

Chapitre Deux

Approche statique par l'intérieur

- ❑ **Bases théoriques**
- ❑ **Exemples d'application**
 - ❖ *Cylindre en compression*
 - ❖ *Cylindre en torsion*
 - ❖ *Plaque pleine en traction*
 - ❖ *Plaque trouée en traction*
 - ❖ *Tube en traction-torsion*
 - ❖ *Structure réticulée*
 - ❖ *Excavations*
 - ❖ *Fondations*
 - ❖ *Soutènements*
- ❑ **Exercices**



BASES THÉORIQUES

□ Bases théoriques

Soit : $\bar{\sigma}$ - Tenseur de contraintes

$\bar{f}$ - Densité de forces dans (V)

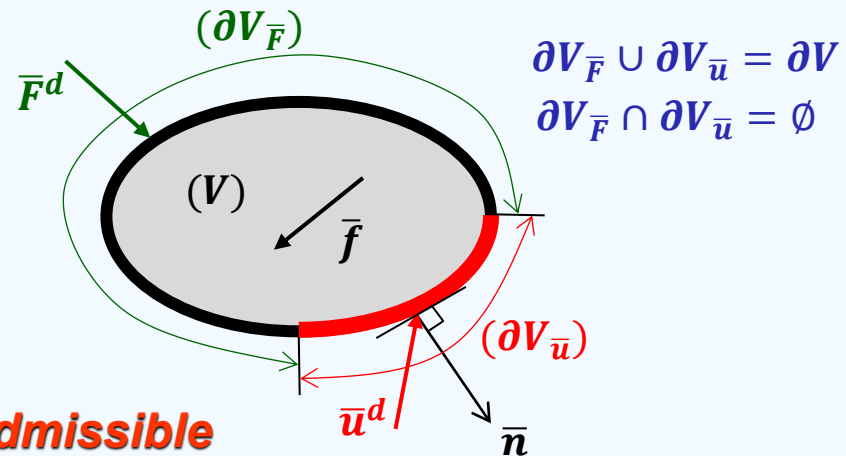
$\bar{F}^d$ - Forces surfaciques sur $(\partial V_{\bar{F}})$

$\bar{u}^d$ - Champ de déplacements sur $(\partial V_{\bar{u}})$

- **Champ de contraintes statiquement admissible**

On dit que $\bar{\sigma}$ est statiquement admissible (S.A.) si et seulement si :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \overline{\text{div}} \bar{\sigma}(\bar{x}) + \bar{f}(\bar{x}) = \mathbf{0} & \text{dans } (V) \quad (\text{Equations d'équilibre statique}) \\ \llbracket \bar{\sigma}(\bar{x}) \rrbracket \cdot \bar{n}(\bar{x}) = \mathbf{0} & \text{sur } (\partial V_{\bar{u}}) \quad (\text{Conditions aux limites sur } \bar{u}) \\ \sigma_{ij} n_j = F_i^d & \text{sur } (\partial V_{\bar{F}}) \quad (\text{Conditions aux limites sur } \bar{\sigma}) \end{array} \right.$$



(Détails : Voir cours de MMC - M1/S1)

□ Bases théoriques

- **Champ de contraintes physiquement admissible**

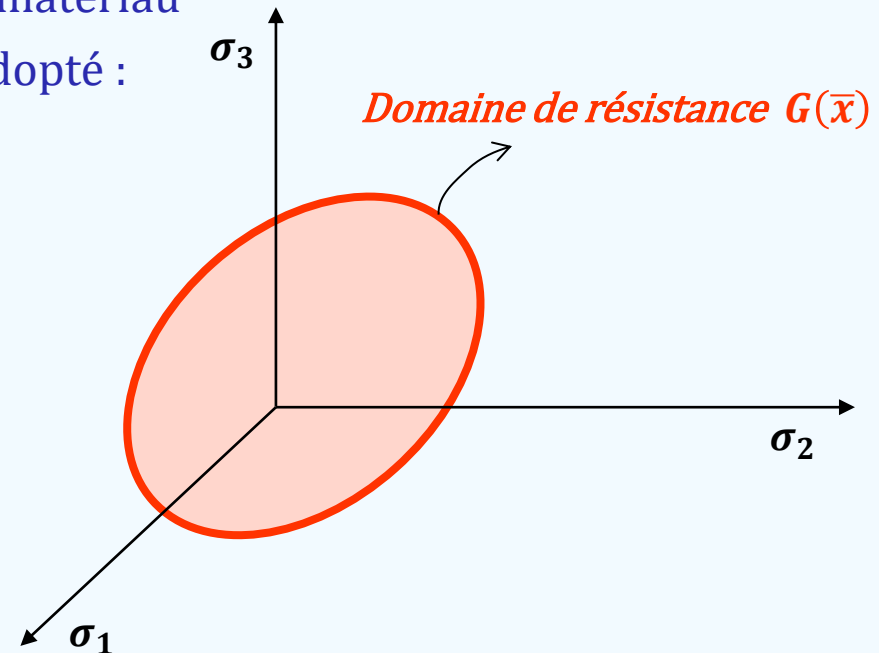
On dit que $\bar{\sigma}$ est physiquement admissible (P.A.) si et seulement si :

$$\bar{\sigma} \in G(\bar{x}) \quad \forall \bar{x} \in (V)$$



Nota: Le domaine de résistance $G(\bar{x})$ du matériau est déterminé par le critère de rupture adopté :

- ✓ *Tresca*
- ✓ *von Mises*
- ✓ *Mohr - Coulomb*
- ✓ *Drucker - Prager*
- ✓ ...



□ Bases théoriques

- **Chargement potentiellement supportable**

On dit que $\bar{Q}$ est un chargement potentiellement supportable si et seulement si :

$$\begin{cases} \exists \bar{\sigma} \text{ S.A. en équilibre avec } \bar{Q} \\ \exists \bar{\sigma} \text{ P.A. } \mid \bar{\sigma}(\bar{x}) \in G(\bar{x}) \quad \forall \bar{x} \in V \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \bar{Q} = \bar{Q}_{\min} \leq \bar{Q}_{\text{ult}} \quad (\text{Borne inférieure})$$

Remarque: L'approche statique est une approche par défaut.



□ Bases théoriques

- **Domaine des chargements potentiellement supportables**

On construit donc l'ensemble des chargements potentiellement supportables, soit :

$$K(\bar{Q}) = \{\bar{\sigma} \mid \bar{\sigma}(\bar{x}) \text{ S.A. \& } \bar{\sigma}(\bar{x}) \text{ P.A. } \forall \bar{x} \in V\}$$

K – domaine des chargements potentiellement supportables

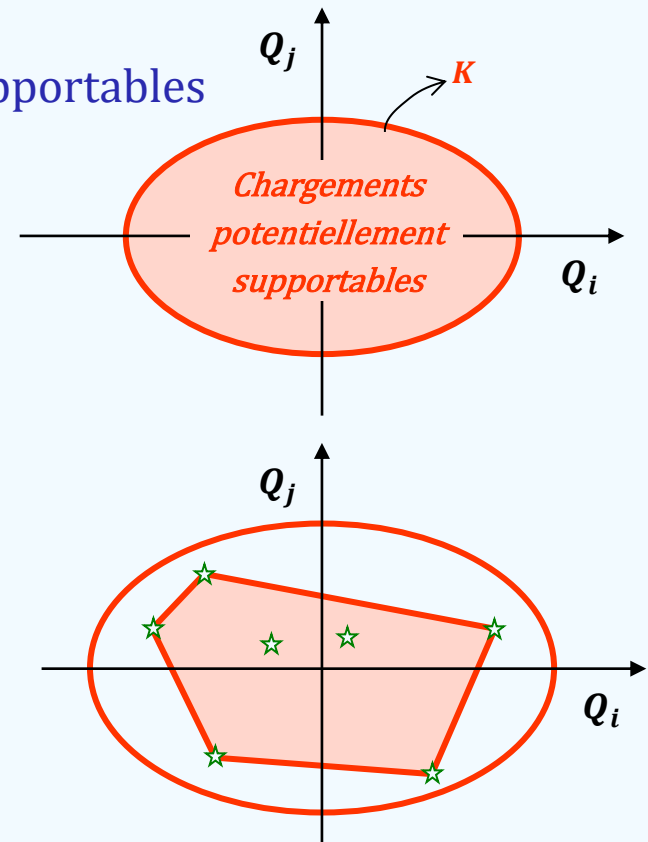
Propriétés de K :

- ✓ K – convexe
- ✓ $0 \in \bar{Q}$ (Etat neutre)
- ✓ $\alpha \bar{Q} \in K \quad \forall \bar{Q} \in K \text{ \& } \forall \alpha \mid 0 \leq \alpha \leq 1$

Nota: Si $G(\bar{x})$ est convexe $\Rightarrow K$ est convexe

Construction de K :

De proche en proche (Par tâtonnement)



□ Bases théoriques

- **Domaine des chargements potentiellement supportables**

Commentaires :

- ✓ Si le chargement est à un seul paramètre, le domaine K est un segment



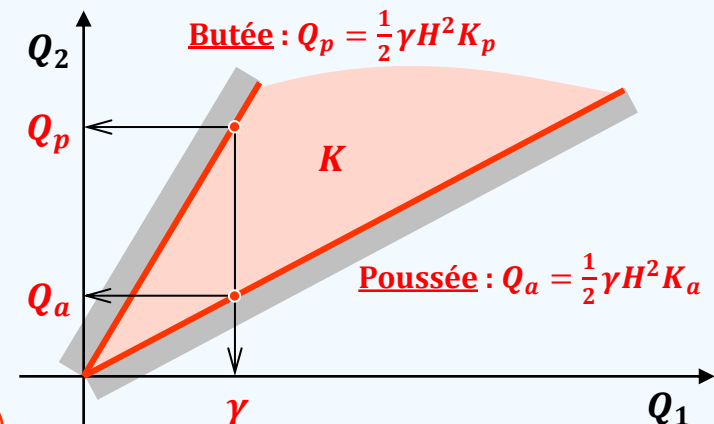
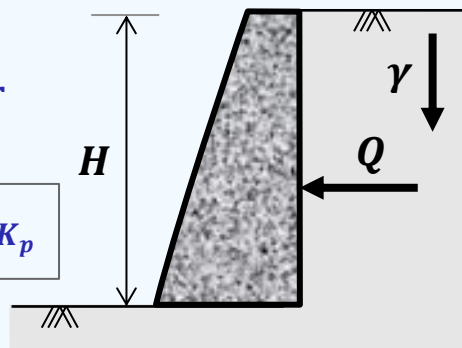
- ✓ Si le chargement est à plusieurs paramètres, le domaine K est un plan.

Exemple : Mur de soutènement

Q_1 - Pesanteur

Q_2 - Réaction du mur

$$Q_a = \frac{1}{2} \gamma H^2 K_a \leq Q \leq Q_p = \frac{1}{2} \gamma H^2 K_p$$



$$K_a = \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \leq K \leq K_p = \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)$$

Bases théoriques

Domaine des chargements potentiellement supportables

DomaineDeResistance2023V2.ggb

Fichier Éditer Affichage Options Outils Fenêtre Aide



Solution analytique : Voir série d'exercices



Domaine des chargements potentiellement supportables

Mohamed Khemissa (2023)

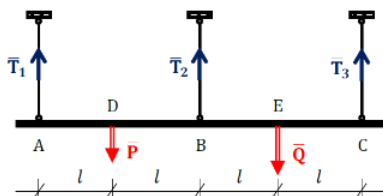
Université de M'sila (Algérie)

Problème

Calcul à la rupture et analyse limite

Chap. 2 – Approche statique par l'intérieur

Ex. 2 Considérons une barre indéformable suspendue par des tirants flexibles comme l'indique la figure ci-après. On demande de déterminer le domaine des chargements potentiellement supportables $K(\bar{P}, \bar{Q})$ pour cette structure, où $\bar{P}$ et $\bar{Q}$ désignent les charges appliquées.



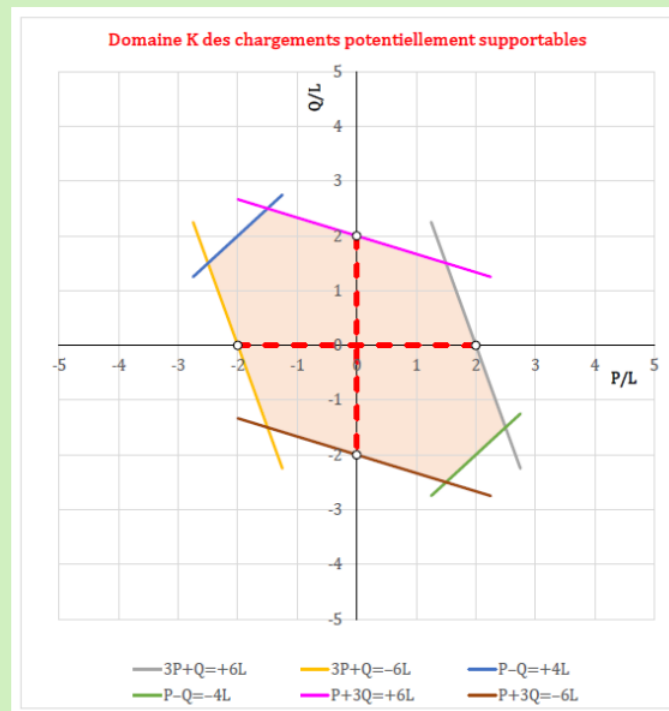
Critère de rupture : $|T_i| \leq L$; $i = 1, 2, 3$

L – chargement limite (limite de résistance du matériau en traction)

Solution analytique

$$\Rightarrow \begin{cases} -6L \leq 3P + Q \leq +6L \\ -6L \leq P + 3Q \leq +6L \\ -4L \leq P - Q \leq +4L \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Le domaine des chargements potentiellement supportables $K(\bar{P}; \bar{Q})$ est défini dans le plan $(\frac{P}{L}; \frac{Q}{L})$ représenté par la figure suivante :



Bases théoriques

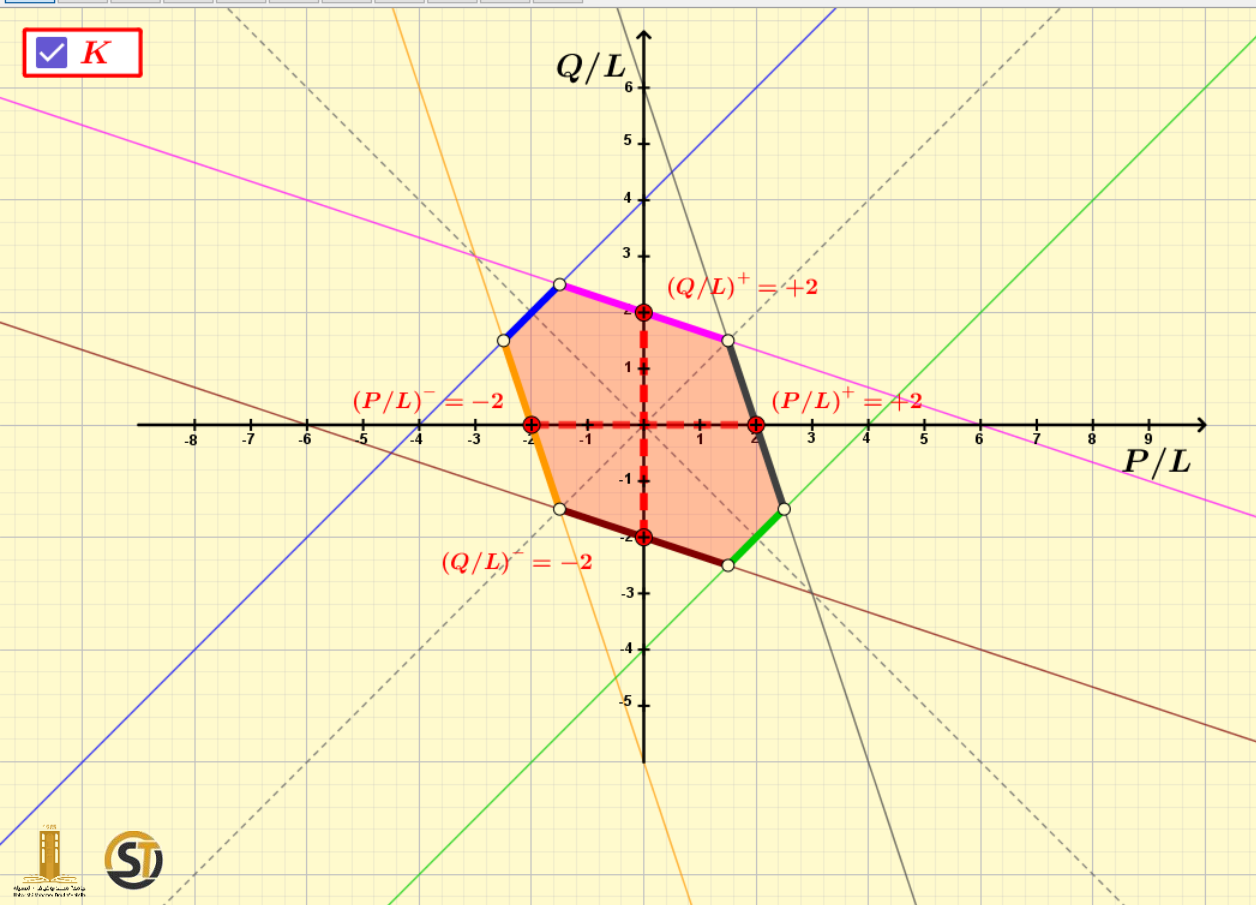
Domaine des chargements potentiellement supportables

DomaineDeResistance2023V2.ggb

Fichier Éditer Affichage Options Outils Fenêtre Aide

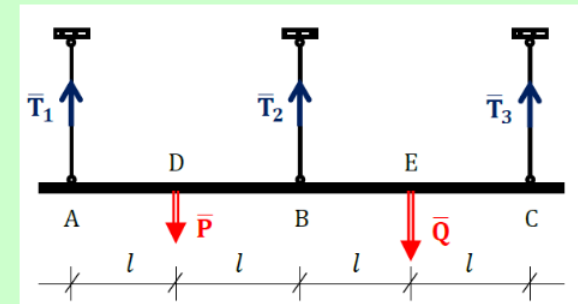


Tracé avec GeoGebra



Domaine des chargements potentiellement supportables

Mohamed Khemissa (2023)
Université de M'sila (Algérie)



$L = 4$

☐ Chargement limite

$P = 4$

☐ Charge P

$Q = 4$

☐ Charge Q



Bases théoriques

Domaine des chargements potentiellement supportables

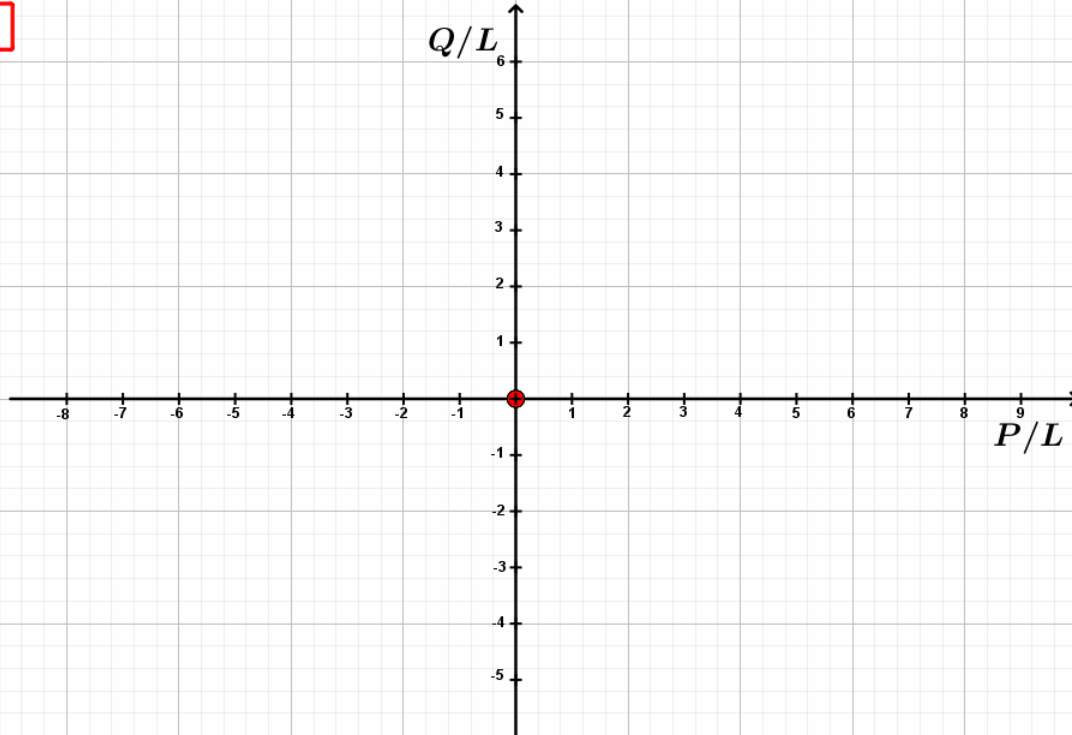
DomaineDeResistance2023V2.ggb

Fichier Éditer Affichage Options Outils Fenêtre Aide



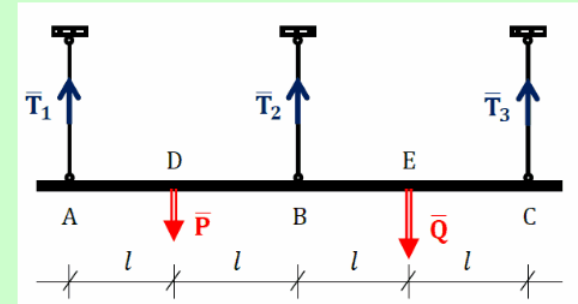
Variation de la limite de résistance L du matériau

