rightarrow \pi/2$

$$\Rightarrow \mathcal{P}_{ext}(\bar{v}) = \iint_{OAB} (\gamma r dr d\theta) \left[\omega r \frac{\cos(\beta + \theta)}{\cos \beta} \right]$$

$$\Rightarrow \mathcal{P}_{ext}(\bar{v}) = \gamma \omega \left(\int_0^h r^2 dr \right) \left(\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(\beta + \theta)}{\cos \beta} d\theta \right)$$

$$\Rightarrow \mathcal{P}_{ext}(\bar{v}) = \frac{1}{3} \gamma \omega h^3 \frac{\sin(\beta + \frac{\pi}{2})}{\cos \beta}$$

$$V(r) = v(r) \cos(\beta + \theta) = \omega r \cos(\beta + \theta) / \cos \beta$$



□ Exemples d'application

• **Excavations : Cas d'une fouille verticale**

➤ Mécanisme de cercle

Critère de Mohr - Coulomb ($c = c'$ et $\varphi = \varphi'$)

▶ *Champ de vitesses cinématiquement admissible*

$$\pi[\bar{x}, \bar{n}(\bar{x}), [\bar{v}(\bar{x})]] = \frac{c'}{\tan \varphi'} [\bar{v}] \cdot \bar{n} \quad \text{si} \quad [\bar{v}] \cdot \bar{n} \geq [\bar{v}] \sin \varphi' \quad (\text{Voir p. 11})$$

$$\Rightarrow V_n = [\bar{v}] \cdot \bar{n} = v \sin \beta \geq v \sin \varphi' \Rightarrow \varphi' \leq \beta \leq \pi - \varphi'$$

▶ *Puissance résistante maximale*

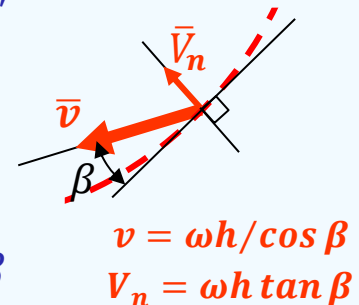
$$\wp_{rm}(\bar{v}) = \int_{\Sigma} \pi[\bar{x}, \bar{n}(\bar{x}), [\bar{v}(\bar{x})]] d\Sigma$$

$$\text{avec : } \pi[\bar{x}, \bar{n}(\bar{x}), [\bar{v}(\bar{x})]] = \frac{c'}{\tan \varphi'} v \sin \beta = \frac{c'}{\tan \varphi'} \omega h \tan \beta$$

$$d\Sigma = 1 \times dl \quad | \quad dl : 0 \rightarrow l = \widehat{AB} = \frac{\pi h}{2}$$

$$\Rightarrow \wp_{rm}(\bar{v}) = \int_{\Sigma} \frac{c'}{\tan \varphi'} \omega h \tan \beta d\Sigma = \frac{c'}{\tan \varphi'} \omega h \tan \beta \int_0^{l=\frac{\pi h}{2}} dl$$

$$\Rightarrow \wp_{rm}(\bar{v}) = \frac{\pi}{2} \frac{c'}{\tan \varphi'} \omega h^2 \tan \beta$$



Exemples d'application

Excavations : Cas d'une fouille verticale

Mécanisme de cercle

Critère de Mohr - Coulomb ($c = c'$ et $\varphi = \varphi'$)

$$\mathcal{P}_{ext}(\bar{v}) \leq \mathcal{P}_{rm}(\bar{v})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} \gamma \omega h^3 \frac{\sin(\beta + \frac{\pi}{2})}{\cos \beta} \leq \frac{\pi}{2} \frac{c'}{\tan \varphi'} \omega h^2 \tan \beta$$

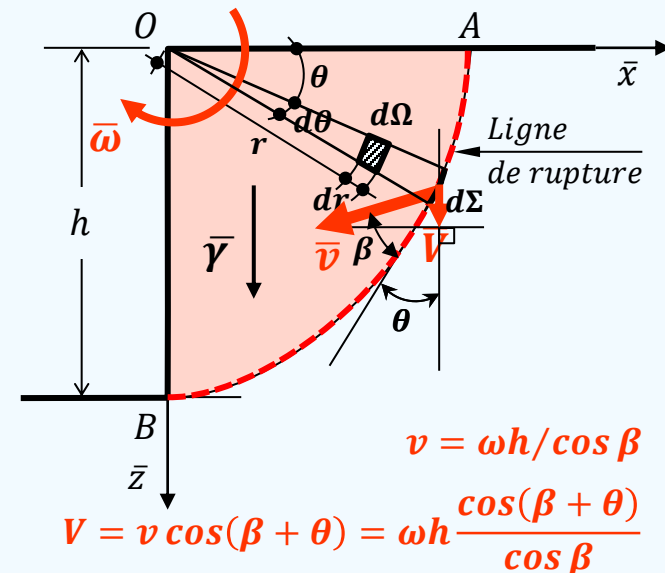
$$\Rightarrow \frac{\gamma \cdot h}{c'} \leq \frac{3\pi}{2} \frac{1}{\tan \varphi'} \frac{\sin \beta}{\sin(\beta + \frac{\pi}{2})}$$

Optimisation

$$\text{Minoration de } \beta : \beta = \varphi' \Rightarrow k^+ = \left(\frac{\gamma \cdot h}{c'} \right)^+ = \frac{3\pi}{2} \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi'}{2} \right)$$

Encadrement

$$k^- = 2 \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi'}{2} \right) \leq \frac{\gamma \cdot h}{c'} \leq k^+ = 4.71 \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi'}{2} \right)$$

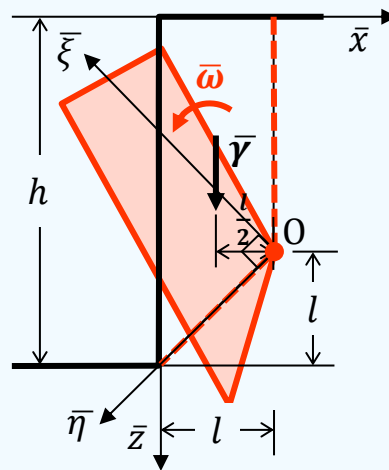
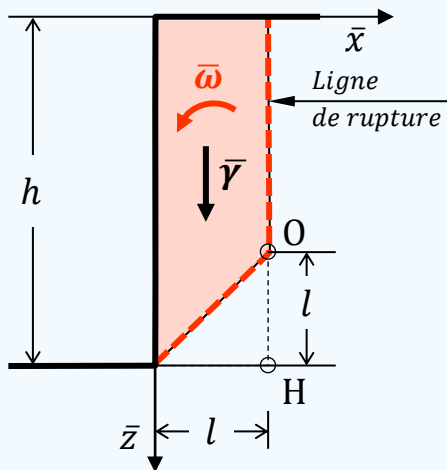


Exemples d'application

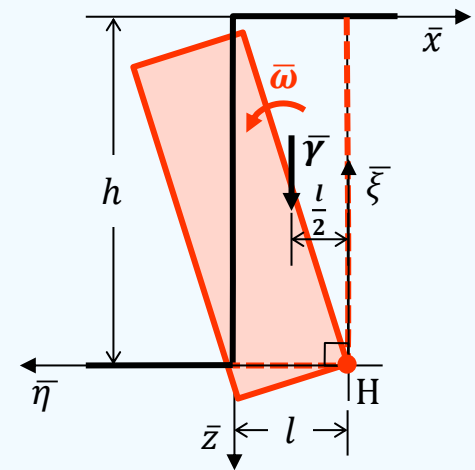
Excavations : Cas d'une fouille verticale

➤ Mécanisme de bloc

Hypothèse : Mouvement de rotation avec décollement



1^{ère} hypothèse
Rotation autour de O
(Minoration)



2^{ème} hypothèse
Rotation autour de H
(Majoration)

□ Exemples d'application

• Excavations : Cas d'une fouille verticale

➤ Mécanisme de bloc

Critère de Tresca ($c = c_u$ et $\varphi = \varphi_u \cong 0$)

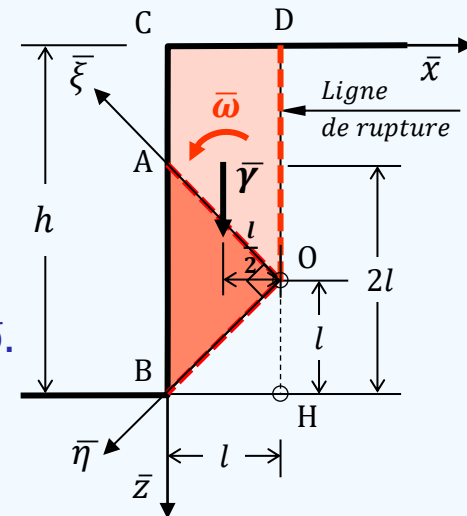
► Cinétique du mouvement de rotation

Le mode de déformation pour $h \geq 2l$ est caractérisé par :

1. Une rotation de OACD autour de O avec la vitesse $\bar{\omega}$.
2. Un décollement le long de OD (la contribution de la discontinuité de vitesse normale et positive est nulle).
3. Un cisaillement uniforme dans le triangle rectangle isocèle OAB le long de OA et de OB.
4. Avec les axes $\bar{\xi}$ et $\bar{\eta}$, le champ de vitesse dans le triangle OAB est égal à :

$$\bar{v} = v_{\bar{\xi}}\bar{\xi} + v_{\bar{\eta}}\bar{\eta} \quad | \quad v_{\bar{\xi}} = 0 \quad \& \quad v_{\bar{\eta}} = \omega\bar{\xi}$$

⇒ La puissance des efforts intérieurs (et donc la puissance résistante maximale) se réduit donc au cisaillement uniforme dans OAB.



□ Exemples d'application

• **Excavations : Cas d'une fouille verticale**

➤ Mécanisme de bloc

Critère de Tresca ($c = c_u$ et $\varphi = \varphi_u \cong 0$)

► Puissance des efforts extérieurs

$$\wp_{ext}(\bar{v}) = \bar{Q} \cdot \dot{\bar{q}}(\bar{v})$$

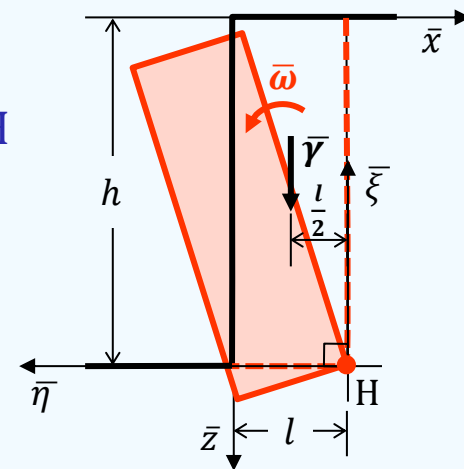
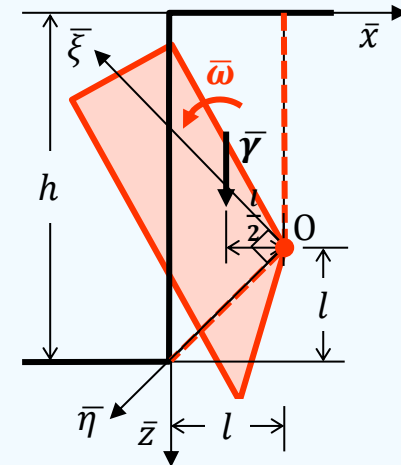
× 1^{ère} hypothèse (Minoration) : Rotation autour de O

$$\begin{cases} Q = \gamma \left(h - \frac{l}{2} \right) l \\ \dot{q} = \omega \frac{l}{2} \end{cases} \Rightarrow \wp_{ext}(\bar{v}) = \frac{1}{2} \gamma \omega \left(h - \frac{l}{2} \right) l^2$$

× 2^{ème} hypothèse (Majoration) : Rotation autour de H

$$\begin{cases} Q = \gamma h l \\ \dot{q} = \omega \frac{l}{2} \end{cases} \Rightarrow \wp_{ext}(\bar{v}) = \frac{1}{2} \gamma \omega h l^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \gamma \omega \left(h - \frac{l}{2} \right) l^2 \leq \wp_{ext}(\bar{v}) \leq \frac{1}{2} \gamma \omega h l^2$$



