

RHEOLOGIE DES SOLS

Chapitre 3

Lois de comportement anélastique

(2^{ème} Partie : Comportement élasto-plastique parfait)

Exercices

Prof. Mohamed KHEMISSA

*Département de Génie Civil, Faculté de Technologie,
Université Mohamed Boudiaf – M'Sila*

Ex. 1 Soit, en un point M d'un matériau, le tenseur des contraintes $\bar{\sigma}$ défini dans le repère orthonormé $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$:

$$\bar{\sigma} = [\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 2\sigma & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix}.$$

Calculer les contraintes principales $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, puis déterminer les domaines d'élasticité initiaux satisfaisant aux critères de plasticité de Tresca et de von Mises ; la limite d'élasticité du matériau en traction simple étant égale à σ_o . Commenter ensuite les résultats trouvés.

Rép. 1

A. Contraintes principales

$$\lambda_1 = \sigma$$

$$\lambda_{2,3} = \frac{2\sigma + 0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2\sigma - 0}{2}\right)^2 + \tau^2} = \sigma \pm \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$$

D'où :

$$\begin{cases} \sigma_1 = \sigma + \sqrt{\sigma^2 + \tau^2} \\ \sigma_2 = \sigma \\ \sigma_3 = \sigma - \sqrt{\sigma^2 + \tau^2} \end{cases}$$

B. Critère de Tresca

$$f(\sigma_1; \sigma_2; \sigma_3) = \sup_{\substack{i=1,2,3 \\ j=1,2,3}} \{|\sigma_i - \sigma_j|\} - \sigma_o = 0$$

$$\Rightarrow \sup\{|\sigma_1 - \sigma_2|; |\sigma_2 - \sigma_3|; |\sigma_3 - \sigma_1|\} = \sigma_o$$

$$\Rightarrow \sup\{|\sigma + \sqrt{\sigma^2 + \tau^2} - \sigma|; |\sigma - \sigma + \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}|; |\sigma - \sqrt{\sigma^2 + \tau^2} - \sigma - \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}|\} = \sigma_o$$

$$\Rightarrow \sup\{|\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}|; |\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}|; |-2\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}|\} = \sigma_o$$

$$\Rightarrow \sup\{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}; \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}; 2\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}\} = \sigma_o$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{\sigma^2 + \tau^2} = \sigma_o$$

Soit donc :

$$\sigma^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_o}{2}\right)^2$$

D'où le domaine d'élasticité initial du matériau :

$$\Rightarrow \text{Domaine limité par le cercle de centre } O(0, 0) \text{ et de rayon } R = \frac{\sigma_o}{2}$$

C. Critère de von Mises

$$f(\sigma_1; \sigma_2; \sigma_3) = \tau_{oct} - \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_o = 0 \quad | \quad \tau_{oct} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

$$\Rightarrow (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_o^2$$

$$\Rightarrow (\sigma + \sqrt{\sigma^2 + \tau^2} - \sigma)^2 + (\sigma - \sigma + \sqrt{\sigma^2 + \tau^2})^2 + (\sigma - \sqrt{\sigma^2 + \tau^2} - \sigma - \sqrt{\sigma^2 + \tau^2})^2 = 2\sigma_o^2$$

$$\Rightarrow \sigma^2 + \tau^2 + \sigma^2 + \tau^2 + 4(\sigma^2 + \tau^2) = 2\sigma_o^2$$

$$\Rightarrow 6(\sigma^2 + \tau^2) = 2\sigma_o^2$$

Soit donc :

