

Chapitre Premier

Notion de chargements limites et critères de rupture usuels

- ❑ *Préambule*
- ❑ *Approches du calcul à la rupture*
- ❑ *Aspects théoriques et expérimentaux*
- ❑ *Domaine de résistance des matériaux*
- ❑ *Critères de rupture usuels*
 - ❖ *Critère de Tresca*
 - ❖ *Critère de von Mises*
 - ❖ *Critère de Mohr-Coulomb*
 - ❖ *Critère de Drucker-Prager*
- ❑ *Exercices*



PRÉAMBULE

❏ Préambule

- **Activités de l'ingénieur (Bac+5 $\Leftrightarrow$ 3L+2M)**

Conception et dimensionnement des ouvrages

- **Hypothèses de dimensionnement**

S'assurer que l'ouvrage conçu supportera effectivement les conditions de chargement qu'on lui impose.

- **Position du problème**

- ✓ *Géométrie (Ouvrage)*

- ✓ *Sollicitations (Chargement)*

- ✓ *Matériaux (Résistance)*

⇒ Le calcul à la rupture est basé sur :

- La géométrie du système donné,
- Le(s) mode(s) de chargement appliqué,
- La capacité de résistance des matériaux constitutifs : **Critères de rupture.**

❑ Préambule

- **Terminologie**

- ✓ *Fragilité : faible aptitude à supporter des déformations au-delà du régime élastique.*
- ✓ *Ductilité : faculté de se déformer même à charge constante au-delà du régime élastique.*
- ✓ *Endommagement : dégradation des propriétés mécaniques d'une structure (raideur notamment) au-delà du régime élastique.*



□ Préambule

• **Rappels de Maths**

✓ *Produit tensoriel*

$$\text{Soit : } \bar{\bar{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} / (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$$

On peut écrire :

$$\begin{aligned} \bar{\bar{\sigma}} = & \sigma_{11}\bar{e}_1 \otimes \bar{e}_1 + \sigma_{12}\bar{e}_1 \otimes \bar{e}_2 + \sigma_{13}\bar{e}_1 \otimes \bar{e}_3 \\ & + \\ & \sigma_{21}\bar{e}_2 \otimes \bar{e}_1 + \sigma_{22}\bar{e}_2 \otimes \bar{e}_2 + \sigma_{23}\bar{e}_2 \otimes \bar{e}_3 \\ & + \\ & \sigma_{31}\bar{e}_3 \otimes \bar{e}_1 + \sigma_{32}\bar{e}_3 \otimes \bar{e}_2 + \sigma_{33}\bar{e}_3 \otimes \bar{e}_3 \end{aligned}$$

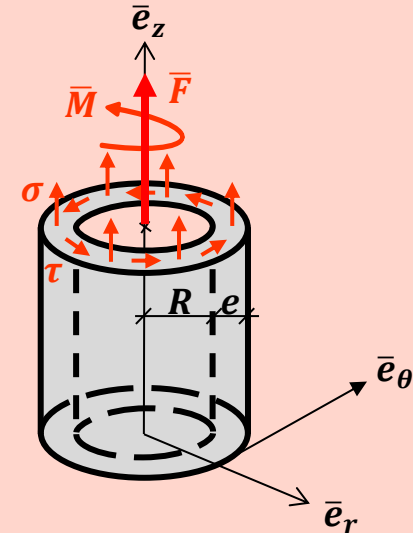
Soit donc :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \sigma_{ij}\bar{e}_i \otimes \bar{e}_j$$

Exemple 1 : Cylindre creux

$$\sigma = \frac{F}{2\pi R e}$$

$$\tau = \frac{M}{2\pi R^2 e}$$



⇒

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau \\ 0 & \tau & \sigma \end{pmatrix} / (\bar{e}_r, \bar{e}_\theta, \bar{e}_z)$$

⇒

$$\begin{aligned} \bar{\bar{\sigma}} = & 0\bar{e}_r \otimes \bar{e}_r + 0(\bar{e}_r \otimes \bar{e}_\theta + \bar{e}_\theta \otimes \bar{e}_r) \\ & + 0(\bar{e}_r \otimes \bar{e}_z + \bar{e}_z \otimes \bar{e}_r) + 0\bar{e}_r \otimes \bar{e}_r \\ & + \tau(\bar{e}_\theta \otimes \bar{e}_z + \bar{e}_z \otimes \bar{e}_\theta) + \sigma\bar{e}_z \otimes \bar{e}_z \end{aligned}$$

⇒

$$\bar{\bar{\sigma}} = \sigma\bar{e}_z \otimes \bar{e}_z + \tau(\bar{e}_\theta \otimes \bar{e}_z + \bar{e}_z \otimes \bar{e}_\theta)$$

□ Préambule

- **Rappels de Maths**

- ✓ *Produit simplement contracté*

Soit : $\bar{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} / (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$

et $\bar{d} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix} / (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$

On peut écrire :

$$\bar{c} = \bar{\sigma} \cdot \bar{d} \Leftrightarrow c_{ij} = \sigma_{ik} d_{kj}$$

Ex.

$$c_{11} = \sigma_{11}d_{11} + \sigma_{12}d_{21} + \sigma_{13}d_{31}$$

$$c_{13} = \sigma_{11}d_{13} + \sigma_{12}d_{23} + \sigma_{13}d_{33}$$

$$c_{23} = \sigma_{21}d_{13} + \sigma_{22}d_{23} + \sigma_{23}d_{33}$$

Exemple 2

$$\bar{\sigma} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & \alpha \end{pmatrix} / (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$$

$$\bar{d} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} / (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$$

$$\Rightarrow \bar{c} = \bar{\sigma} \cdot \bar{d} \Leftrightarrow c_{ij} = \sigma_{ik} d_{kj}$$

$$\bar{c} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow c_{11} = \alpha \times 1 + 0 \times 0 + 1 \times 1$$

$$c_{13} = \alpha \times 1 + 0 \times 0 + 1 \times 1$$

$$c_{23} = 0 \times 1 + \alpha \times 0 + 0 \times 1$$

...

$$\Rightarrow \bar{c} = \begin{pmatrix} \alpha + 1 & 0 & \alpha + 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ \alpha + 1 & 0 & \alpha + 1 \end{pmatrix}$$

Remarque : $Tr(\bar{c}) = c_{ii} = 3\alpha + 2$

□ Préambule

• **Rappels de Maths**

✓ *Produit doublement contracté*

Soit : $\bar{\bar{A}}$ – tenseur du 4^{ème} ordre
 $\bar{\sigma}$ – tenseur du 2^{ème} ordre
 a – scalaire

On peut écrire :

$$\bar{\bar{C}} = \bar{\bar{A}} : \bar{\sigma} \quad \Leftrightarrow \quad c_{ij} = A_{ijkl} \sigma_{kl}$$

$$a = \bar{\sigma} : \bar{\bar{d}} = \sigma_{ik} d_{ki} = Tr(\bar{\sigma} \cdot \bar{\bar{d}})$$

Soit donc :

$$\begin{aligned} a = & \sigma_{11} d_{11} + \sigma_{12} d_{21} + \sigma_{13} d_{31} \\ & + \sigma_{21} d_{12} + \sigma_{22} d_{22} + \sigma_{23} d_{32} \\ & + \sigma_{31} d_{13} + \sigma_{32} d_{23} + \sigma_{33} d_{33} \end{aligned}$$

Exemple 3

$$\bar{\sigma} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & \alpha \end{pmatrix} / (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$$

$$\bar{\bar{d}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} / (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$$

⇒

$$a = \bar{\sigma} : \bar{\bar{d}} \quad \Leftrightarrow \quad a = \sigma_{ik} d_{ki}$$

⇒

$$\begin{aligned} a = & \alpha \times 1 + 0 \times 0 + 1 \times 1 \\ & + 0 \times 0 + \alpha \times 1 + 0 \times 0 \\ & + 1 \times 1 + 0 \times 0 + \alpha \times 1 \end{aligned}$$

⇒

$$a = 3\alpha + 2$$

⇒

$$a = Tr(\bar{\sigma} \cdot \bar{\bar{d}}) = c_{ii} = 3\alpha + 2$$

APPROCHES DU CALCUL À LA RUPTURE

□ Approches du calcul à la rupture

- **Question**



Le système est-il stable sous $\bar{Q}$?