□ Exemples d'application

• Excavations : Cas d'une fouille verticale

➤ Mécanisme de bloc

Critère de Tresca ($c = c_u$ et $\varphi = \varphi_u \cong 0$)

► Tenseur des vitesses de déformation

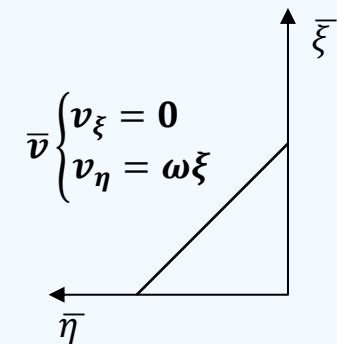
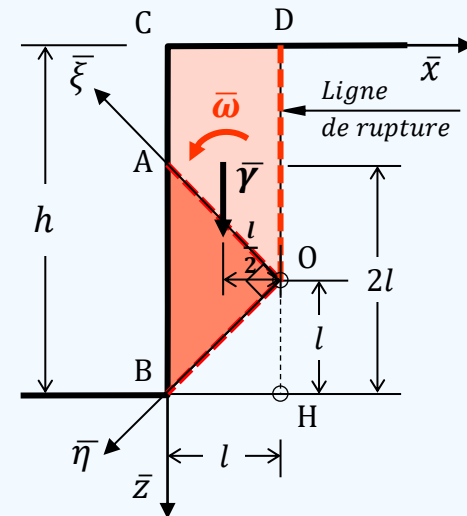
$$\bar{\bar{d}} = \begin{pmatrix} d_{\xi\xi} & d_{\xi\eta} \\ d_{\xi\eta} & d_{\eta\eta} \end{pmatrix}$$

avec : $d_{\xi\xi} = \frac{\partial v_\xi}{\partial \xi} = 0$

$$d_{\eta\eta} = \frac{\partial v_\eta}{\partial \eta} = 0$$

$$d_{\xi\eta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_\xi}{\partial \eta} + \frac{\partial v_\eta}{\partial \xi} \right) = \frac{1}{2} (0 + \omega) = \frac{1}{2} \omega$$

$$\Rightarrow \bar{\bar{d}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} d_1 = +\frac{1}{2} \omega \\ d_2 = -\frac{1}{2} \omega \end{cases}$$



Champ de vitesses

Exemples d'application

Excavations : Cas d'une fouille verticale

Mécanisme de bloc

Critère de Tresca ($c = c_u$ et $\varphi = \varphi_u \cong 0$)

$$\rho_{ext}(\bar{v}) \leq \rho_{rm}(\bar{v})$$

× 1^{er} hypothèse (Minoration) : Rotation autour de O

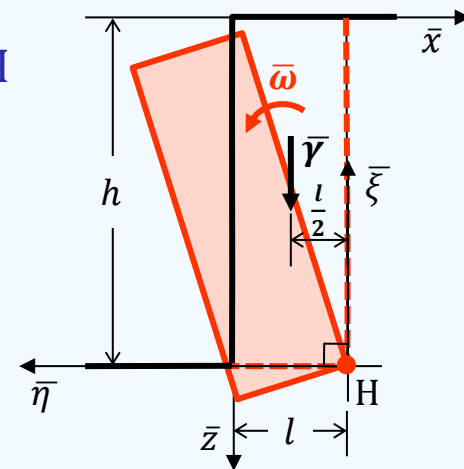
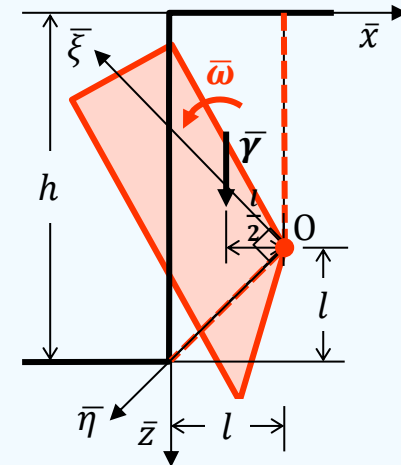
$$\frac{1}{2} \gamma \omega \left(h - \frac{l}{2} \right) l^2 \leq c_u \omega l^2 \Rightarrow \frac{\gamma \cdot h}{c_u} \leq \frac{2}{1 - \frac{l}{2h}}$$

$$\text{Optimisation : } \frac{l}{h} \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{\gamma \cdot h}{c_u} \leq 2$$

× 2^{ème} hypothèse (Majoration) : Rotation autour de H

$$\frac{1}{2} \gamma \omega h l^2 \leq c_u \omega l^2 \Rightarrow \frac{\gamma \cdot h}{c_u} \leq 2$$

► *Solution exacte* : $k^- = k^+ = \frac{\gamma \cdot h}{c_u} = 2$



Exemples d'application

Excavations : Cas d'une fouille verticale

Mécanisme de bloc

Critère de Mohr - Coulomb ($c = c'$ et $\varphi = \varphi'$)

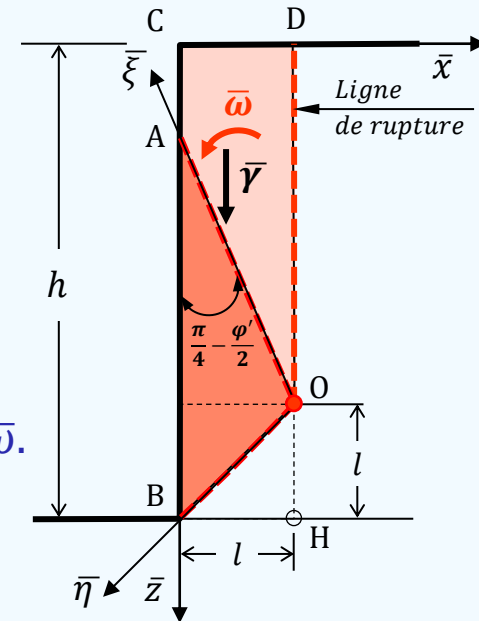
Cinétique du mouvement de rotation

Le mode de déformation pour $h \geq 2l$ est caractérisé par :

1. Une rotation de OACD autour de O avec la vitesse $\bar{\omega}$.
2. Un décollement le long de OD (la contribution de la discontinuité de vitesse normale et positive est nulle).
3. Un cisaillement uniforme dans le triangle OAB le long de OA et de OB.
4. Avec les axes $\bar{\xi}$ et $\bar{\eta}$, le champ de vitesse dans le triangle OAB est égal à :

$$\bar{v} = v_{\bar{\xi}} \bar{\xi} + v_{\bar{\eta}} \bar{\eta} \quad | \quad v_{\bar{\xi}} = 0 \text{ \& } v_{\bar{\eta}} = \omega \bar{\xi} \cos \varphi' \text{ (composantes covariantes)}.$$

⇒ La puissance des efforts intérieurs (et donc la puissance résistante maximale) se réduit donc au cisaillement uniforme dans OAB.



Exemples d'application

Excavations : Cas d'une fouille verticale

Mécanisme de bloc

Critère de Mohr - Coulomb ($c = c'$ et $\varphi = \varphi'$)

Puissance des efforts extérieurs

$$\mathcal{P}_{ext}(\bar{v}) = \bar{Q} \cdot \dot{\bar{q}}(\bar{v})$$

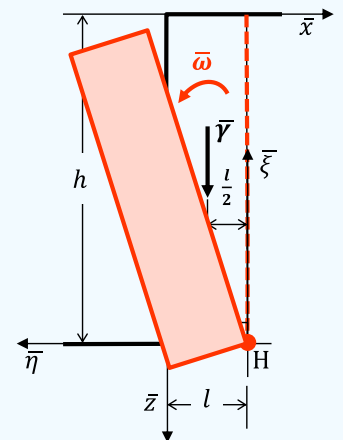
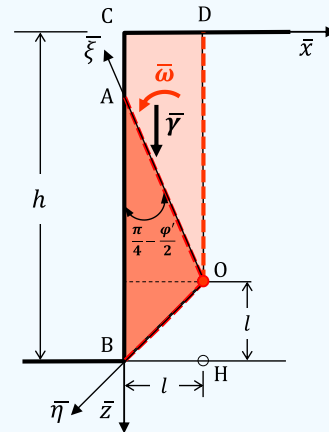
× 1^{ère} hypothèse (Minoration) : Rotation autour de O

$$\begin{cases} Q = \gamma \left[h - \frac{l}{2} \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi'}{2} \right) \right] l \\ \dot{q} = \omega \frac{l}{2} \end{cases} \Rightarrow \mathcal{P}_{ext}(\bar{v}) = \frac{1}{2} \gamma \omega \left[h - \frac{l}{2} \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi'}{2} \right) \right] l^2$$

× 2^{ème} hypothèse (Majoration) : Rotation autour de H

$$\begin{cases} Q = Q = \gamma h l \\ \dot{q} = \omega \frac{l}{2} \end{cases} \Rightarrow \mathcal{P}_{ext}(\bar{v}) = \frac{1}{2} \gamma \omega h l^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \gamma \omega \left[h - \frac{l}{2} \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi'}{2} \right) \right] l^2 \leq \mathcal{P}_{ext}(\bar{v}) \leq \frac{1}{2} \gamma \omega h l^2$$



Exemples d'application

Excavations : Cas d'une fouille verticale

➤ Mécanisme de bloc

Critère de Mohr - Coulomb ($c = c'$ et $\varphi = \varphi'$)

► Tenseur des vitesses de déformation

$$\bar{\bar{d}} = \begin{pmatrix} d_{\xi\xi} & d_{\xi\eta} \\ d_{\xi\eta} & d_{\eta\eta} \end{pmatrix} \text{ avec : } d_{\xi\xi} = \frac{\partial v_{\xi}}{\partial \xi} = 0$$

$$d_{\eta\eta} = \frac{\partial v_{\eta}}{\partial \eta} = 0$$

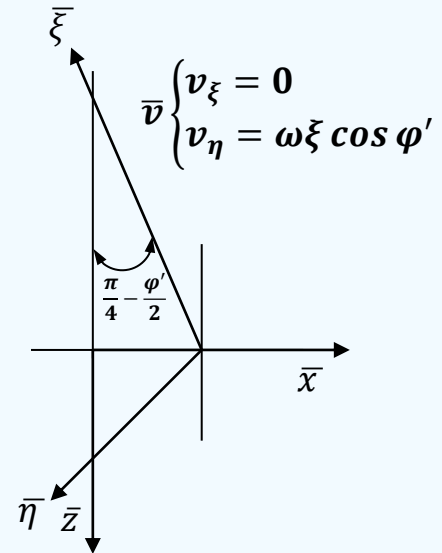
$$d_{\xi\eta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_{\xi}}{\partial \eta} + \frac{\partial v_{\eta}}{\partial \xi} \right) = \frac{1}{2} (0 + \omega \cos \varphi') = \frac{1}{2} \omega \cos \varphi'$$

$$\Rightarrow \text{Tr}(\bar{\bar{d}}) = (d_{\xi\eta} + d_{\eta\xi}) \frac{\sin \varphi'}{\cos^2 \varphi'} = \omega \tan \varphi' \quad / (\bar{x} ; \bar{z})$$

et les valeurs principales :

$$d_1 = d_{zz} = - \frac{d_{\xi\eta}}{1 + \sin \varphi'} = \frac{\cos \varphi'}{2(1 + \sin \varphi')} \omega = - \frac{1}{2} \omega \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi'}{2} \right)$$

$$d_2 = d_{xx} = + \frac{d_{\xi\eta}}{1 - \sin \varphi'} = \frac{\cos \varphi'}{2(1 - \sin \varphi')} \omega = + \frac{1}{2} \omega \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi'}{2} \right)$$



□ Exemples d'application

- **Excavations : Cas d'une fouille verticale**

- **Mécanisme de bloc**

Critère de Mohr - Coulomb ($c = c'$ et $\varphi = \varphi'$)