☒ K



*Domaine des chargements
potentiellement supportables*

Mohamed Khemissa (2023)
Université de M'sila (Algérie)



$L = 0$

☒ *Chargement limite*

$P = 4$

☐ *Charge P*

$Q = 4$

☐ *Charge Q*

Bases théoriques

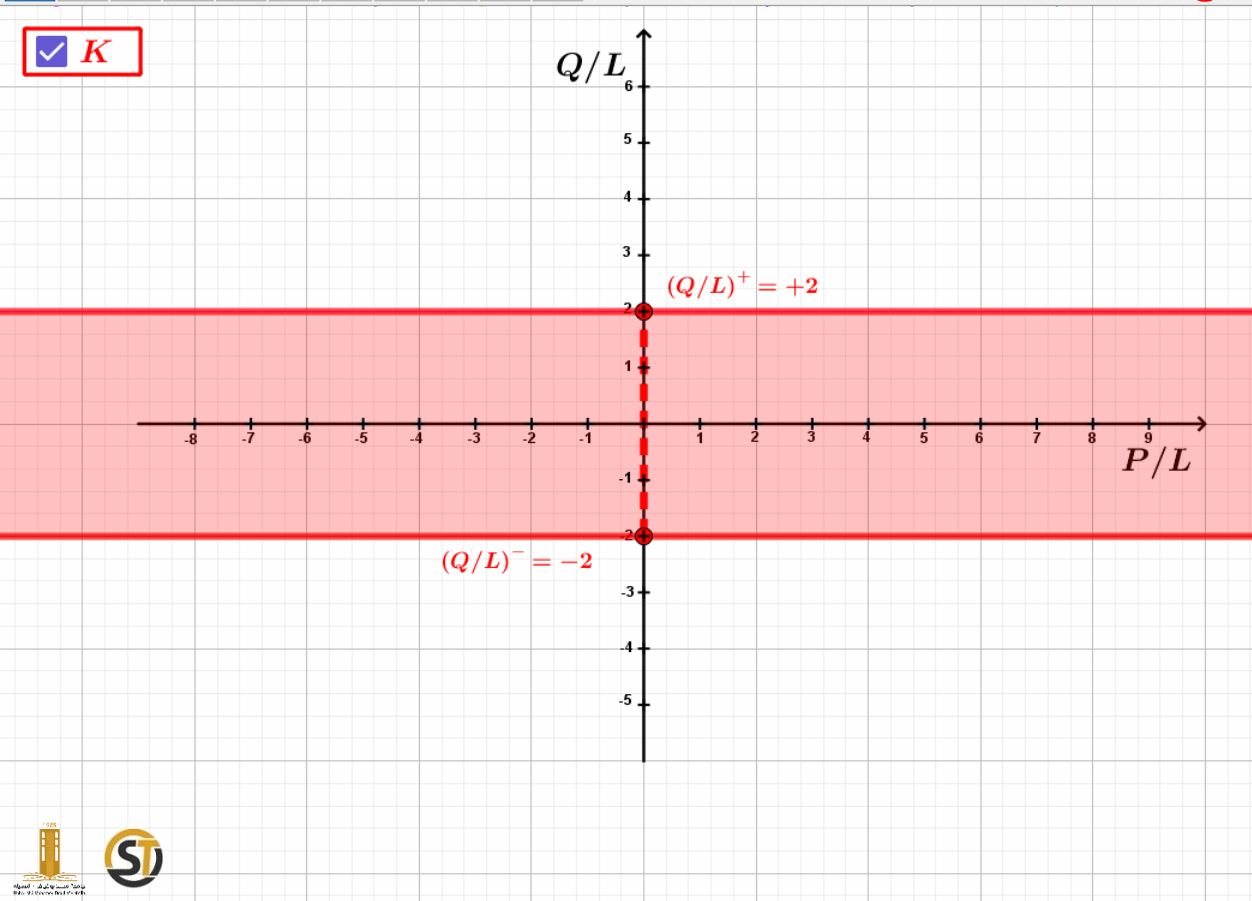
- Domaine des chargements potentiellement supportables

DomaineDeResistance2023V2.ggb

Fichier Éditer Affichage Options Outils Fenêtre Aide

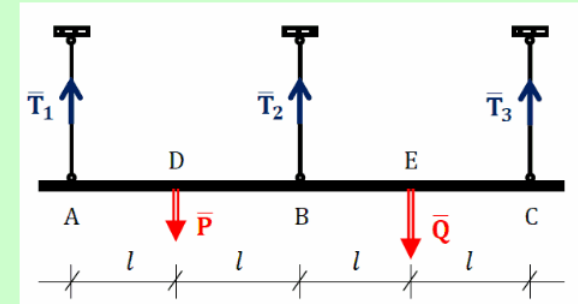


Variation de la charge $\bar{P}$



*Domaine des chargements
potentiellement supportables*

Mohamed Khemissa (2023)
Université de M'sila (Algérie)



$L = 4$

☐ Chargement limite

$P = 0$

☒ Charge P

$Q = 4$

☐ Charge Q

■ Bases théoriques

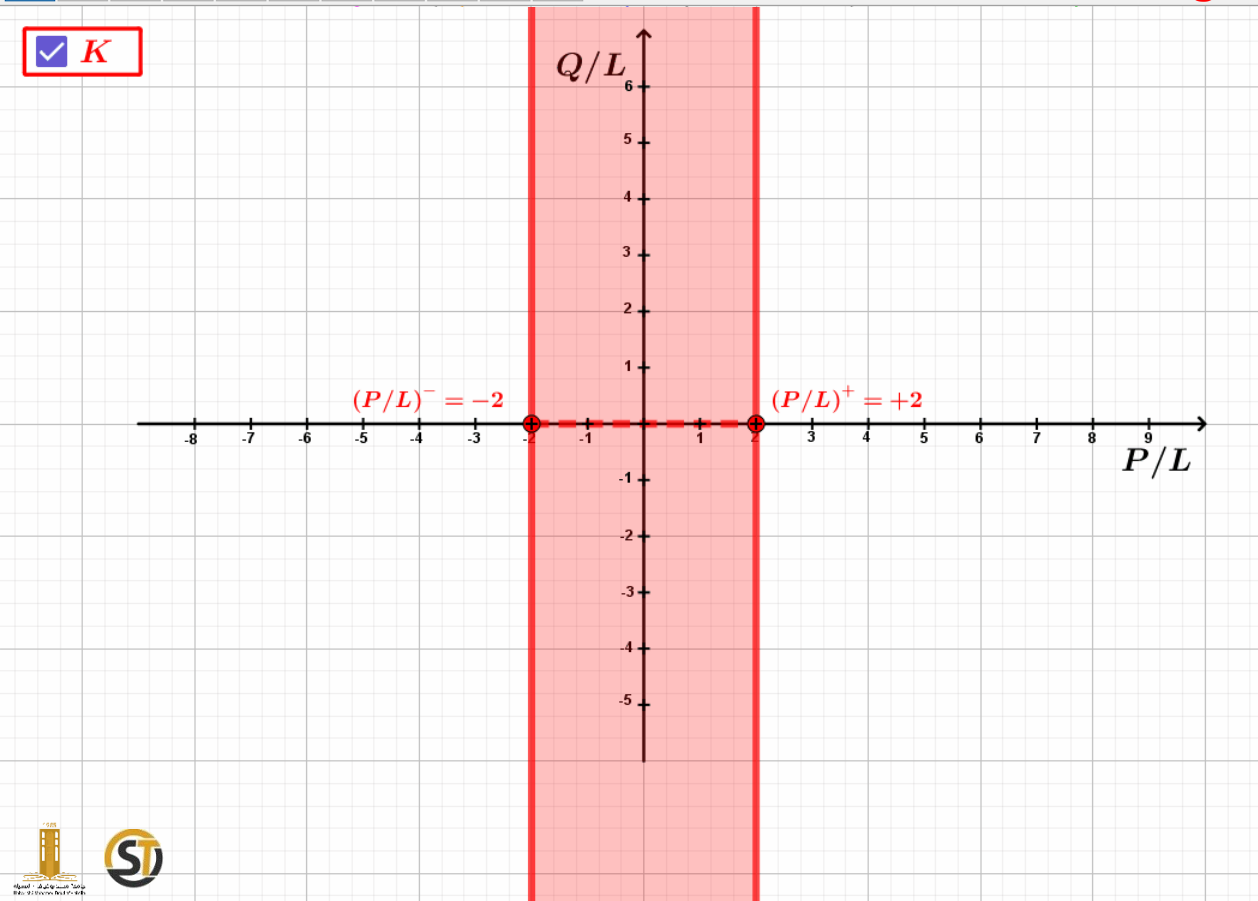
- **Domaine des chargements potentiellement supportables**

DomaineDeResistance2023V2.ggb

Fichier Éditer Affichage Options Outils Fenêtre Aide

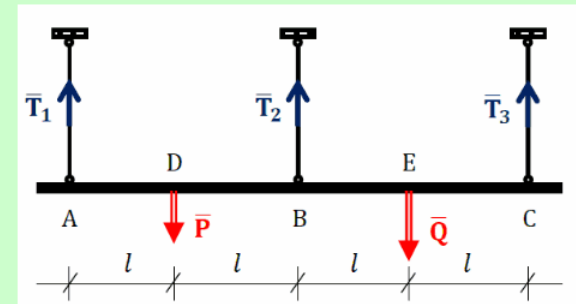


Variation de la charge $\bar{Q}$



Domaine des chargements potentiellement supportables

Mohamed Khemissa (2023)
Université de M'sila (Algérie)



$L = 4$

☐ Chargement limite

$P = 4$

☐ Charge P

$Q = 0$

☒ Charge Q



EXEMPLES D'APPLICATION

□ Exemples d'application

• **Cylindre en compression**

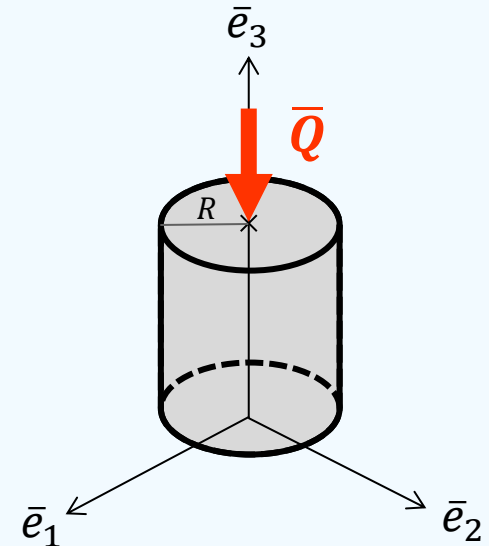
Soit un cylindre en béton de limite de résistance σ_o soumis à une compression $\bar{Q}$. Déterminer les domaines de résistance du matériau $G(\bar{x})$ et des chargements potentiellement supportables $K(\bar{Q})$ pour les critères de Tresca et de von Mises.

a/ Contraintes principales

$$\bar{\sigma} = (\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix} = \sigma \bar{e}_3 \otimes \bar{e}_3$$

telle que $\sigma = \frac{Q}{S}$ où $S = \pi R^2$

Contraintes principales :

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma \\ \sigma_2 &= 0 \\ \sigma_3 &= 0 \end{aligned}$$


Exemples d'application

Cylindre en compression

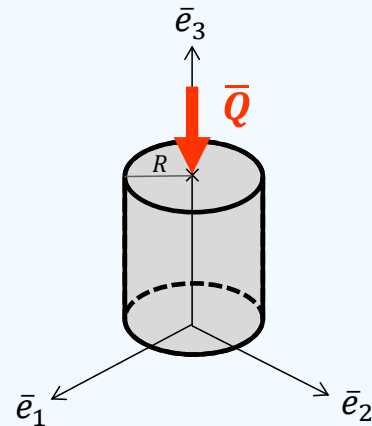
b/ Critère de Tresca

$$\text{Sup}\{|\sigma_i - \sigma_j| ; i = 1, 2, 3 ; j = 1, 2, 3\} \leq \sigma_o$$

$$\Rightarrow \text{Sup}\{|\sigma_1 - \sigma_2| ; |\sigma_2 - \sigma_3| ; |\sigma_3 - \sigma_1|\} \leq \sigma_o$$

$$\Rightarrow \text{Sup}\{|\sigma - 0| ; |0 - 0| ; |0 - \sigma|\} \leq \sigma_o$$

$$\Rightarrow \sigma \leq \sigma_o \quad \Rightarrow \quad \sigma_{ult} = \sigma_o$$



D'où le domaine de résistance :

$$G(\bar{x}) = \{\bar{\sigma} = \sigma \bar{e}_3 \otimes \bar{e}_3 \mid 0 \leq \sigma \leq \sigma_o\}$$

$$\text{Sachant que : } \sigma = \frac{Q}{S} \quad \Rightarrow \quad Q_{ult} = \sigma_{ult} S \quad \Rightarrow \quad Q_{ult} = \sigma_o S$$

D'où le domaine des chargements potentiellement supportables :

$$K(\bar{Q}) = \{\bar{Q} \mid 0 \leq Q = Q_{min} \leq \sigma_o S\}$$

□ Exemples d'application

• **Cylindre en compression**

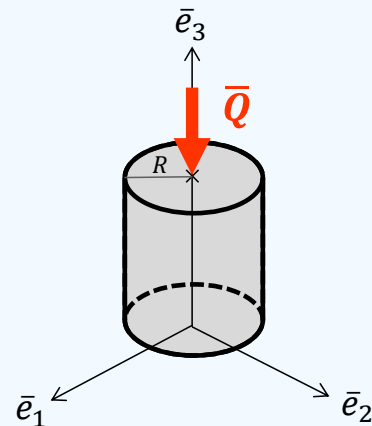
c/ Critère de von Mises

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq \sigma_o$$

$$\Rightarrow (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \leq 2\sigma_o^2$$

$$\Rightarrow (\sigma - 0)^2 + (0 - 0)^2 + (0 - \sigma)^2 \leq 2\sigma_o^2$$

$$\Rightarrow 2\sigma^2 \leq 2\sigma_o^2 \quad \Rightarrow \quad \sigma \leq \sigma_o \quad \Rightarrow \quad \sigma_{ult} = \sigma_o$$



D'où le domaine de résistance :

$$G(\bar{x}) = \{\bar{\sigma} = \sigma \bar{e}_3 \otimes \bar{e}_3 \mid 0 \leq \sigma \leq \sigma_o\}$$

$$\text{Sachant que : } \sigma = \frac{Q}{S} \quad \Rightarrow \quad Q_{ult} = \sigma_{ult} S \quad \Rightarrow \quad Q_{ult} = \sigma_o S$$

D'où le domaine des chargements potentiellement supportables :

$$K(\bar{Q}) = \{\bar{Q} \mid 0 \leq Q = Q_{min} \leq \sigma_o S\}$$

□ Exemples d'application

• **Cylindre en torsion**

Soit un cylindre en béton de limite de résistance σ_o soumis à un couple de torsion $\bar{T}$. Déterminer les domaines de résistance du matériau $G(\bar{x})$ et des chargements potentiellement supportables $K(\bar{Q})$ pour les critères de Tresca et de von Mises.

a/ Contraintes principales

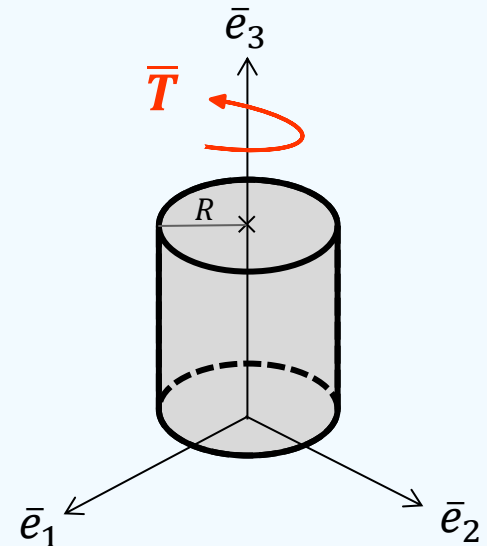
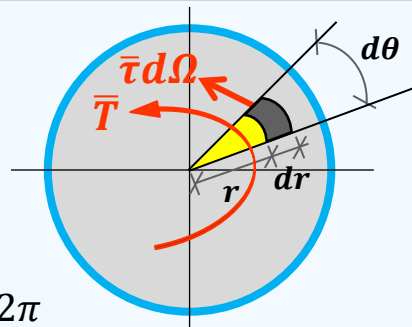
$$\bar{\sigma} = (\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} = \tau(\bar{e}_2 \otimes \bar{e}_3 + \bar{e}_3 \otimes \bar{e}_2)$$

telle que $\tau = \frac{3T}{2\pi R^3}$

Contraintes principales : $\sigma_1 = \tau$; $\sigma_2 = 0$; $\sigma_3 = -\tau$

$$T = \iint \tau r d\Omega = \tau \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r^2 dr = \frac{2\pi R^3}{3} \tau$$

$$d\Omega = r dr d\theta \mid r : 0 \rightarrow R \ \& \ d\theta : 0 \rightarrow 2\pi$$



Exemples d'application

Cylindre en torsion

b/ Critère de Tresca

$$\text{Sup}\{|\sigma_i - \sigma_j| ; i = 1, 2, 3 ; j = 1, 2, 3\} \leq \sigma_o$$

$$\Rightarrow \text{Sup}\{|\sigma_1 - \sigma_2| ; |\sigma_2 - \sigma_3| ; |\sigma_3 - \sigma_1|\} \leq \sigma_o$$

$$\Rightarrow \text{Sup}\{|\tau - 0| ; |0 + \tau| ; |-\tau - \tau|\} \leq \sigma_o$$

$$\Rightarrow 2|\tau| \leq \sigma_o \quad \Rightarrow \quad |\tau| \leq \frac{\sigma_o}{2} \quad \Rightarrow \quad |\tau_{ult}| = \frac{\sigma_o}{2}$$

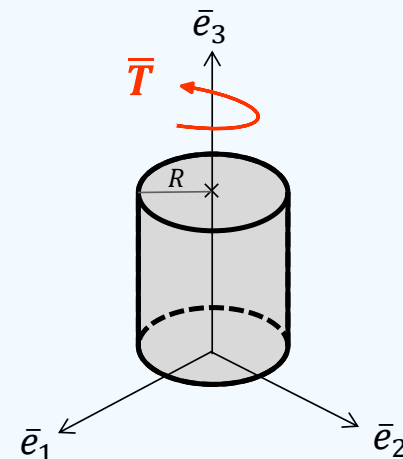
D'où le domaine de résistance :

$$G(\bar{x}) = \left\{ \bar{\sigma} = \tau(\bar{e}_2 \otimes \bar{e}_3 + \bar{e}_3 \otimes \bar{e}_2) \quad | \quad -\frac{\sigma_o}{2} \leq \tau \leq +\frac{\sigma_o}{2} \right\}$$

$$\text{Sachant que : } \tau = \frac{3T}{2\pi R^3} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi R^3}{3} \tau \quad \Rightarrow \quad |T_{ult}| = \frac{\pi R^3}{3} \sigma_o$$

D'où le domaine des chargements potentiellement supportables :

$$K(\bar{Q}) = \left\{ \bar{Q} \quad | \quad -\frac{\pi R^3}{3} \sigma_o \leq Q = T_{min} \leq +\frac{\pi R^3}{3} \sigma_o \right\}$$



Exemples d'application

Cylindre en torsion

c/ Critère de von Mises

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq \sigma_o$$

$$\Rightarrow (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \leq 2\sigma_o^2$$

$$\Rightarrow (\tau - 0)^2 + (0 + \tau)^2 + (-\tau - \tau)^2 \leq 2\sigma_o^2$$

$$\Rightarrow 6\tau^2 \leq 2\sigma_o^2 \quad \Rightarrow \quad |\tau| \leq \sigma_o/\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad |\tau_{ult}| = \sigma_o/\sqrt{3}$$

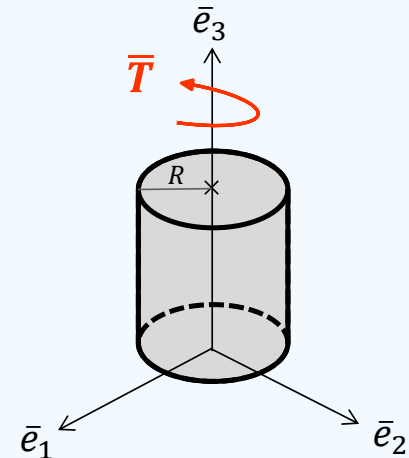
D'où le domaine de résistance :

$$G(\bar{x}) = \{\bar{\sigma} = \tau(\bar{e}_2 \otimes \bar{e}_3 + \bar{e}_3 \otimes \bar{e}_2) \mid -\sigma_o/\sqrt{3} \leq \tau \leq +\sigma_o/\sqrt{3}\}$$

$$\text{Sachant que : } \tau = \frac{3T}{2\pi R^3} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi R^3}{3} \tau \quad \Rightarrow \quad |T_{ult}| = \frac{\pi R^3}{3} \sigma_o$$

D'où le domaine des chargements potentiellement supportables :

$$K(\bar{Q}) = \left\{ \bar{Q} \mid -\frac{2\pi R^3}{3\sqrt{3}} \sigma_o \leq Q = T_{min} \leq +\frac{2\pi R^3}{3\sqrt{3}} \sigma_o \right\}$$



□ Exemples d'application

• **Plaque pleine en traction**

Soit une plaque métallique de limite de résistance σ_o soumise à une traction $\bar{Q}$. Déterminer les domaines de résistance du matériau $G(\bar{x})$ et des chargements potentiellement supportables $K(\bar{Q})$ pour les critères de Tresca et de von Mises.