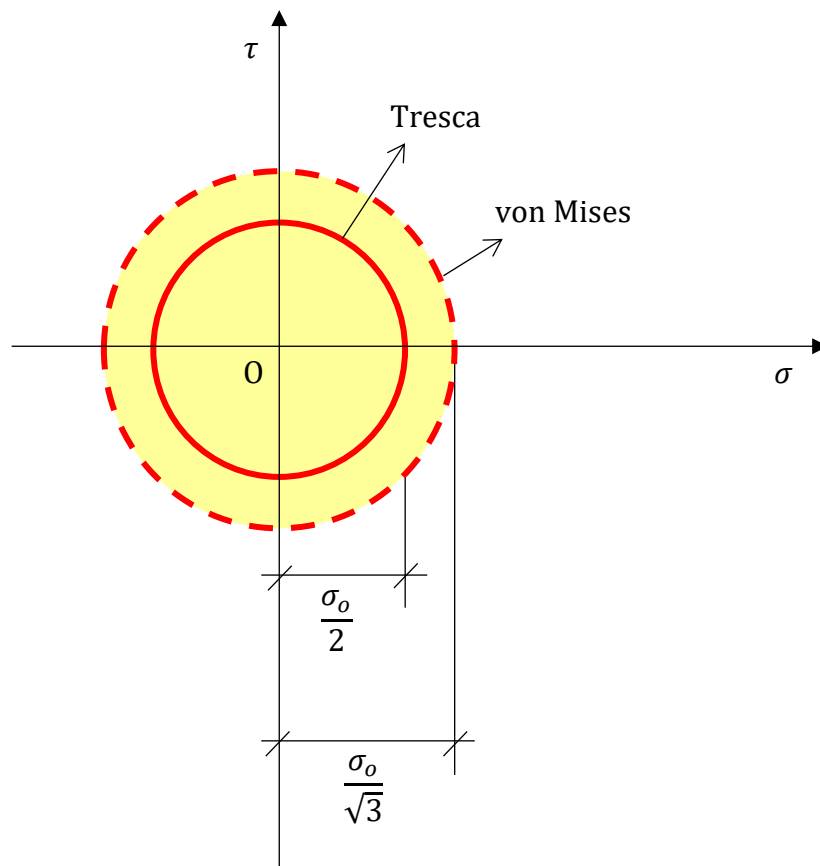
$$\sigma^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_o}{\sqrt{3}}\right)^2$$

D'où le domaine d'élasticité initial du matériau :

$$\Rightarrow \text{Domaine limité par le cercle de centre } O(0, 0) \text{ et de rayon } R = \frac{\sigma_o}{\sqrt{3}}$$

D. Commentaire

- Les deux critères s'obtiennent par homothétie de centre $O(0, 0)$ et de rapport $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
- Le critère de Tresca est plus restrictif que celui de von Mises.



Ex. 2 Soit, en un point M d'un matériau, le tenseur des contraintes $\bar{\sigma}$ défini dans le repère orthonormé $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$:

$$\bar{\sigma} = [\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & \tau \\ 0 & \tau & \sigma \end{bmatrix} \quad | \quad \sigma \geq \tau.$$

Calculer les contraintes principales $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, puis déterminer les domaines d'élasticité initiaux satisfaisant aux critères de plasticité de Tresca et de von Mises ; la limite d'élasticité du matériau en traction simple étant égale à σ_o .

Rép. 2

A. Contraintes principales

$$\lambda_1 = 0$$

$$\lambda_{2,3} = \frac{\sigma + \sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma - \sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} = \sigma \pm \tau$$

D'où :

$$\begin{cases} \sigma_1 = \sigma + \tau \\ \sigma_2 = \sigma - \tau \\ \sigma_3 = 0 \end{cases}$$

B. Critère de Tresca

$$f(\sigma_1; \sigma_2; \sigma_3) = \sup_{\substack{i=1,2,3 \\ j=1,2,3}} \{|\sigma_i - \sigma_j|\} - \sigma_o = 0$$

$$\Rightarrow \sup\{|\sigma_1 - \sigma_2|; |\sigma_2 - \sigma_3|; |\sigma_3 - \sigma_1|\} = \sigma_o$$

$$\Rightarrow \sup\{|\sigma + \tau - \sigma + \tau|; |\sigma - \tau - 0|; |0 - \sigma - \tau|\} = \sigma_o$$

$$\Rightarrow \sup\{2|\tau|; |\sigma - \tau|; |\sigma + \tau|\} = \sigma_o$$

$$\Rightarrow 1^\circ / \tau = \pm \sigma_o / 2$$

$$\Rightarrow 2^\circ / \sigma - \tau = \pm \sigma_o$$

$$\Rightarrow 3^\circ / \sigma + \tau = \pm \sigma_o$$

D'où le domaine d'élasticité initial du matériau :

$\Rightarrow$ Domaine limité par le trapèze représenté sur la figure ci-après.

C. Critère de von Mises

$$f(\sigma_1; \sigma_2; \sigma_3) = \tau_{oct} - \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_o = 0 \quad | \quad \tau_{oct} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

$$\Rightarrow (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_o^2$$

$$\Rightarrow (\sigma + \tau - \sigma + \tau)^2 + (\sigma - \tau - 0)^2 + (0 - \sigma - \tau)^2 = 2\sigma_o^2$$

$$\Rightarrow 4\tau^2 + \sigma^2 + \tau^2 - 2\sigma\tau + \sigma^2 + \tau^2 + 2\sigma\tau = 2\sigma_o^2$$