$\bar{Q}$ est-elle supportée par le système ?

- **Réponse**

$\bar{Q}$ - potentiellement supportable



- **Question**



Peut-on estimer les chargements potentiellement supportables d'une structure ?

- **Réponse**

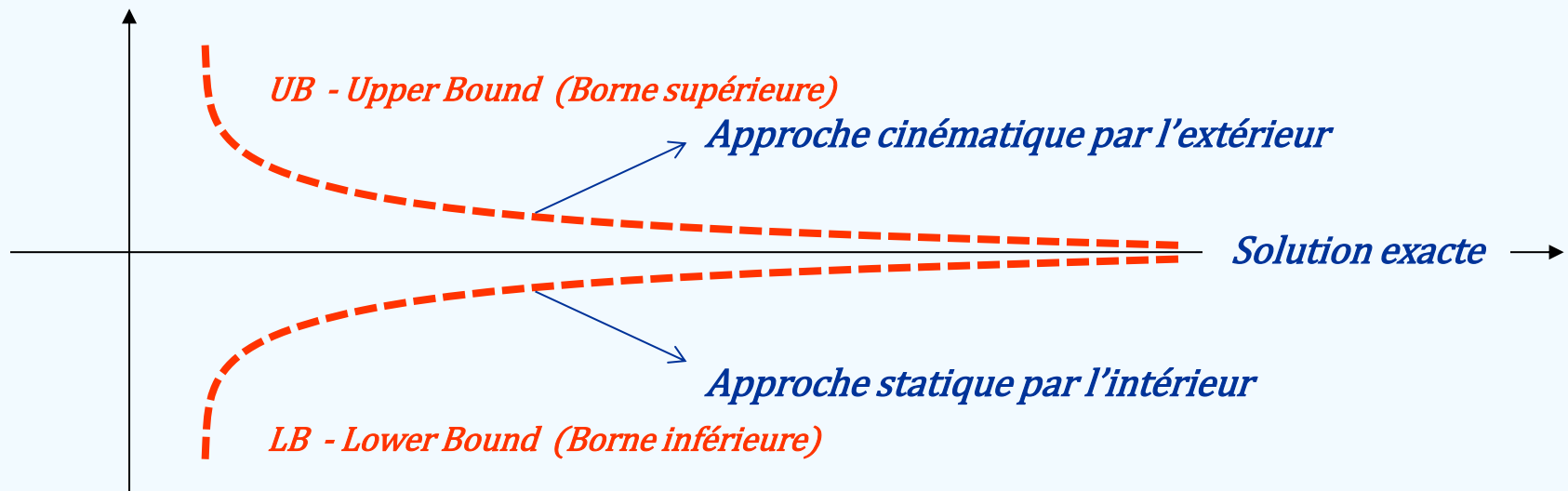
- Approche statique par l'intérieur : Borne inférieure (LB) $\Rightarrow$ Minorant $\bar{Q}_{min}$
- Approche cinématique par l'extérieur : Borne supérieure (UB) $\Rightarrow$ Majorant $\bar{Q}_{max}$

$$\bar{Q}_{min} \leq Q_{ult} \leq \bar{Q}_{max}$$

□ Approches du calcul à la rupture

On distingue alors deux approches de calcul à la rupture :

- ✓ *L'approche statique par l'intérieur : chargements pour lesquels il y a stabilité potentielle de l'ouvrage dans les conditions imposées (**Equations d'équilibre statique**).*
- ✓ *L'approche cinématique par l'extérieur : chargements pour lesquels l'instabilité de l'ouvrage est certaine (**Principe des puissances virtuelles**).*



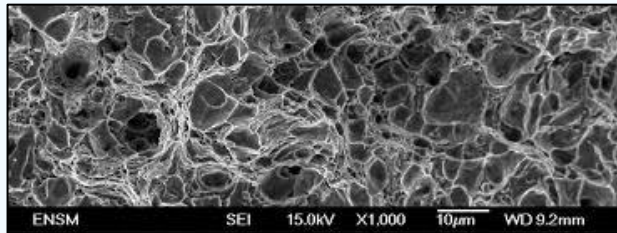
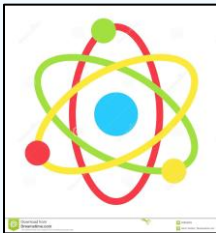
ASPECTS THÉORIQUES ET EXPÉRIMENTAUX

❑ Aspects théoriques et expérimentaux

- **Mécanismes de rupture des matériaux**

On distingue deux mécanismes de rupture des matériaux solides :

- **Mécanismes microscopiques** (échelle nanométrique) : **Physique des solides**.



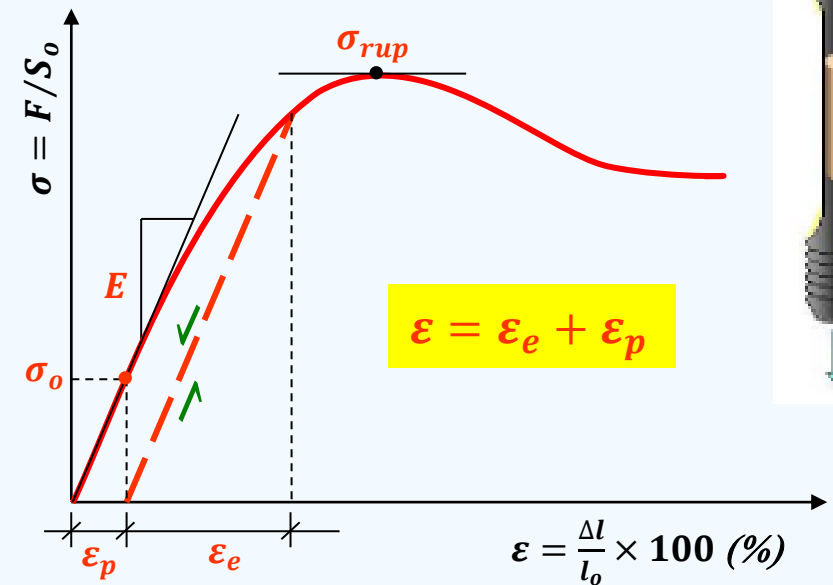
- **Mécanismes macroscopiques** (échelle décimétrique) : **Mécanique des matériaux solides**, d'où la notion de « volume élémentaire de référence (VER) ».

Exemples : Epreuves de béton (cylindres), d'acier (barres) et de sol (triaxial).



Aspects théoriques et expérimentaux

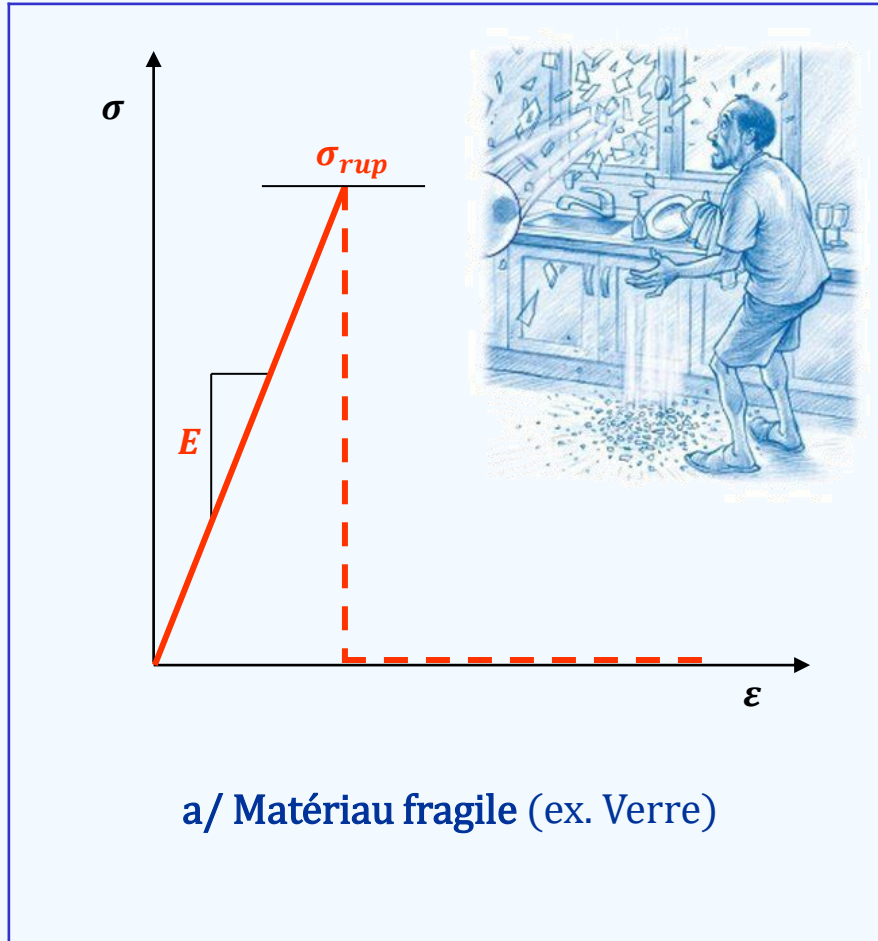
Expérience (Essai de traction simple)