1^{er} Choix : Contraintes planes ($\sigma_{33} = 0$)

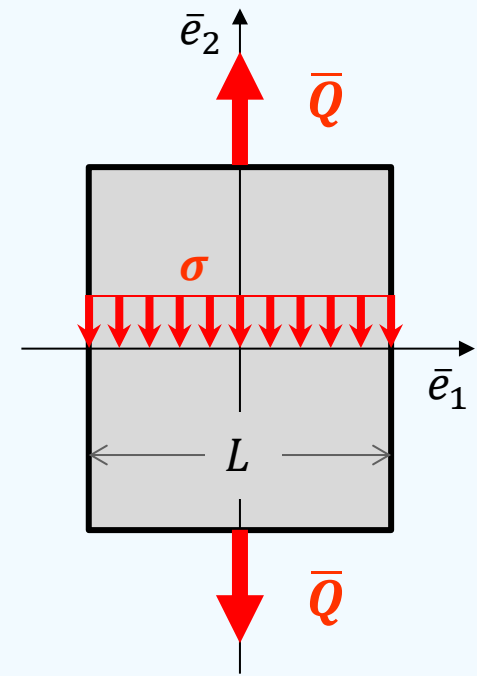
a/ Contraintes principales

$$\bar{\sigma} = (\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \sigma_{22} \bar{e}_2 \otimes \bar{e}_2$$

telle que $\sigma_{22} = \sigma = \frac{Q}{L}$

Contraintes principales :

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_{22} \\ \sigma_2 &= 0 \\ \sigma_3 &= 0 \end{aligned}$$



Exemples d'application

Plaques pleines en traction

b/ Critère de Tresca

$$\text{Sup}\{|\sigma_i - \sigma_j| ; i = 1, 2, 3 ; j = 1, 2, 3\} \leq \sigma_o$$

$$\Rightarrow \text{Sup}\{|\sigma_1 - \sigma_2| ; |\sigma_2 - \sigma_3| ; |\sigma_3 - \sigma_1|\} \leq \sigma_o$$

$$\Rightarrow \text{Sup}\{|\sigma_{22} - 0| ; |0 - 0| ; |0 - \sigma_{22}|\} \leq \sigma_o$$

$$\Rightarrow |\sigma_{22}| \leq \sigma_o \quad \Rightarrow \quad \sigma_{22} \leq \sigma_o \quad \Rightarrow \quad (\sigma_{22})_{ult} = \sigma_o$$

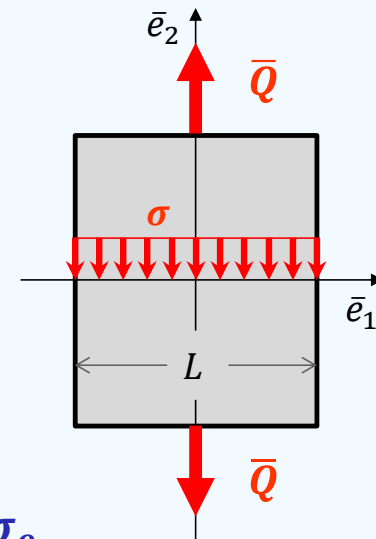
D'où le domaine de résistance :

$$G(\bar{x}) = \{\bar{\sigma} = \sigma_{22}\bar{e}_2 \otimes \bar{e}_2 \mid 0 \leq \sigma_{22} \leq \sigma_o\}$$

$$\text{Sachant que : } \sigma_{22} = \frac{Q}{L} \quad \Rightarrow \quad Q = \sigma_{22}L \quad \Rightarrow \quad Q_{ult} = \sigma_o L$$

D'où le domaine des chargements potentiellement supportables :

$$K(\bar{Q}) = \{\bar{Q} \mid 0 \leq Q = Q_{min} \leq \sigma_o L\}$$



Exemples d'application

Plaques pleines en traction

c/ Critère de von Mises

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq \sigma_o$$

$$\Rightarrow (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \leq 2\sigma_o^2$$

$$\Rightarrow (\sigma_{22} - 0)^2 + (0 - 0)^2 + (0 - \sigma_{22})^2 \leq 2\sigma_o^2$$

$$\Rightarrow 2\sigma_{22}^2 \leq 2\sigma_o^2 \quad \Rightarrow \quad \sigma_{22} \leq \sigma_o \quad \Rightarrow \quad (\sigma_{22})_{ult} = \sigma_o$$

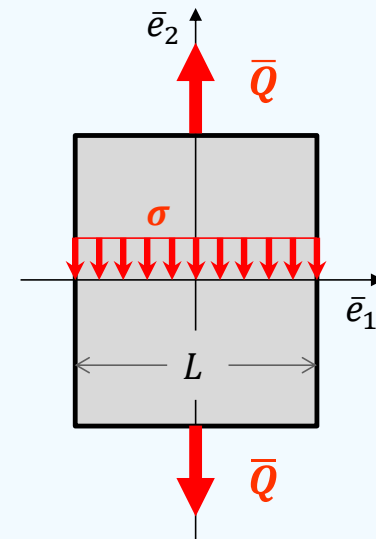
D'où le domaine de résistance :

$$G(\bar{x}) = \{\bar{\sigma} = \sigma_{22}\bar{e}_2 \otimes \bar{e}_2 \mid 0 \leq \sigma_{22} \leq \sigma_o\}$$

$$\text{Sachant que : } \sigma_{22} = \frac{Q}{L} \quad \Rightarrow \quad Q = \sigma_{22}L \quad \Rightarrow \quad Q_{ult} = \sigma_o L$$

D'où le domaine des chargements potentiellement supportables :

$$K(\bar{Q}) = \{\bar{Q} \mid 0 \leq Q = Q_{min} \leq \sigma_o L\}$$



□ Exemples d'application

- **Plaque pleine en traction**

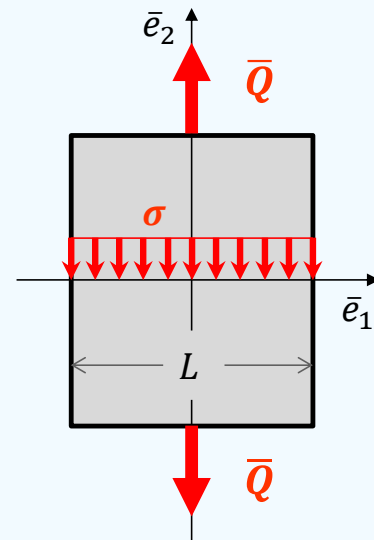
2^{ème} Choix : Déformations planes ($\sigma_{33} \neq 0$)

a/ Contraintes principales

$$\bar{\sigma} = (\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix} = \sigma_{22} \bar{e}_2 \otimes \bar{e}_2 + \sigma_{33} \bar{e}_3 \otimes \bar{e}_3$$

telle que $\sigma_{22} = \sigma = \frac{Q}{L} \geq \sigma_{33}$ (Hypothèse)

Contraintes principales :

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_{22} \\ \sigma_2 &= \sigma_{33} \\ \sigma_3 &= 0 \end{aligned}$$


□ Exemples d'application

• **Plaque pleine en traction**

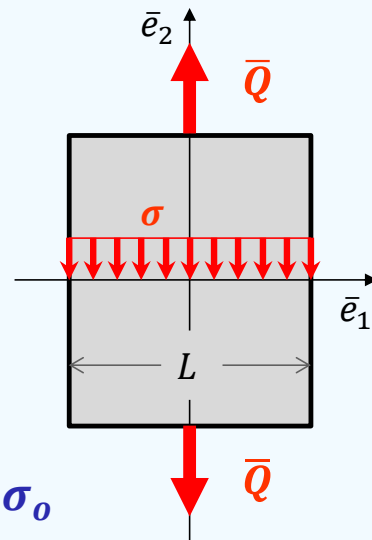
b/ Critère de Tresca

$$\text{Sup}\{|\sigma_i - \sigma_j| ; i = 1, 2, 3 ; j = 1, 2, 3\} \leq \sigma_o$$

$$\Rightarrow \text{Sup}\{|\sigma_1 - \sigma_2| ; |\sigma_2 - \sigma_3| ; |\sigma_3 - \sigma_1|\} \leq \sigma_o$$

$$\Rightarrow \text{Sup}\{|\sigma_{22} - \sigma_{33}| ; |\sigma_{33} - 0| ; |0 - \sigma_{22}|\} \leq \sigma_o$$

$$\Rightarrow \sigma_{22} \leq \sigma_o \quad (\sigma_{33} \leq \sigma_{22} \text{ par hypothèse}) \quad \Rightarrow \quad (\sigma_{22})_{ult} = \sigma_o$$



D'où le domaine de résistance :

$$G(\bar{x}) = \{\bar{\sigma} = \sigma_{22}\bar{e}_2 \otimes \bar{e}_2 + \sigma_{33}\bar{e}_3 \otimes \bar{e}_3 \mid \sigma_{33} \leq \sigma_{22} \text{ \& } 0 \leq \sigma_{22} \leq \sigma_o\}$$

$$\text{Sachant que : } \sigma_{22} = \frac{Q}{L} \quad \Rightarrow \quad Q = \sigma_{22}L \quad \Rightarrow \quad Q_{ult} = \sigma_o L$$

D'où le domaine des chargements potentiellement supportables :

$$K(\bar{Q}) = \{\bar{Q} \mid 0 \leq Q = Q_{min} \leq \sigma_o L\}$$

Exemples d'application

Plaques pleines en traction

c/ Critère de von Mises

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq \sigma_o$$

$$\Rightarrow (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \leq 2\sigma_o^2$$

$$\Rightarrow (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - 0)^2 + (0 - \sigma_{22})^2 \leq 2\sigma_o^2$$

$$\Rightarrow \sigma_{22}^2 - \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}^2 \leq \sigma_o^2$$

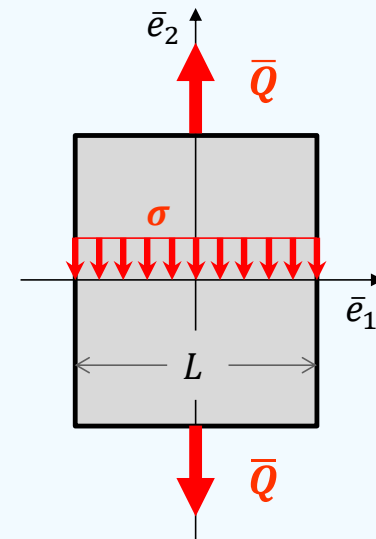
$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\sigma_{22} - \sigma_{33}\right)^2 + \frac{3}{4}\sigma_{22}^2 \leq \sigma_o^2$$

Pour maximiser la charge Q , on doit donc maximiser σ_{22} et minimiser σ_{33} .

$$\text{Choisissons : } \sigma_{33} = \frac{1}{2}\sigma_{22} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{22} \leq \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_o \quad \Rightarrow \quad (\sigma_{22})_{ult} = \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_o$$

D'où le domaine de résistance :

$$G(\bar{x}) = \left\{ \bar{\sigma} = \sigma_{22}\bar{e}_2 \otimes \bar{e}_2 + \sigma_{33}\bar{e}_3 \otimes \bar{e}_3 \quad | \quad \sigma_{33} = \frac{1}{2}\sigma_{22} \quad \& \quad 0 \leq \sigma_{22} \leq \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_o \right\}$$



Exemples d'application

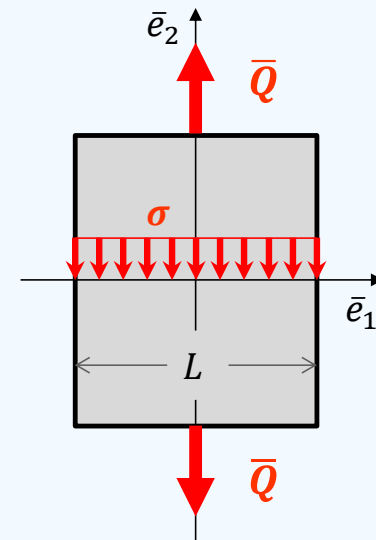
• Plaque pleine en traction

c/ Critère de von Mises

$$\text{Sachant que : } Q = \sigma_{22}L \quad \Rightarrow \quad Q_{ult} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_o L$$

D'où le domaine des chargements potentiellement supportables :

$$K(\bar{Q}) = \left\{ \bar{Q} \mid 0 \leq Q = Q_{min} \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_o L \right\}$$



Remarque :

1^{er} choix (Contraintes planes) : $K(\bar{Q}) = \{ \bar{Q} \mid 0 \leq Q = Q_{min} \leq \sigma_o L \}$

2^{ème} choix (Déformations planes) : $K(\bar{Q}) = \left\{ \bar{Q} \mid 0 \leq Q = Q_{min} \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_o L \right\}$

$\Rightarrow$ Le 2^{ème} choix est judicieux car il améliore la borne inférieure.

□ Exemples d'application

• **Plaque trouée en traction**

Soit une plaque métallique trouée de limite de résistance σ_0 soumise à une traction $\bar{Q}$. Déterminer les domaines de résistance du matériau $G(\bar{x})$ et des chargements potentiellement supportables $K(\bar{Q})$ pour les critères de Tresca et de von Mises.

1^{er} Choix : Contraintes planes ($\sigma_{33} = 0$)

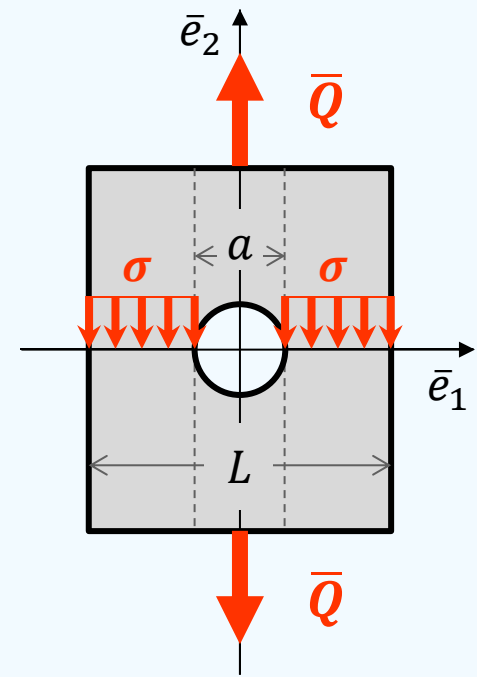
a/ Contraintes principales

$$\bar{\sigma} = (\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \sigma_{22} \bar{e}_2 \otimes \bar{e}_2$$

telle que $\sigma_{22} = \sigma = \frac{Q}{L-a}$

Contraintes principales :

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_{22} \\ \sigma_2 &= 0 \\ \sigma_3 &= 0 \end{aligned}$$



Exemples d'application

Plaques trouées en traction

b/ Critère de Tresca

$$\text{Sup}\{|\sigma_i - \sigma_j| ; i = 1, 2, 3 ; j = 1, 2, 3\} \leq \sigma_o$$

$$\Rightarrow \text{Sup}\{|\sigma_1 - \sigma_2| ; |\sigma_2 - \sigma_3| ; |\sigma_3 - \sigma_1|\} \leq \sigma_o$$

$$\Rightarrow \text{Sup}\{|\sigma_{22} - 0| ; |0 - 0| ; |0 - \sigma_{22}|\} \leq \sigma_o$$

$$\Rightarrow |\sigma_{22}| \leq \sigma_o \Rightarrow \sigma_{22} \leq \sigma_o \Rightarrow (\sigma_{22})_{ult} = \sigma_o$$

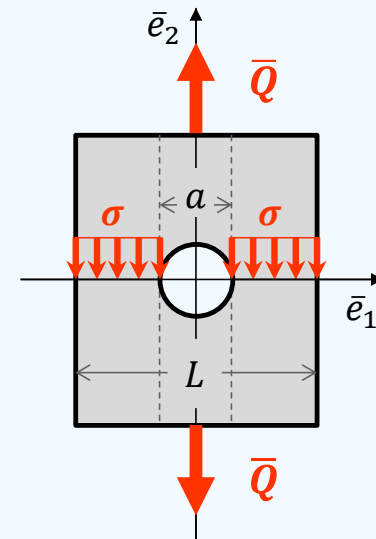
D'où le domaine de résistance :

$$G(\bar{x}) = \{\bar{\sigma} = \sigma_{22} \bar{e}_2 \otimes \bar{e}_2 \mid 0 \leq \sigma_{22} \leq \sigma_o\}$$

$$\text{Sachant que : } \sigma_{22} = \frac{Q}{L-a} \Rightarrow Q = \sigma_{22}(L-a) \Rightarrow Q_{ult} = \sigma_o(L-a)$$

D'où le domaine des chargements potentiellement supportables :

$$K(\bar{Q}) = \{\bar{Q} \mid 0 \leq Q = Q_{min} \leq \sigma_o(L-a)\}$$



Exemples d'application

Plaques trouées en traction

c/ Critère de von Mises

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq \sigma_o$$

$$\Rightarrow (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \leq 2\sigma_o^2$$

$$\Rightarrow (\sigma_{22} - 0)^2 + (0 - 0)^2 + (0 - \sigma_{22})^2 \leq 2\sigma_o^2$$

$$\Rightarrow 2\sigma_{22}^2 \leq 2\sigma_o^2 \Rightarrow \sigma_{22} \leq \sigma_o \Rightarrow (\sigma_{22})_{ult} = \sigma_o$$

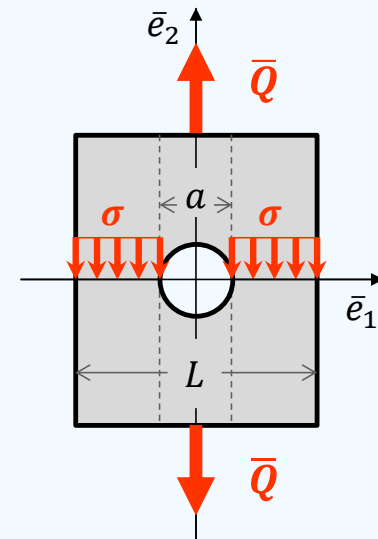
D'où le domaine de résistance :

$$G(\bar{x}) = \{\bar{\sigma} = \sigma_{22}\bar{e}_2 \otimes \bar{e}_2 \mid 0 \leq \sigma_{22} \leq \sigma_o\}$$

$$\text{Sachant que : } \sigma_{22} = \frac{Q}{L-a} \Rightarrow Q = \sigma_{22}(L-a) \Rightarrow Q_{ult} = \sigma_o(L-a)$$

D'où le domaine des chargements potentiellement supportables :

$$K(\bar{Q}) = \{\bar{Q} \mid 0 \leq Q = Q_{min} \leq \sigma_o(L-a)\}$$



□ Exemples d'application

- **Plaque trouée en traction**

2^{ème} Choix : Déformations planes ($\sigma_{33} \neq 0$)

a/ Contraintes principales

$$\bar{\bar{\sigma}} = (\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix} = \sigma_{22} \bar{e}_2 \otimes \bar{e}_2 + \sigma_{33} \bar{e}_3 \otimes \bar{e}_3$$

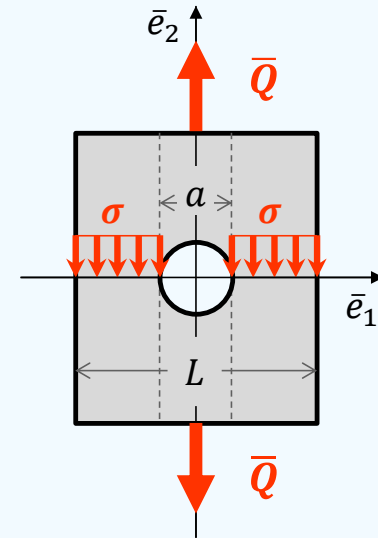
telle que $\sigma_{22} = \sigma = \frac{Q}{L-a} \geq \sigma_{33}$ (Hypothèse)

Contraintes principales :

$$\sigma_1 = \sigma_{22}$$

$$\sigma_2 = \sigma_{33}$$

$$\sigma_3 = 0$$



Exemples d'application

Plaques trouées en traction

b/ Critère de Tresca

$$\text{Sup}\{|\sigma_i - \sigma_j| ; i = 1, 2, 3 ; j = 1, 2, 3\} \leq \sigma_o$$

$$\Rightarrow \text{Sup}\{|\sigma_1 - \sigma_2| ; |\sigma_2 - \sigma_3| ; |\sigma_3 - \sigma_1|\} \leq \sigma_o$$

$$\Rightarrow \text{Sup}\{|\sigma_{22} - \sigma_{33}| ; |\sigma_{33} - 0| ; |0 - \sigma_{22}|\} \leq \sigma_o$$

$$\Rightarrow \sigma_{22} \leq \sigma_o \quad (\sigma_{33} \leq \sigma_{22} \text{ par hypothèse}) \Rightarrow (\sigma_{22})_{ult} = \sigma_o$$

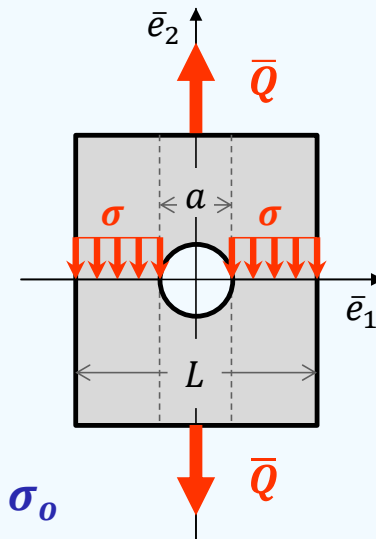
D'où le domaine de résistance :

$$G(\bar{x}) = \{\bar{\sigma} = \sigma_{22}\bar{e}_2 \otimes \bar{e}_2 + \sigma_{33}\bar{e}_3 \otimes \bar{e}_3 \mid \sigma_{33} \leq \sigma_{22} \text{ \& } 0 \leq \sigma_{22} \leq \sigma_o\}$$

$$\text{Sachant que : } \sigma_{22} = \frac{Q}{L-a} \Rightarrow Q = \sigma_{22}(L-a) \Rightarrow Q_{ult} = \sigma_o(L-a)$$