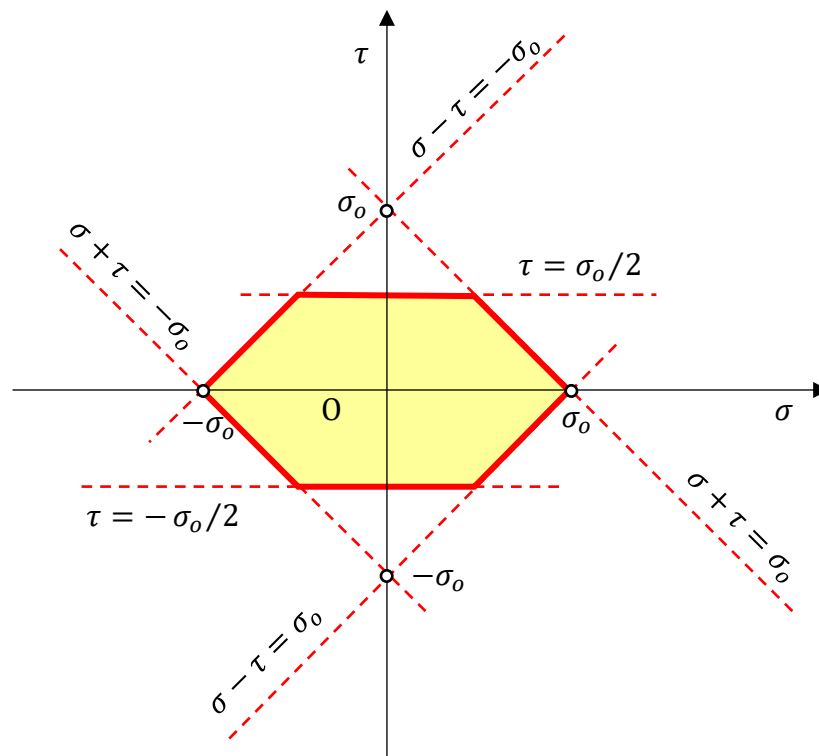
$$\Rightarrow 2(\sigma^2 + 3\tau^2) = 2\sigma_o^2$$

Soit donc :

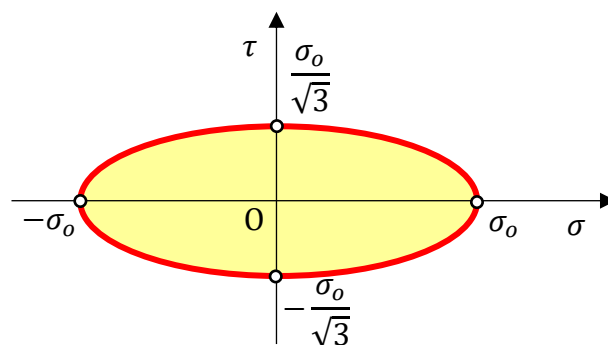
$$\sigma^2 + 3\tau^2 = \sigma_o^2$$

D'où le domaine d'élasticité initial du matériau :

$\Rightarrow$ Domaine limité par l'ellipse représentée sur la figure ci-après



Domaine d'élasticité satisfaisant au critère de Tresca



Domaine d'élasticité satisfaisant au critère de von Mises

Ex. 3 Des essais triaxiaux drainés réalisés sur un sable sec sous une contrainte de confinement $\sigma_3 = 100 \text{ kPa}$ ont donné un déviateur de contraintes ultime $(\sigma_1 - \sigma_3)_{rup} = 200 \text{ kPa}$. Calculer l'angle de frottement interne effectif φ' du sable dont le comportement est supposé obéissant au critère de plasticité de type Mohr-Coulomb.

Rép. 3

Le critère de rupture de type Mohr-Coulomb s'écrit en conditions triaxiales comme suit :

$$f(\sigma_1; \sigma_2 = \sigma_3) = (1 - \sin \varphi) \sigma_1 - (1 + \sin \varphi) \sigma_3 - 2c \cos \varphi = 0$$

tel que $\sigma_1 - \sigma_3 = (\sigma_1 - \sigma_3)_{rup}$ et où c et φ désignent les paramètres de cisaillement du sol.