- Déformation élastique : $\varepsilon_e = \sigma/E$
- Déformation anélastique : $\varepsilon_p = f(\sigma, k)$

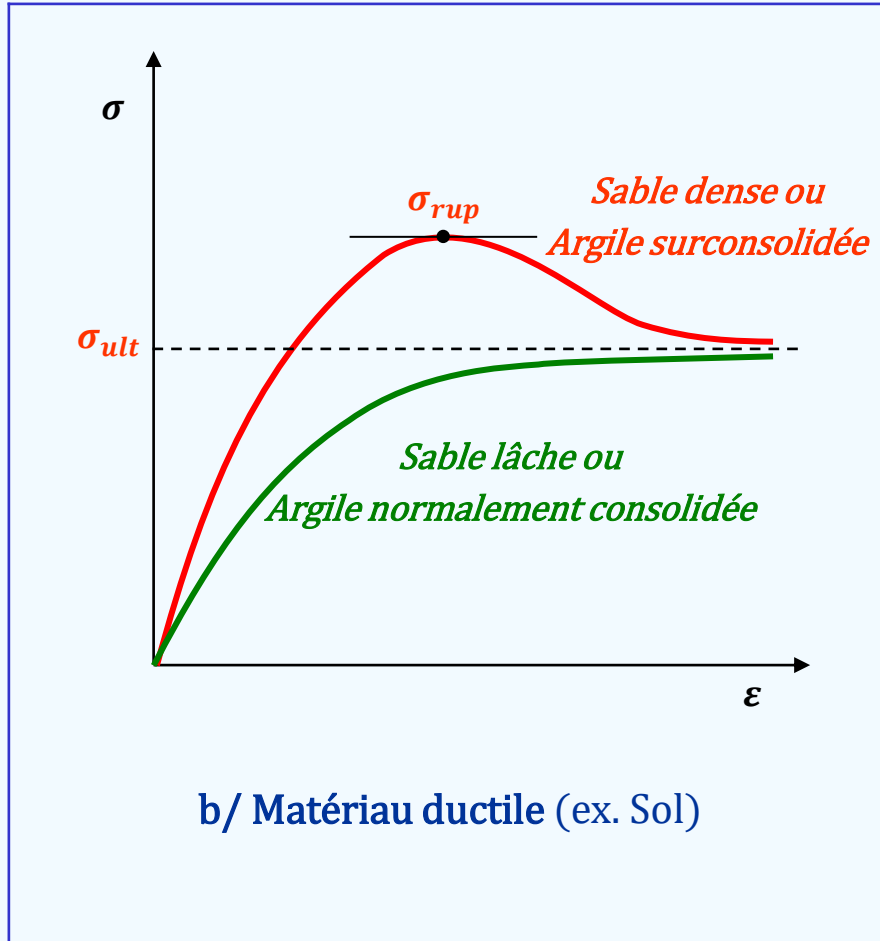
❑ Aspects théoriques et expérimentaux

- **Lois de comportement**



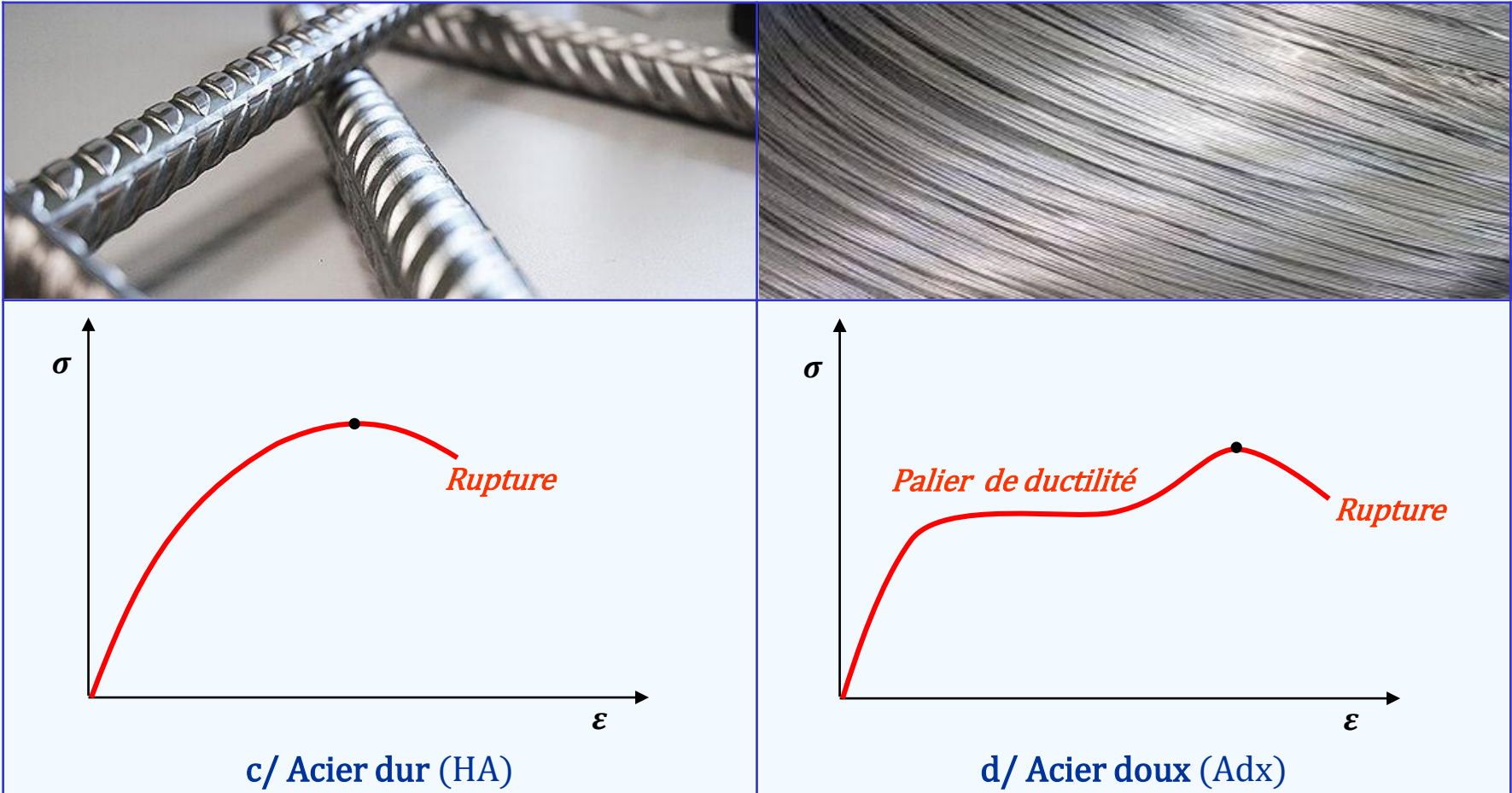
Aspects théoriques et expérimentaux

Lois de comportement



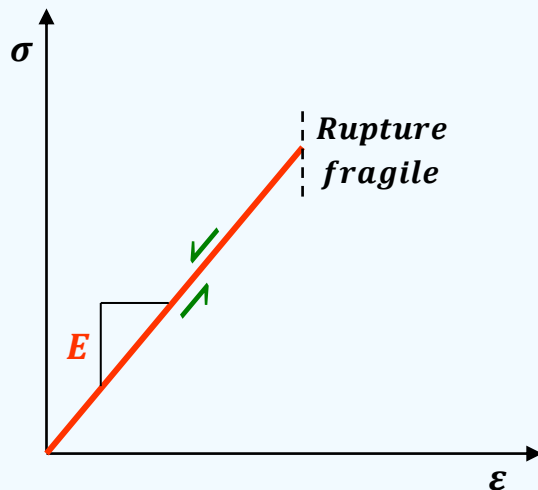
Aspects théoriques et expérimentaux

- Lois de comportement**

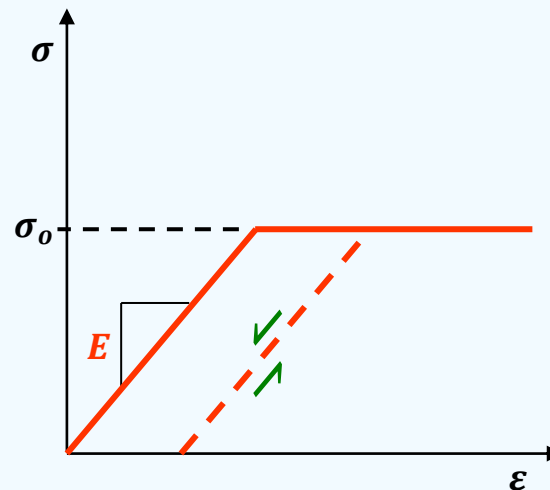


Aspects théoriques et expérimentaux

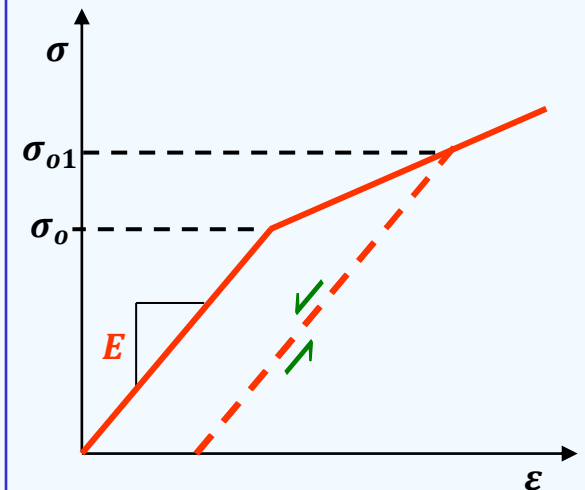
Modèles de comportement



a/ Elastique pur