D'où le domaine des chargements potentiellement supportables :

$$K(\bar{Q}) = \{\bar{Q} \mid 0 \leq Q = Q_{min} \leq \sigma_o(L-a)\}$$



Exemples d'application

Plaques trouées en traction

c/ Critère de von Mises

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq \sigma_o$$

$$\Rightarrow (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \leq 2\sigma_o^2$$

$$\Rightarrow (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - 0)^2 + (0 - \sigma_{22})^2 \leq 2\sigma_o^2$$

$$\Rightarrow \sigma_{22}^2 - \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}^2 \leq \sigma_o^2$$

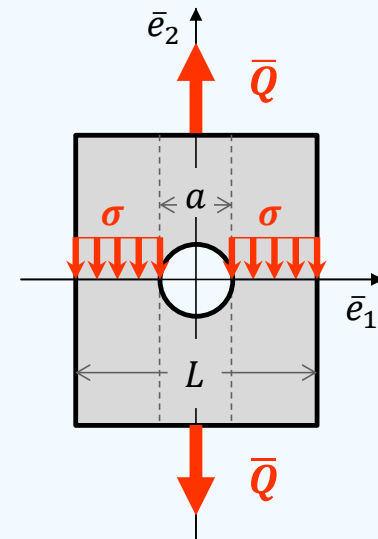
$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\sigma_{22} - \sigma_{33}\right)^2 + \frac{3}{4}\sigma_{22}^2 \leq \sigma_o^2$$

Pour maximiser la charge Q , on doit donc maximiser σ_{22} et minimiser σ_{33} .

$$\text{Choisissons : } \sigma_{33} = \frac{1}{2}\sigma_{22} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{22} \leq \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_o \quad \Rightarrow \quad (\sigma_{22})_{ult} = \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_o$$

D'où le domaine de résistance :

$$G(\bar{x}) = \left\{ \bar{\sigma} = \sigma_{22}\bar{e}_2 \otimes \bar{e}_2 + \sigma_{33}\bar{e}_3 \otimes \bar{e}_3 \mid \sigma_{33} = \frac{1}{2}\sigma_{22} \text{ \& } 0 \leq \sigma_{22} \leq \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_o \right\}$$



Exemples d'application

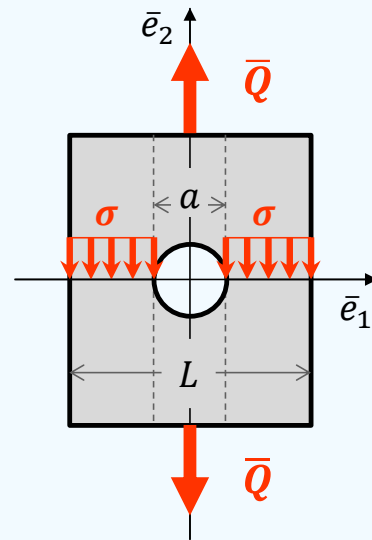
• Plaque trouée en traction

c/ Critère de von Mises

$$\text{Sachant que : } Q = \sigma_{22}(L - a) \quad \Rightarrow \quad Q_{ult} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_o (L - a)$$

D'où le domaine des chargements potentiellement supportables :

$$K(\bar{Q}) = \left\{ \bar{Q} \mid 0 \leq Q = Q_{min} \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_o (L - a) \right\}$$



Remarque :

1^{er} choix (Contraintes planes): $K(\bar{Q}) = \{ \bar{Q} \mid 0 \leq Q = Q_{min} \leq \sigma_o (L - a) \}$

2^{ème} choix (Déformations planes): $K(\bar{Q}) = \left\{ \bar{Q} \mid 0 \leq Q = Q_{min} \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_o (L - a) \right\}$

$\Rightarrow$ Le 2^{ème} choix est judicieux car il améliore la borne inférieure.

Exemples d'application

Tube en traction-torsion

Soit un tube métallique mince de limite de résistance σ_o soumis à une traction $\bar{F}$ et un couple de torsion $\bar{T}$. Déterminer les domaines de résistance du matériau $G(\bar{x})$ et des chargements potentiellement supportables $K(\bar{Q})$ pour les critères de Tresca et de von Mises.

a/ Contraintes principales

$$\bar{\sigma} = (\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau \\ 0 & \tau & \sigma \end{pmatrix} = \sigma \bar{e}_3 \otimes \bar{e}_3 + \tau (\bar{e}_2 \otimes \bar{e}_3 + \bar{e}_3 \otimes \bar{e}_2)$$

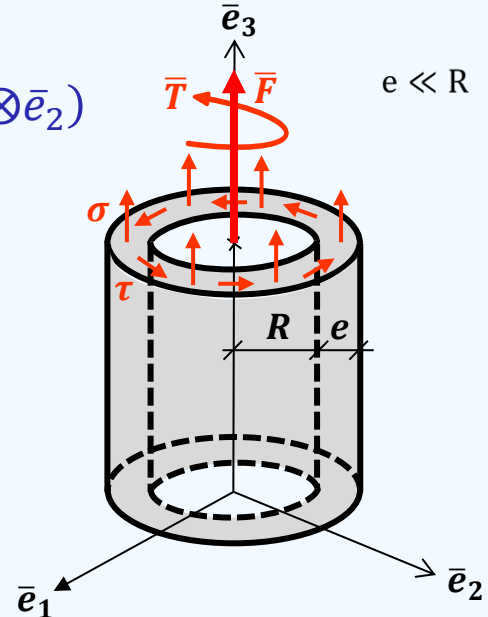
telles que $\sigma = \frac{F}{2\pi R e}$ et $\tau = \frac{T}{2\pi R^2 e}$

Contraintes principales :

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

$$\sigma_2 = 0$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$$



Exemples d'application

Tube en traction-torsion

b/ Critère de Tresca

$$\text{Sup}\{|\sigma_i - \sigma_j| ; i = 1, 2, 3 ; j = 1, 2, 3\} \leq \sigma_o$$

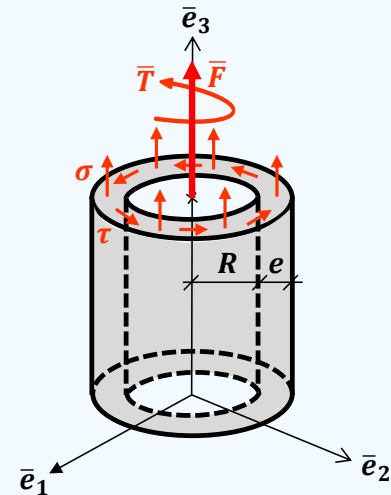
$$\Rightarrow \text{Sup}\{|\sigma_1 - \sigma_2| ; |\sigma_2 - \sigma_3| ; |\sigma_3 - \sigma_1|\} \leq \sigma_o$$

$$\Rightarrow \text{Sup}\left\{ \left| \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} - 0 \right| ; \left| 0 - \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} \right| ; \left| \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} - \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} \right| \right\} \leq \sigma_o$$

$$\Rightarrow \text{Sup}\left\{ \left| \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} \right| ; \left| -\frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} \right| ; \left| -2 \times \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} \right| \right\} \leq \sigma_o$$

$$\Rightarrow 2 \times \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} \leq \sigma_o \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2 \leq \left(\frac{\sigma_o}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \sigma^2 + 4\tau^2 \leq \sigma_o^2$$



□ Exemples d'application

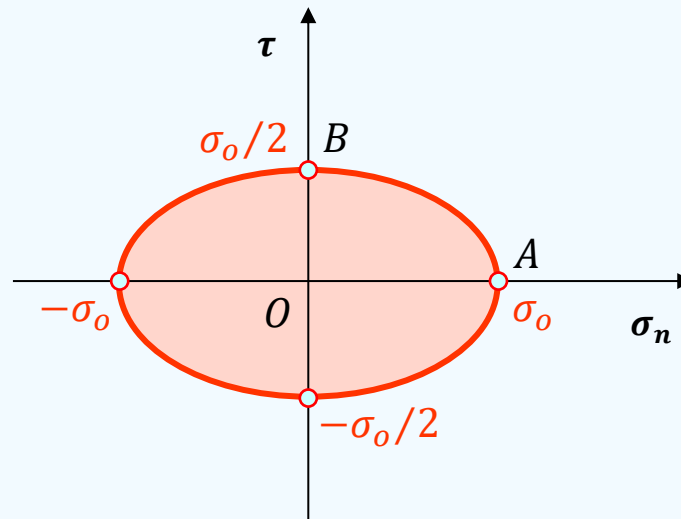
- **Tube en traction-torsion**

b/ Critère de Tresca

D'où le domaine de résistance :

$$G(\bar{x}) = \{ \bar{\sigma} = \sigma \bar{e}_3 \otimes \bar{e}_3 + \tau (\bar{e}_2 \otimes \bar{e}_3 + \bar{e}_3 \otimes \bar{e}_2) \mid \sigma^2 + 4\tau^2 \leq \sigma_o^2 \}$$

⇒ Ellipse d'axes $\overline{OA} = \sigma_o$ et $\overline{OB} = \sigma_o/2$



□ Exemples d'application

• **Tube en traction-torsion**

b/ Critère de Tresca

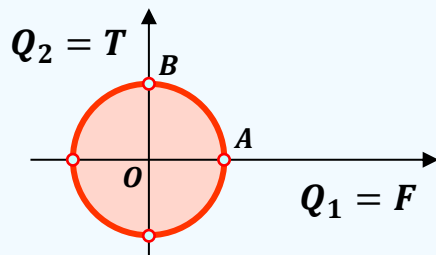
Sachant que : $\sigma = \frac{F}{2\pi R e}$ et $\tau = \frac{T}{2\pi R^2 e} \Rightarrow \left(\frac{F}{2\pi R e}\right)^2 + 4\left(\frac{T}{2\pi R^2 e}\right)^2 \leq \sigma_o^2$

$$\Rightarrow F^2 + \left(\frac{2}{R}T\right)^2 \leq (2\pi R e \sigma_o)^2$$

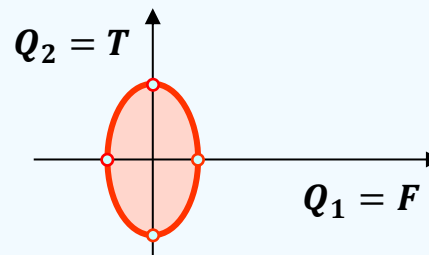
D'où le domaine des chargements potentiellement supportables :

$$K(\bar{Q}) = \left\{ \bar{Q} \mid F^2 + \left(\frac{2}{R}T\right)^2 \leq (2\pi R e \sigma_o)^2 \mid F = Q_1 \text{ \& \; } T = Q_2 \right\}$$

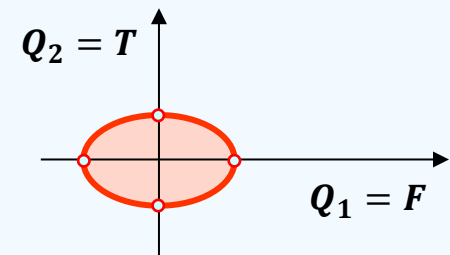
$\Rightarrow$ Ellipse d'axes $\overline{OA} = 2\pi R e \sigma_o$ et $\overline{OB} = \pi R^2 e \sigma_o$



Cas 1 : $R = 2$



Cas 2 : $R < 2$



Cas 3 : $R > 2$

Exemples d'application

• Tube en traction-torsion

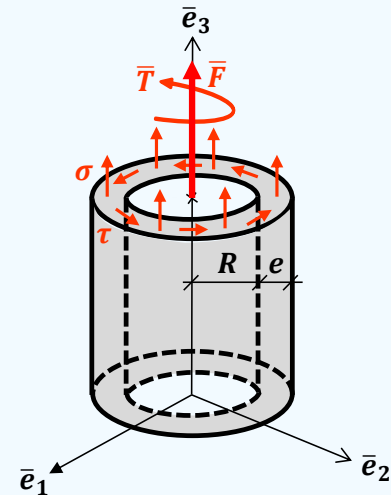
c/ Critère de von Mises

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq \sigma_o$$

$$\Rightarrow (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \leq 2\sigma_o^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} - 0 \right)^2 + \left(0 - \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} \right)^2 + \left(\frac{\sigma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} - \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} \right)^2 \leq 2\sigma_o^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2 + 2\frac{\sigma}{2}\sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} + \left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2 - 2\frac{\sigma}{2}\sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} + 4\left[\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2\right] \leq 2\sigma_o^2$$



□ Exemples d'application

- **Tube en traction-torsion**

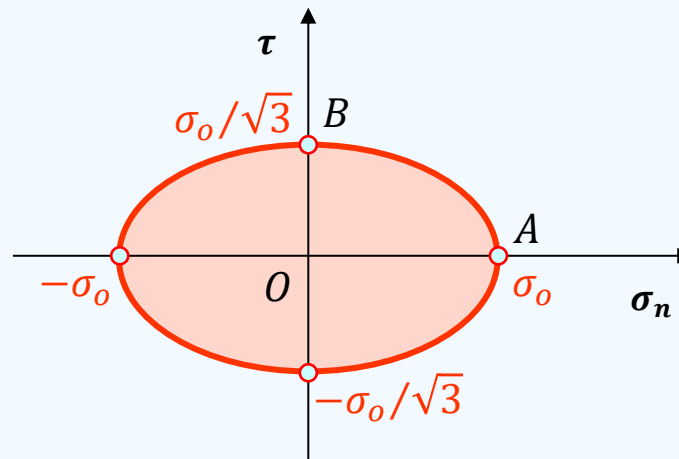
c/ Critère de von Mises

$$\Rightarrow 8 \left(\frac{\sigma}{2} \right)^2 + 6\tau^2 \leq 2\sigma_o^2 \quad \Rightarrow \quad \sigma^2 + 3\tau^2 \leq \sigma_o^2$$

D'où le domaine de résistance :

$$G(\bar{x}) = \{ \bar{\sigma} = \sigma \bar{e}_3 \otimes \bar{e}_3 + \tau (\bar{e}_2 \otimes \bar{e}_3 + \bar{e}_3 \otimes \bar{e}_2) \mid \sigma^2 + 3\tau^2 \leq \sigma_o^2 \}$$

$\Rightarrow$ Ellipse d'axes $\overline{OA} = \sigma_o$ et $\overline{OB} = \sigma_o/\sqrt{3}$



Exemples d'application

Tube en traction-torsion

c/ Critère de von Mises

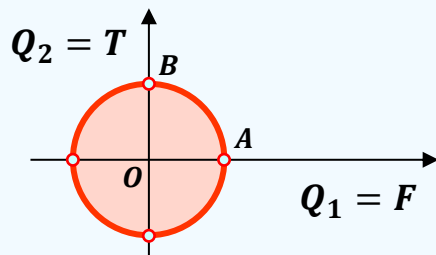
$$\text{Sachant que : } \sigma = \frac{F}{2\pi Re} \text{ et } \tau = \frac{T}{2\pi R^2 e} \Rightarrow \left(\frac{F}{2\pi Re}\right)^2 + 3\left(\frac{T}{2\pi R^2 e}\right)^2 \leq \sigma_o^2$$

$$\Rightarrow F^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{R}T\right)^2 \leq (2\pi Re\sigma_o)^2$$

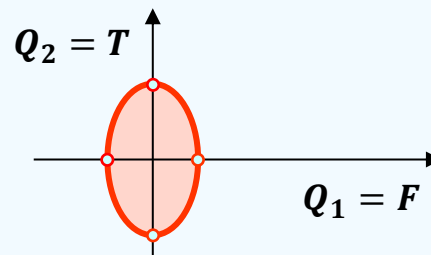
D'où le domaine des chargements potentiellement supportables :

$$K(\bar{Q}) = \left\{ \bar{Q} \mid F^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{R}T\right)^2 \leq (2\pi Re\sigma_o)^2 \mid F = Q_1 \text{ \& } T = Q_2 \right\}$$

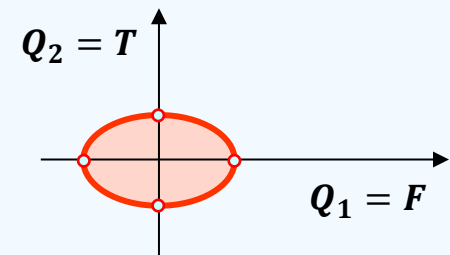
$\Rightarrow$ Ellipse d'axes $\overline{OA} = 2\pi Re\sigma_o$ et $\overline{OB} = 2\pi R^2 e\sigma_o/\sqrt{3}$



Cas 1 : $R = \sqrt{3}$



Cas 2 : $R < \sqrt{3}$



Cas 3 : $R > \sqrt{3}$

Exemples d'application

Structure réticulée

Soit un treillis métallique carré de limite de résistance de ses tirants égale à L soumis à une force de traction $\bar{Q}$ comme l'indique la figure ci-après. Déterminer le domaine des chargements potentiellement supportables $K(\bar{Q})$ correspondant.

a/ Convention de signe

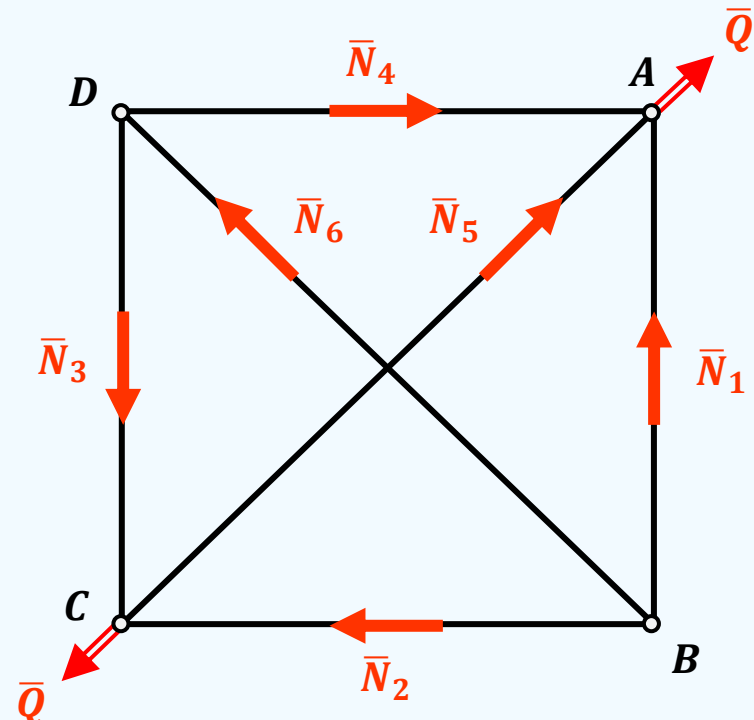
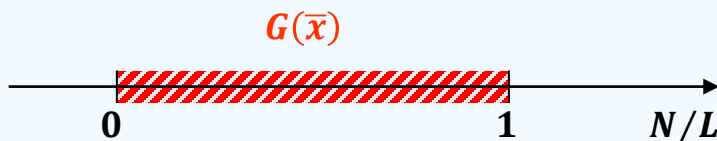
$$N_i > 0 \Rightarrow \text{Traction}$$

b/ Capacité de résistance

$$|N_i| \leq L \quad | \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

c/ Domaine de résistance

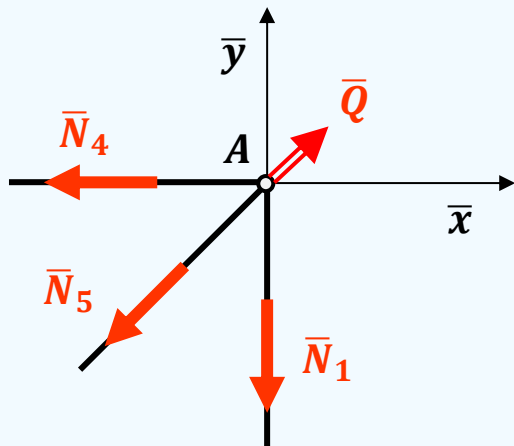
$$G(\bar{x}) = \{|N_i| \leq L ; i = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$



Exemples d'application

Structure réticulée

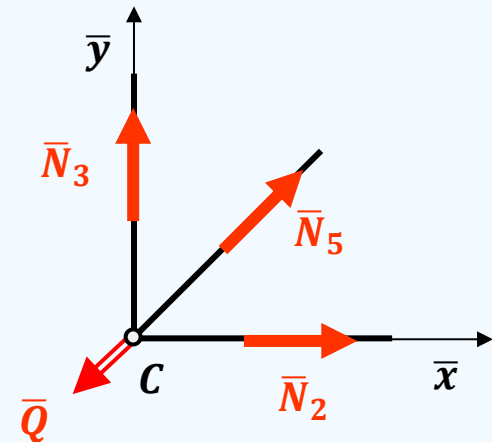
d/ Equilibre des nœuds



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_4 + N_5 \frac{\sqrt{2}}{2} = Q \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_1 + N_5 \frac{\sqrt{2}}{2} = Q \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (2)$$

$$\Rightarrow N_1 = N_4$$



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_2 + N_5 \frac{\sqrt{2}}{2} = Q \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (3)$$