- *Champ de vitesses cinématiquement admissible*

$$\pi[\bar{x}, \bar{d}(\bar{x})] = c' [|\mathbf{d}_1| + |\mathbf{d}_2| - \text{Tr}(\bar{d})] \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi'}{2}\right) \quad (\text{Voir p. 11})$$

$$\text{si } \text{Tr}(\bar{d}) \geq (|\mathbf{d}_1| + |\mathbf{d}_2|) \sin \varphi'$$

$$\Rightarrow \pi[\bar{x}, \bar{d}(\bar{x})] = c' \omega \left[\left| -\frac{1}{2} \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi'}{2}\right) \right| + \left| +\frac{1}{2} \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi'}{2}\right) \right| - \tan \varphi' \right]$$

$$\Rightarrow \pi[\bar{x}, \bar{d}(\bar{x})] = c' \omega$$

- *Puissance résistante maximale*

$$\wp_{rm}(\bar{v}) = \int_V \pi[\bar{x}, \bar{d}(\bar{x})] dV$$

$$\text{avec : } dV : 0 \rightarrow \Omega_{OAB} \times 1 = l^2 \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi'}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \wp_{rm}(\bar{v}) = c' \omega \int_0^{l^2} dV \Rightarrow \wp_{rm}(\bar{v}) = c' \omega l^2 \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi'}{2}\right)$$

Exemples d'application

Excavations : Cas d'une fouille verticale

Mécanisme de bloc

Critère de Mohr - Coulomb ($c = c'$ et $\varphi = \varphi'$)

$$\rho_{ext}(\bar{v}) \leq \rho_{rm}(\bar{v})$$

× 1^{er} hypothèse (Minoration) : Rotation autour de O

$$\frac{1}{2} \gamma \omega \left[h - \frac{l}{2} \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi'}{2} \right) \right] l^2 \leq c' \omega l^2 \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi'}{2} \right)$$

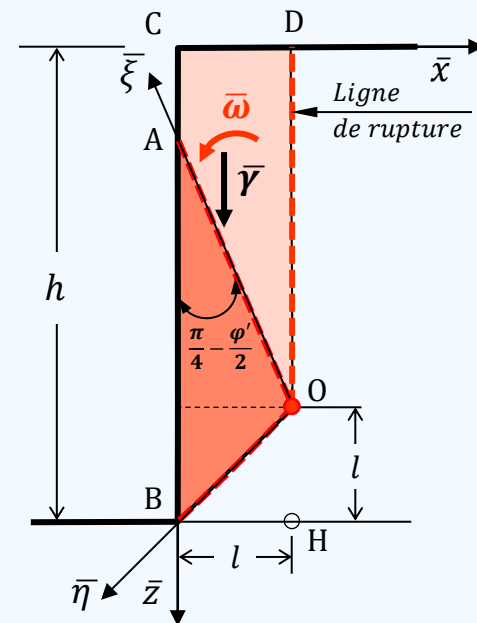
$$\Rightarrow \frac{\gamma \cdot h}{c'} \leq \frac{2 \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi'}{2} \right)}{1 - \frac{l}{2h} \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi'}{2} \right)}$$

$$\text{Optimisation : } \frac{l}{h} \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{\gamma \cdot h}{c'} \leq 2 \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi'}{2} \right)$$

× 2^{ème} hypothèse (Majoration) : Rotation autour de H

$$\frac{1}{2} \gamma \omega h l^2 \leq c' \omega l^2 \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi'}{2} \right) \Rightarrow \frac{\gamma \cdot h}{c'} \leq 2 \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi'}{2} \right)$$

► *Solution exacte :* $k^- = k^+ = \frac{\gamma \cdot h}{c'} = 2 \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi'}{2} \right)$



□ Exemples d'application

- **Fondations : Cas d'une semelle filante**

Soit une semelle filante de largeur B reposant sur un massif de sol argileux de poids volumique γ et de cohésion non drainée c_u supposé obéissant au critère de type Tresca. Déterminer la charge maximale Q_{max} que peut supporter cette semelle.

Hypothèse

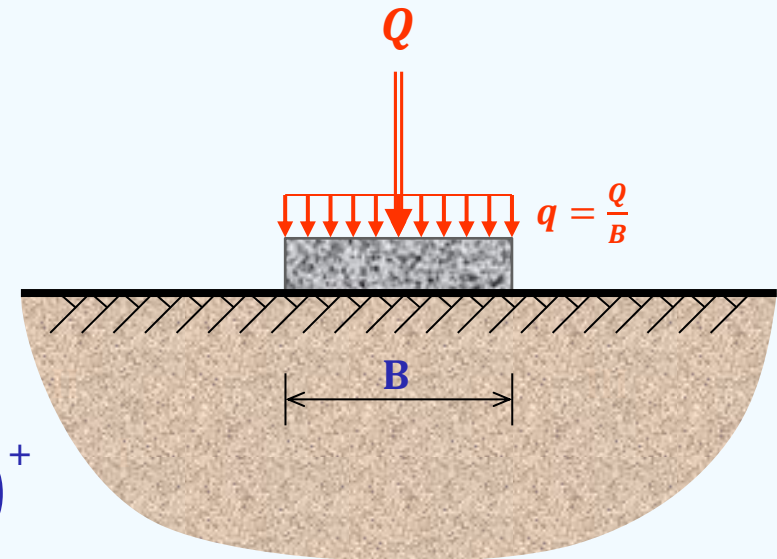
Poinçonnement du sol

Critère de rupture de type Tresca

$$f(\bar{\sigma}) = |\sigma_1 - \sigma_2| - 2c_u \leq 0$$

Mode de chargement appliqué

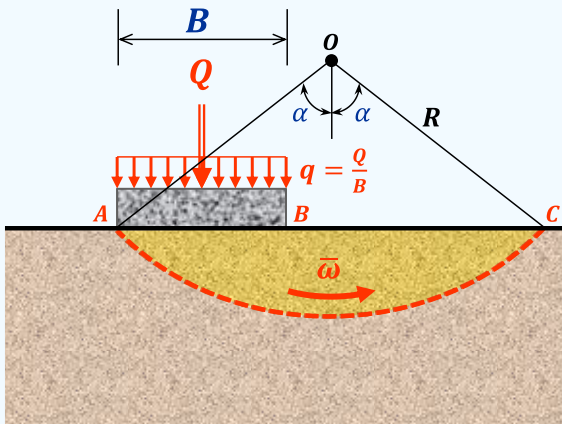
$$\text{Contrainte appliquée : } q = \frac{Q}{B} \leq q^+ = \left(\frac{Q}{B}\right)^+$$



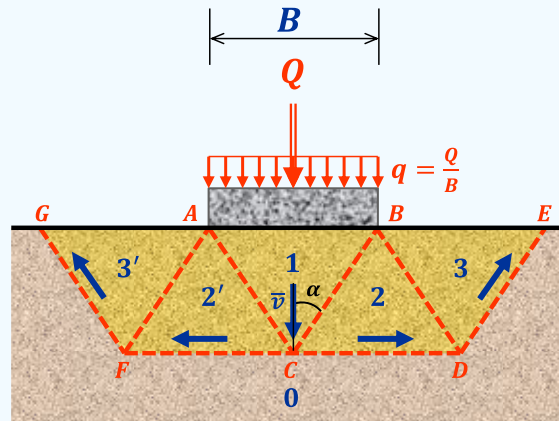
Exemples d'application

Fondations : Cas d'une semelle filante

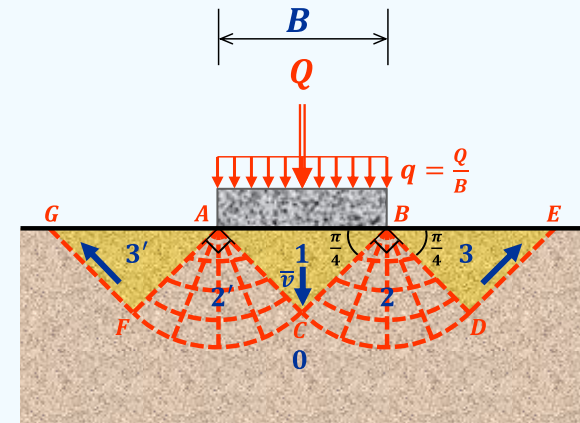
Mécanismes de rupture considérés



Mécanisme de cercle



Mécanisme à six zones



Mécanisme de Prandtl

□ Exemples d'application

• **Fondations : Cas d'une semelle filante**

➤ **Mécanisme de cercle : 1^{ère} hypothèse (Cercle centré au point B)**

▶ *Puissance des efforts extérieurs*

$$\mathcal{P}_{ext}(\bar{v}) = \bar{Q} \cdot \dot{\bar{q}}(\bar{v}) = Q\omega \left(R - \frac{B}{2} \right) = \frac{1}{2} Q\omega B$$

▶ *Champ de vitesses cinématiquement admissible*

$$\pi[\bar{x}, \bar{n}(\bar{x}), [\bar{v}(\bar{x})]] = k|[\bar{v}]| \quad \text{si} \quad [\bar{v}] \cdot \bar{n} = 0$$

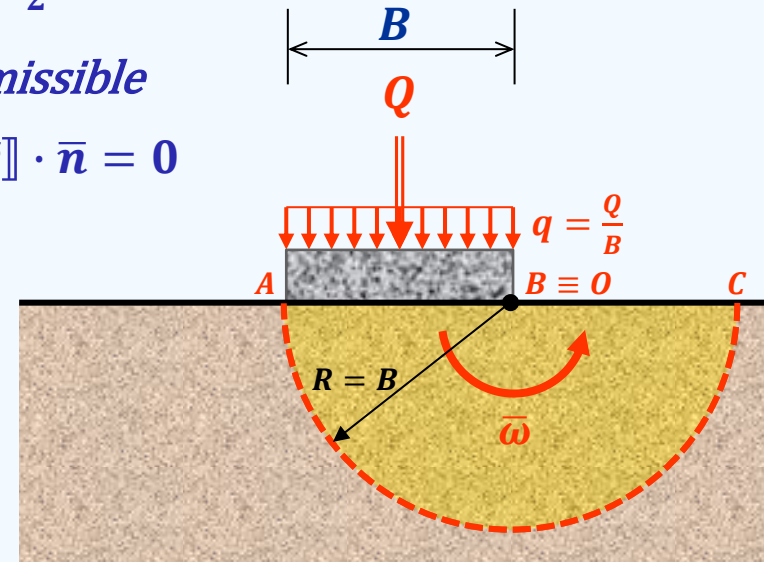
$$\Rightarrow [\bar{v}(\bar{x})] = v_{\widehat{AC}}$$

$$k = c_u$$

$$\bullet \quad v_{\widehat{AC}} = \omega R = \omega B$$

$$\bullet \quad l_{\widehat{AC}} = \pi R = \pi B$$

$$\Rightarrow \pi[\bar{x}, \bar{n}(\bar{x}), [\bar{v}(\bar{x})]] = \omega B c_u$$



Remarque : Le tenseur des vitesses étant nul dans les blocs, seules les vitesses $[\bar{v}(\bar{x})]$ inter-blocs parallèles aux lignes de discontinuités sont prises en considération.