(ex. Elastomères)



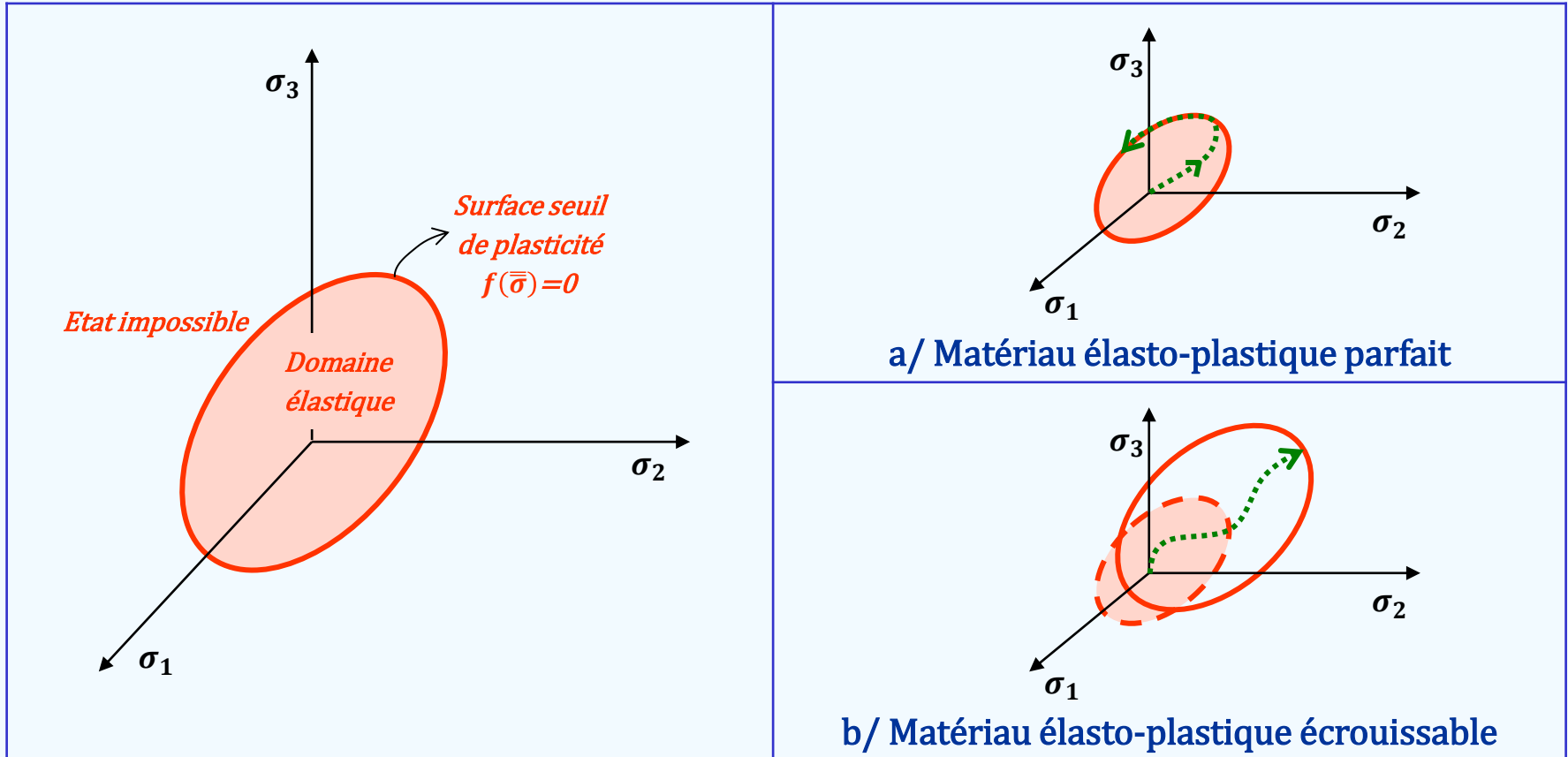
b/ Elasto-plastique parfait
(ex. Acier doux)



c/ Elasto-plastique écrouissable
(ex. Acier inox)

Aspects théoriques et expérimentaux

Modèles de comportement : Généralisation 3D



$f(\bar{\sigma}) = 0 \rightarrow$ Fonction de charge ou seuil de plasticité

Aspects théoriques et expérimentaux

Notion de seuil de plasticité

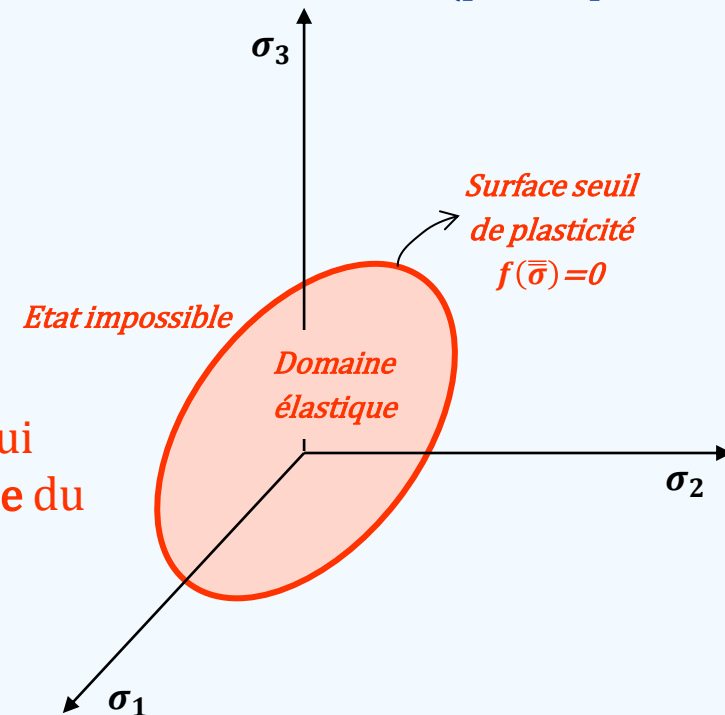
Domaine à l'intérieur duquel les déformations sont réversibles (élastiques ou viscoélastiques) et au bord duquel les déformations sont irréversibles (plastiques ou viscoplastiques).