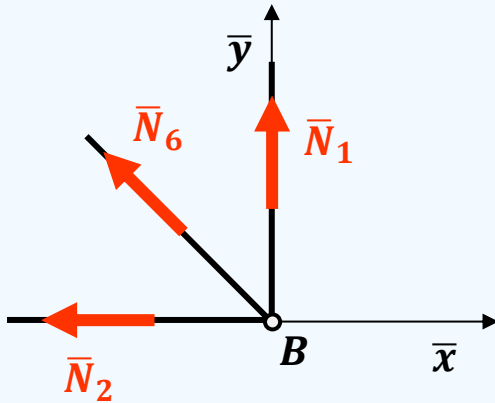
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_3 + N_5 \frac{\sqrt{2}}{2} = Q \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (4)$$

$$\Rightarrow N_2 = N_3$$

□ Exemples d'application

• **Structure réticulée**

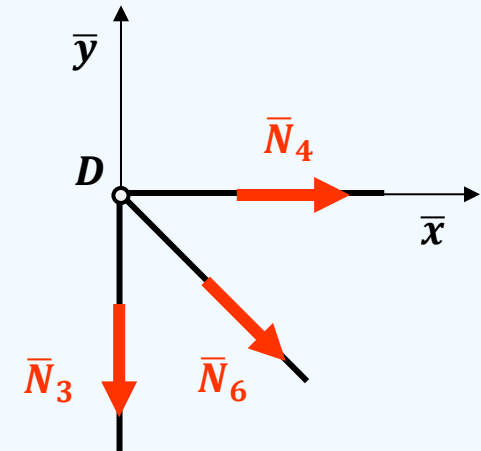
d/ Equilibre des nœuds



$$\bullet \sum F_x = 0 \Rightarrow N_2 + N_6 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad (5)$$

$$\bullet \sum F_y = 0 \Rightarrow N_1 + N_6 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad (6)$$

$$\Rightarrow N_1 = N_2$$



$$\bullet \sum F_x = 0 \Rightarrow N_4 + N_6 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad (7)$$

$$\bullet \sum F_y = 0 \Rightarrow N_3 + N_6 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad (8)$$

$$\Rightarrow N_3 = N_4$$

□ Exemples d'application

- **Structure réticulée**

d/ Equilibre des nœuds

D'où : $N_1 = N_2 = N_3 = N_4$

$$(2) \quad \Rightarrow \quad N_1 + N_5 \frac{\sqrt{2}}{2} = Q \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad N_1 \sqrt{2} + N_5 = Q$$

$$(6) \quad \Rightarrow \quad N_1 + N_6 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad N_1 \sqrt{2} + N_6 = 0$$

D'où le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} N_1 = N_2 = N_3 = N_4 \\ N_1 \sqrt{2} + N_5 = Q \\ N_1 \sqrt{2} + N_6 = 0 \end{cases}$$



⇒ Système à 2 équations pour 3 inconnues (Système hyperstatique)

□ Exemples d'application

- **Structure réticulée**

e/ Domaine des chargements potentiellement supportables

Posons : $N_1 = T$, $N_5 = U$ et $N_6 = V$

$$\begin{cases} N_1 = N_2 = N_3 = N_4 \\ N_1\sqrt{2} + N_5 = Q \\ N_1\sqrt{2} + N_6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |T| \leq L & (1) \\ U + T\sqrt{2} = Q & | & |U| \leq L & (2) \\ V + T\sqrt{2} = 0 & | & |V| \leq L & (3) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow -L \leq T \leq L \Rightarrow \begin{cases} T = +L & (\text{point } A) \\ T = -L & (\text{point } A') \end{cases}$$

$$(2) \Rightarrow \begin{cases} U + T\sqrt{2} = Q \\ |U| \leq L \end{cases} \Rightarrow Q = T\sqrt{2} \pm L \Rightarrow \begin{cases} Q = T\sqrt{2} + L & (2a) \\ Q = T\sqrt{2} - L & (2b) \end{cases}$$

$$(2a) \Rightarrow Q = T\sqrt{2} + L \Rightarrow \begin{cases} T = 0 \Rightarrow Q = +L & (\text{point } B) \\ Q = 0 \Rightarrow T = -L/\sqrt{2} & (\text{point } C') \end{cases}$$

□ Exemples d'application

- **Structure réticulée**

e/ Domaine des chargements potentiellement supportables

$$(2b) \Rightarrow Q = T\sqrt{2} - L \Rightarrow \begin{cases} T = 0 \Rightarrow Q = -L & (\text{point } B') \\ Q = 0 \Rightarrow T = +L/\sqrt{2} & (\text{point } C) \end{cases}$$

$$(3) \Rightarrow \begin{cases} V + T\sqrt{2} = 0 \\ |V| \leq L \end{cases} \Rightarrow T = \pm L/\sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} T = +L/\sqrt{2} & (\text{point } C) \\ T = -L/\sqrt{2} & (\text{point } C') \end{cases}$$

La charge maximale Q que peut supporter la structure sans subir de ruine est :

$$Q_{min} = -2L \leq Q_{ult} \leq Q_{max} = +2L$$

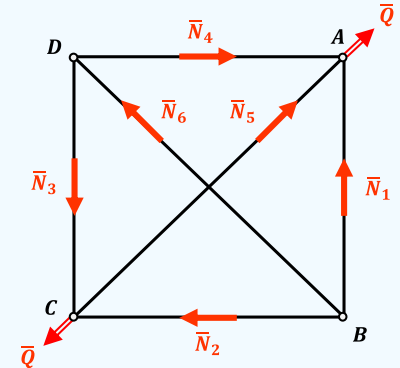
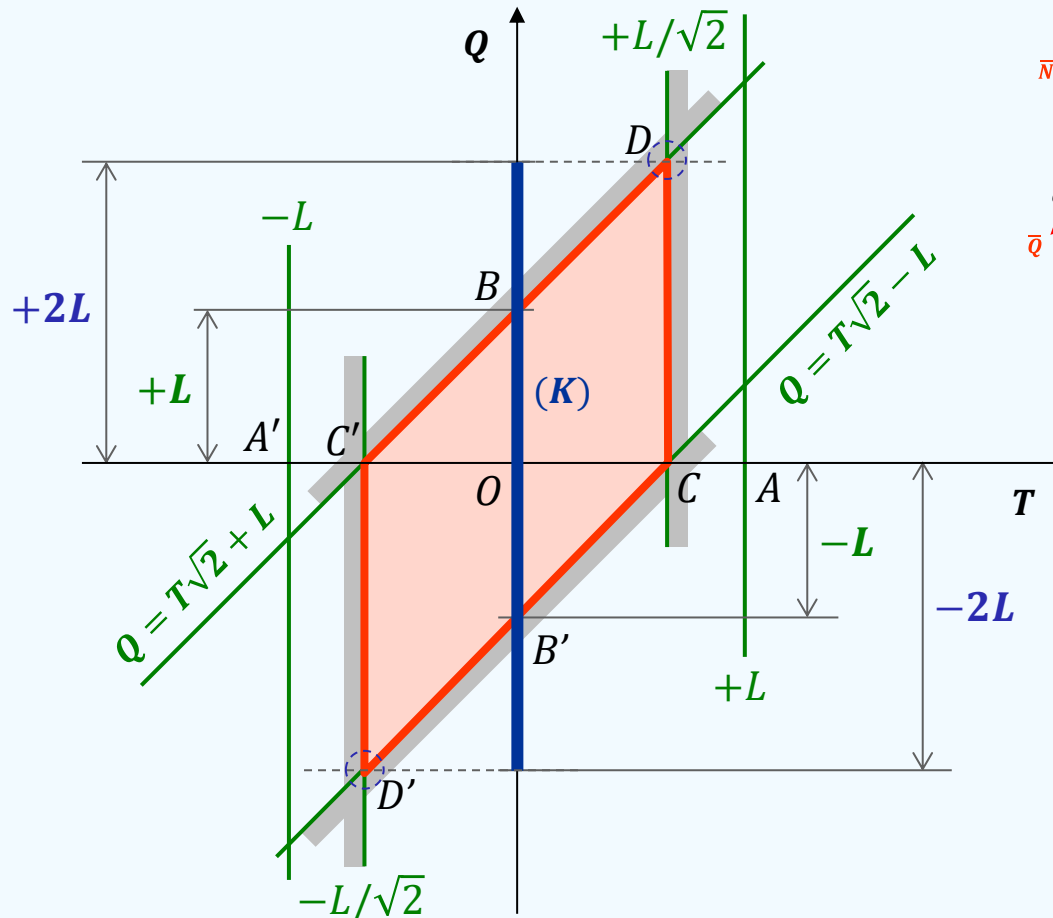
D'où le domaine des chargements potentiellement supportables (Voir schéma ci-après) :

$$K(\bar{Q}) = \{\bar{Q} \mid -2L \leq Q \leq +2L\}$$

Exemples d'application

- **Structure réticulée**

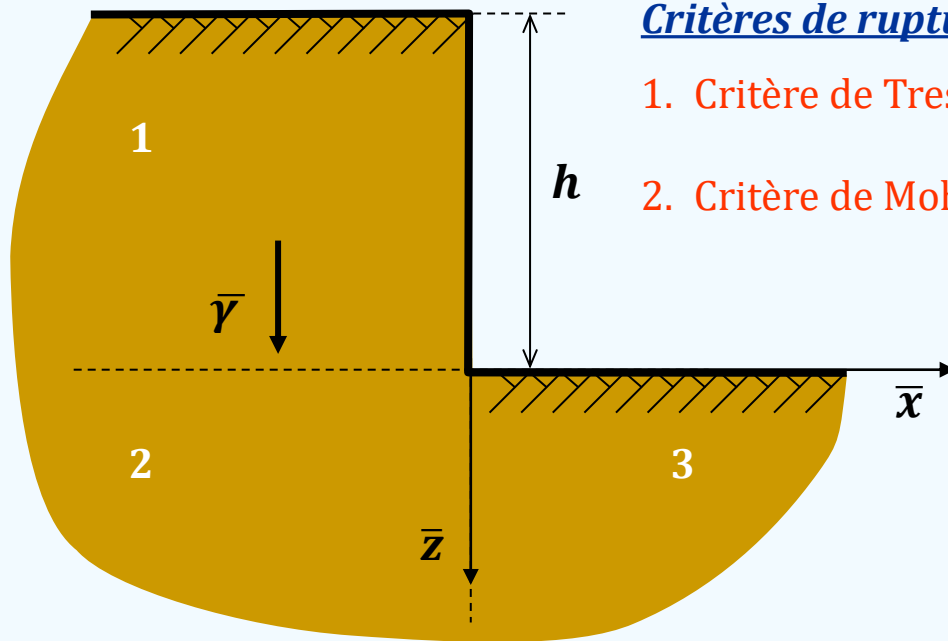
e/ Domaine des chargements potentiellement supportables



□ Exemples d'application

• **Excavations : Cas d'une fouille verticale**

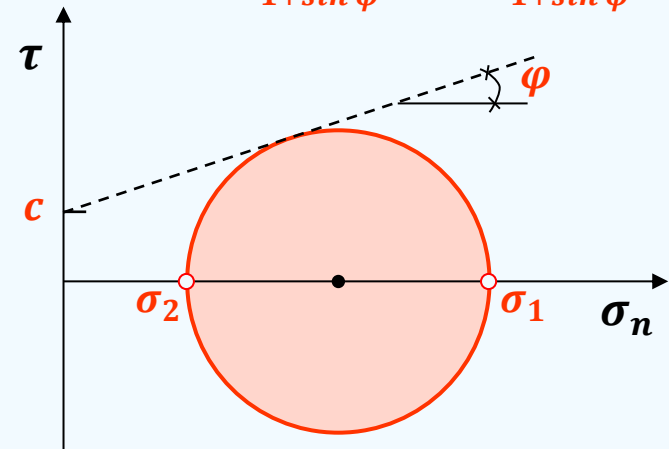
➤ **Position du problème**



Critères de rupture :

1. Critère de Tresca : $|\sigma_1 - \sigma_2| - 2c_u \leq 0$

2. Critère de Mohr-Coulomb : $\sigma_1 - \sigma_2 \frac{1 - \sin \varphi'}{1 + \sin \varphi'} - 2c' \frac{\cos \varphi'}{1 + \sin \varphi'} \leq 0$



Données : Fouille verticale satisfaisant aux critères de rupture définis ci-dessus.

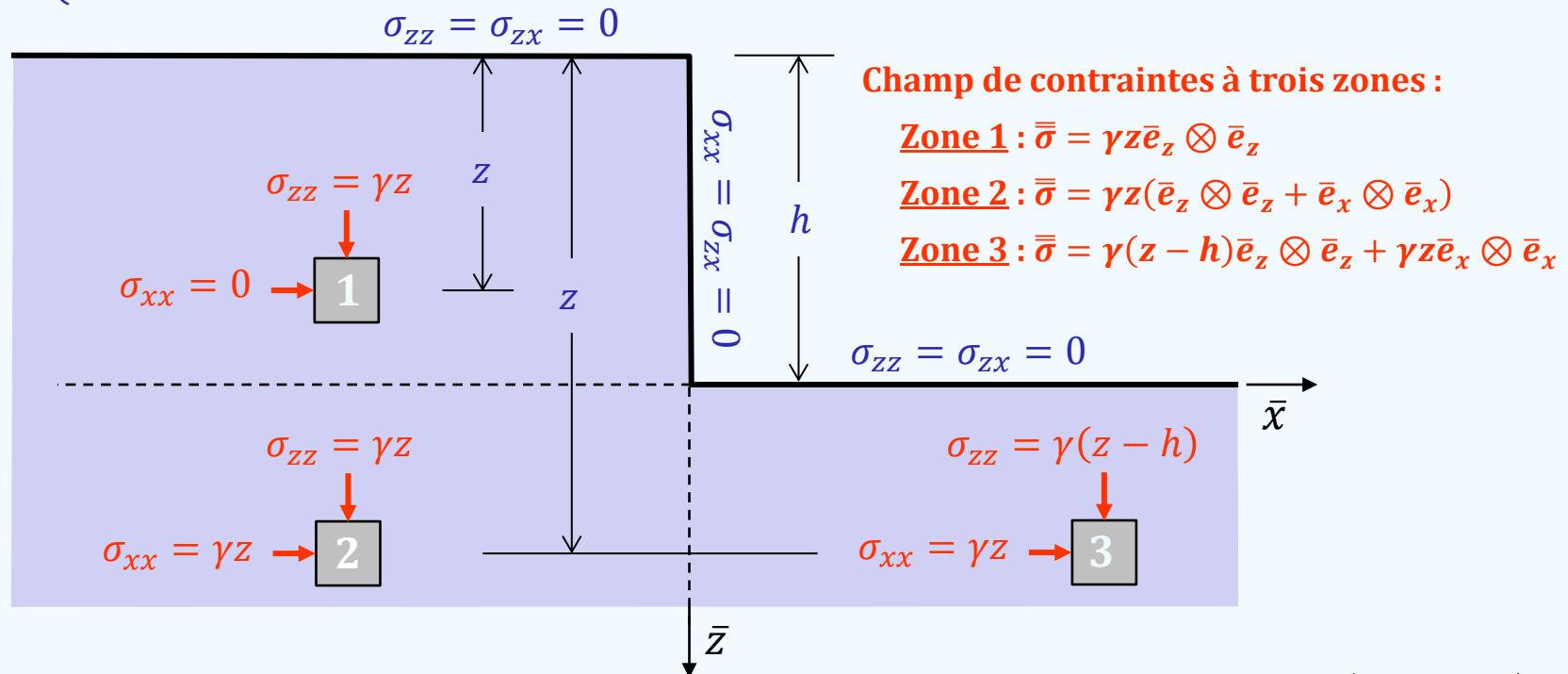
Question : Etant donné le poids volumique γ , la cohésion c et l'angle de frottement interne du sol φ , on cherche à déterminer la hauteur maximale h_{max} de cette fouille verticale.

Exemples d'application

Excavations : Cas d'une fouille verticale

Champs de contraintes statiquement admissibles

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \gamma = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \overline{\text{div}}(\bar{\sigma}) + \bar{\gamma} = \bar{0} \quad (\text{Equations d'équilibre statique})$$



Exemples d'application

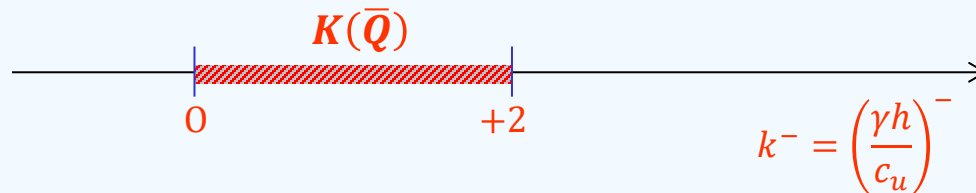
Excavations : Cas d'une fouille verticale

Critère de Tresca ($c = c_u$ et $\varphi = \varphi_u \cong 0$)

La valeur maximale de $f(\bar{\sigma})$ est telles que les contraintes principales soient égales à (Zone 1) :

$$\begin{cases} \sigma_1 = \gamma h \\ \sigma_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow f(\bar{\sigma}) = |\sigma_1 - \sigma_2| - 2c_u = \gamma h - 2c_u \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{\gamma h}{c_u} \leq 2 \Rightarrow k^- = \left(\frac{\gamma h}{c_u} \right)^- = 2$$



D'où la hauteur maximale : $h_{max} \leq h^- = 2 \frac{c_u}{\gamma}$

Exemples d'application

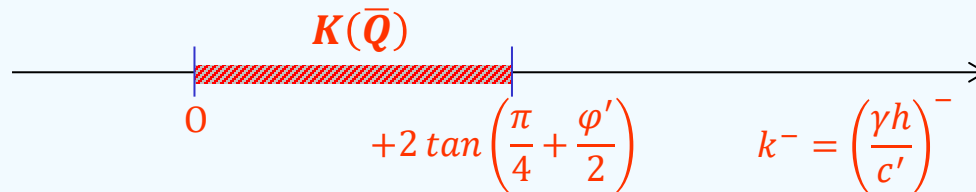
Excavations : Cas d'une fouille verticale

Critère de Mohr-Coulomb ($c = c'$ et $\varphi = \varphi'$)

La valeur maximale de $f(\bar{\sigma})$ est telles que les contraintes principales soient égales à (Zone 1) :

$$\begin{cases} \sigma_1 = \gamma h \\ \sigma_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow f(\bar{\sigma}) = \sigma_1 - \sigma_2 \frac{1 - \sin \varphi'}{1 + \sin \varphi'} - 2c' \frac{\cos \varphi'}{1 + \sin \varphi'} \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{\gamma h}{c'} \leq 2 \frac{\cos \varphi'}{1 + \sin \varphi'} \Rightarrow k^- = \left(\frac{\gamma h}{c'} \right)^- = 2 \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi'}{2} \right)$$



D'où la hauteur maximale : $h_{max} \leq h^- = 2 \frac{c'}{\gamma} \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi'}{2} \right)$

□ Exemples d'application

• **Fondations : Cas d'une semelle filante**

Soit une semelle filante de largeur B reposant sur un massif de sol argileux de poids volumique γ et de cohésion non drainée c_u supposé obéissant au critère de type Tresca. Déterminer la charge maximale Q_{max} que peut supporter cette semelle.