□ Exemples d'application

• **Fondations : Cas d'une semelle filante**

➤ **Mécanisme de cercle : 1^{ère} hypothèse (Cercle centré au point B)**

▶ *Puissance résistante maximale*

$$\wp_{rm}(\bar{v}) = \int_{\Sigma} \pi[\bar{x}, \bar{n}(\bar{x}), [\bar{v}(\bar{x})]] d\Sigma$$

$$\text{avec : } \pi[\bar{x}, \bar{n}(\bar{x}), [\bar{v}(\bar{x})]] = \omega B c_u$$

$$d\Sigma = 1 \times dl \quad | \quad dl: 0 \rightarrow l = \widehat{AC} = \pi B$$

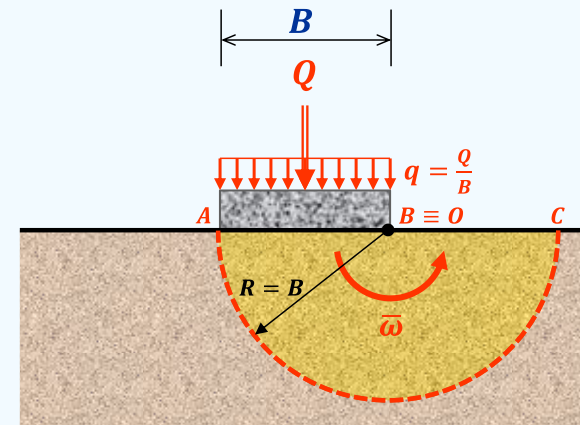
$$\Rightarrow \wp_{rm}(\bar{v}) = \omega B c_u \int_0^{\pi B} dl \Rightarrow \wp_{rm}(\bar{v}) = \pi \omega B^2 c_u$$

$$\Rightarrow \wp_{ext}(\bar{v}) \leq \wp_{rm}(\bar{v}) \Rightarrow \frac{1}{2} Q \omega B \leq \pi \omega B^2 c_u$$

$$\Rightarrow Q_{max} = 2\pi B c_u$$

▶ *Encadrement*

$$\left(\frac{Q}{B c_u}\right)^- = 5 \leq \frac{Q_{ult}}{B c_u} \leq \left(\frac{Q}{B c_u}\right)^+ = 2\pi \approx 6.28$$



□ Exemples d'application

• Fondations : Cas d'une semelle filante

➤ Mécanisme de cercle : 2^{ème} hypothèse (Cercle centré à l'aplomb du point B)

▶ Puissance des efforts extérieurs

$$\mathcal{P}_{ext}(\bar{v}) = \bar{Q} \cdot \dot{\bar{q}}(\bar{v}) = Q\omega \left(R \sin \alpha - \frac{B}{2} \right) = Q\omega \left(B - \frac{B}{2} \right) = \frac{1}{2} Q\omega B$$

▶ Champ de vitesses cinématiquement admissible

$$\pi[\bar{x}, \bar{n}(\bar{x}), \llbracket \bar{v}(\bar{x}) \rrbracket] = k |\llbracket \bar{v} \rrbracket| \quad \text{si} \quad \llbracket \bar{v} \rrbracket \cdot \bar{n} = 0$$

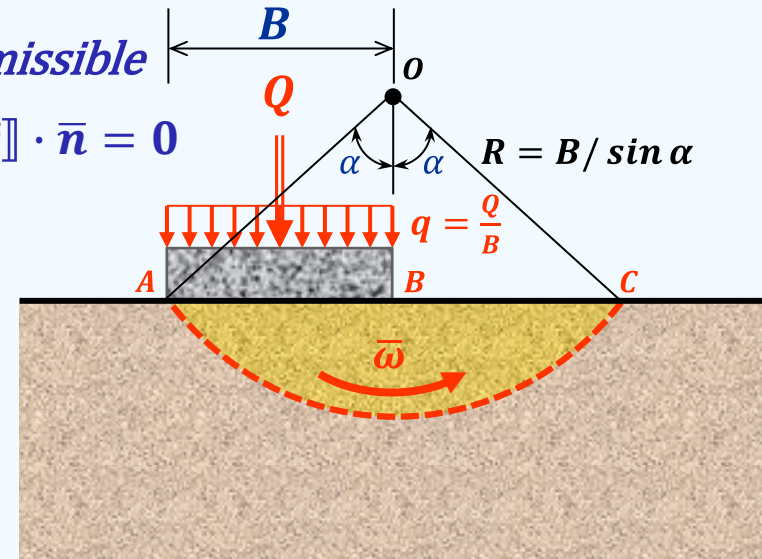
$$\Rightarrow \llbracket \bar{v}(\bar{x}) \rrbracket = v_{\widehat{AC}}$$

$$k = c_u$$

$$\bullet v_{\widehat{AC}} = \omega R$$

$$\bullet l_{\widehat{AC}} = \widehat{AC} = 2\alpha R \quad | \quad R = B / \sin \alpha$$

$$\Rightarrow \pi[\bar{x}, \bar{n}(\bar{x}), \llbracket \bar{v}(\bar{x}) \rrbracket] = \omega R c_u$$



Remarque : Le tenseur des vitesses étant nul dans les blocs, seules les vitesses $\llbracket \bar{v}(\bar{x}) \rrbracket$ inter-blocs parallèles aux lignes de discontinuités sont prises en considération.

Exemples d'application

Fondations : Cas d'une semelle filante

➤ Mécanisme de cercle : 2^{ème} hypothèse (Cercle centré à l'aplomb du point B)

► Puissance résistante maximale

$$\wp_{rm}(\bar{v}) = \int_{\Sigma} \pi[\bar{x}, \bar{n}(\bar{x}), [\bar{v}(\bar{x})]] d\Sigma$$

avec : $\pi[\bar{x}, \bar{n}(\bar{x}), [\bar{v}(\bar{x})]] = \omega R c_u$ & $d\Sigma = 1 \times dl$ | $dl: 0 \rightarrow l = \widehat{AC} = 2\alpha R$

$$\Rightarrow \wp_{rm}(\bar{v}) = \omega R c_u \int_0^{l=2\alpha R} dl \Rightarrow \wp_{rm}(\bar{v}) = 2\alpha \omega R^2 c_u$$

$$\wp_{ext}(\bar{v}) \leq \wp_{rm}(\bar{v}) \Rightarrow \frac{1}{2} Q \omega B \leq 2\alpha \omega R^2 c_u \quad | \quad R = B / \sin \alpha$$

$$\Rightarrow Q_{max} = \frac{4\alpha}{\sin^2 \alpha} B c_u$$

► Optimisation : $\tan \alpha = 2\alpha \Rightarrow \alpha = 0,37 \text{ rad} = 67^\circ$

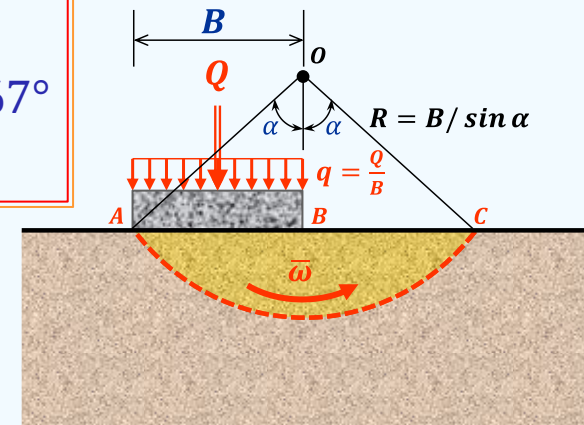
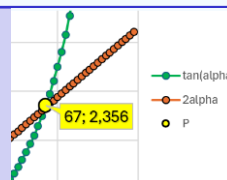
D
É
M
O

Soit : $y(\alpha) = \frac{\alpha}{\sin^2 \alpha}$

Dérivons : $y'(\alpha) = \frac{\alpha}{\sin^2 \alpha} \left(1 - \frac{2\alpha}{\tan \alpha} \right)$

Ecrivons : $y'(\alpha) = 0 \Rightarrow \tan \alpha = 2\alpha$

$$\Rightarrow \alpha = 0,37 \text{ rad} = 67^\circ$$



Exemples d'application

Fondations : Cas d'une semelle filante

➤ Mécanisme de cercle : 2^{ème} hypothèse (Cercle centré à l'aplomb du point B)

▶ Puissance résistante maximale

$$\wp_{rm}(\bar{v}) = \int_{\Sigma} \pi[\bar{x}, \bar{n}(\bar{x}), [\bar{v}(\bar{x})]] d\Sigma$$

$$\text{avec : } \pi[\bar{x}, \bar{n}(\bar{x}), [\bar{v}(\bar{x})]] = \omega R c_u \text{ \& } d\Sigma = 1 \times dl \quad | \quad dl: 0 \rightarrow l = \widehat{AC} = 2\alpha R$$

$$\Rightarrow \wp_{rm}(\bar{v}) = \omega R c_u \int_0^{l=2\alpha R} dl \Rightarrow \wp_{rm}(\bar{v}) = 2\alpha \omega R^2 c_u$$

$$\wp_{ext}(\bar{v}) \leq \wp_{rm}(\bar{v}) \Rightarrow \frac{1}{2} Q \omega B \leq 2\alpha \omega R^2 c_u \quad | \quad R = B / \sin \alpha$$

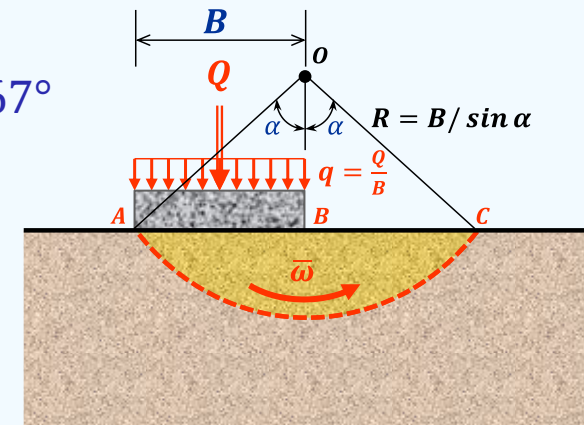
$$\Rightarrow Q_{max} = \frac{4\alpha}{\sin^2 \alpha} B c_u$$

$$\text{Optimisation : } \tan \alpha = 2\alpha \Rightarrow \alpha = 0,37 \text{ rad} = 67^\circ$$

$$\Rightarrow Q_{max} \approx 5.33 B c_u$$

▶ Encadrement

$$\left(\frac{Q}{B c_u} \right)^- = 5 \leq \frac{Q_{ult}}{B c_u} \leq \left(\frac{Q}{B c_u} \right)^+ = 5.33$$



Exemples d'application

Fondations : Cas d'une semelle filante

➤ Mécanisme de cercle : 3^{ème} hypothèse (Cercle centré loin du point B)

▶ Puissance des efforts extérieurs

$$\mathcal{P}_{ext}(\bar{v}) = \bar{Q} \cdot \dot{\bar{q}}(\bar{v}) = Q\omega \left(R \sin \alpha - \frac{B}{2} \right)$$

▶ Champ de vitesses cinématiquement admissible

$$\pi[\bar{x}, \bar{n}(\bar{x}), \llbracket \bar{v}(\bar{x}) \rrbracket] = k |\llbracket \bar{v} \rrbracket| \quad \text{si} \quad \llbracket \bar{v} \rrbracket \cdot \bar{n} = 0$$

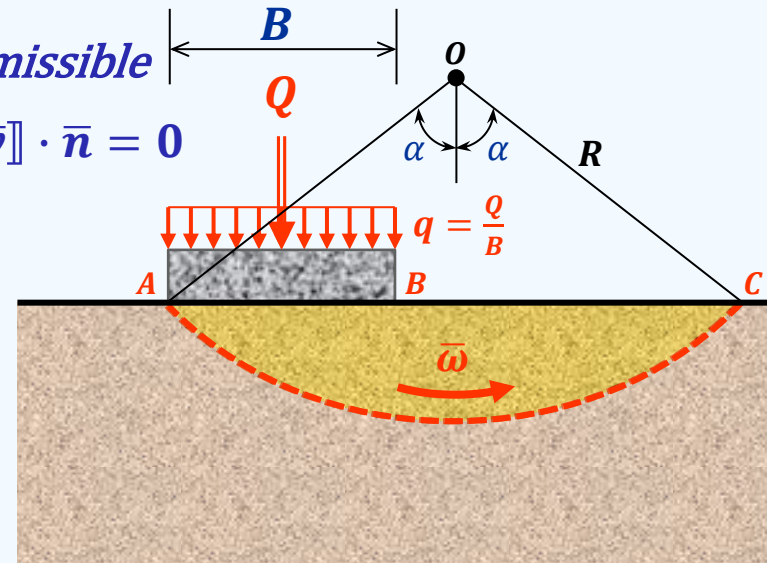
$$\Rightarrow \llbracket \bar{v}(\bar{x}) \rrbracket = v_{\widehat{AC}}$$

$$k = c_u$$

$$\bullet v_{\widehat{AC}} = \omega R$$

$$\bullet l_{\widehat{AC}} = \widehat{AC} = 2\alpha R$$

$$\Rightarrow \pi[\bar{x}, \bar{n}(\bar{x}), \llbracket \bar{v}(\bar{x}) \rrbracket] = \omega R c_u$$



Remarque : Le tenseur des vitesses étant nul dans les blocs, seules les vitesses $\llbracket \bar{v}(\bar{x}) \rrbracket$ inter-blocs parallèles aux lignes de discontinuités sont prises en considération.