$$f(\bar{\sigma}) \begin{cases} < 0 \rightarrow \text{Domaine élastique} \\ = 0 \rightarrow \text{Domaine plastique} \\ > 0 \rightarrow \text{Etat impossible} \end{cases}$$

$\Rightarrow f(\bar{\sigma}) = 0$ caractérise le chargement limite qui détermine le **domaine de résistance** du matériau.

Détermination expérimentale

- Essai de traction biaxiale
- Essai de traction-torsion



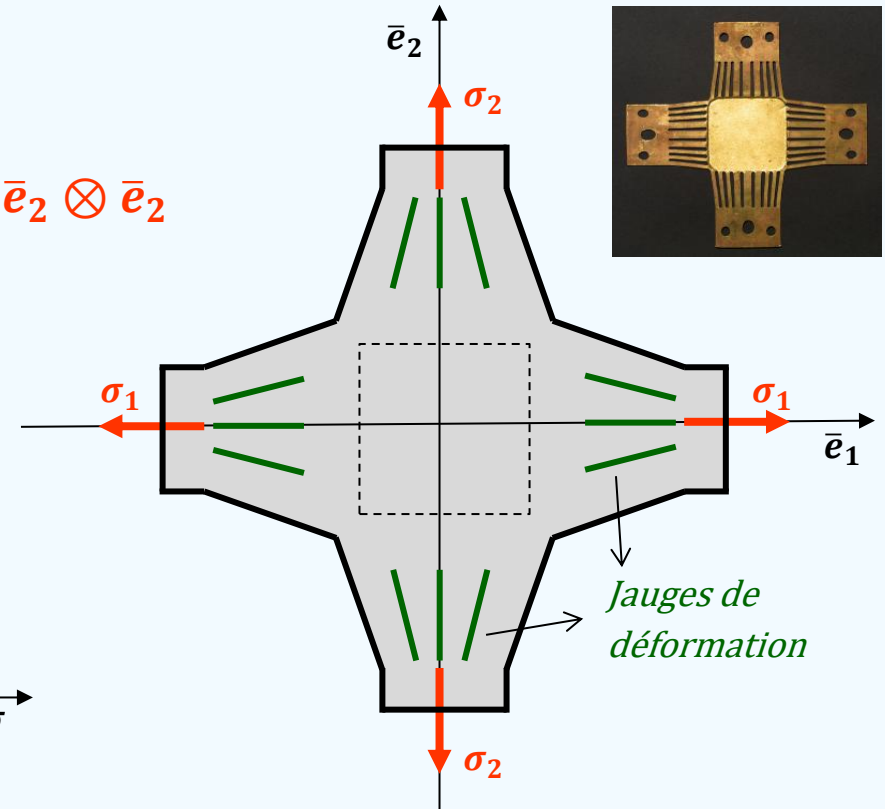
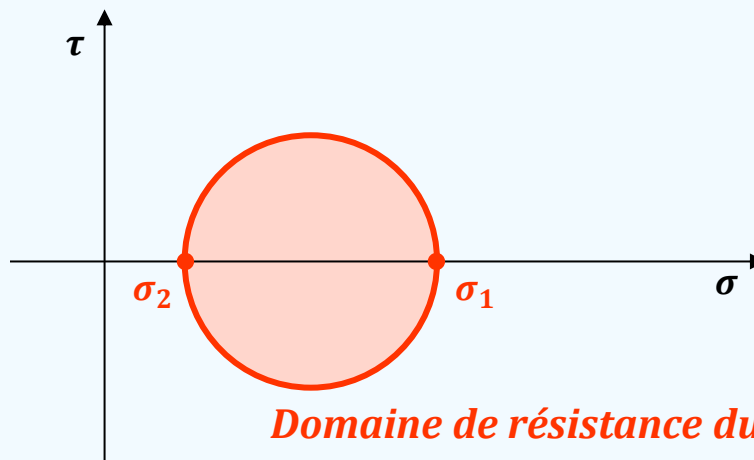
Aspects théoriques et expérimentaux

- Détermination expérimentale : Essai de traction bi-axiale**

L'état des contraintes est défini par :

$$\bar{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \sigma_1 \bar{e}_1 \otimes \bar{e}_1 + \sigma_2 \bar{e}_2 \otimes \bar{e}_2$$

telle que $\sigma_1 \geq \sigma_2$.



Aspects théoriques et expérimentaux

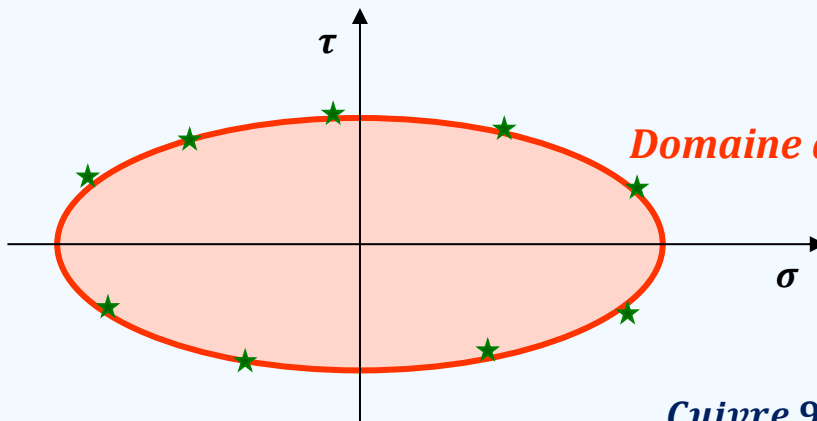
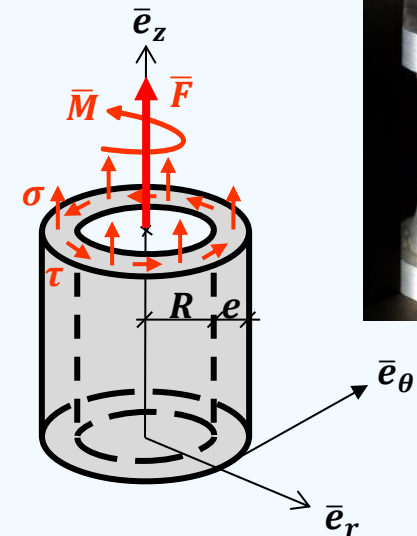
Détermination expérimentale : Essai de traction-torsion

L'état des contraintes est défini par :

$$\bar{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau \\ 0 & \tau & \sigma \end{pmatrix} = \sigma \bar{e}_z \otimes \bar{e}_z + \tau (\bar{e}_\theta \otimes \bar{e}_z + \bar{e}_z \otimes \bar{e}_\theta)$$

telles que :

$$\sigma = \frac{F}{2\pi R e} \quad \text{et} \quad \tau = \frac{M}{2\pi R^2 e}$$



Domaine de résistance du matériau (Ellipse)

Cuivre 99.95 (Bui, 1970)

DOMAINE DE RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

□ Domaine de résistance des matériaux

- **Notion de chargement limite**

Les contraintes supportées par une structure sont physiquement limitées. Les charges correspondant aux contraintes maximales constituent les **charges limites**.