Soit donc :

$$(\sigma_1 - \sigma_3)_{rup} = (\sigma_1 + \sigma_3) \sin \varphi + 2c \cos \varphi$$

Sachant que le sable est caractérisé par une cohésion effective $c' = 0$, on aura donc :

$$\sin \varphi' = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)_{rup}}{\sigma_1 + \sigma_3}$$

D'où alors :

$$\begin{cases} (\sigma_1 - \sigma_3)_{rup} = 200 \text{ kPa} \\ \sigma_3 = 100 \text{ kPa} \end{cases} \Rightarrow \sigma_1 = 300 \text{ kPa}$$

$$\Rightarrow \sin \varphi' = \frac{200}{300+100} = 0.5 \Rightarrow \varphi' = 30^\circ$$

Note de rappel : Autre expression du critère de rupture de type Mohr-Coulomb

Sachant que : $f(\sigma_1; \sigma_2 = \sigma_3) = (1 - \sin \varphi) \sigma_1 - (1 + \sin \varphi) \sigma_3 - 2c \cos \varphi \leq 0$

Soit donc : $\sigma_1 - \sigma_1 \sin \varphi - \sigma_3 - \sigma_3 \sin \varphi - 2c \cos \varphi \leq 0$

$$\Rightarrow \sigma_1 - \sigma_3 - \sigma_1 \sin \varphi + \sigma_3 \sin \varphi - 2\sigma_3 \sin \varphi - 2c \cos \varphi \leq 0$$

$$\Rightarrow (\sigma_1 - \sigma_3)(1 - \sin \varphi) - 2\sigma_3 \sin \varphi - 2c \cos \varphi \leq 0$$

$$\Rightarrow (\sigma_1 - \sigma_3)(1 - \sin \varphi) \leq 2c \cos \varphi + 2\sigma_3 \sin \varphi$$

$$\Rightarrow \sigma_1 - \sigma_3 \leq \frac{2c \cos \varphi + 2\sigma_3 \sin \varphi}{1 - \sin \varphi}$$

$$\text{D'où l'on peut écrire : } (\sigma_1 - \sigma_3)_{rup} = \frac{2c \cos \varphi + 2\sigma_3 \sin \varphi}{1 - \sin \varphi}$$

Cas particuliers :

$$\bullet \text{ Sable } (c = 0 \text{ \& } \varphi = \varphi') : (\sigma_1 - \sigma_3)_{rup} = \frac{2\sigma_3 \sin \varphi'}{1 - \sin \varphi'} \Rightarrow \sin \varphi' = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)_{rup}}{(\sigma_1 - \sigma_3)_{rup} + 2\sigma_3}$$

$$\bullet \text{ Argile saturée } (c = c_u \text{ \& } \varphi = \varphi_u = 0) \Rightarrow (\sigma_1 - \sigma_3)_{rup} = 2c_u \Rightarrow c_u = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)_{rup}}{2}$$

Ex. 4 (Interro. du 16/05/2022). Soit le tenseur de contraintes appliqué en un point d'un massif argileux :

$$\bar{\sigma} = \begin{pmatrix} -k & 0 & k \\ 0 & 2k & 0 \\ k & 0 & -k \end{pmatrix}, \quad \text{où } k \geq 0 \text{ (paramètre de chargement)}$$

4.1 Quelle est la particularité de ce tenseur ? Justifier la réponse donnée.

4.2 Déterminer les contraintes principales $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ correspondantes, puis commenter les résultats trouvés.

4.3 Déterminer la valeur de k satisfaisant au critère de plasticité suivant (critère de Tresca) :

$$\text{Sup}\{|\sigma_1 - \sigma_2|; |\sigma_2 - \sigma_3|; |\sigma_3 - \sigma_1|\} = 2c_u$$

où c_u désigne la cohésion non drainée du sol.

Rép. 4

4.1 Particularité du tenseur $\bar{\sigma}$

$$\text{Tr}(\bar{\sigma}) = \sigma_{ii} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = -k + 2k - k = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Tenseur déviatorique}$$

4.2 Contraintes principales ($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$)

$$\lambda_1 = 2k$$

$$\lambda_{2,3} = \frac{-k-k}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-k+k}{2}\right)^2 + (k)^2} = -k \pm k \quad \Rightarrow \quad \lambda_2 = -2k \quad \text{et} \quad \lambda_3 = 0$$

Soit donc :

$$\sigma_1 = 2k \quad ; \quad \sigma_2 = 0 \quad ; \quad \sigma_3 = -2k$$

Commentaire : $\sigma_1 + \sigma_3 = 0$ et $\sigma_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad$ Cisaillement pur

4.3 Valeur de k satisfaisant au critère de Tresca

$$\text{Sup}\{|\sigma_1 - \sigma_2|; |\sigma_2 - \sigma_3|; |\sigma_3 - \sigma_1|\} = 2c_u$$

$$\Rightarrow \text{Sup}\{|2k - 0|; |0 + 2k|; |-2k - 2k|\} = 2c_u$$

$$\Rightarrow \text{Sup}\{2k; 2k; 4k\} = 2c_u$$

$$\Rightarrow 4k = 2c_u$$

$$\Rightarrow k = \frac{1}{2}c_u$$