□ Exemples d'application

- **Fondations : Cas d'une semelle filante**

- **Mécanisme de cercle : 3^{ème} hypothèse (Cercle centré loin du point B)**

- ▶ *Puissance résistante maximale*

$$\wp_{rm}(\bar{v}) = \int_{\Sigma} \pi[\bar{x}, \bar{n}(\bar{x}), [\bar{v}(\bar{x})]] d\Sigma$$

avec : $\pi[\bar{x}, \bar{n}(\bar{x}), [\bar{v}(\bar{x})]] = \omega R c_u$

$$d\Sigma = 1 \times dl \quad | \quad dl: 0 \rightarrow l = \widehat{AC} = 2\alpha R$$

$$\Rightarrow \wp_{rm}(\bar{v}) = \omega R c_u \int_0^{l=2\alpha R} dl \quad \Rightarrow \wp_{rm}(\bar{v}) = 2\alpha \omega R^2 c_u$$

- ▶ $\wp_{ext}(\bar{v}) \leq \wp_{rm}(\bar{v}) \quad \Rightarrow \quad Q\omega \left(R \sin \alpha - \frac{B}{2} \right) \leq 2\alpha \omega R^2 c_u$

$$\Rightarrow Q_{max} = \frac{2\alpha R^2}{\left(R \sin \alpha - \frac{B}{2} \right)} c_u \quad \text{si} \quad R \sin \alpha - \frac{B}{2} > 0$$

- ▶ *Optimisation : (Idem. 2^{ème} hypothèse : Cercle centré à l'aplomb du point B)*

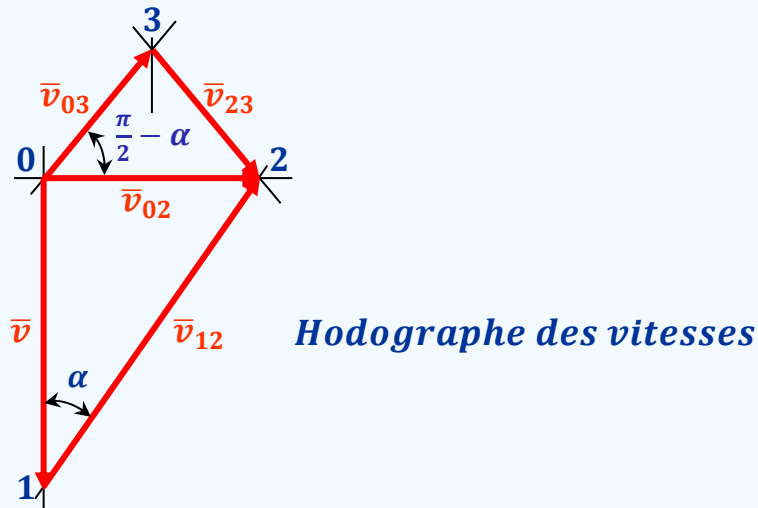
- × Minimisation par rapport à R : $R \sin \alpha = B \Rightarrow Q_{max} = \frac{4\alpha}{\sin^2 \alpha} B c_u$

- × Minimisation par rapport à α : $\tan \alpha = 2\alpha \Rightarrow Q_{max} \approx 5.33 B c_u$

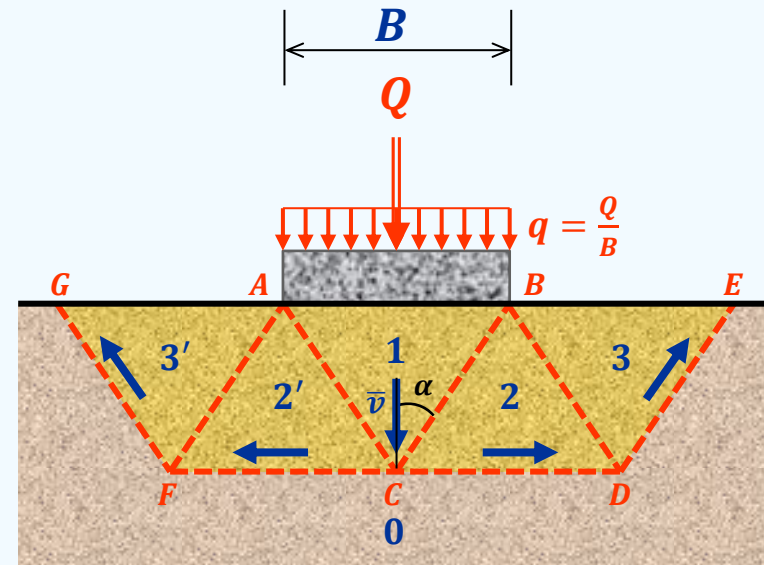
Exemples d'application

Fondations : Cas d'une semelle filante

Mécanisme à cinq blocs



- $v_{BC} = v_{12} = v / \cos \alpha$; $l_{BC} = l_{12} = \frac{B}{2 \sin \alpha}$
- $v_{CD} = v_{02} = v \tan \alpha$; $l_{CD} = l_{02} = B$
- $v_{BD} = v_{23} = \frac{v}{2 \cos \alpha}$; $l_{BD} = l_{23} = \frac{B}{2 \sin \alpha}$
- $v_{DE} = v_{03} = \frac{v}{2 \cos \alpha}$; $l_{DE} = l_{03} = \frac{B}{2 \sin \alpha}$



Remarque : Le tenseur des vitesses étant nul dans les blocs, seules les vitesses $[\bar{v}(\bar{x})]$ inter-blocs parallèles aux lignes de discontinuités sont prises en considération.

Exemples d'application

Fondations : Cas d'une semelle filante

Mécanisme à cinq blocs

Vitesses de discontinuités et longueurs correspondantes

$$\bullet v_{BC} = v_{12} = v / \cos \alpha ; l_{BC} = l_{12} = \frac{B}{2 \sin \alpha}$$

$$\bullet v_{CD} = v_{02} = v \tan \alpha ; l_{CD} = l_{02} = B$$

$$\bullet v_{BD} = v_{23} = \frac{v}{2 \cos \alpha} ; l_{BD} = l_{23} = \frac{B}{2 \sin \alpha}$$

$$\bullet v_{DE} = v_{03} = \frac{v}{2 \cos \alpha} ; l_{DE} = l_{03} = \frac{B}{2 \sin \alpha}$$

Puissance des efforts extérieurs

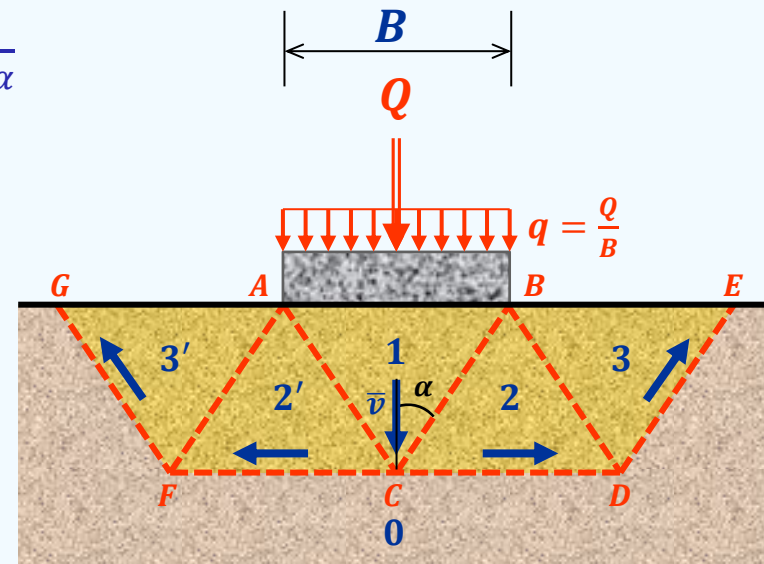
$$\mathcal{P}_{ext}(\bar{v}) = \bar{Q} \cdot \dot{\bar{q}}(\bar{v}) = Qv$$

Puissance résistante maximale

$$\mathcal{P}_{rm}(\bar{v}) = \int_{\Sigma} \pi[\bar{x}, \bar{n}(\bar{x}), [\bar{v}(\bar{x})]] d\Sigma = \int_{\Sigma} k |[\bar{v}]| d\Sigma$$

$\Rightarrow [\bar{v}(\bar{x})]$ - Vitesses de discontinuité : v_{BC}, v_{CD}, v_{BD} et v_{DE}

$$k = c_u$$



Exemples d'application

Fondations : Cas d'une semelle filante

Mécanisme à cinq blocs

$$\Rightarrow \wp_{rm}(\bar{v}) = 2 \left(\int_{BC} v_{BC} dl_{BC} + \int_{CD} v_{CD} dl_{CD} + \int_{BD} v_{BD} dl_{BD} + \int_{DE} v_{DE} dl_{DE} \right) c_u$$

$$\Rightarrow \wp_{rm}(\bar{v}) = 2(v_{BC}l_{BC} + v_{CD}l_{CD} + v_{BD}l_{BD} + v_{DE}l_{DE})c_u$$

$$\Rightarrow \wp_{rm}(\bar{v}) = 2 \left(\frac{1}{2 \sin \alpha \cos \alpha} + \tan \alpha + \frac{1}{4 \sin \alpha \cos \alpha} + \frac{1}{4 \sin \alpha \cos \alpha} \right) B c_u v$$

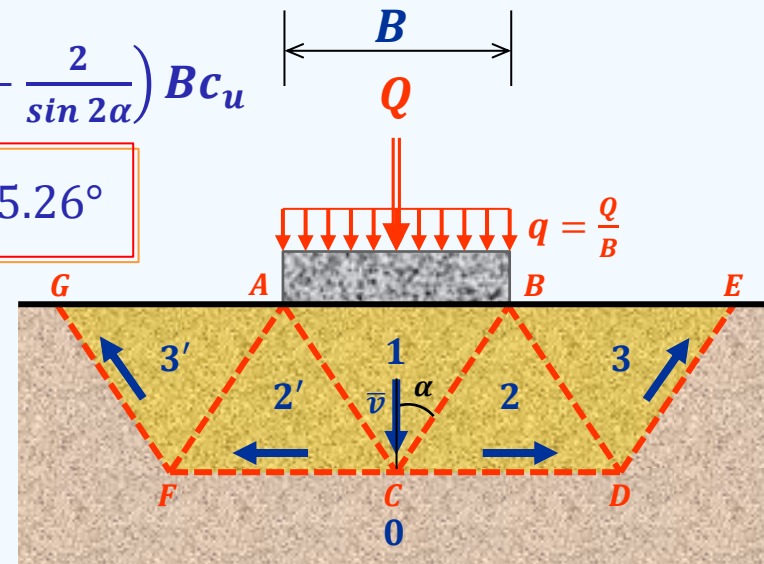
$$\Rightarrow \wp_{rm}(\bar{v}) = 2 \left(\tan \alpha + \frac{2}{\sin 2\alpha} \right) B c_u v$$

$$\triangleright \wp_{ext}(\bar{v}) \leq \wp_{rm}(\bar{v}) \Rightarrow Q \leq 2 \left(\tan \alpha + \frac{2}{\sin 2\alpha} \right) B c_u$$

$$\triangleright \text{Optimisation : } \tan \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 35.26^\circ$$

D
É
M
O

Soit : $y(\alpha) = \tan \alpha + \frac{2}{\sin 2\alpha}$
 Posons : $t = \tan \alpha \Rightarrow y(t) = 2t + \frac{1}{t}$
 Dérivons : $y'(t) = 2 - \frac{1}{t^2}$
 Ecrivons : $y'(t) = 2 - \frac{1}{t^2} = 0 \Rightarrow t = \frac{\sqrt{2}}{2}$
 D'où : $\tan \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 35.26^\circ$