Soit σ_o la limite de résistance du matériau (charge limite). On est confronté à deux situations :

a/ Matériaux élastiques fragiles :

$$\text{Sup}\{\sigma(\bar{n})\} \leq \sigma_o \quad | \quad |\bar{n}| = 1$$

b/ Matériaux ductiles :

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} \bar{s} : \bar{s}} = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ik} s_{ki}} \leq \sigma_o \quad | \quad s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij}$$

tels que σ_{eq} désigne la contrainte équivalente au sens Mises et $\bar{s}$ le tenseur des contraintes déviatoriques.

Plus généralement, $\bar{\sigma} \in G \quad | \quad G - \text{Domaine de résistance du matériau}$

□ Domaine de résistance des matériaux

- **Notion de domaine de résistance**

Dimensionner une structure à partir de la seule connaissance de son domaine de résistance, donc, pas de loi de comportement du matériau.

~~- Matériaux fragiles : NON~~

- Matériaux ductiles : OUI

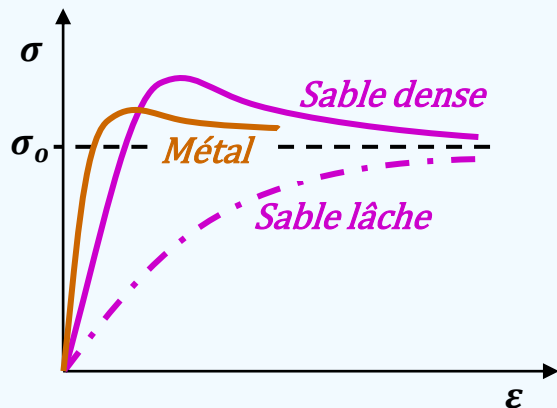


Schéma réel
(Expérience)

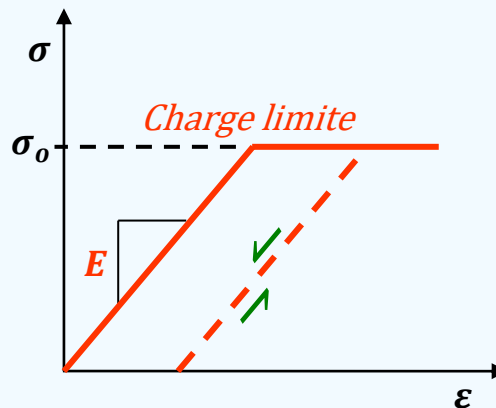
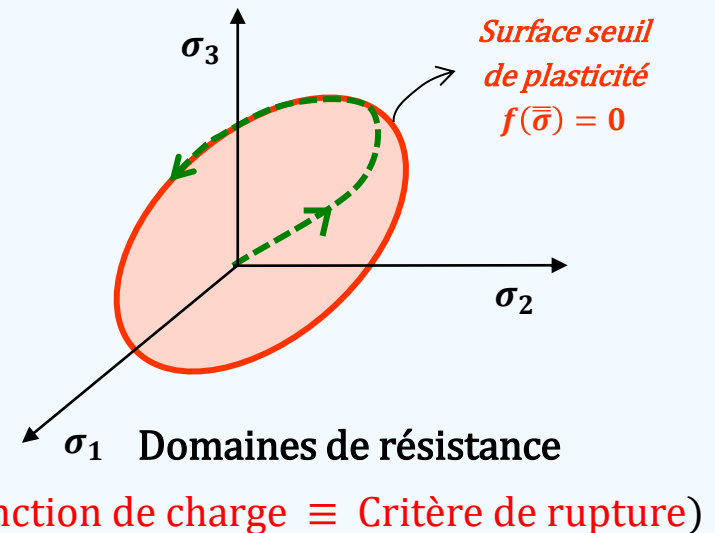


Schéma théorique
(Modèle)



□ Domaine de résistance des matériaux

- **Propriétés du domaine de résistance**

G – délimite les états de contraintes physiquement admissibles.

✓ $G(\bar{x})$ – convexe (en tout point $\bar{x}$ du milieu)

✓ $\bar{\sigma} = \bar{0} \in G(\bar{x})$ (Etat neutre)

✓ $\forall \bar{\sigma} \in G(\bar{x}) \Rightarrow \bar{\sigma} = f(\bar{\epsilon})$

↪ Rien n'est dit sur le comportement du matériau lorsque $\bar{\sigma}$ est à l'intérieur ou sur le bord de G .

- **Identification du domaine de résistance**

↪ CRITERES DE RUPTURE DES MATERIAUX

- *Tresca*
- *von Mises*
- *Mohr-Coulomb*
- *Drucker-Prager*

CRITÈRES DE RUPTURE USUELS

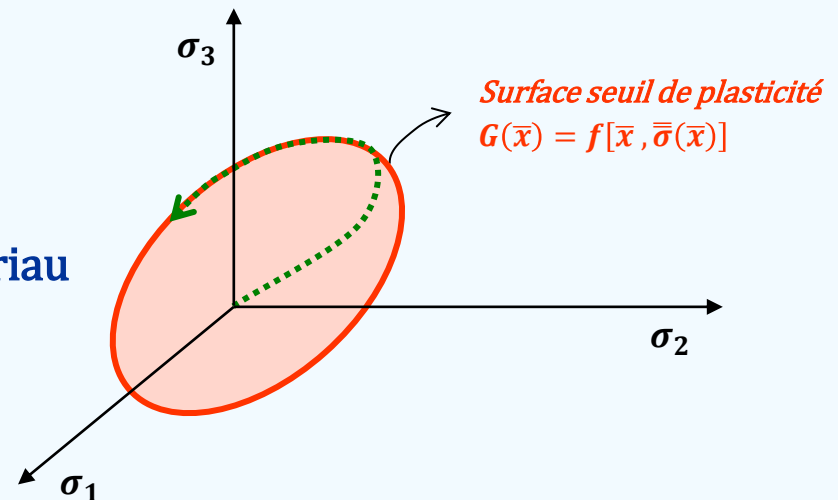
❑ Critères de rupture usuels

Le domaine de résistance des matériaux $G(\bar{x})$ peut être défini en tout point $\bar{x}$ au moyen d'une fonction scalaire de $\bar{\sigma}(\bar{x})$ analogue à la fonction de charge (ou au critère) pour un matériau ductile. Soit $f[\bar{x}, \bar{\sigma}(\bar{x})]$ telle que :

$$f[\bar{x}, \bar{\sigma}(\bar{x})] \begin{cases} < 0 \rightarrow \text{à l'intérieur de } G(\bar{x}) \text{ (Etat élastique)} \\ = 0 \rightarrow \text{à la frontière de } G(\bar{x}) \text{ (Etat plastique)} \\ > 0 \rightarrow \text{à l'extérieur de } G(\bar{x}) \text{ (Etat impossible)} \end{cases}$$

Critère : $f[\bar{x}, \bar{\sigma}(\bar{x})] = 0 \quad \equiv \quad G(\bar{x})$

↪ Domaine de résistance du matériau



❑ Critères de rupture usuels

Les critères de rupture proposés par divers auteurs caractérisent les propriétés de résistance des matériaux ductiles.