Hypothèse

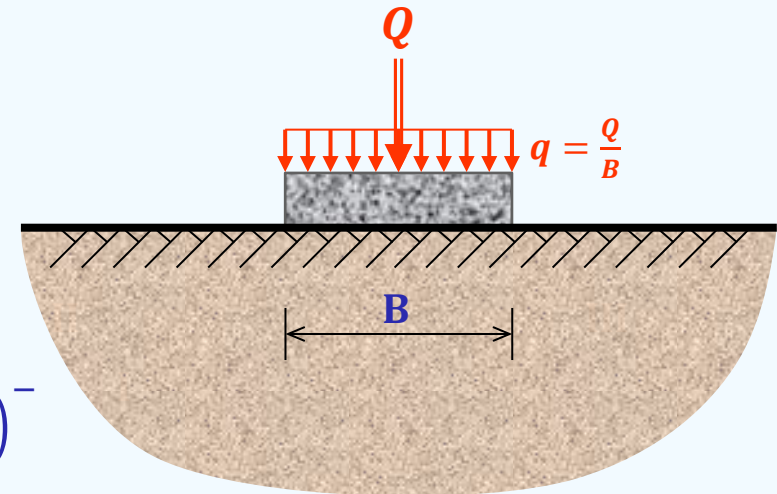
Poinçonnement du sol

Critère de rupture de type Tresca

$$f(\bar{\sigma}) = |\sigma_1 - \sigma_2| - 2c_u \leq 0$$

Mode de chargement appliqué

$$\text{Contrainte appliquée : } q = \frac{Q}{B} \leq q^- = \left(\frac{Q}{B}\right)^-$$



Rappels de MMC : Analyse des contraintes par le « Cercle de Mohr »

➤ Tenseur des contraintes planes

$$\bar{\sigma} = \sigma_{ij} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j \quad | \quad i = 1,2 \quad \& \quad j = 1,2$$

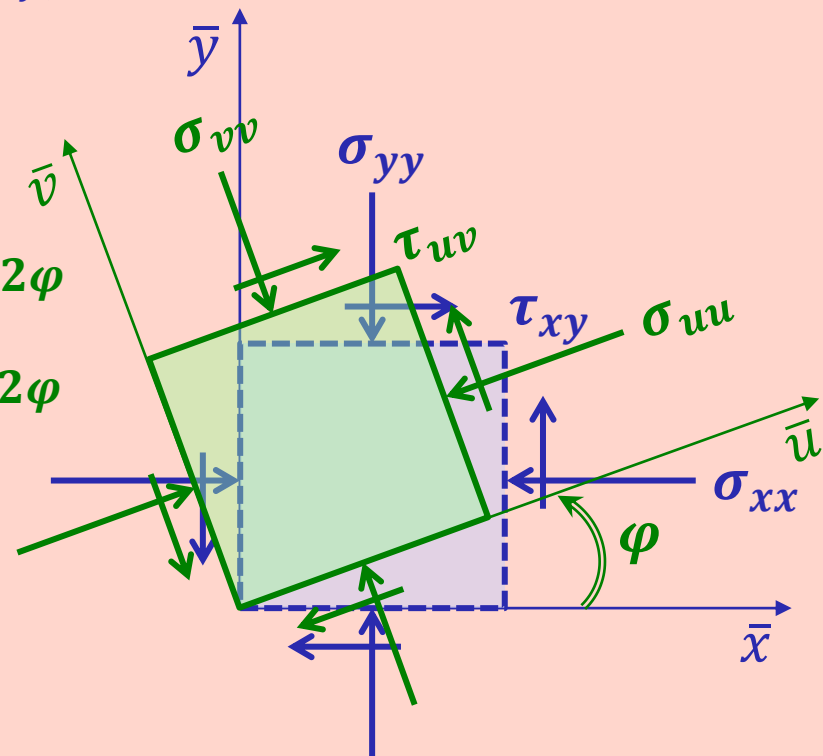
$$\Rightarrow \bar{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} / (\bar{x}, \bar{y})$$

➤ Formules de transformation

$$\sigma_{uu} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi$$

$$\sigma_{vv} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} - \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos 2\varphi - \tau_{xy} \sin 2\varphi$$

$$\tau_{uv} = \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \sin 2\varphi - \tau_{xy} \cos 2\varphi$$

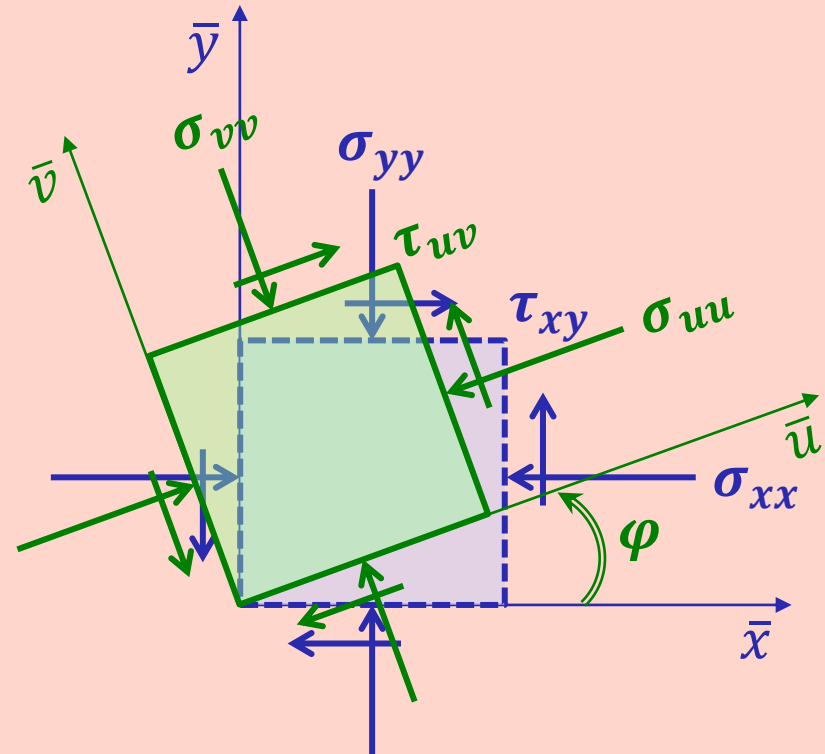
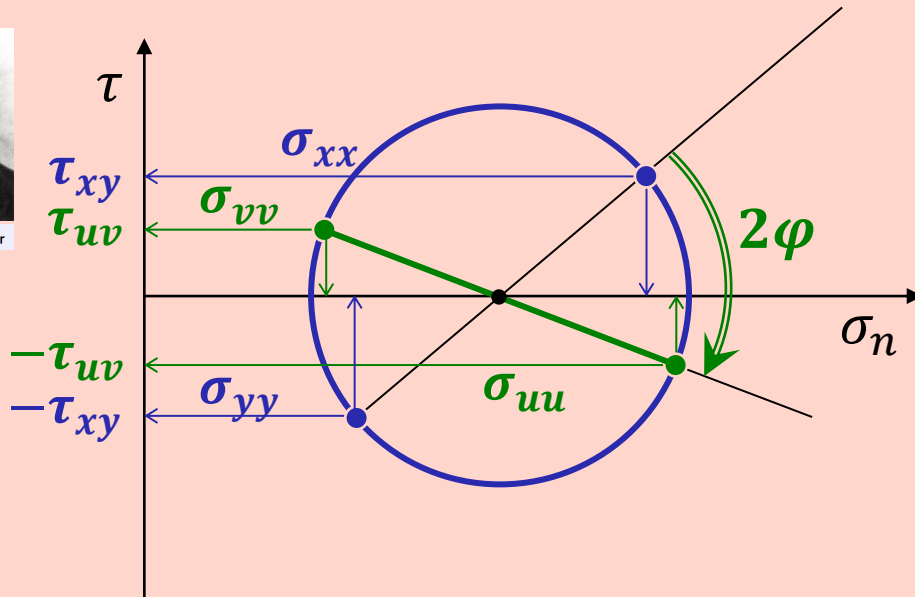


Rappels de MMC : Analyse des contraintes par le « Cercle de Mohr »

➤ Cercle de Mohr des contraintes



Christian Otto Mohr

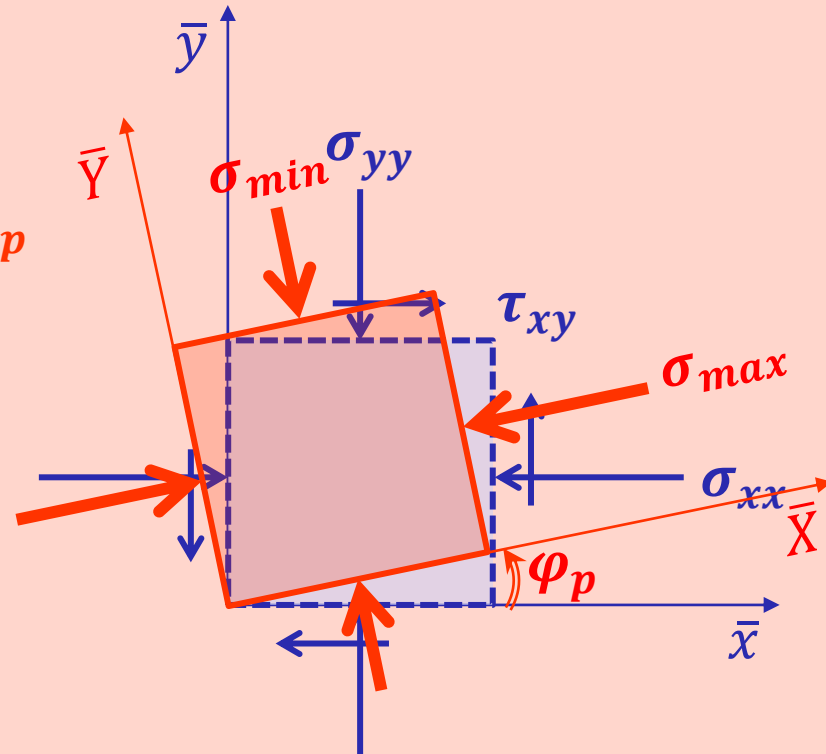
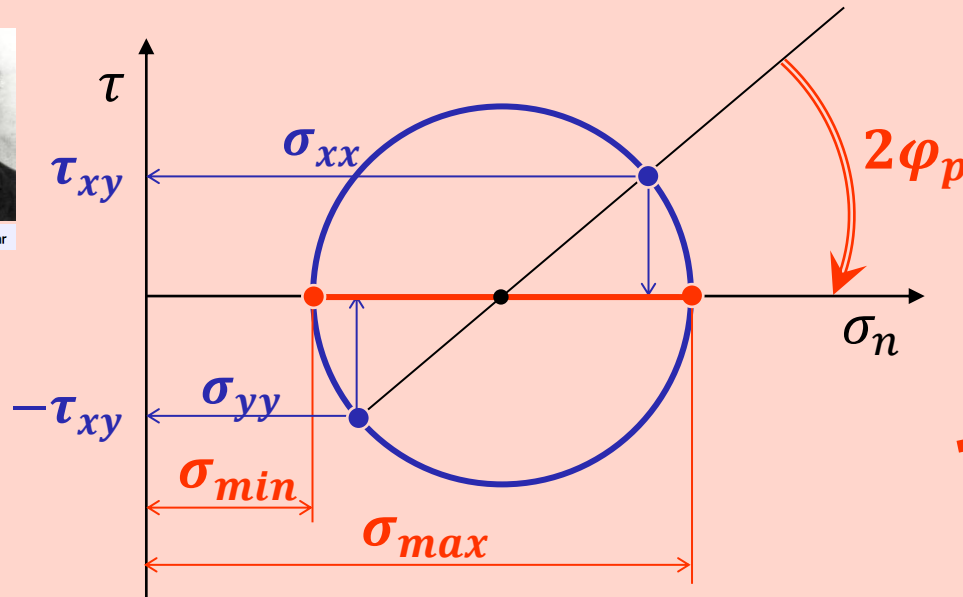


➤ Directions principales

$$\tau_{uv} = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \varphi_p = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} \right)$$

Rappels de MMC : Analyse des contraintes par le « Cercle de Mohr »

➤ Cercle de Mohr des contraintes



➤ Contraintes principales

$$\sigma_{max,min} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2}$$

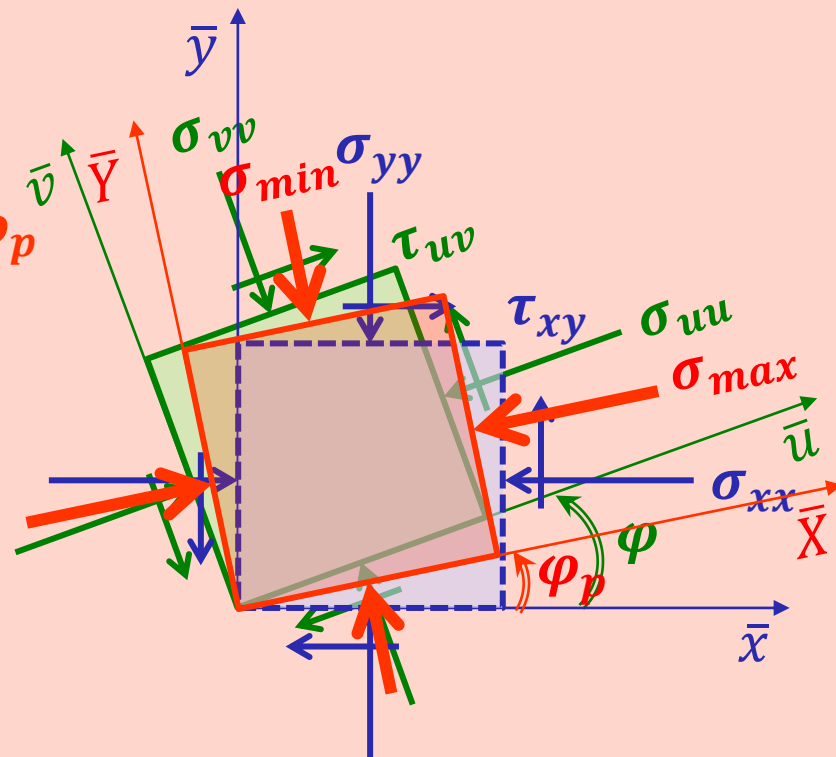
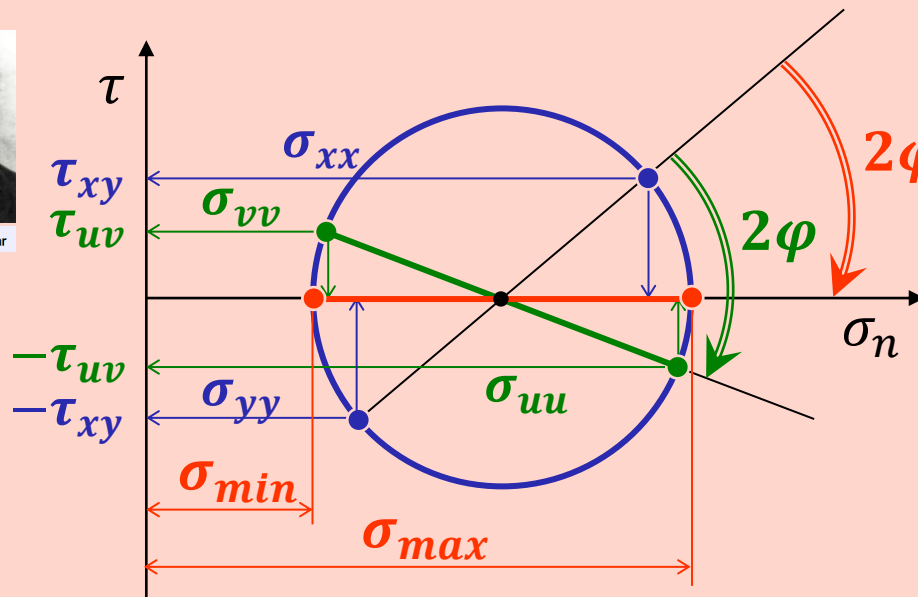
➤ Contrainte de cisaillement maximale : $\tau_{max} = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}$

Rappels de MMC : Analyse des contraintes par le « Cercle de Mohr »

➤ Cercle de Mohr des contraintes



Christian Otto Mohr



➤ Contraintes principales

$$\sigma_{max,min} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2}$$

➤ Contrainte de cisaillement maximale : $\tau_{max} = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}$

Rappels de MMC : Analyse des contraintes par le « Cercle de Mohr »

➤ Illustration graphique



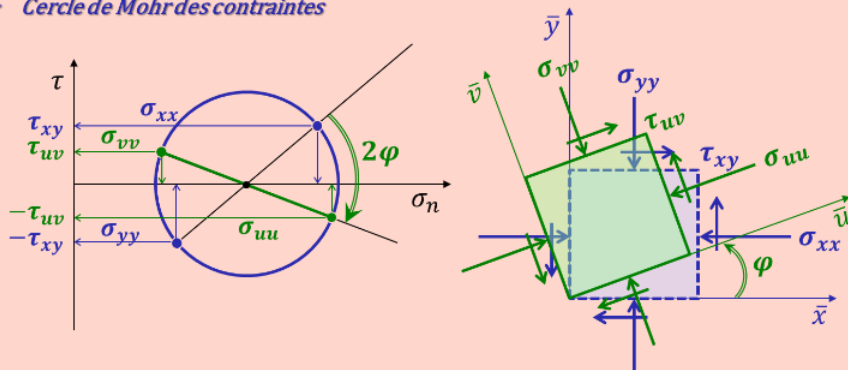
Analyse graphique des contraintes planes

Mohamed Khemissa (2023) – Université de M'sila (Algérie)

Go !...

Rappels de MMC : Analyse des contraintes par le « Cercle de Mohr »

➤ Cercle de Mohr des contraintes

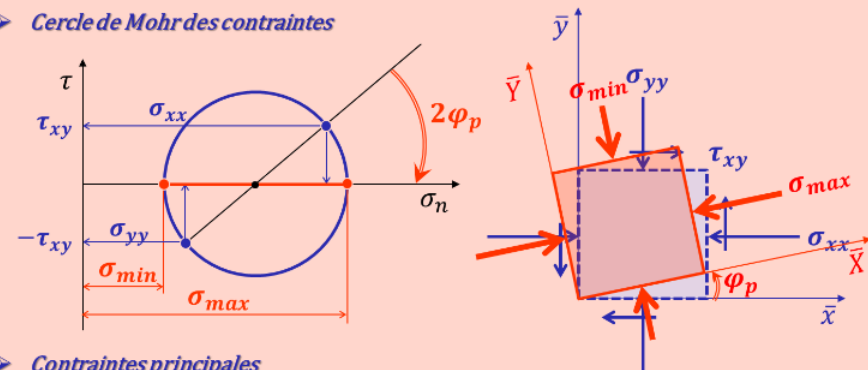


➤ Directions principales

$$\tau_{uv} = 0 \Rightarrow \varphi = \varphi_p = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} \right)$$

Rappels de MMC : Analyse des contraintes par le « Cercle de Mohr »

➤ Cercle de Mohr des contraintes



➤ Contraintes principales

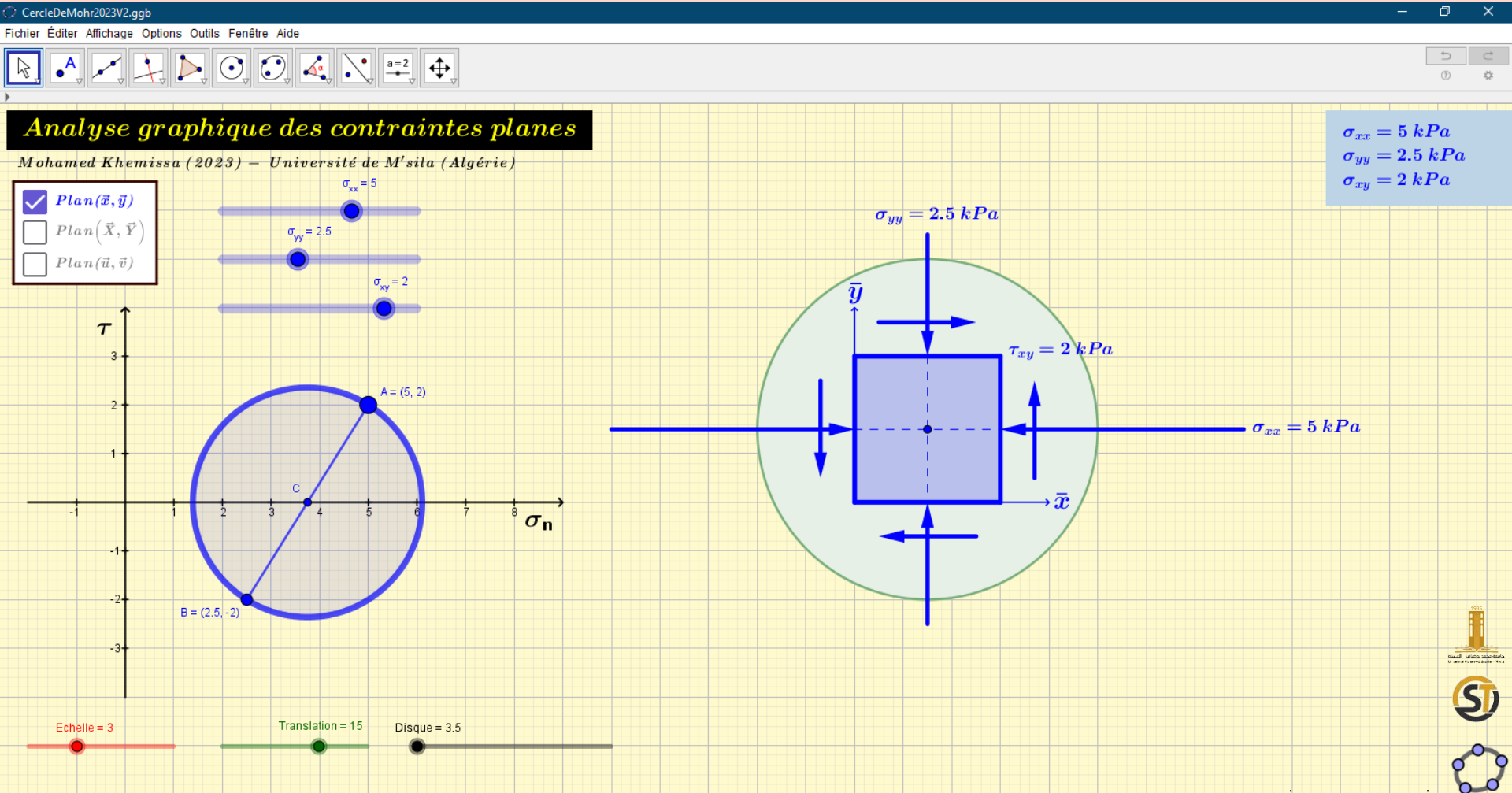
$$\sigma_{\max, \min} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \right)^2 + (\tau_{xy})^2}$$

➤ Contrainte de cisaillement maximale: $\tau_{\max} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}$



Rappels de MMC : Analyse des contraintes par le « Cercle de Mohr »