Exemples d'application

Fondations : Cas d'une semelle filante

➤ Mécanisme à cinq blocs

$$\Rightarrow \wp_{rm}(\bar{v}) = 2 \left(\int_{BC} v_{BC} dl_{BC} + \int_{CD} v_{CD} dl_{CD} + \int_{BD} v_{BD} dl_{BD} + \int_{DE} v_{DE} dl_{DE} \right) c_u$$

$$\Rightarrow \wp_{rm}(\bar{v}) = 2(v_{BC}l_{BC} + v_{CD}l_{CD} + v_{BD}l_{BD} + v_{DE}l_{DE})c_u$$

$$\Rightarrow \wp_{rm}(\bar{v}) = 2 \left(\frac{1}{2 \sin \alpha \cos \alpha} + \tan \alpha + \frac{1}{4 \sin \alpha \cos \alpha} + \frac{1}{4 \sin \alpha \cos \alpha} \right) B c_u v$$

$$\Rightarrow \wp_{rm}(\bar{v}) = 2 \left(\tan \alpha + \frac{2}{\sin 2\alpha} \right) B c_u v$$

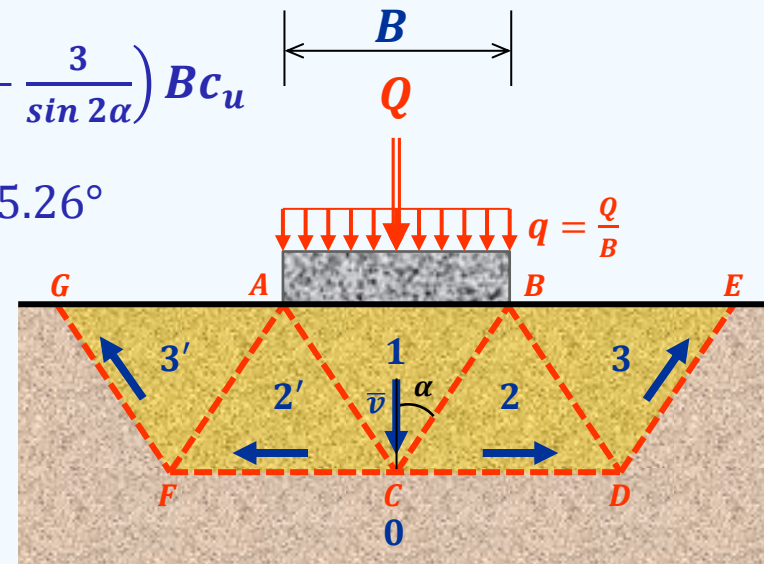
$$\blacktriangleright \wp_{ext}(\bar{v}) \leq \wp_{rm}(\bar{v}) \Rightarrow Q \leq 2 \left(\tan \alpha + \frac{3}{\sin 2\alpha} \right) B c_u$$

$$\blacktriangleright \text{Optimisation : } \tan \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 35.26^\circ$$

$$\Rightarrow Q_{max} = 4\sqrt{2}Bc_u \cong 5.66Bc_u$$

➤ Encadrement

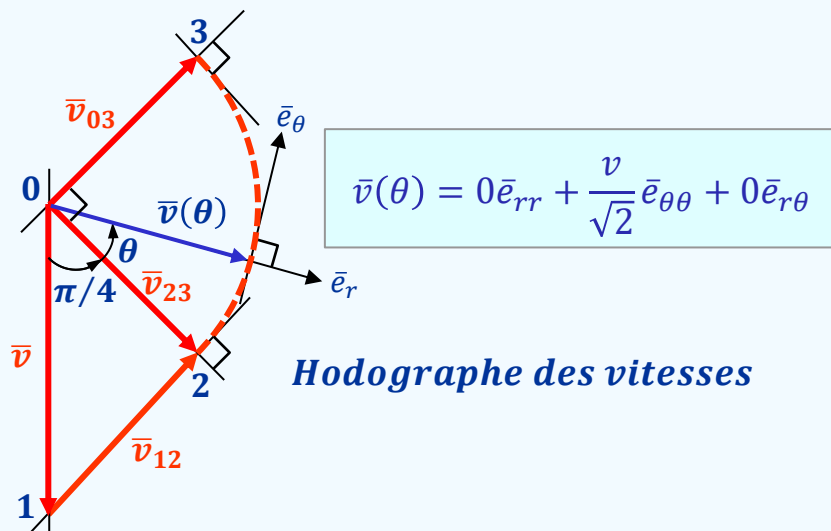
$$\left(\frac{Q}{Bc_u} \right)^- = 5 \leq \frac{Q_{ult}}{Bc_u} \leq \left(\frac{Q}{Bc_u} \right)^+ = 5.66$$



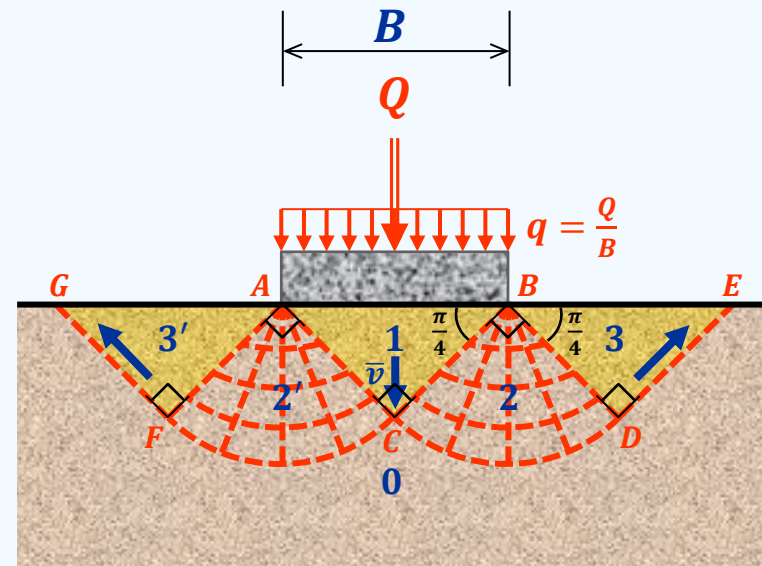
Exemples d'application

Fondations : Cas d'une semelle filante

Mécanisme de Prandtl



- $v_{BC} = v_{12} = v/\sqrt{2} \quad ; \quad l_{BC} = l_{12} = \frac{B}{\sqrt{2}}$
- $v_{BD} = v_{23} = v/\sqrt{2} \quad ; \quad l_{BD} = l_{23} = \frac{B}{\sqrt{2}}$
- $v_{\widehat{CD}} = v_{02} = v/\sqrt{2} \quad ; \quad l_{\widehat{CD}} = l_{02} = \frac{\pi B}{2\sqrt{2}}$
- $v_{DE} = v_{03} = v/\sqrt{2} \quad ; \quad l_{DE} = l_{03} = \frac{B}{\sqrt{2}}$



Remarque : Le tenseur des vitesses étant nul dans les blocs, seules les vitesses $[\vec{v}(\vec{x})]$ inter-blocs parallèles aux lignes de discontinuités sont prises en considération.

Exemples d'application

Fondations : Cas d'une semelle filante

Mécanisme de Prandtl

Vitesses de discontinuités et longueurs correspondantes

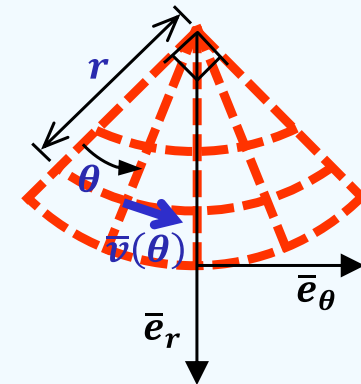
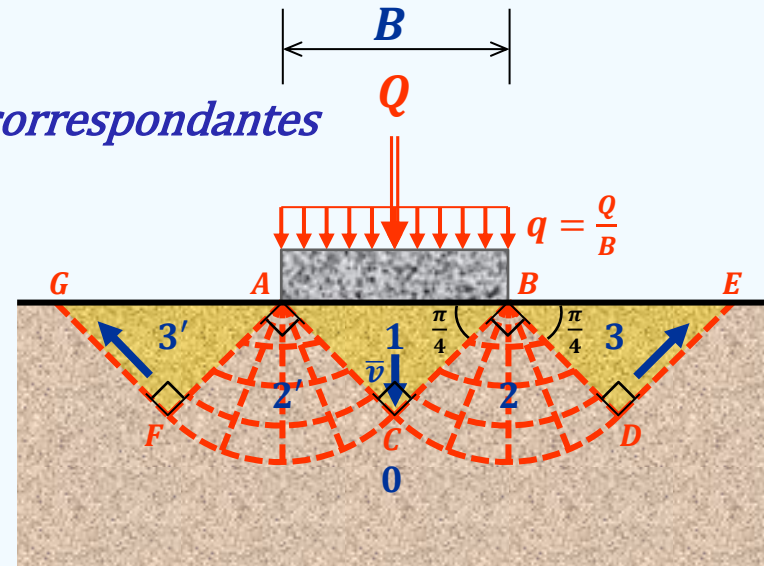
Blocs ABC, BDE et AFG

- $v_{BC} = v_{12} = v/\sqrt{2}$; $l_{BC} = l_{12} = \frac{B}{\sqrt{2}}$
- $v_{BD} = v_{23} = v/\sqrt{2}$; $l_{BD} = l_{23} = \frac{B}{\sqrt{2}}$
- $v_{\widehat{CD}} = v_{02} = v/\sqrt{2}$; $l_{\widehat{CD}} = l_{02} = \frac{\pi B}{2\sqrt{2}}$
- $v_{DE} = v_{03} = v/\sqrt{2}$; $l_{DE} = l_{03} = \frac{B}{\sqrt{2}}$

Blocs BCD et ACF

$$(\bar{e}_r, \bar{e}_\theta) \rightarrow \bar{v}(\theta) = \begin{cases} v_{rr} = 0 \\ v_{\theta\theta} = v/\sqrt{2} = cste \\ v_{r\theta} = 0 \end{cases}$$

$$dV = 1 \times r dr d\theta \quad | \quad \theta : 0 \rightarrow \frac{\pi}{2} \quad \& \quad r : 0 \rightarrow \frac{B}{\sqrt{2}}$$



Exemples d'application

Fondations : Cas d'une semelle filante

Mécanisme de Prandtl

Puissance des efforts extérieurs

$$\dot{\rho}_{ext}(\bar{v}) = \bar{Q} \cdot \dot{\bar{q}}(\bar{v}) = Qv$$

Puissance résistante maximale

$$\dot{\rho}_{rm}(\bar{v}) = \int_V \pi[\bar{x}, \bar{\bar{d}}(\bar{x})] dV + \int_{\Sigma} \pi[\bar{x}, \bar{n}(\bar{x}), \llbracket \bar{v}(\bar{x}) \rrbracket] d\Sigma$$

telles que :

$$\pi[\bar{x}, \bar{\bar{d}}(\bar{x})] = \frac{\sigma_o}{2} (|\bar{d}_1| + |\bar{d}_2| + |\bar{d}_3|) \quad \text{si } Tr(\bar{\bar{d}}) = 0 \quad | \quad \frac{\sigma_o}{2} = c_u$$

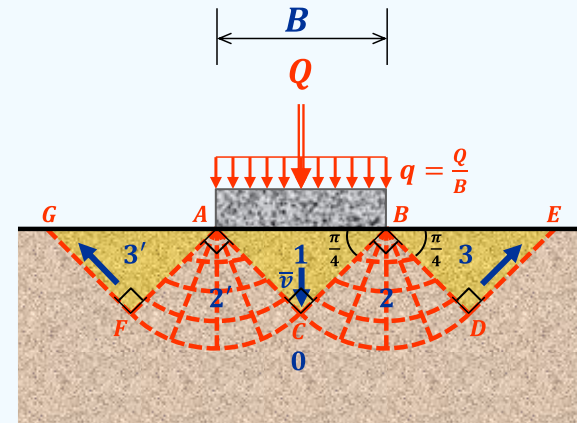
$$\pi[\bar{x}, \bar{n}(\bar{x}), \llbracket \bar{v}(\bar{x}) \rrbracket] = k |\llbracket \bar{v} \rrbracket| \quad \text{si } \llbracket \bar{v} \rrbracket \cdot \bar{n} = 0 \quad | \quad k = c_u$$

avec :