On distingue toutefois les critères dépendant d'un seul paramètre de ceux dépendant de deux paramètres. On donnera ci-après quelques critères de rupture usuellement utilisés dans les calculs d'ouvrages géotechniques :

❖ Critères à un seul paramètre

- ✓ *Critère de Tresca : Sols fins non drainés (court terme)*
- ✓ *Critère de von Mises : Tous les sols*

❖ Critères à deux paramètres

- ✓ *Critère de Mohr-Coulomb : Sols drainés (long terme) et non drainés (court terme)*
- ✓ *Critère de Drucker-Prager : Sols et roches indurées*

Henri Tresca



❑ Critères de rupture usuels

- **Critère de Tresca (métaux et sols non drainés)**

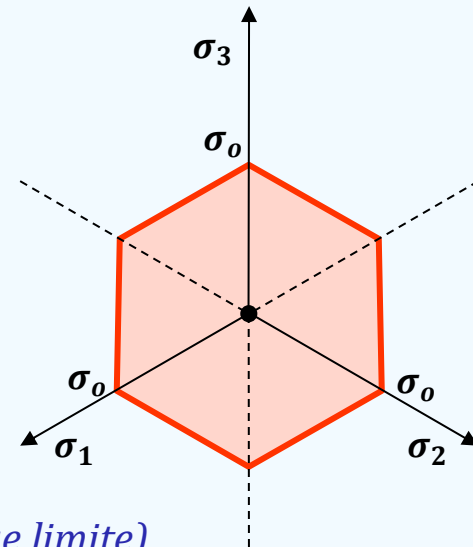
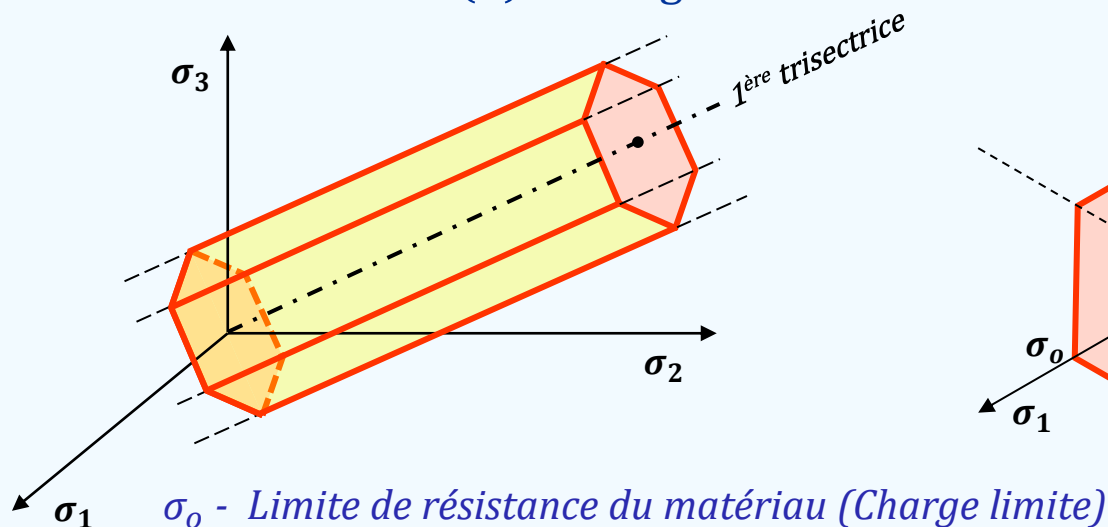
Il est défini par la relation suivante (Tresca, 1864) :

$$\sup_{|\bar{n}|=1} |\bar{\tau}(\bar{n})| = \sup_{\substack{i=1,2,3 \\ j=1,2,3}} |\sigma_i - \sigma_j| \leq \sigma_0$$

En termes de contraintes principales :

$$\sup\{|\sigma_1 - \sigma_2| ; |\sigma_2 - \sigma_3| ; |\sigma_3 - \sigma_1|\} \leq \sigma_0$$

Domaine de résistance $G(\bar{x})$: Hexagone



Richard von Mises



Richard v. Mises

❑ Critères de rupture usuels

- **Critère de von Mises (métaux et tous les sols)**

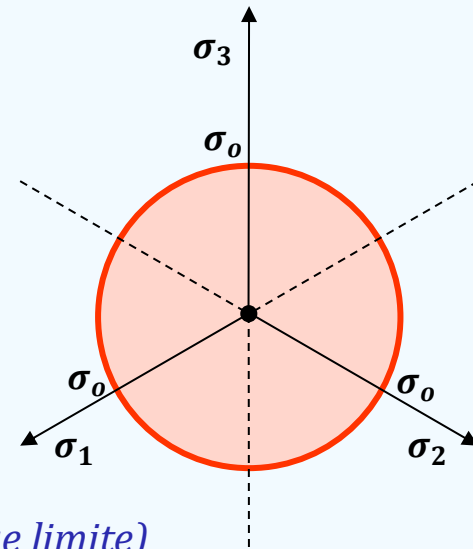
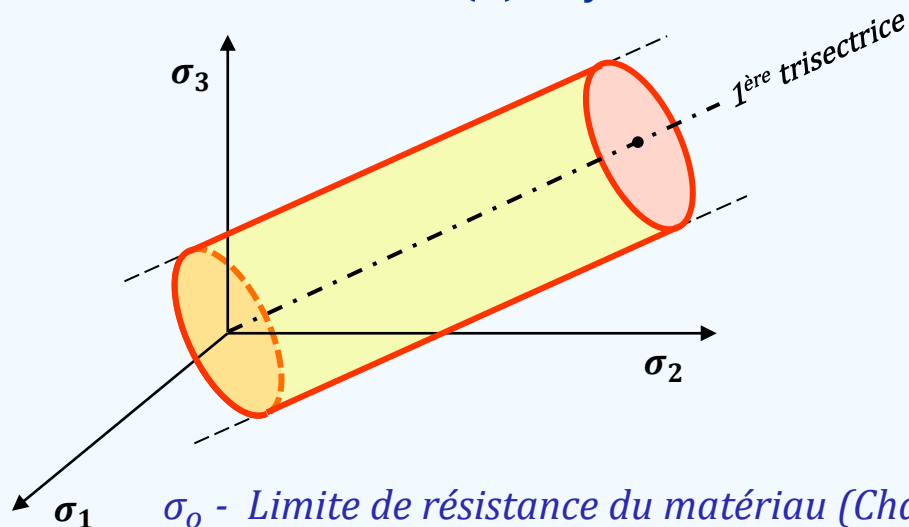
Il est défini par la relation suivante (von Mises, 1913) :

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ik} s_{ki}} \leq \sigma_o \quad | \quad s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij}$$

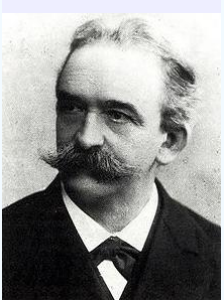
En termes de contraintes principales :

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \leq 2\sigma_o^2$$

Domaine de résistance $G(\bar{x})$: Cylindre



σ_o - Limite de résistance du matériau (Charge limite)



❑ Critères de rupture usuels

- Critère de Mohr – Coulomb (sols drainés et non drainés)**

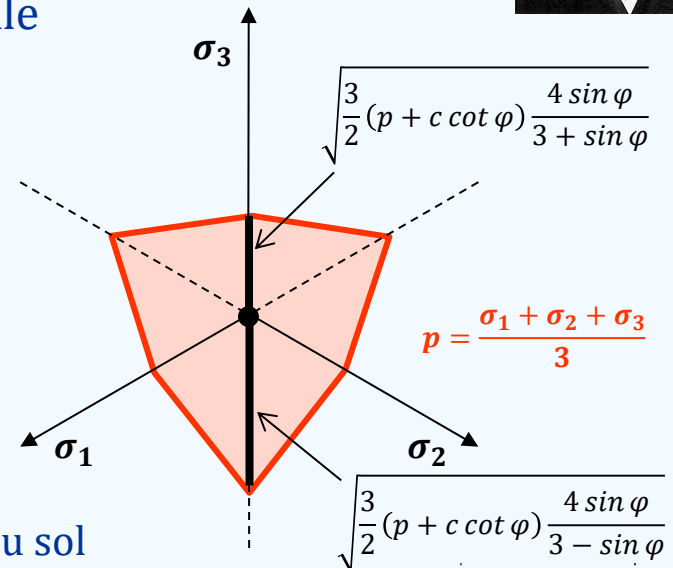
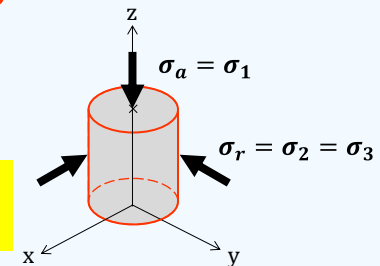
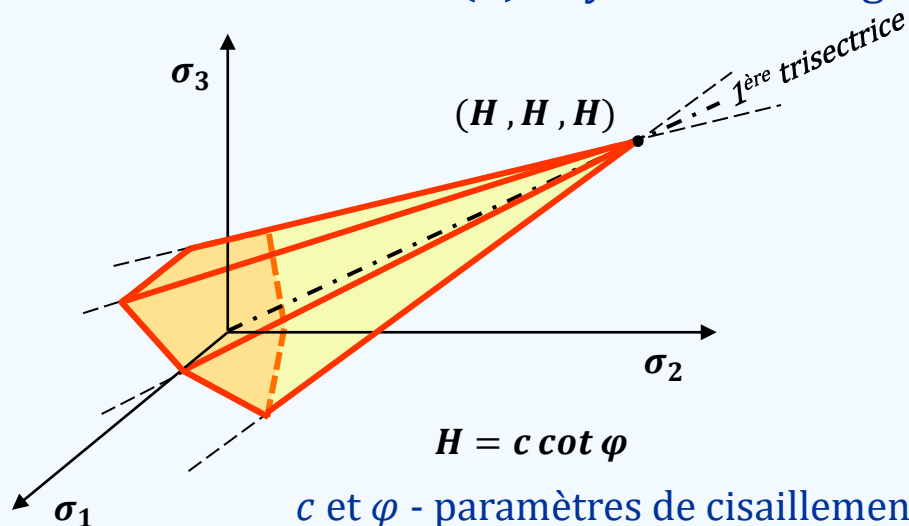
Il est défini par la relation suivante (Coulomb, 1773 ; Mohr, 1900) :