Illustration graphique

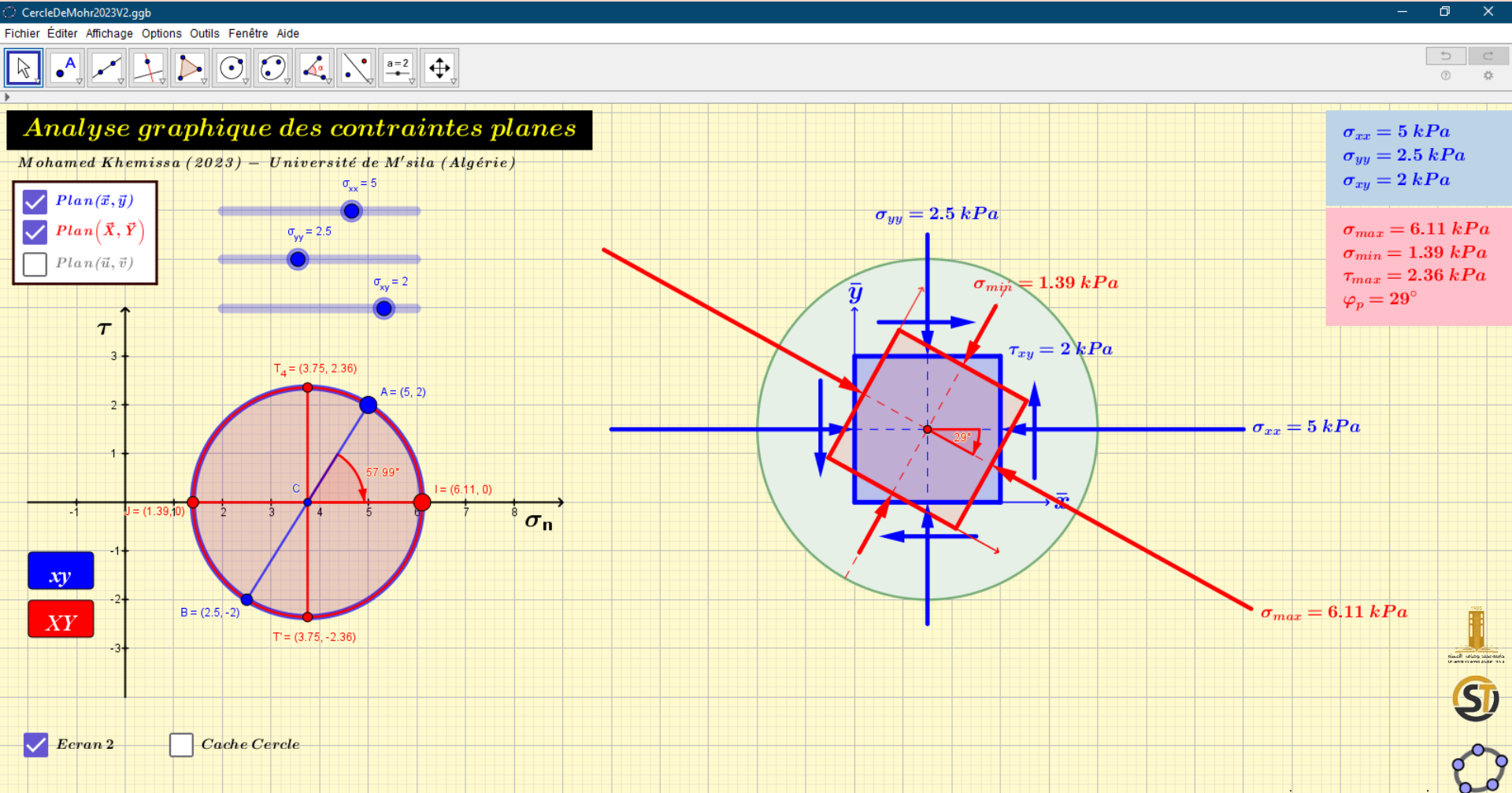


Calcul à la rupture et analyse limite

Chap. 2 : Approche statique par l'intérieur

Rappels de MMC : Analyse des contraintes par le « Cercle de Mohr »

Illustration graphique

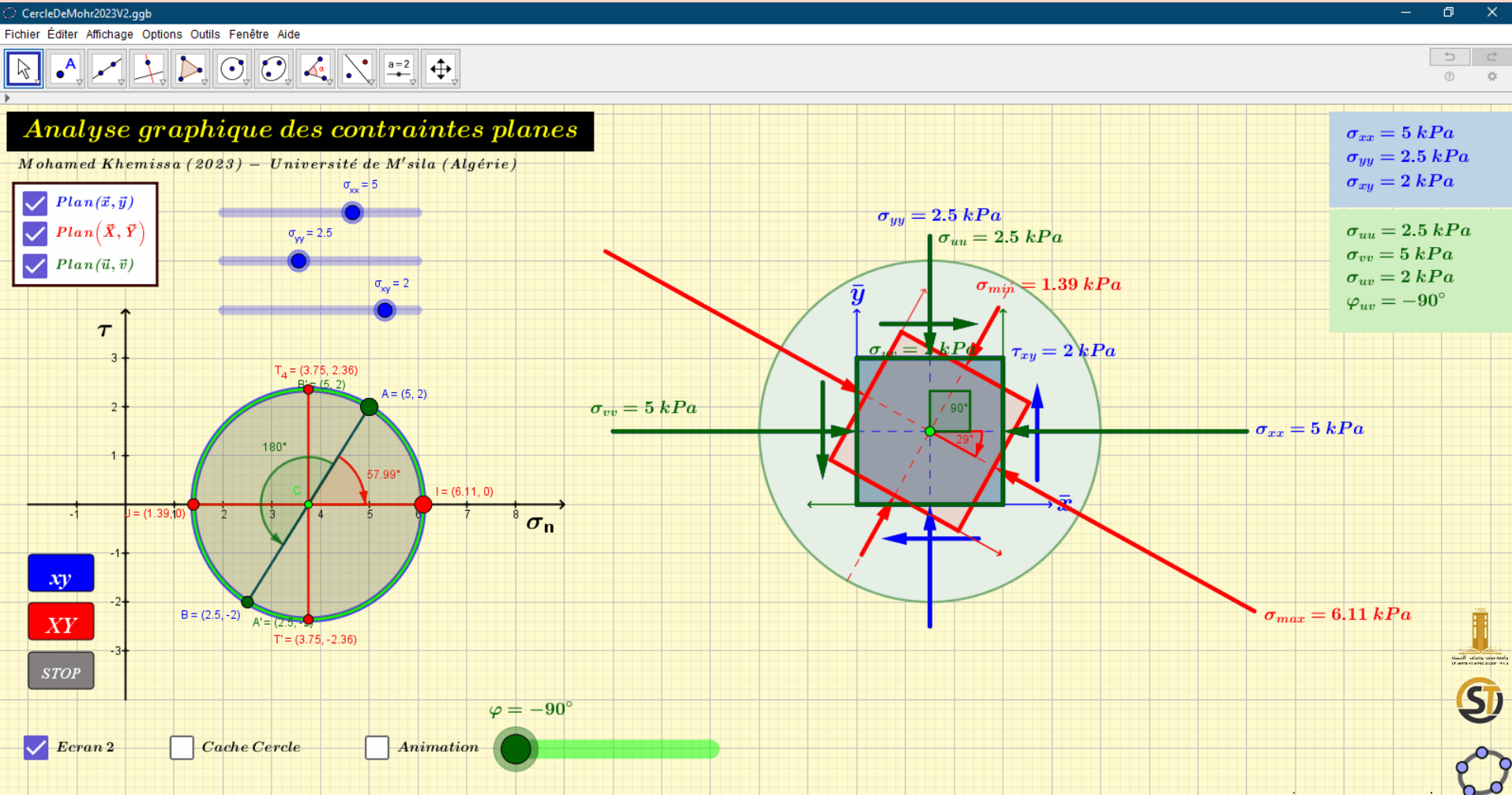


Calcul à la rupture et analyse limite

Chap. 2 : Approche statique par l'intérieur

Rappels de MMC : Analyse des contraintes par le « Cercle de Mohr »

➤ *Illustration graphique*



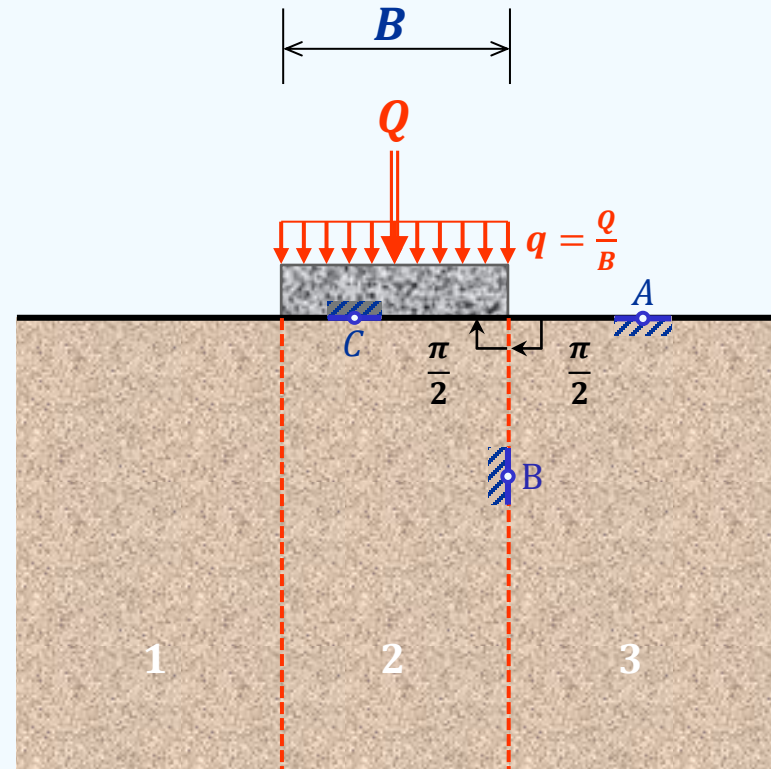
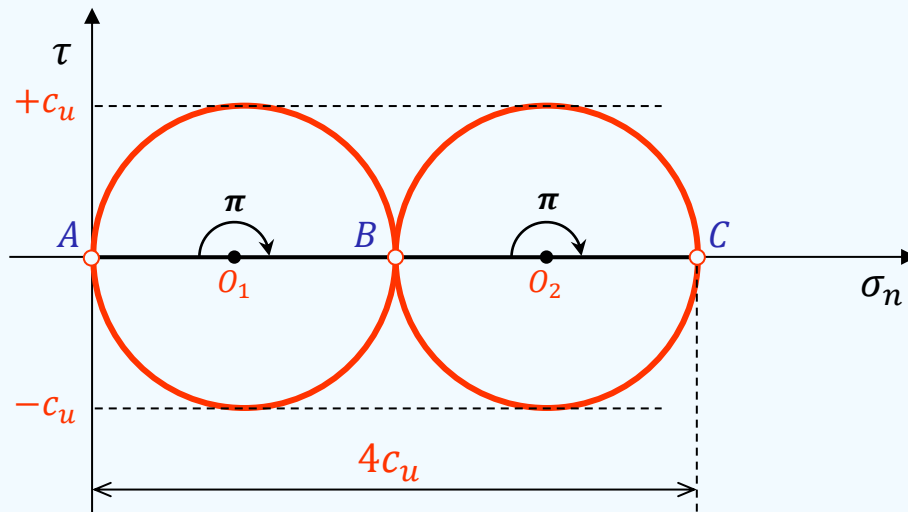
Exemples d'application

Fondations : Cas d'une semelle filante

Mécanisme de rupture à trois zones

L'état des contraintes est défini par :

$$A\{0,0\} \quad ; \quad B\{2c_u, 0\} \quad ; \quad C\{4c_u, 0\}$$



$$\Rightarrow q_{max} = \frac{Q_{max}}{B} \leq q^- = 4c_u$$

$$\Rightarrow Q_{max} = q_{max}B \leq Q^- = 4Bc_u \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{Q}{Bc_u} \right)^- = 4$$

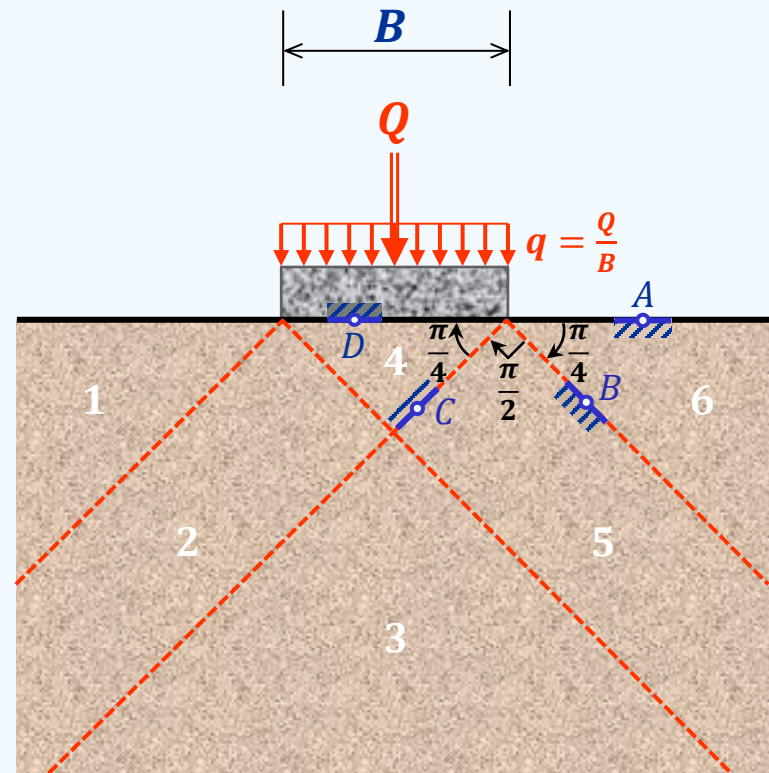
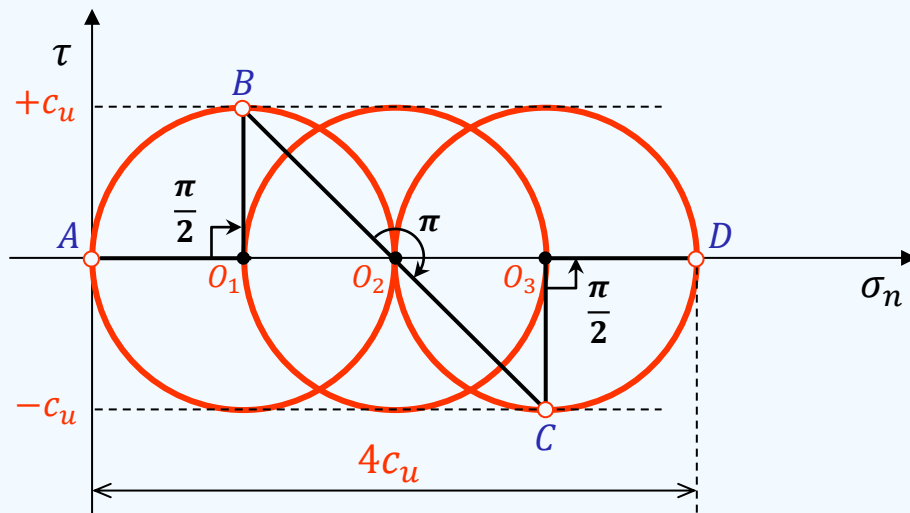
Exemples d'application

Fondations : Cas d'une semelle filante

Mécanisme de rupture à six zones

L'état des contraintes est défini par :

$$A\{0,0\} ; B\{c_u, c_u\} ; C\{3c_u, -c_u\} ; D\{4c_u, 0\}$$



$$\Rightarrow q_{max} = \frac{Q_{max}}{B} \leq q^- = 4c_u$$

$$\Rightarrow Q_{max} = q_{max}B \leq Q^- = 4Bc_u \Rightarrow \left(\frac{Q}{Bc_u}\right)^- = 4$$

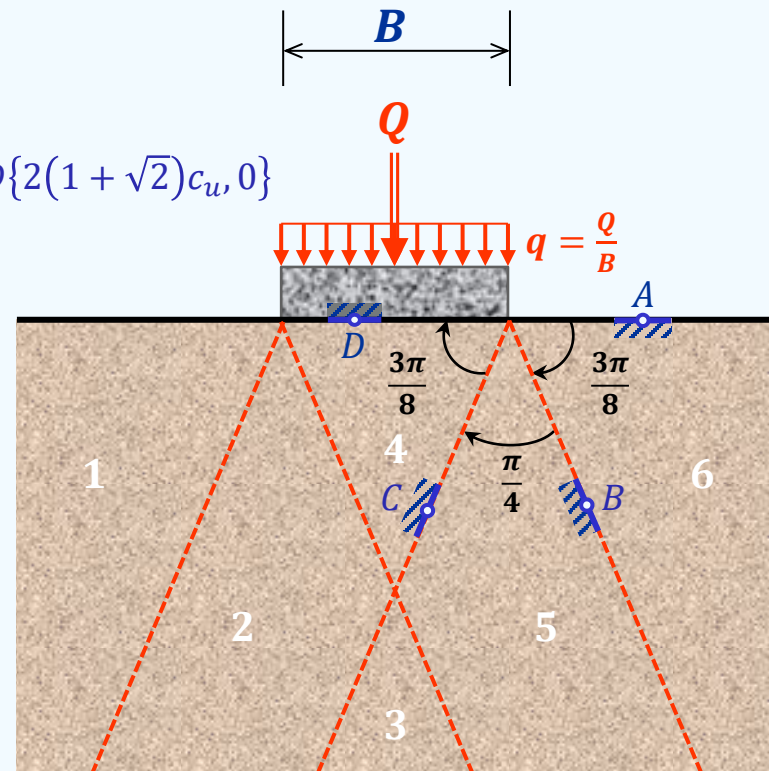
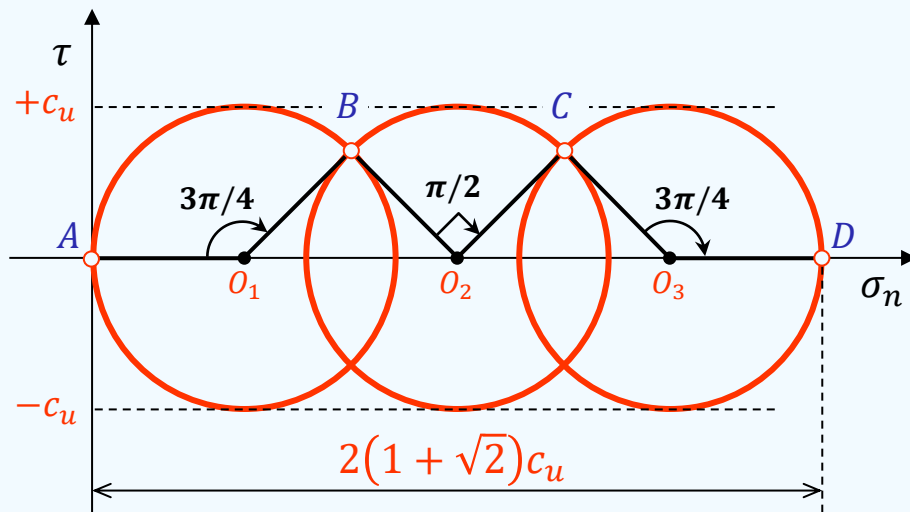
Exemples d'application

Fondations : Cas d'une semelle filante

Mécanisme de rupture à six zones

L'état des contraintes est défini par :

$$A\{0,0\} ; B\left\{\frac{2+\sqrt{2}}{2}c_u, \frac{\sqrt{2}}{2}c_u\right\} ; C\left\{\frac{2+3\sqrt{2}}{2}c_u, \frac{\sqrt{2}}{2}c_u\right\} ; D\{2(1+\sqrt{2})c_u, 0\}$$



$$\Rightarrow q_{max} = \frac{Q_{max}}{B} \leq q^- = 2(1+\sqrt{2})c_u \approx 4.83c_u$$

$$\Rightarrow Q_{max} = q_{max}B \leq Q^- \approx 4.83Bc_u \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{Q}{Bc_u}\right)^- = 2(1+\sqrt{2}) \approx 4.83$$

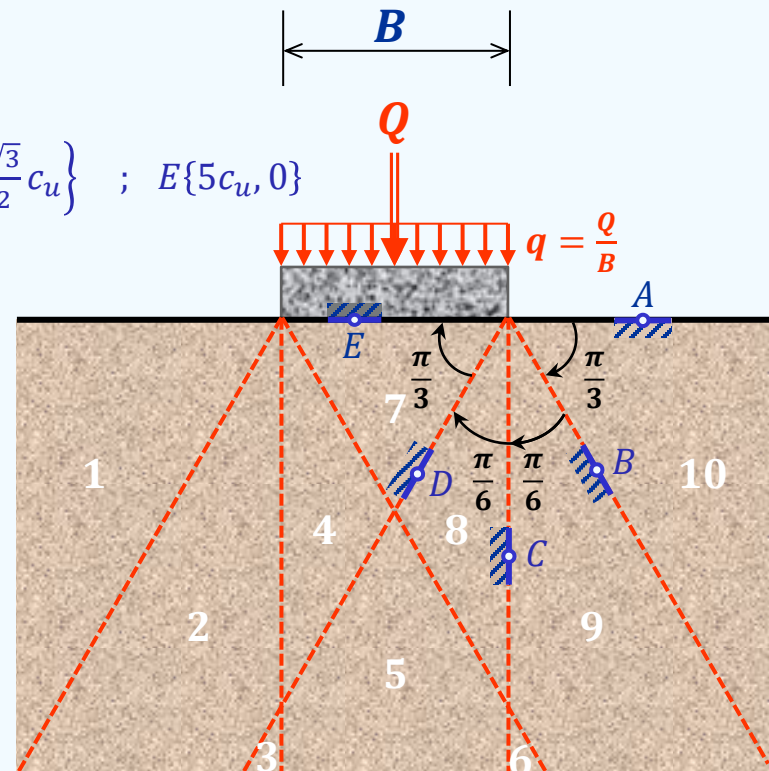
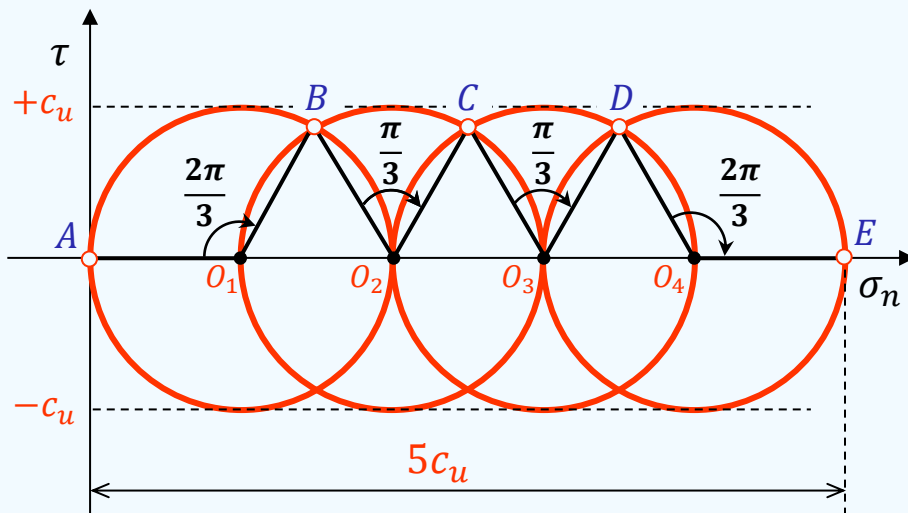
Exemples d'application