• $\llbracket \bar{v}(\bar{x}) \rrbracket$ - Vitesses de discontinuité : v_{BC} , $v_{\widehat{CD}}$ et v_{DE} et leurs symétriques

• $\bar{\bar{d}} = \frac{1}{2} [\overline{grad}(\bar{v}) + {}^t\overline{grad}(\bar{v})]$ - Taux de déformation dans l'éventail BCD et son symétrique

$$\bar{v} = v_r \bar{e}_r + v_\theta \bar{e}_\theta + v_z \bar{e}_z = \frac{v}{\sqrt{2}} \bar{e}_\theta$$



$$\overline{grad}(\bar{v}) = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = v_{i,j} = \begin{pmatrix} v_{r,r} & v_{r,\theta} & v_{r,z} \\ & v_{\theta,\theta} & v_{\theta,z} \\ \text{sym.} & & v_{z,z} \end{pmatrix}$$

□ Exemples d'application

• **Fondations : Cas d'une semelle filante**

➤ **Mécanisme de Prandtl**

$$\Rightarrow \bar{\bar{d}} = -\frac{v}{2\sqrt{2}r} (\bar{e}_r \otimes \bar{e}_\theta + \bar{e}_\theta \otimes \bar{e}_r) \Rightarrow d_1 = +\frac{v}{2\sqrt{2}r} \quad \& \quad d_2 = -\frac{v}{2\sqrt{2}r}$$

$$\blacksquare \pi[\bar{x}, \bar{\bar{d}}(\bar{x})] = \frac{\sigma_o}{2} (|d_1| + |d_2| + |d_3|) = \left(\left| +\frac{v}{2\sqrt{2}r} \right| + \left| -\frac{v}{2\sqrt{2}r} \right| + 0 \right) c_u = \frac{c_u v}{\sqrt{2}r}$$

$$\Rightarrow \int_V \pi[\bar{x}, \bar{\bar{d}}(\bar{x})] dV = \int_V \frac{v}{\sqrt{2}r} c_u dV = 2 \left(\int_0^{\frac{B}{\sqrt{2}}} r dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{c_u v}{\sqrt{2}r} d\theta \right) = \frac{c_u v}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{B}{\sqrt{2}}} dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta$$

$$\Rightarrow \int_V \pi[\bar{x}, \bar{\bar{d}}(\bar{x})] dV = \frac{\pi}{2} B c_u v$$

$$\blacksquare \pi[\bar{x}, \bar{n}(\bar{x}), [\bar{v}(\bar{x})]] = k |[\bar{v}]| = \pi_{BC} + \pi_{BD} + \pi_{\widehat{CD}} + \pi_{DE}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_\Sigma \pi[\bar{x}, \bar{n}(\bar{x}), [\bar{v}(\bar{x})]] d\Sigma &= 2 \left(\int_{BC} v_{BC} dl_{BC} + \int_{\widehat{CD}} v_{\widehat{CD}} dl_{\widehat{CD}} + \int_{DE} v_{DE} dl_{DE} \right) c_u \\ &= 2(v_{BC} l_{BC} + v_{\widehat{CD}} l_{\widehat{CD}} + v_{DE} l_{DE}) c_u \\ &= 2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\pi}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \right) B c_u v \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_\Sigma \pi[\bar{x}, \bar{n}(\bar{x}), [\bar{v}(\bar{x})]] d\Sigma = \left(\frac{\pi}{2} + 2 \right) B c_u v$$

Exemples d'application

- **Fondations : Cas d'une semelle filante**

➤ Mécanisme de Prandtl

$$\Rightarrow \wp_{rm}(\bar{v}) = \frac{\pi}{2} Bc_u v + \left(\frac{\pi}{2} + 2\right) Bc_u v = (\pi + 2) Bc_u v$$

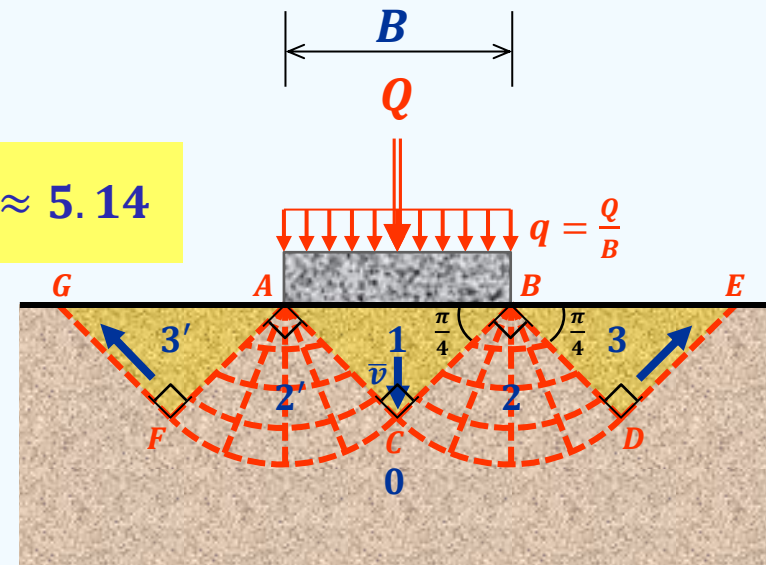
► $\wp_{ext}(\bar{\mathbf{v}}) \leq \wp_{rm}(\bar{\mathbf{v}})$

$$\Rightarrow Qv \leq (\pi + 2)Bc_u v$$

$$\Rightarrow Q_{max} = (\pi + 2)Bc_u \approx 5.14Bc_u$$

► *Encadrement*

$$\left(\frac{Q}{Bc_y}\right)^- = 5 \leq \frac{Q_{ult}}{Bc_y} \leq \left(\frac{Q}{Bc_y}\right)^+ = \pi + 2 \approx 5.14$$



□ Exemples d'application

• **Soutènements : Cas d'un écran vertical**

Soit un écran de soutènement vertical en contact avec un massif de sol sableux sec infini dans le plan de la figure ci-dessous. Le sable de poids volumique γ et d'angle de frottement interne φ' est supposé régi par le critère de rupture de type Mohr-Coulomb. Déterminer les coefficients de poussée K_a et de butée K_p , puis déduire le domaine des chargements potentiellement supportables $K(\bar{Q})$ correspondant.

Hypothèse admise

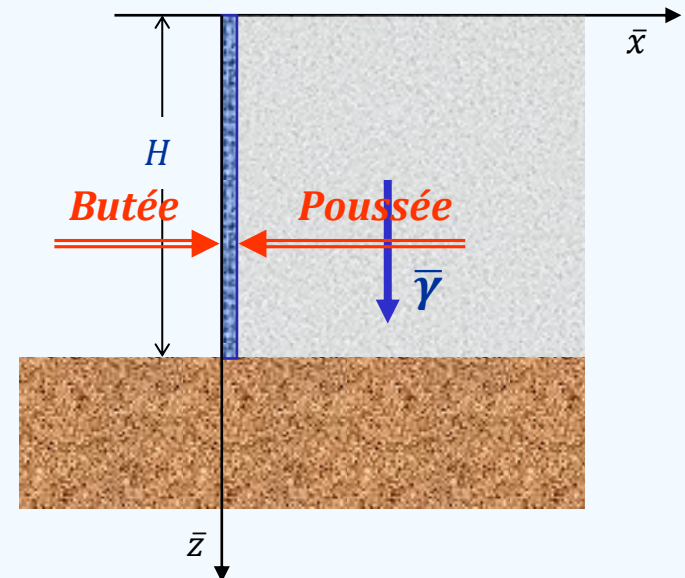
Déformations planes

Critère de rupture de type Mohr-Coulomb

$$f(\bar{\sigma}) = \sigma_1 - \sigma_2 \frac{1 - \sin \varphi'}{1 + \sin \varphi'} - 2c' \frac{\cos \varphi'}{1 + \sin \varphi'} \leq 0$$

Paramètres de chargement

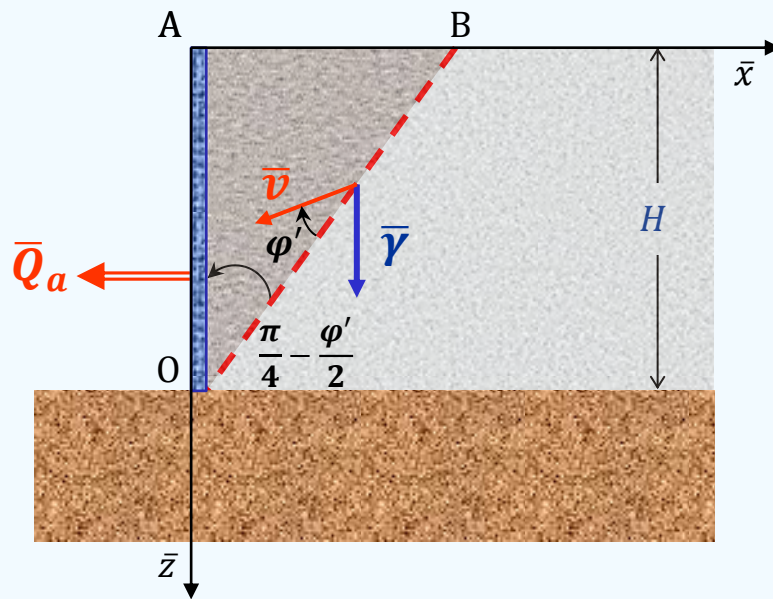
$\bar{Q}$: Résultante des forces de poussée ou de butée



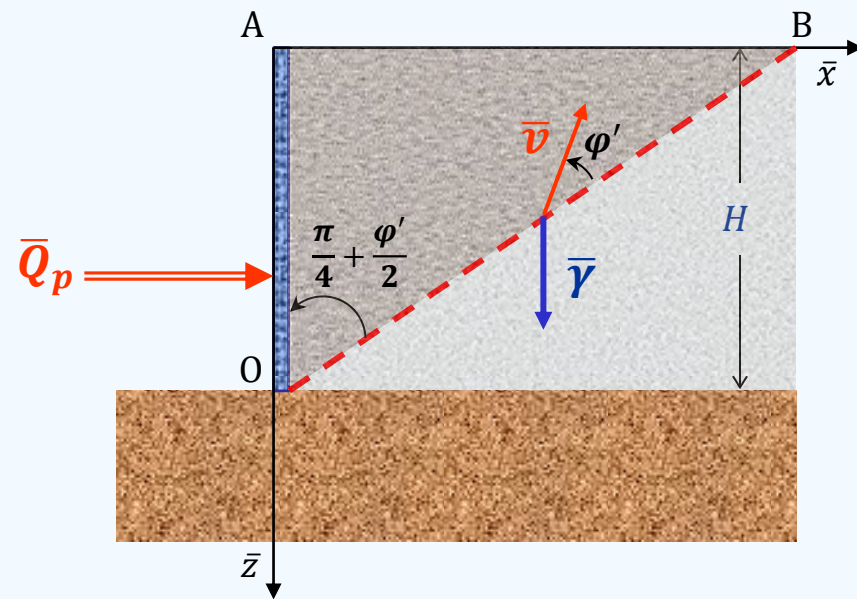
Exemples d'application

Soutènements : Cas d'un écran vertical

Mécanismes de rupture possibles



Rupture par poussée



Rupture par butée

(Détails : Voir cours de MDS)

Exemples d'application

Soutènements : Cas d'un écran vertical

Cas de la rupture par poussée

► Puissance des efforts extérieurs

$$\mathcal{P}_{ext}(\bar{v}) = \left[\frac{1}{2} \gamma H^2 \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi'}{2} \right) \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi'}{2} \right) \right] v - \left[Q_a \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi'}{2} \right) \right] v$$