$$\sup_{\substack{i=1,2,3 \\ j=1,2,3}} \{ (1 + \sin \varphi) \sigma_i - (1 - \sin \varphi) \sigma_j - 2c \cos \varphi \} \leq 0$$

En conditions triaxiales ($\sigma_1 \neq \sigma_2 = \sigma_3$) :

$$(1 - \sin \varphi) \sigma_1 - (1 + \sin \varphi) \sigma_3 - 2c \cos \varphi = 0$$

Domaine de résistance $G(\bar{x})$: Pyramide hexagonale



❑ Critères de rupture usuels

- **Critère de Drucker – Prager (sols et roches indurées)**

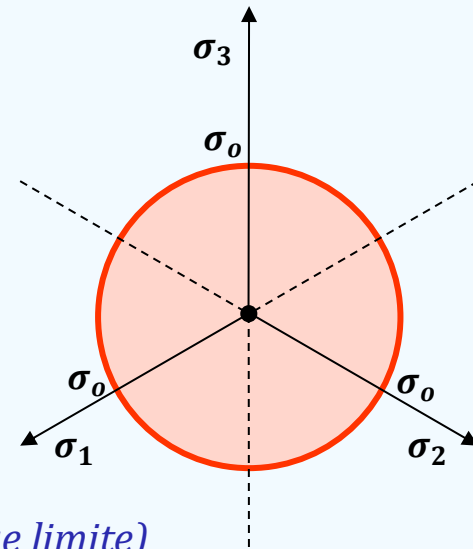
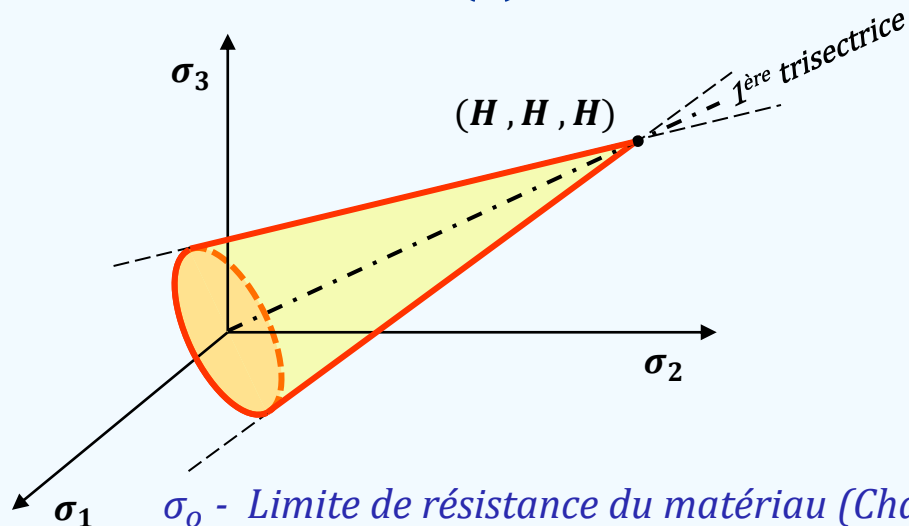
Il est défini par la relation suivante (Drucker & Prager, 1952) :

$$\sqrt{\frac{1}{2} Tr(\bar{s}^2)} - \frac{3 \sin \varphi}{\sqrt{3(3 + \sin^2 \varphi)}} \left[H - \frac{1}{3} Tr(\bar{\sigma}) \right] \leq 0$$

où $H = c \cot \varphi$ désigne la pression de cohésion.



Domaine de résistance $G(\bar{x})$: Cône



❑ Critères de rupture usuels

- **Critère de Drucker – Prager (sols et roches indurées)**

Il est défini par la relation suivante (Drucker & Prager, 1952) :

$$\sqrt{\frac{1}{2} Tr(\bar{s}^2)} - \frac{3 \sin \varphi}{\sqrt{3(3+\sin^2 \varphi)}} \left[H - \frac{1}{3} Tr(\bar{\sigma}) \right] = 0$$

où $H = c \cot \varphi$ désigne la pression de cohésion.



En conditions triaxiales ($\sigma_1 \neq \sigma_2 = \sigma_3$) :

$$\sqrt{\frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = A + B(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

tels que :

$$A = \frac{6 c \cos \varphi}{\sqrt{3}(3-\sin \varphi)} \quad \& \quad B = \frac{2 \sin \varphi}{\sqrt{3}(3-\sin \varphi)}$$

où c et φ désignent les paramètres de cisaillement du sol.

Merci de votre attention

Fin du Chapitre Premier

EXERCICES

Ex. 1 Soit, en un point M d'un matériau, le tenseur des contraintes $\bar{\sigma}$ défini dans le repère orthonormé $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$:

$$\bar{\sigma} = [\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 2\sigma & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix} .$$

Calculer les contraintes principales $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, puis déterminer les domaines de résistance du matériau $G(\bar{x})$ satisfaisant aux critères de rupture de von Mises et de Tresca. Commenter les résultats trouvés. La limite de résistance du matériau est égale à σ_0 .

Ex. 2 Soit, en un point M d'un matériau, le tenseur des contraintes $\bar{\sigma}$ défini dans le repère orthonormé $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$:

$$\bar{\sigma} = [\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & \tau \\ 0 & \tau & \sigma \end{bmatrix} \text{ telle que } \sigma > \tau.$$

Calculer les contraintes principales $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, puis déterminer les domaines de résistance du matériau $G(\bar{x})$ satisfaisant aux critères de rupture de von Mises et de Tresca. La limite de résistance du matériau est égale à σ_0 .

EXERCICES

Ex. 3 (Interro. du 28/11/2022) Soit, en un point M d'un matériau, le tenseur des contraintes $\bar{\sigma}$ défini dans le repère orthonormé $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$:

$$\bar{\sigma} = [\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} k & 0 & k \\ 0 & 2k & 0 \\ k & 0 & k \end{bmatrix}, \quad \text{où } k \geq 0 \text{ désigne le paramètre de chargement.}$$

Déterminer le domaine de résistance $G(\bar{x})$ du matériau obéissant aux critères de rupture de von Mises et Tresca. Commenter ensuite les résultats trouvés (justifier la réponse donnée).

Ex. 4 (EFS du 10/01/2023) Soit, en un point M d'un matériau, le tenseur des contraintes $\bar{\sigma}$ défini dans le repère orthonormé $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$:

$$\bar{\sigma} = [\sigma_{ij}] = \begin{pmatrix} +3k & 0 & 0 \\ 0 & +2k & -k \\ 0 & -k & +2k \end{pmatrix}, \quad \text{où } k \geq 0 \text{ désigne le paramètre de chargement.}$$

Déterminer le domaine de résistance $G(\bar{x})$ du matériau obéissant aux critères de rupture de von Mises et de Tresca. Commenter ensuite les résultats trouvés (justifier la réponse donnée).