Fondations : Cas d'une semelle filante

Mécanisme de rupture à dix zones

L'état des contraintes est défini par :

$$A\{0,0\} ; B\left\{\frac{3}{2}c_u, \frac{\sqrt{3}}{2}c_u\right\} ; C\left\{\frac{5}{2}c_u, \frac{\sqrt{3}}{2}c_u\right\} ; D\left\{\frac{7}{2}c_u, \frac{\sqrt{3}}{2}c_u\right\} ; E\{5c_u, 0\}$$



$$\Rightarrow q_{max} = \frac{Q_{max}}{B} \leq q^- = 5c_u$$

$$\Rightarrow Q_{max} = q_{max}B \leq Q^- = 5Bc_u \Rightarrow \left(\frac{Q}{Bc_u}\right)^- = 5$$

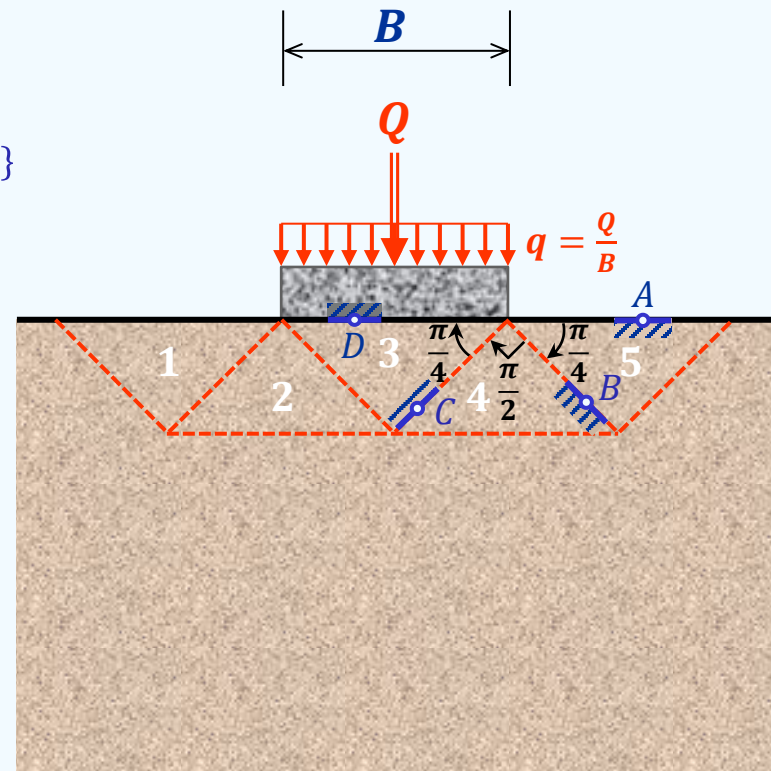
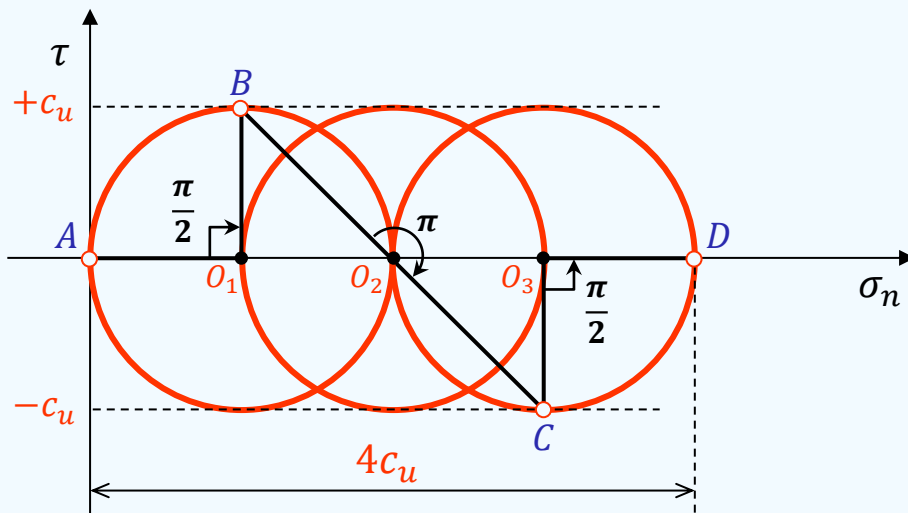
Exemples d'application

Fondations : Cas d'une semelle filante

Mécanisme de rupture à cinq blocs rigides

L'état des contraintes est défini par :

$$A\{0,0\} \quad ; \quad B\{c_u, c_u\} \quad ; \quad C\{3c_u, -c_u\} \quad ; \quad D\{4c_u, 0\}$$



$$\Rightarrow q_{max} = \frac{Q_{max}}{B} \leq q^- = 4c_u$$

$$\Rightarrow Q_{max} = q_{max}B \leq Q^- = 4Bc_u \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{Q}{Bc_u} \right)^- = 4$$

□ Exemples d'application

• **Soutènements : Cas d'un écran vertical**

Soit un écran de soutènement vertical en contact avec un massif de sol sableux sec infini dans le plan de la figure ci-dessous. Le sable de poids volumique γ et d'angle de frottement interne φ' est supposé obéissant au critère de rupture de type Mohr-Coulomb. Déterminer les coefficients de poussée K_a et de butée K_p , puis déduire le domaine des chargements potentiellement supportables $K(\bar{Q})$ correspondant.

Hypothèse

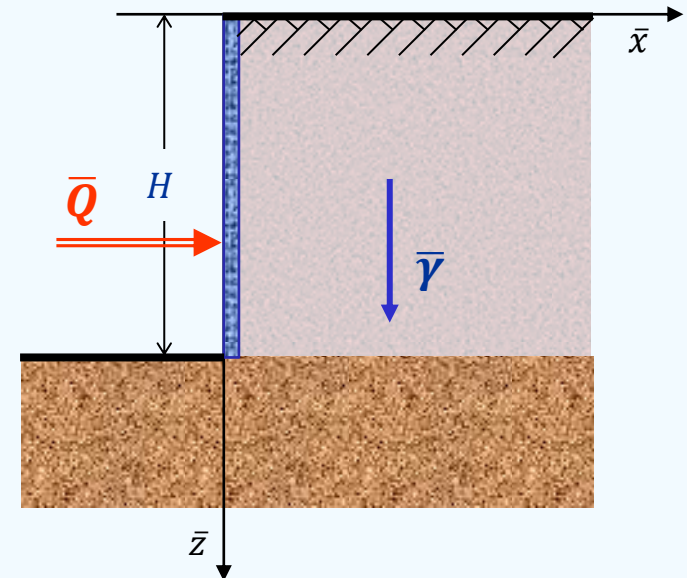
Déformations planes

Critère de rupture de type Mohr-Coulomb

$$f(\bar{\sigma}) = \sigma_1 - \sigma_2 \frac{1 - \sin \varphi'}{1 + \sin \varphi'} - 2c' \frac{\cos \varphi'}{1 + \sin \varphi'} \leq 0$$

Paramètres de chargement

$\bar{Q}$ - Résultante des forces de poussée ou de butée



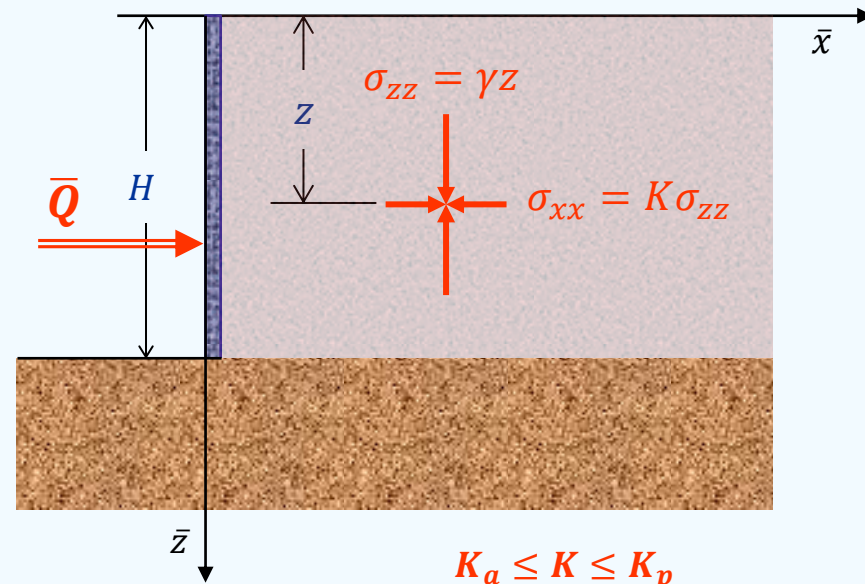
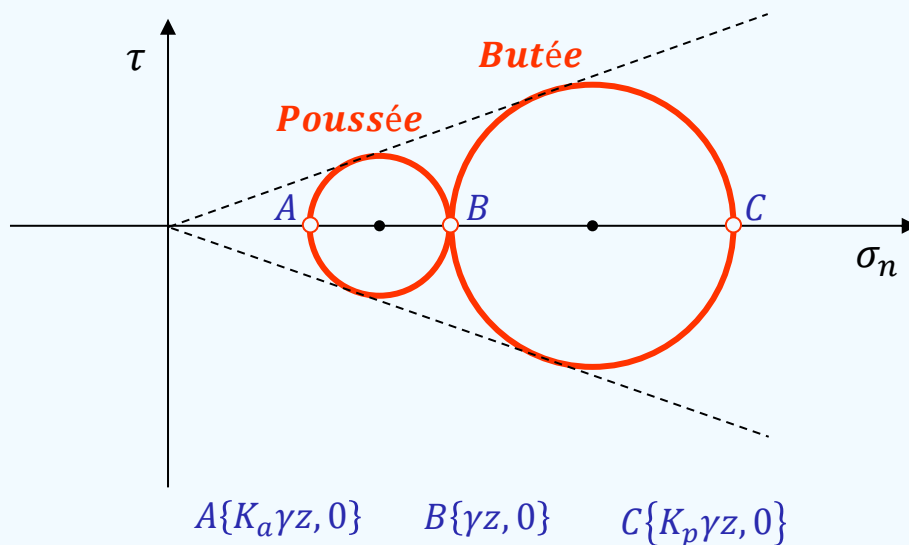
Exemples d'application

Soutènements : Cas d'un écran vertical

Champs de contraintes statiquement admissibles

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \gamma = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \overline{\text{div}}(\bar{\sigma}) + \bar{\gamma} = \bar{0} \quad (\text{Equations d'équilibre statique})$$

Equilibres de poussée et de butée (Détails : Voir cours de MDS)



□ Exemples d'application

• **Soutènements : Cas d'un écran vertical**

Equilibres de poussée et de butée

- Critère de Mohr-Coulomb : (Cas du sable : $c' = 0$)

$$f(\bar{\sigma}) = \sigma_1 - \sigma_2 \frac{1 - \sin \varphi'}{1 + \sin \varphi'} - 2c' \frac{\cos \varphi'}{1 + \sin \varphi'} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (1 + \sin \varphi')\sigma_1 - (1 - \sin \varphi')\sigma_2 \leq 0$$

- Poussée : $\begin{cases} \sigma_1 = \sigma_{xx} \\ \sigma_2 = \gamma Z \end{cases} \Rightarrow \sigma_{xx} \leq K_a \gamma Z \mid K_a = \frac{1 - \sin \varphi'}{1 + \sin \varphi'} \text{ (Coefficient de poussée)}$

$$\Rightarrow K_a = \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi'}{2} \right) \Rightarrow Q_a = \frac{1}{2} \gamma H^2 K_a$$

- Butée : $\begin{cases} \sigma_1 = \gamma Z \\ \sigma_2 = \sigma_{xx} \end{cases} \Rightarrow \sigma_{xx} \geq K_p \gamma Z \mid K_p = \frac{1 + \sin \varphi'}{1 - \sin \varphi'} \text{ (Coefficient de butée)}$

$$\Rightarrow K_p = \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi'}{2} \right) \Rightarrow Q_p = \frac{1}{2} \gamma H^2 K_p$$

Domaine $K(\bar{Q})$ des chargements potentiellement supportables

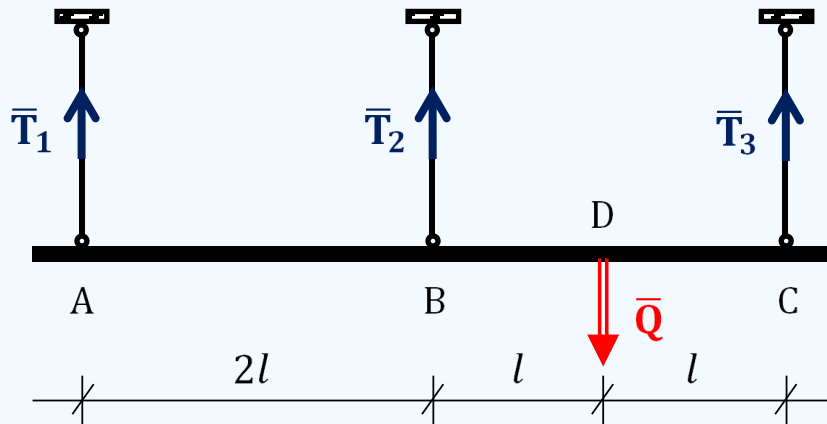
$$Q_a = \frac{1}{2} \gamma H^2 \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi'}{2} \right) \leq Q \leq Q_p = \frac{1}{2} \gamma H^2 \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi'}{2} \right)$$

Merci de votre attention

Fin du Deuxième Chapitre

EXERCICES

Ex. 1 Considérons une barre indéformable suspendue par des tirants flexibles comme l'indique la figure ci-après. On demande de déterminer le domaine des chargements potentiellement supportables $K(\bar{Q})$ pour cette structure, où $\bar{Q}$ désigne la charge appliquée.

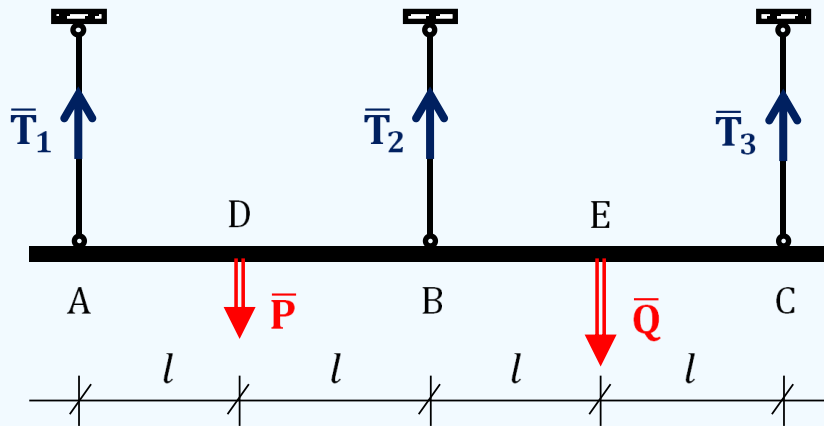


Critère de rupture : $|T_i| \leq L ; i = 1, 2, 3$

L – chargement limite (limite de résistance du matériau en traction)

EXERCICES

Ex. 2 Considérons une barre indéformable suspendue par des tirants flexibles comme l'indique la figure ci-après. On demande de déterminer le domaine des chargements potentiellement supportables $K(\bar{P}, \bar{Q})$ pour cette structure, où $\bar{P}$ et $\bar{Q}$ désignent les charges appliquées.

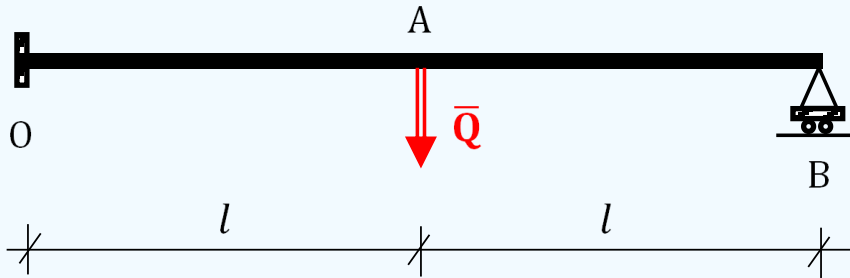


Critère de rupture : $|T_i| \leq L ; i = 1, 2, 3$

L – chargement limite (limite de résistance du matériau en traction)

EXERCICES

Ex. 3 Considérons une poutre encastrée d'un côté et simplement appuyée de l'autre comme l'indique la figure ci-après. On demande de déterminer le domaine des chargements potentiellement supportables $K(\bar{Q})$ pour cette poutre, où $\bar{Q}$ désigne la charge appliquée.

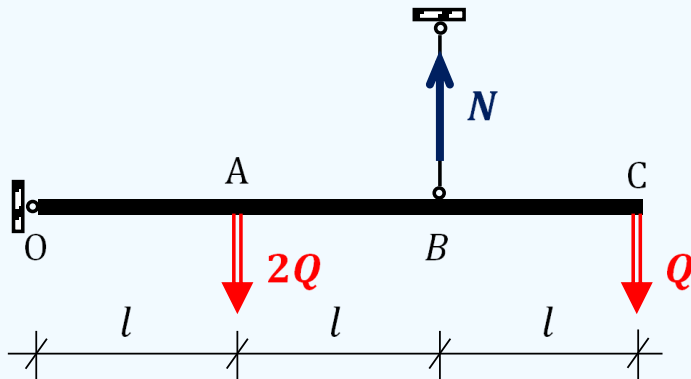


Critère de rupture : $|M| \leq m_p$

m_p – moment limite (limite de résistance du matériau en flexion)

EXERCICES

Ex. 4 (Interro. du 28/11/2022) Déterminer les bornes inférieure Q_{min} et supérieure Q_{max} du chargement potentiellement supportable de la barre indéformable ci-dessous, où Q désigne la charge appliquée. Commenter ensuite les résultats trouvés, puis déduire la charge ultime Q_{ult} correspondante.

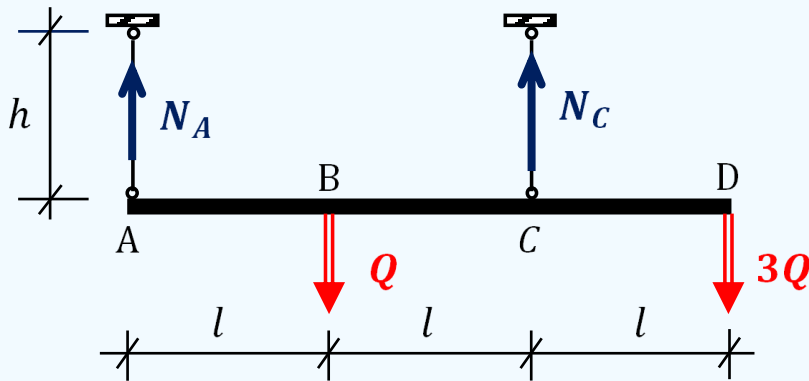


Critère de rupture : $|N| \leq L$

L – chargement limite

EXERCICES

Ex. 5 (EFS du 10/01/2023) Déterminer les bornes inférieure Q_{min} et supérieure Q_{max} du chargement potentiellement supportable de la barre indéformable ci-dessous, où Q désigne la charge appliquée. Commenter ensuite les résultats trouvés, puis déduire la charge ultime Q_{ult} correspondante.



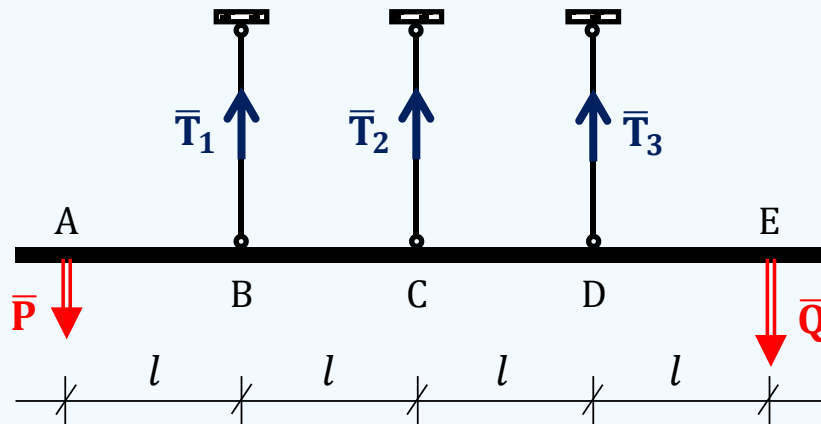
Critère de rupture : $|N_A| \leq L$ et $|N_C| \leq 3L$

L – chargement limite

TRAVAIL PERSONNEL N° 1

T.P.1 Considérons une barre indéformable suspendue par trois tirants flexibles comme l'indique la figure ci-après. On demande de déterminer le domaine des chargements potentiellement supportables $K(\bar{P}, \bar{Q})$ pour cette structure, où $\bar{P}$ et $\bar{Q}$ désignent les charges appliquées. Examiner ensuite les cas particuliers suivants :

1. $P = 0$ et $Q \neq 0$
2. $P \neq 0$ et $Q = 0$
3. $P = Q$



Critère de rupture : $|T_i| \leq L ; i = 1, 2, 3$

L – chargement limite (limite de résistance du matériau en traction)