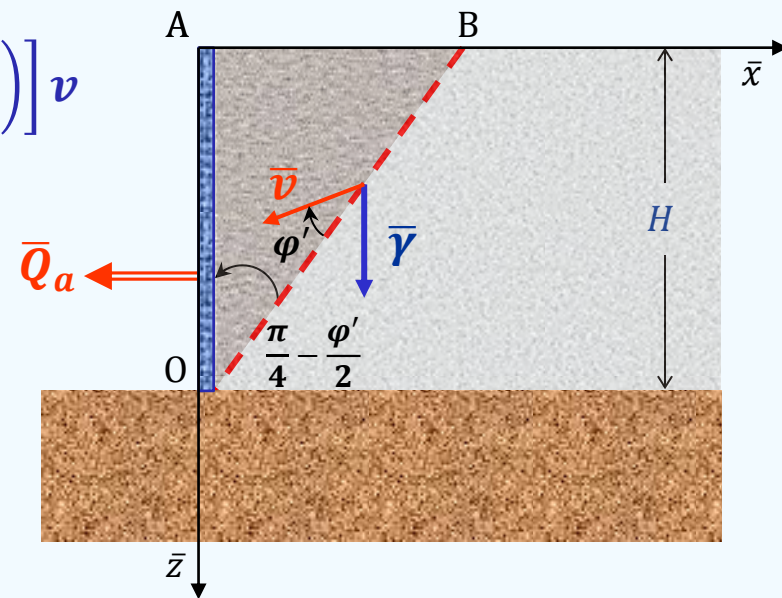
► Puissance résistante maximale

$\mathcal{P}_{rm}(\bar{v}) \equiv 0$ (Discontinuité de vitesse pertinente le long de $\overline{OB}$ et massif de cohésion nulle)

► Force de poussée

$$\mathcal{P}_{ext}(\bar{v}) \leq \mathcal{P}_{rm}(\bar{v})$$

$$\Rightarrow Q_a = \frac{1}{2} \gamma H^2 K_a \quad | \quad K_a = \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi'}{2} \right)$$



Rupture par poussée

□ Exemples d'application

• **Soutènements : Cas d'un écran vertical**

Cas de la rupture par butée

► *Puissance des efforts extérieurs*

$$\begin{aligned} \wp_{ext}(\bar{v}) = & - \left[\frac{1}{2} \gamma H^2 \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi'}{2} \right) \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi'}{2} \right) \right] v \\ & + \left[Q_p \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi'}{2} \right) \right] v \end{aligned}$$

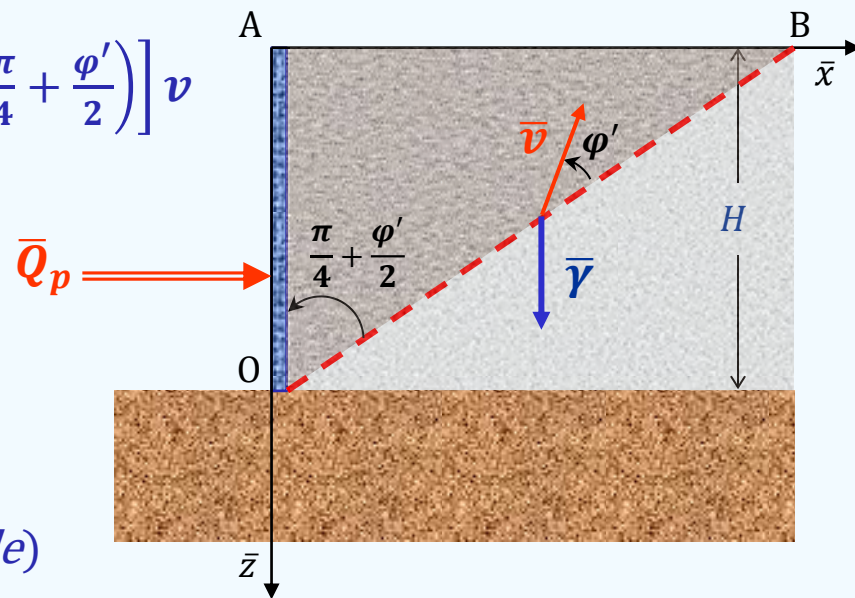
► *Puissance résistante maximale*

$\wp_{rm}(\bar{v}) \equiv 0$ (*Discontinuité de vitesse
pertinente le long de $\overline{OB}$
et massif de cohésion nulle*)

► *Force de poussée*

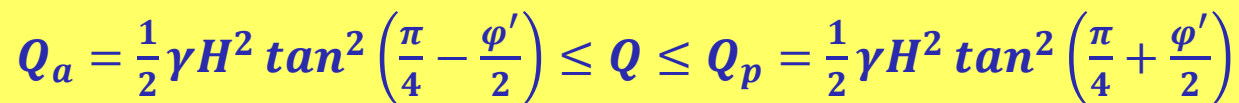
$$\wp_{ext}(\bar{v}) \leq \wp_{rm}(\bar{v})$$

$$\Rightarrow Q_p = \frac{1}{2} \gamma H^2 K_p \quad | \quad K_p = \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi'}{2} \right)$$



Rupture par butée

Domaine des chargements potentiellement supportables

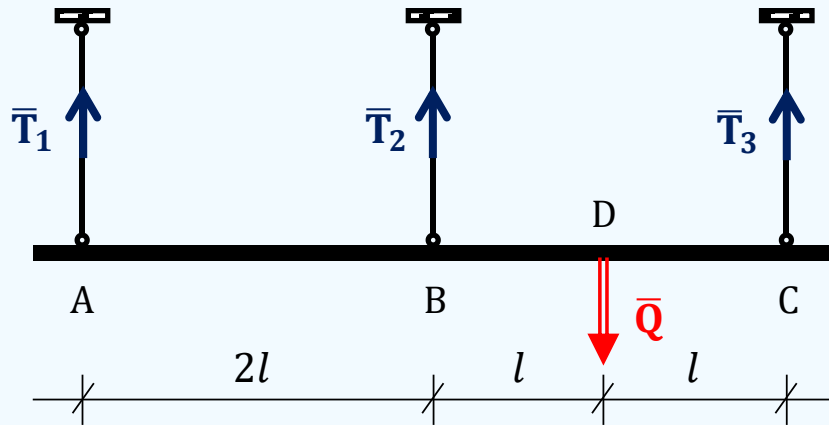


Merci de votre attention

Fin du Troisième Chapitre

EXERCICES

Ex. 1 Considérons une barre indéformable suspendue par des tirants flexibles comme l'indique la figure ci-après. On demande de déterminer le domaine des chargements potentiellement supportables $K(\bar{Q})$ pour cette structure, où $\bar{Q}$ désigne la charge appliquée.

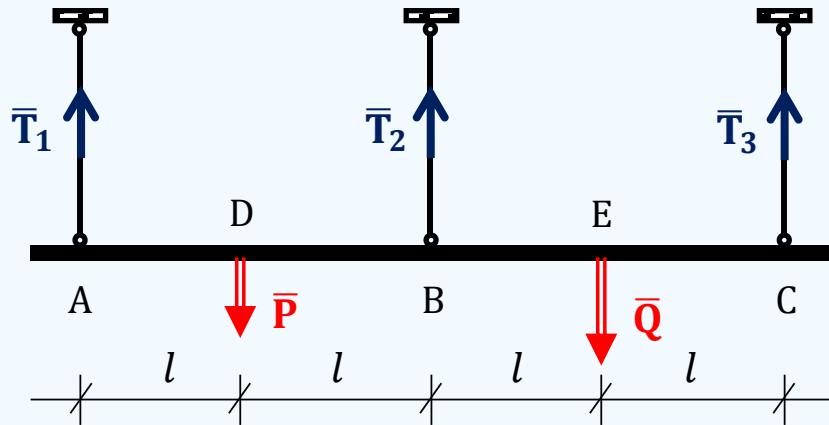


Critère de rupture : $|\bar{T}_i| \leq L ; i = 1, 2, 3$

L – chargement limite (limite de résistance du matériau en traction)

EXERCICES

Ex. 2 Considérons une barre indéformable suspendue par des tirants flexibles comme l'indique la figure ci-après. On demande de déterminer le domaine des chargements potentiellement supportables $K(\bar{P}, \bar{Q})$ pour cette structure, où $\bar{P}$ et $\bar{Q}$ désignent les charges appliquées.

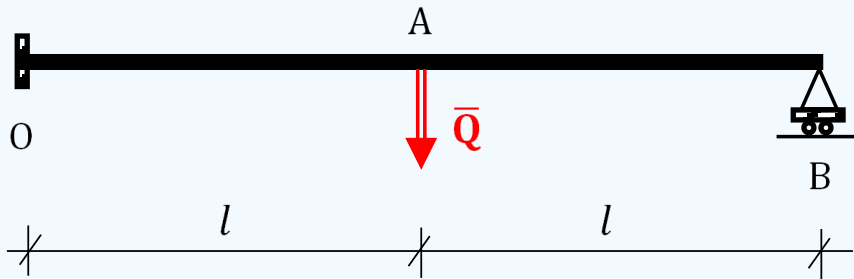


Critère de rupture : $|T_i| \leq L ; i = 1, 2, 3$

L – chargement limite (limite de résistance du matériau en traction)

EXERCICES

Ex. 3 Considérons une poutre encastrée d'un côté et simplement appuyée de l'autre comme l'indique la figure ci-après. On demande de déterminer le domaine des chargements potentiellement supportables $K(\bar{Q})$ pour cette poutre, où $\bar{Q}$ désigne la charge appliquée.

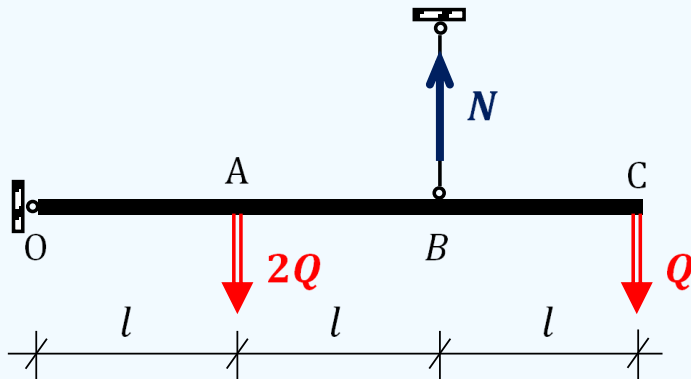


Critère de rupture : $|M| \leq m_p$

m_p – moment limite (limite de résistance du matériau en flexion)

EXERCICES

Ex. 4 (Interro. du 28/11/2022) Déterminer les bornes inférieure Q_{min} et supérieure Q_{max} du chargement potentiellement supportable de la barre indéformable ci-dessous, où Q désigne la charge appliquée. Commenter ensuite les résultats trouvés, puis déduire la charge ultime Q_{ult} correspondante.

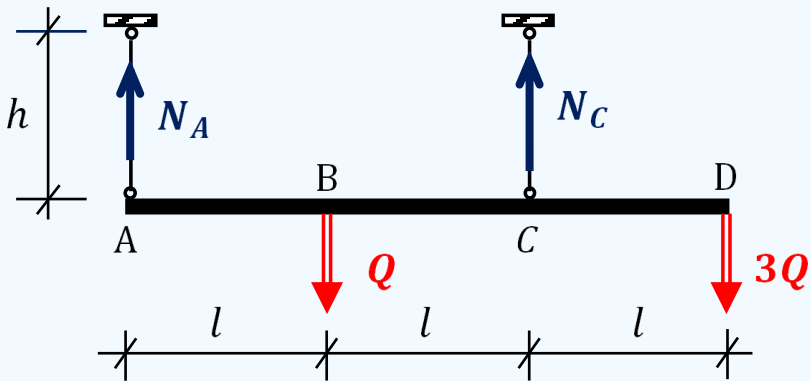


Critère de rupture : $|N| \leq L$

L – chargement limite

EXERCICES

Ex. 5 (EFS du 10/01/2023) Déterminer les bornes inférieure Q_{min} et supérieure Q_{max} du chargement potentiellement supportable de la barre indéformable ci-dessous, où Q désigne la charge appliquée. Commenter ensuite les résultats trouvés, puis déduire la charge ultime Q_{ult} correspondante.



Critère de rupture : $|N_A| \leq L$ et $|N_C| \leq 3L$

L – chargement limite